Rectas Funciones Limites Derivadas Funciones de varias Variables

CÁLCULO I
TEORÍA Y PRACTICA

Luis Moreno
HILTON MELENDRES
JORGE DURAN

EL AUTOR:

Este texto de la materia de Cálculo I ha sido elaborado pensando que los alumnos necesitan una ayuda en la parte teórica pero con más razón en la parte práctica, aclarando los conceptos con varios ejemplos de tal forma de cubrir las lagunas de conocimiento matemáticos que el estudiante trae de la secundaria y profundizando sus conocimientos para sus estudios superiores, esperando que este esfuerzo pueda ayudar a la formación de muchos jóvenes o adultos que se han dedicado al estudio de las matemáticas, no me queda más que felicitarlos.

Autores

Luis Moreno
Hilton Melendres
Jorge Duran

Diagramador
Jesús Ayala Román
Cel: 70940535
susejeneiv@hotmail.com

CAPITULO I

INTRODUCCION AL CÁLCULO

GEOMETRIA ANALITICA

La geometría analítica es una de las partes de las matemáticas que estudia las relaciones entre el álgebra y la geometría.

La geometría analítica plana hace un estudio de los puntos, rectas, curvas, ángulos y superficies en un plano.

Sistema de coordenadas rectangulares.- Es un sistema formado por dos ejes una vertical y el otro horizontal, perpendiculares entre si y que dividen al plano en 4 cuadrantes.

La recta horizontal OX se llama eje "x" o eje de las abscisas.

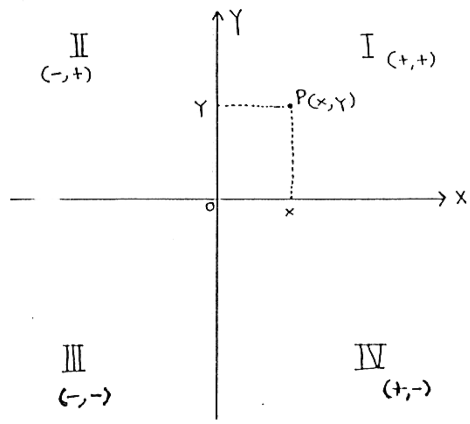
La recta vertical OY se llama eje "y" o eje de las ordenadas.

I= primer cuadrante

II= segundo cuadrante

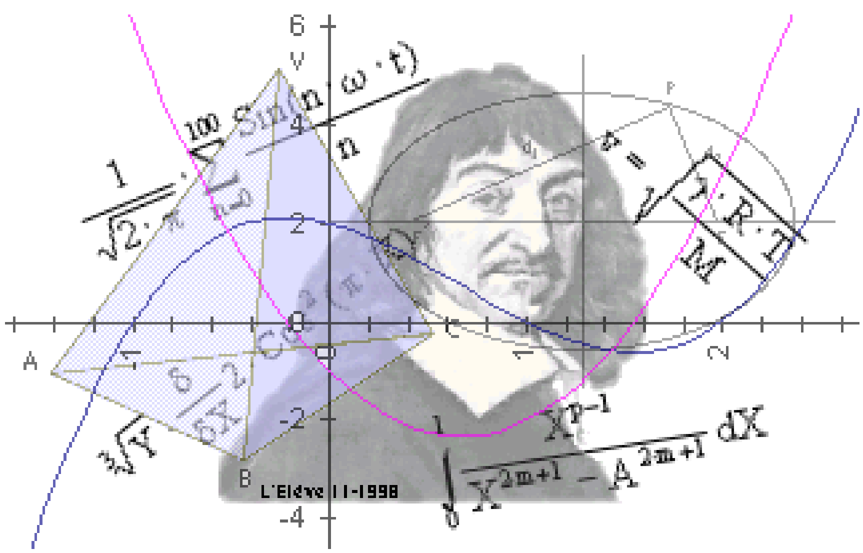
III= tercer cuadrante

IV= cuarto cuadrante



Par ordenado.- Es un conjunto formado por dos elementos dado en cierto orden y se lo representa por (a,b) donde "a" es la primera componente y "b" es la segunda componente.

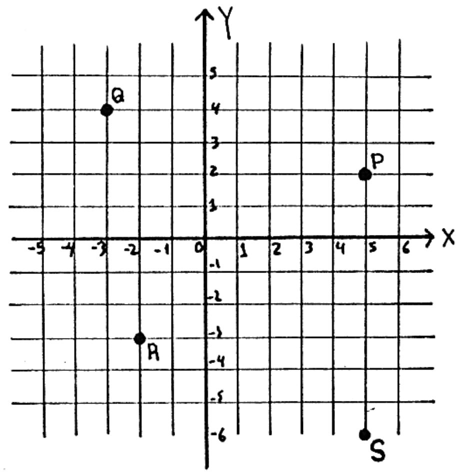
Estos pares ordenados (puntos) se grafican en el sistema de coordenadas rectangulares, llamados también sistema cartesiano.



RENE DESCARTES

Ejemplo 1 Graficar los puntos

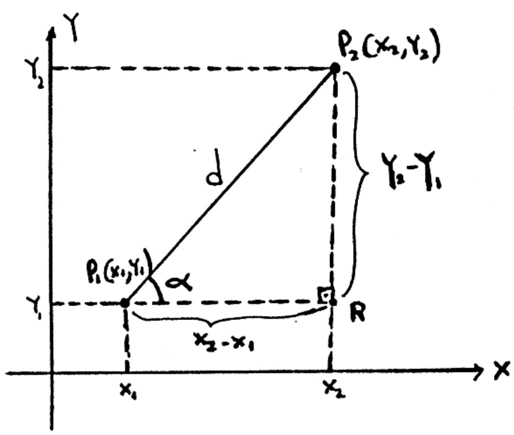
P(5,2), Q(-3,4) , R (-2,-3) y S (5,-6)



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.- Es la longitud en línea recta entre dos puntos cualesquiera $P_1(X_1, Y_1)$ y $P_2(X_2, Y_2)$ esta dada por la formula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

DEMOSTRACIÓN



aplicando el teorema de pitágoras

$$\boldsymbol{\overline{hip}^2 = \overline{C.A.}^2 + \overline{C.O.}^2}$$

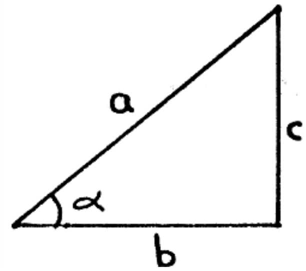
$$\boldsymbol{\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1R}^2 + \overline{RP_2}^2}$$

$$\boldsymbol{d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 \quad (\sqrt{\quad})}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{d^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}}$$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}}$$

TEOREMA DE PITÁGORAS.-este teorema afirma que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado.

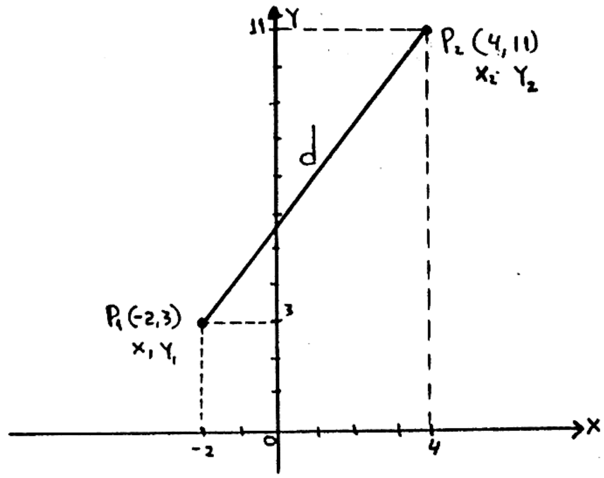


$\boldsymbol{a = hipotenusa = hip.}$

$\boldsymbol{b = cateto\ adyacente = C.A.}$

$\boldsymbol{C = cateto\ opuesto = C.O.}$

3. HALLAR LA DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS $P_1(-2,3)$ y $P_2(4,11)$



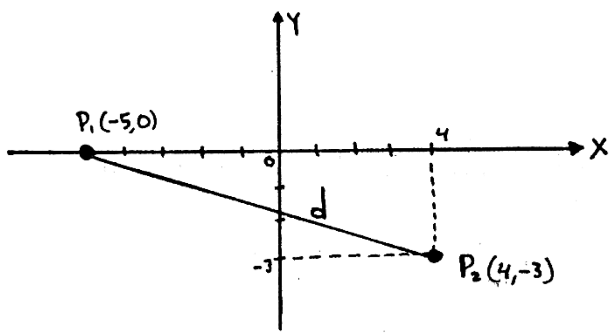
$d = \sqrt{\left(x_2\text{-}x_1\right)^2 + (Y_2\text{-}Y_1)^2}$

$d = \sqrt{\left(4\text{-}(\text{-}2\right)^2 + (11\text{-}3)^2}$ **=** $\sqrt{(4+2)^2 + 8^2}$

$\boldsymbol{d} = \sqrt{6^2 + 8^2}$ **=** $\sqrt{36 + 64}$ **=** $\sqrt{100}$

$\boldsymbol{d} = 10_{/}$ **Unidad de longitud**

4. HALLAR LA DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS $P_1(-50)$ y $P_2(4,-3)$



$d = \sqrt{(x_2\text{-}x_1)^2 + (Y_2\text{-}Y_1)^2}$

$d = \sqrt{\left(4\text{-}\left(\text{-}5\right)\right)^2 + \left(\text{-}3\text{-}0\right)^2}$

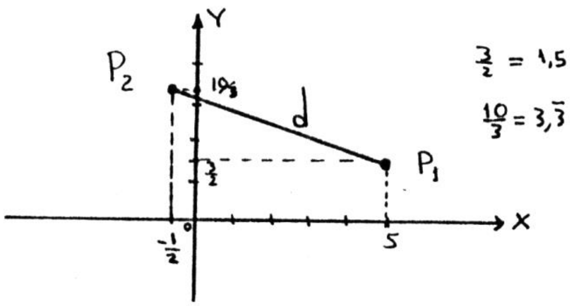
$\boldsymbol{d} = \sqrt{(4+5)^2 + (-3)^2}$

$\boldsymbol{d} = \sqrt{9^2 + (-3)^2}$

$\boldsymbol{d} = \sqrt{81 + 9}$ **=** $\sqrt{90}$ $\rightarrow \boldsymbol{d} = \boldsymbol{9}, 48_{/ul}$

5. HALLAR LA DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS.

Puntos. $\boldsymbol{P_1}\left(5,\frac{3}{2}\right)\ \boldsymbol{y}\left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{10}{3}\right)$



$$d=\sqrt{(x_2\text{-}x_1)^2+\left(Y_2\text{-}Y_1\right)^2}$$

$$d=\sqrt{\left(\text{-}\frac{1}{2}\text{-}5\right)^2+\left(\frac{10}{3}\text{-}\frac{3}{2}\right)^2}$$

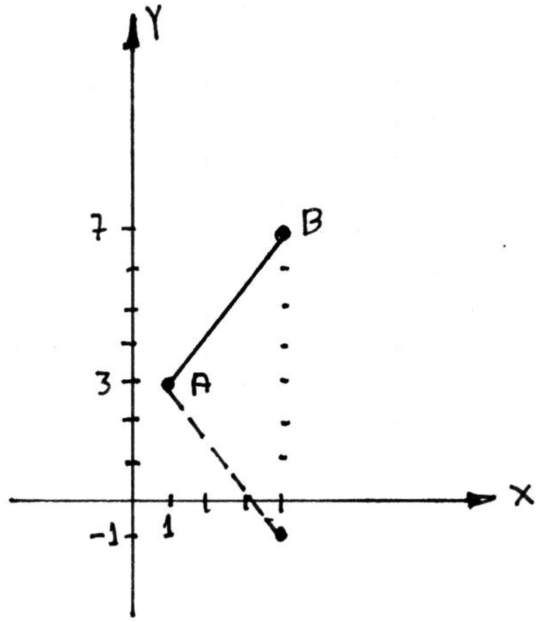
$$\boldsymbol{d}=\sqrt{\left(\frac{-1-10}{2}\right)^2+\left(\frac{20-9}{6}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{6}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{d}=\sqrt{\frac{121}{4}+\frac{121}{36}}=\sqrt{\frac{1089+121}{36}}=$$

$$\boldsymbol{d}=\sqrt{\frac{1210}{36}}$$

$$\boldsymbol{d}=5,79_{/ul}$$

6. Determinar el valor de "k" de tal forma que la distancia entre los puntos AyB sea de 5 unidades de longitud, si A(1,3) y B(4,k)



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$5 = \sqrt{(4-1)^2 + (k-3)^2}$$

$$5 = \sqrt{3^2 + (k-3)^2}$$

$$5 = \sqrt{9 + (k-3)^2} \qquad (\ \ )^2$$

$$(5)^2 = \left(\sqrt{9 + (k-3)^2}\right)^2$$

$$25 = 9 + (k-3)^2$$

$$25 - 9 = (k-3)^2$$

$$16 = (k-3)^2 \qquad \left(\sqrt{\ \ }\right)$$

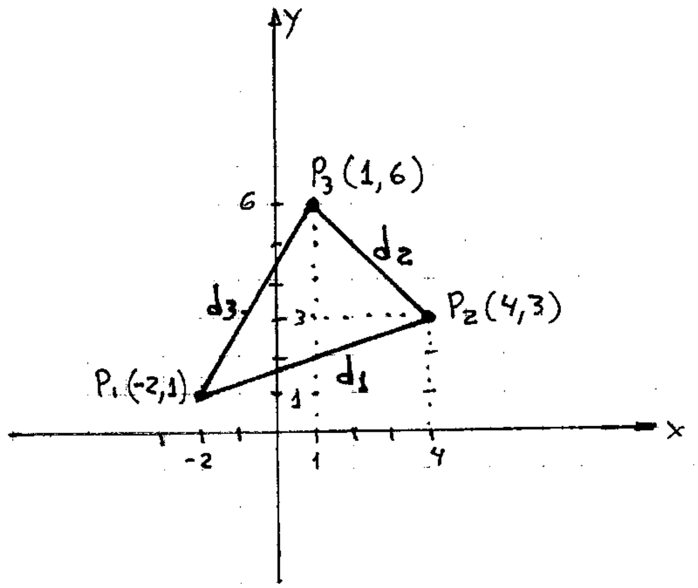
$$\pm\sqrt{16} = \sqrt{(k-3)^2}$$

$$\pm 4 = k - 3$$

$$\pm 4 + 3 = k \rightarrow \qquad k = +4 + 3$$

$$\left.\begin{array}{l} k = 7 \\ k = -4 + 3 \\ k = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} B(4,7) \\ B(4,-1) \end{array} dos\ soluciones$$

7. Hallar el perímetro del triángulo formado por los puntos $P_1(-2,1), P_2(4,3) y P_3(1,6)$ Sol. Recordemos que perímetro es la suma de la longitud de todos sus lados.



$d_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d_1 = \sqrt{\left(4 - (-2)\right)^2 + (3 - 1)^2}$

$d_1 = \sqrt{(4 + 2)^2 + (2)^2}$

$d_1 = \sqrt{6^2 + 2^2}$

$d_1 = \sqrt{36 + 4}$

$d_1 = \sqrt{40}$

$d_1 = 6{,}32$

$\mathrm{d}_2 = \sqrt{(\mathrm{x}_2\text{-}\mathrm{x}_1)^2 + \left(\mathrm{Y}_2\text{-}\mathrm{Y}_1\right)^2}$

$d_2 = \sqrt{(1 - 4)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2}$

$d_2 = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 4,24_/$

$d_2 = 4,24_/$

$d_3 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$d_3 = \sqrt{\left(1 - (-2)\right)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2}$

$d_3 = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} = 5{,}83$

$d_3 = 5,83_/$

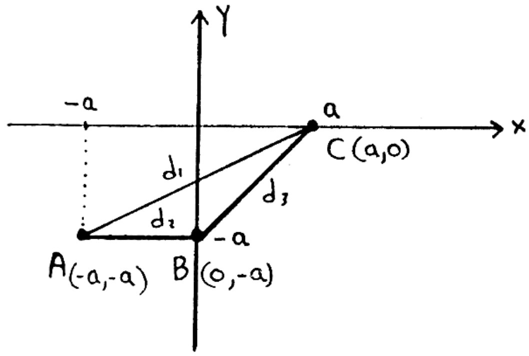
$PERIMETRO = P$

$P = d_1 + d_2 + d_3 = 6{,}32 + 4{,}24 + 5{,}83 =$

$P = 16,39_{ul}$

8. hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos A (-a ; -a)

$\boldsymbol{B(o,-a)}\ \boldsymbol{C(a,o)}$



$d_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$d_1 = \sqrt{\left(a - (-a)\right)^2 + \left(0 - (-a)\right)^2}$

$d_1 = \sqrt{(a + a)^2 + (a)^2}$

$d_1 = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$

$d_1 = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5a^2} \rightarrow d_1 = \sqrt{5}\, a_{/}$

$d_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (Y_{2\_}Y_1)^2}$

$d_2 = \sqrt{\left(0 - (-a)\right)^2 + \left(-a - (-a)\right)^2}$

$d_2 = \sqrt{(o + a)^2 + (-a + a)^2}$

$d_2 = \sqrt{a^2 + o^2} = \sqrt{a^2} \rightarrow d_2 = a_{/}$

$d_3 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$d_3 = \sqrt{(a - o)^2 + \left(o - (-a)\right)^2}$

$d_3 = \sqrt{a^2 + (o + a)^2}$

$d_3 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} \rightarrow d_3 = \sqrt{2}\ \ a_{/}$

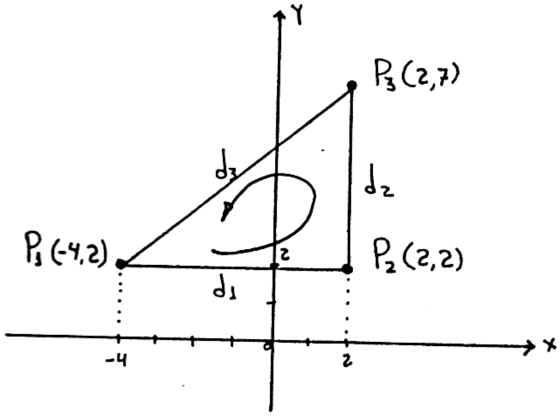
$P = d_1 + d_2 + d_3$

$P = \sqrt{5}\ a + a + \sqrt{2}\ a$

$P = 2{,}23a + a + 1{,}41a$

$P = 4{,}64\ a_{u.l.}$

9. calcular el área del triángulo formado por los vértices $\boldsymbol{P_1(-4,2)}$, $\boldsymbol{P_2(2,2)}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{P_3(2,7)}$ $\boldsymbol{por\ las\ tres\ fórmulas}$



Primeramente calculamos la longitud de los lados

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$

$d_1 = \sqrt{\left(2 - (-4)\right)^2 + (2 - 2)^2}$

$d_1 = \sqrt{(2 + 4)^2 + 0^2}$

$d_1 = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} \rightarrow d_1 = 6$

$d_2 = \sqrt{(2 - 2)^2 + (7 - 2)^2}$

$d_2 = \sqrt{0^2 + 5^2}$

$d_2 = \sqrt{0 + 25} = \sqrt{25} \rightarrow d_2 = 5$

$d_3 = \sqrt{\left(2 - (-4)\right)^2 + (7 - 2)^2}$

$d_3 = \sqrt{6^2 + 5^2}$

$d_3 = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \rightarrow d_3 = 7{,}81$

a)

$A = \dfrac{d_1 . d_2}{2} = \dfrac{6.5}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$

$A = 15_{ul^2}$

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$A = \sqrt{p(p-p_1)(p-d_2)(p-d_3)}$

$p = \dfrac{d_1 + d_2 + d_3}{2}$

$p = \dfrac{6 + 5 + 7{,}81}{2}$

$p = \dfrac{18{,}81}{2} \rightarrow p = 9{,}4$

$A = \sqrt{9{,}4(9{,}4-6)(9{,}4-5)(9{,}4-7{,}81)}$

$A = \sqrt{9{,}4(3{,}4)(4{,}4)(1{,}59)}$

$A = \sqrt{223{,}59216}$

$A = 14{,}95_{ul^2} \cong 15_{ul^2}$

c)

$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}$ Para colocar los puntos, se los ordena en sentido contrario a las agujillas del reloj

$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$ Cuando multiplicamos hacia abajo mantenemos los signos

Cuando subimos cambiamos signo

$A = \dfrac{1}{2}\left[(-4)(2) + (2)(7) + (2)(2) - (-4)(7) - (2)(2) - (2)(2)\right]$

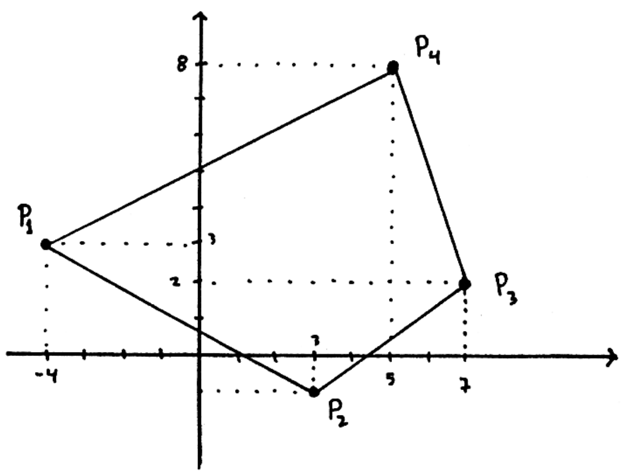
$A = \dfrac{1}{2}\left[-8 + 14 + 4 + 28 - 4 - 4\right]$

$A = \dfrac{1}{2}\left[46 - 16\right]$

$A = \dfrac{1}{2}[30] \rightarrow A = 15_{ul^2}$

10. Calcular el área del polígono cuyos vértices son los puntos

$\boldsymbol{P_1(-4,3)}$, $\boldsymbol{P_2(3,-1)}$, $\boldsymbol{P_3(7,2)}$ $\boldsymbol{Y}$ $\boldsymbol{P_4(5,8)}$



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \\ 7 & 2 \\ 5 & 8 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\Big[(-4)(-1) + (3)(2) + (7)(8) + (5)(3) - (-4)(8) - (5)(2) - (7)(-1) - (3)(3)\Big]$$

$$A = \frac{1}{2}\Big[4 + 6 + 56 + 15 + 32 - 10 + 7 - 9\Big]$$

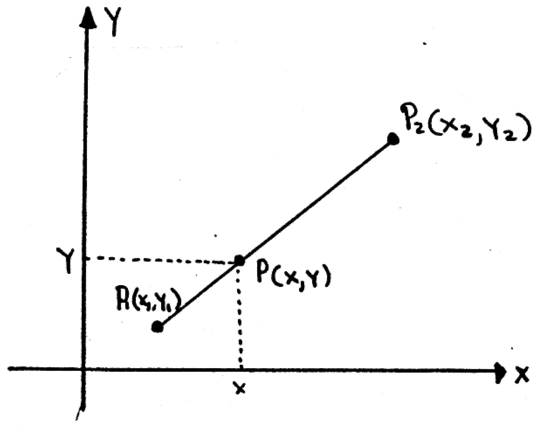
$$A = \frac{1}{2}\Big[120 - 19\Big]$$

$$A = \frac{1}{2}\Big[101\Big]$$

$$A = 50,5_{ul^2}$$

Punto de división de un segmento.- Es un punto P (x , y) que divide a un segmento formado por

$\boldsymbol{P_1 \;\; y \;\; P_2 \;\; en\, una\, raz\acute{o}n\, dada.}$

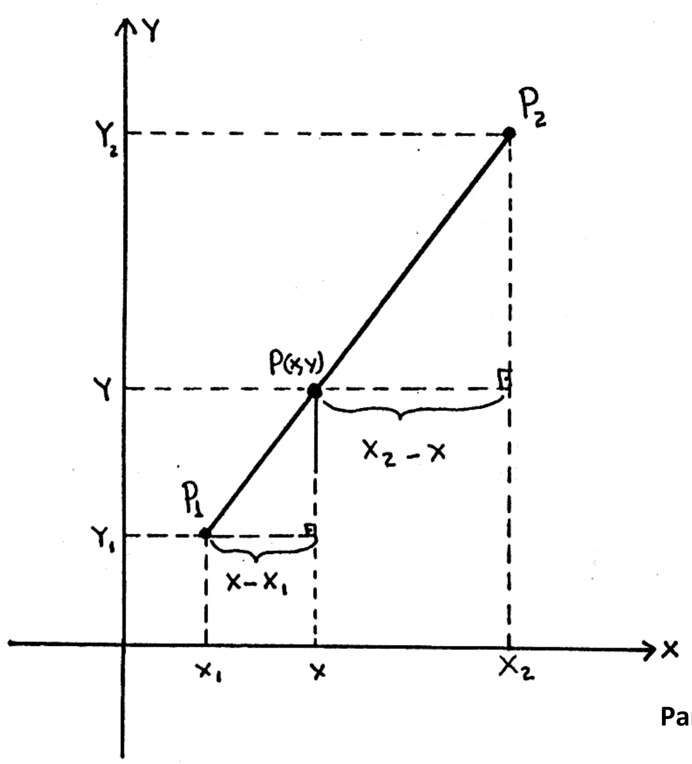


$\boldsymbol{r = raz\acute{o}n}$

$$\boldsymbol{r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}} \qquad \boldsymbol{P = (x, y) = punto\ de\ division}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}} \qquad \boldsymbol{y = \frac{Y_1 + rY_2}{1 + r}}$$

DEMOSTRACIÓN



$\boldsymbol{Para\ \text{“}x\text{”}}$

$$\frac{x-x_1}{\overline{P_1P}} = \frac{x_2-x}{PP_2}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$$

$$x - x_1 = r(x_2 - x)$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

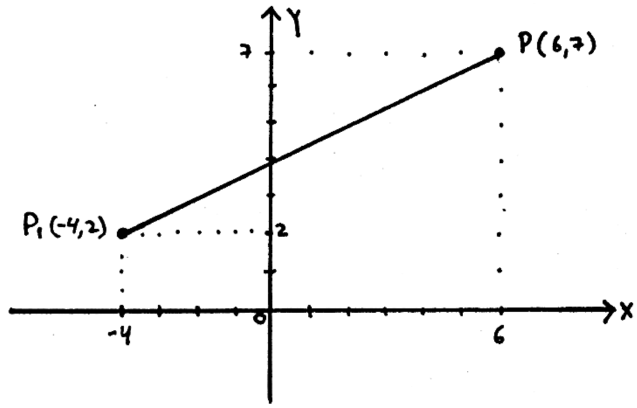
$$x + rx = x_1 + rx_2$$

$$x(1 + r) = x_1 + r_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

Para “y” se lo realiza en forma análoga

11. Hallar el punto de división de un segmento en la razón $r = \frac{2}{3}$ **siendo** $P_1(-4, 2)$ y $P_2(6, 7)$



$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{Y_1 + rY_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{-4 + \frac{2}{3} \cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} \qquad y = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 7}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{-4 + 4}{\frac{3 + 2}{2}} \qquad y = \frac{2 + \frac{14}{3}}{\frac{3 + 2}{3}}$$

$$x = \frac{0}{\frac{5}{3}} \qquad y = \frac{\frac{6 + 14}{3}}{\frac{5}{3}}$$

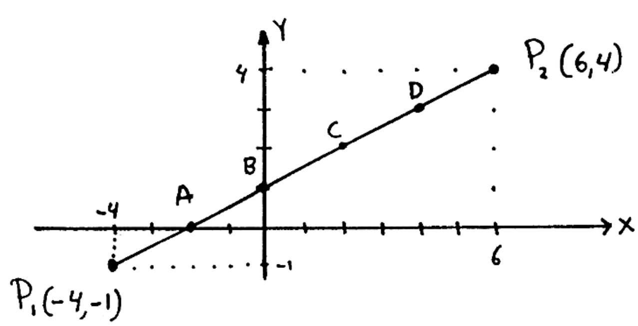
$$x = 0 \qquad y = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{20}{5}$$

$$y = 4$$

$$P_{division}(0{,}4)$$

12. Dividir el segmento formado por

$\boldsymbol{P_1(-4, -1)} \quad \boldsymbol{Y} \quad \boldsymbol{P_2(6, 4) en\ 5\ partes\ iguales}$



Para dividir este segmento es 5 partes iguales tenemos que hallar los puntos A,B,C Y D

Para hallar las coordenadas de A

$$r = \frac{\overline{P_1A}}{\overline{AP_2}} = \frac{1}{4} \qquad \rightarrow \qquad r = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad Y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

$$X_A \frac{-4 + \frac{1}{4} \cdot 6}{1 + \frac{1}{4}} \qquad Y_A = \frac{-1 + \frac{1}{4} \cdot 4}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$X_A \frac{-4 + \frac{6}{4}}{\frac{4+1}{4}} \qquad Y_A = \frac{-1+1}{\frac{4+1}{4}}$$

$$X_A = \frac{\frac{-16+6}{4}}{\frac{5}{4}} \qquad Y_A = 0$$

$$X_A = \frac{-10}{5} \qquad Y_A = 0$$

$$X_A = -2 \qquad A(-2,0)_/$$

Para Hallar las coordenadas de B

$$r = \frac{\overline{P_1B}}{BP_2} = \frac{2}{3} \qquad \rightarrow \qquad r = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{Y_1 + rY_2}{1+r}$$

$$X_B = \frac{-4 + \frac{2}{3} \cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} \qquad Y_B = \frac{-1 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$X_B = \frac{-4 + \frac{12}{3}}{\frac{3+2}{3}} \qquad Y_B = \frac{-1 + \frac{8}{3}}{\frac{5}{3}}$$

$$X_B = \frac{-4+4}{\frac{5}{3}} \qquad Y_B = \frac{\frac{-3+8}{3}}{\frac{5}{3}}$$

$$X_B = \frac{0}{\frac{5}{3}} \qquad Y_B \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} =$$

$$X_B = 0 \qquad B(0,1)$$

Para hallar las coordenadas de C

$$r = \frac{\overline{P_1C}}{CP_2} = \frac{3}{2} \qquad \rightarrow \qquad r = \frac{3}{2}$$

$$X = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad Y = \frac{Y_1 + rY_2}{1 + r}$$

$$X_C \frac{-4 + \frac{3}{2} \cdot 6}{1 + \frac{3}{2}} \qquad Y_C \frac{-1 + \frac{3}{2} \cdot 4}{1 + \frac{3}{2}}$$

$$X_C = \frac{-4 + \frac{18}{2}}{\frac{2+3}{2}} \qquad Y_C = \frac{-1 + \frac{12}{2}}{\frac{2+3}{2}}$$

$$X_C = \frac{\frac{-8+18}{2}}{\frac{5}{2}} \qquad Y_C = \frac{-1 + 6}{\frac{5}{2}}$$

$$X_C = \frac{\frac{10}{2}}{\frac{5}{2}} \qquad Y_C = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{5}{2}}$$

$$X_C = \frac{10}{5} \qquad Y_C = \frac{10}{5}$$

$$X_C = 2 \qquad Y_C = 2$$

$$C(2,2)$$

PARA HALLAR LAS COORDENADAS DE "D"

$$r = \frac{\overline{P_1D}}{DP_2} = \frac{4}{1} \qquad \rightarrow \qquad r = 4$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad Y = \frac{Y_1 + rY_2}{1 + r}$$

$$X_D = \frac{-4 + 4.6}{1 + 4} \qquad Y_D = \frac{-1 + 4.4}{1 + 4}$$

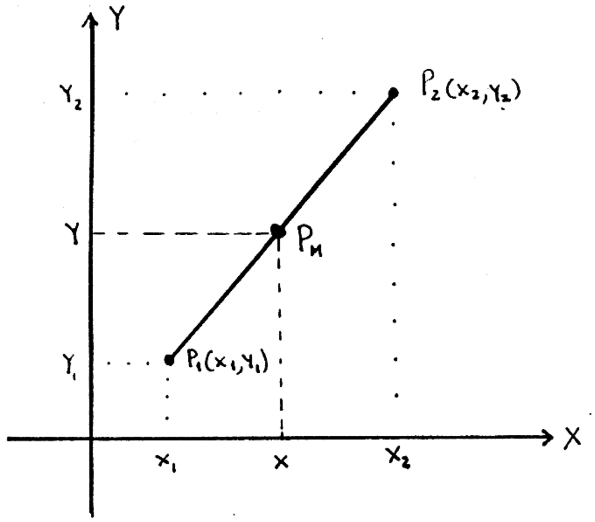
$$X_D = \frac{-4 + 24}{5} \qquad Y_D = \frac{-1 + 16}{5}$$

$$X_D = \frac{20}{5} \qquad Y_D = \frac{15}{5}$$

$$X_D = 4 \qquad Y_D = 3$$

$$D(4,3)$$

PUNTO MEDIO.- El punto medio de un segmento es aquel que divide a segmento en dos partes iguales



$\boldsymbol{DEMOSTRACION(P_M\ es\ un\ punto\ de\ divisi\acute{o}n)}$

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r} \qquad Y = \frac{Y_1 + rY_2}{1 + r}$$

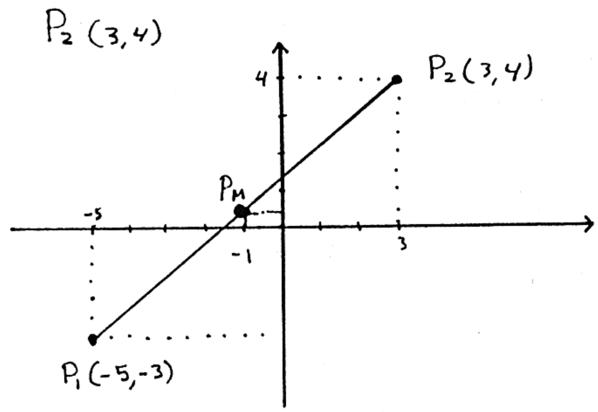
$$r = \frac{\overline{P_1 P_M}}{\overline{P_M P_2}} = 1 \qquad \rightarrow \qquad r = 1$$

$$X_M = \frac{X_1 + 1.X_2}{1 + 1} \qquad Y_M = \frac{Y_1 + 1.Y_2}{1 + 1}$$

$$X_M = \frac{X_1 + X_2}{2} \qquad Y_M = \frac{Y_1 + X_2}{2}$$

$$\boldsymbol{P_M(X_M, X_M)} \qquad \boldsymbol{X_M = \frac{X_1 + X_2}{2}} \qquad \boldsymbol{Y_M = \frac{Y_1 + Y_2}{2}}$$

13. Hallar el punto medio del segmento formado por $\boldsymbol{P_1(-5, -3)\ y\ P_2(3, 4)}$



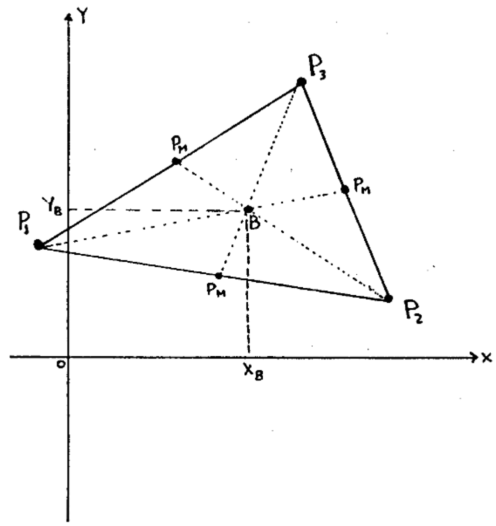
$$X_M = \frac{X_1 + X_2}{2} \qquad Y_M = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

$$X_M = \frac{-5 + 3}{2} \qquad Y_M = \frac{-3 + 4}{2}$$

$$X_M = \frac{-2}{2} \qquad Y_M = \frac{1}{2}$$

$$X_M = -1 \qquad P_M(-1, \tfrac{1}{2})$$

BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO.- Es el punto de intersección de las tres medianas del triángulo.



$\boldsymbol{B = BARICENTRO}$

$\boldsymbol{B = (X_B, Y_B)}$

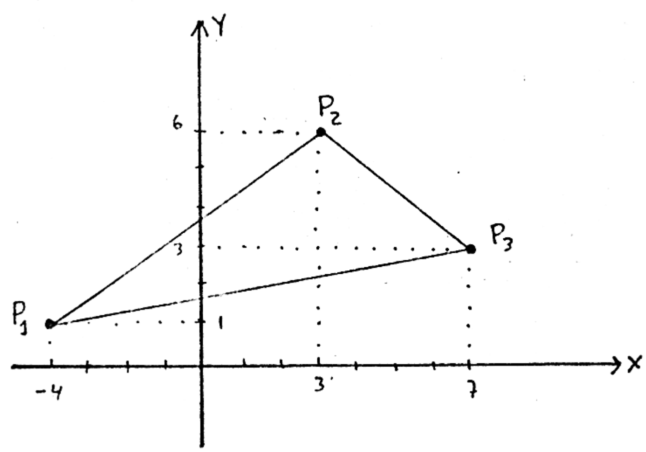
$P_1, P_2\ y\ P_3 = VÉRTICES\ DEL\ TRIÁNGULO$

$P_1(X_1, Y_1)\ ;\ \ P_2(X_2, Y_2)\ \ y\ \ P_3(X_3, Y_3)$

$P_M = PUNTO\ MEDIO\ DE\ CADA\ LADO$

$$X_B = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \qquad Y_B = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$

14. Hallar las coordenadas del baricentro del triángulo cuyos vértices son $\boldsymbol{P_1(-4,1), P_2(3,6)\ y\ P_3(7,3)}$



$$X_B = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \qquad Y_B = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$

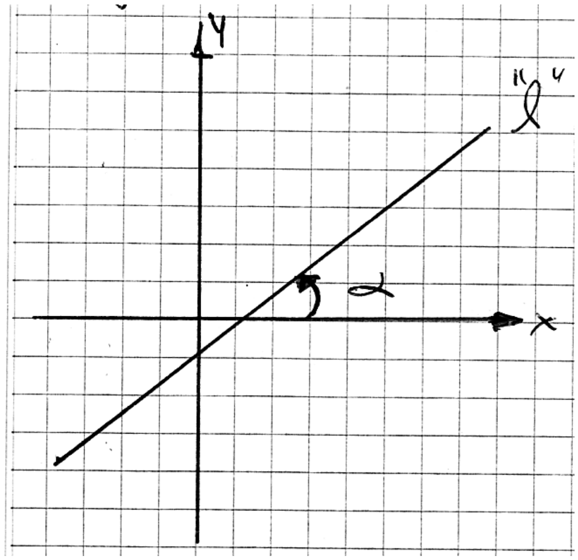
$$X_B = \frac{-4 + 3 + 7}{3} \qquad Y_B = \frac{1 + 6 + 3}{3}$$

$$X_B = \frac{6}{3} \qquad Y_B = \frac{10}{3}$$

$$X_B = 2$$

$$B(2, \tfrac{10}{3})$$

INCLINACION Y PENDIENTE DE UNA RECTA.- La inclinación es el ángulo que la recta forma con el eje positivo de los "x" y la pendiente es la tangente de dicho ángulo.



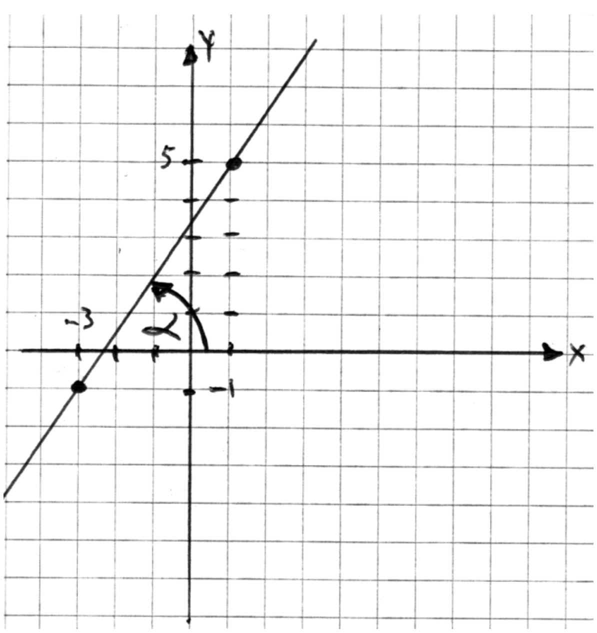
α=inclinación

Pendiente=tanα

m=tanα

m=$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

15. Hallar la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por $P_1(-3,-1)$ y $P_2(1,5)$, $graficar$



$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m = \frac{5-(-1)}{1-(-3)}$

$m = \frac{6}{4}$

$m = \frac{3}{2}$

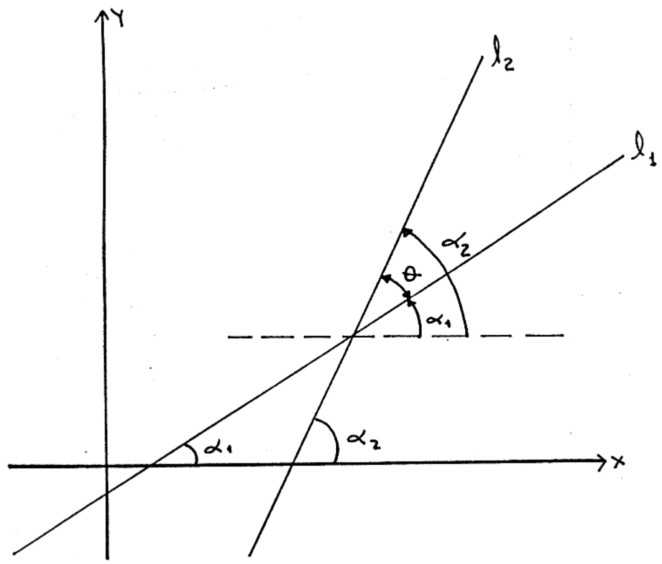
$\text{Tan}\ \alpha = m$

$\tan \alpha = \frac{3}{2}$

$\alpha = arctan\left(\frac{3}{2}\right)$

$\alpha = 56^0\ 18'\ 35{,}76"$

ANGULO ENTRE DOS RECTAS.- Es el Angulo que forman las rectas en su punto de intersección



$$formula\colon \tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}$$

$Dem.$

$$\theta = \acute{a}ngulo\ entre\ las\ rectas\ l_1\ \ y\ \ l_2$$

$$\theta = \propto_2 - \propto_1 \qquad \text{(tan)}$$

$$\tan\theta = \tan(\propto_2 - \propto_1)$$

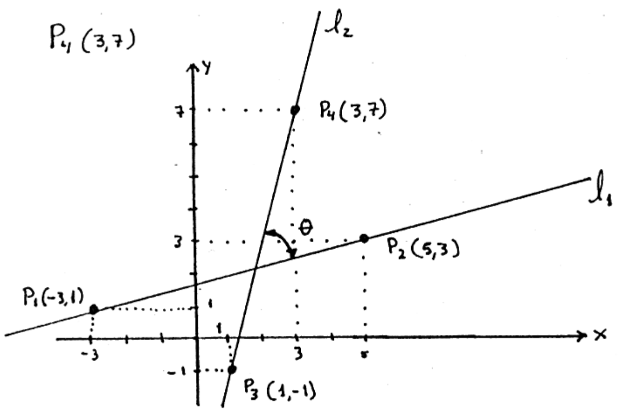
$$\tan\theta = \frac{\tan\propto_2 - \tan\propto_1}{1 + \tan\propto_2 .\tan\propto_1}$$

$$"l"_1 forma\ "\propto"_1 \rightarrow m_1 = \tan\propto_1$$

$$"l"_2 forma\ "\propto"_2 \rightarrow m_2 = \tan\propto_2$$

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}$$

16. Hallar el ángulo Formado por las rectas $"l"_1$ y $"l"_2$ SABIENDO QUE $"l"_1$ PASA POR $P_1(-3,1)$ y $P_2(5,3)$ Y $"l"_2$ PASA POR $P_3(1,-1)$ Y $P_4(3,7)$



$$M = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \qquad \mathrm{M}_1 = \frac{3-1}{5-(-3)} \qquad M_2 = \frac{7-(-1)}{3-1}$$

$$M_1 = \frac{2}{5+3} \qquad M_2 = \frac{7+1}{2}$$

$$M_1 = \frac{2}{8} \qquad M_2 = \frac{8}{2}$$

$$M_1 = \frac{1}{4} \qquad M_2 = 4$$

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2\ \ m_1}$$

$$\tan\theta = \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 4.\frac{1}{4}}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{16-1}{4}}{1 + 1}$$

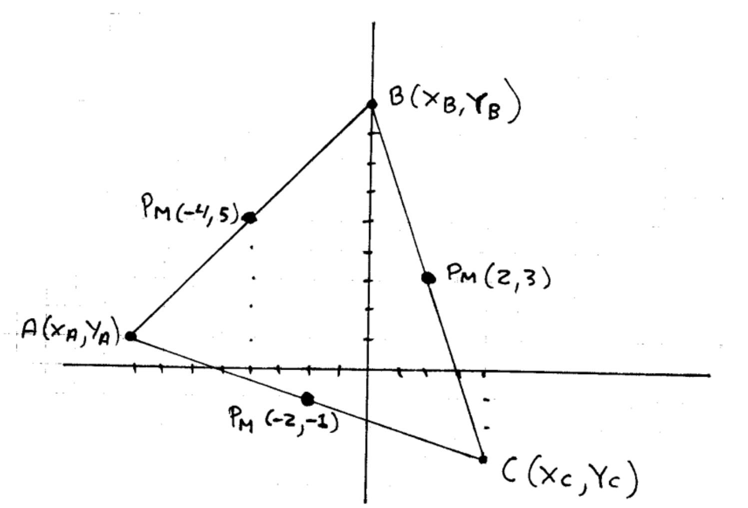
$$\tan\theta = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{2}{1}}$$

$$\tan\theta = \frac{15}{8}$$

$$\theta = arc\tan\left(\frac{18}{8}\right)$$

$$\theta = 61°\ 55'\ 39"$$

17. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo cuyas coordenadas de los puntos medios son: $(-\mathbf{2}, -\mathbf{1}); (\mathbf{2}, \mathbf{3}); (-\mathbf{4}, \mathbf{5})$



$Para\ Pm\ (-4{,}5)$

$$XM = \frac{XA + XB}{2}$$

$$-4 = \frac{XA + XB}{2}$$

$$-8 = XA + XB \text{ ①}$$

$Para\ Pm(2{,}3)$

$$XM = \frac{XB + XC}{2}$$

$$2 = \frac{XB + XC}{2}$$

$$4 = XB + XC \text{ ②}$$

$Para\ Pm(-2,-1)$

$$XM = \frac{XA + XC}{2}$$

$$-2 = \frac{XA + XC}{2}$$

$$-4 = XA + XC \text{ ③}$$

Formando un sistema con ① Y ②

$$\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}\left\{\begin{array}{l} XA + XB = -8 \\ XC + XB = 4 \end{array}\right| (-1)$$

$$\begin{array}{r} XA+XB = -8 \\ -XC-XB = -4 \\ \hline XA+XC = -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ③ \quad XA+XC = -4 \\ \hline 2XA = -16 \\ XA = \frac{-16}{2} \\ XA = -8 \end{array}$$

$$① \rightarrow XA + XB = -8$$
$$-8 + XB = -8$$
$$X\,B = -8 + 8$$
$$XB = 0$$
$$② \quad XB + XC = 4$$
$$0 + XC = 4$$
$$XC = 4$$

$Para\ PM(-4{,}5)$

$$YM = \frac{YA + YB}{2}$$

$$5 = \frac{YA + YB}{2}$$

$$10 = YA + YB \quad ①$$

$Para\ PM(2{,}3)$

$$YM = \frac{YB + YC}{2}$$

$$3 = \frac{YB + YC}{2}$$

$$6 = YB + YC \quad ②$$

$Para\ PM(-2,-1)$

$$YM = \frac{YA + YC}{2}$$

$$-1 = \frac{YA + YC}{2}$$

$$-2 = YA + YC \quad ③$$

Formando un sistema con ①Y②

$$\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}\left\{\begin{array}{l} YA + YB = 10 \\ YC + YB = 6 \end{array}\right| (-1)$$

$$YA + YB = 10$$
$$-YC - YB = -6$$

$$YA - YC = 4$$
$$YA + YC = -2$$
$$2YA = 2$$
$$2YA = 2$$
$$YA = \frac{2}{2}$$
$$YA = 1$$

$$① \rightarrow YA + YB = 10$$
$$1 + YB = 10$$
$$YB = 10 - 1$$
$$YB = 9$$
$$② \rightarrow YB + YC = 6$$
$$9 + YC = 6$$
$$YC = 6 - 9$$
$$YC = -3$$

$$A(-8{,}1), B(0{,}9) Y C(4,-3)$$

18. Demostrar que el punto (-1,-2) está situado en la recta que pasa por los puntos (-5,1) y (7,-5) y que equidista de ellos.

Primero hallamos la ecuación que pasa por (-5,1) y (7,-5) aplicando la ecuación que pasa por dos puntos

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-1}{x-(-5)} = \frac{-5-1}{7-(-5)}$$

$$\frac{y-1}{x+5} = \frac{-6}{12} \; simplificar$$

$$\frac{y-1}{x+5} = -\frac{1}{2}$$

$$2y-2 = -x-5$$

$$x+2y+3=0$$

Ahora comprobemos que el punto (1-,2) esta Situado en la recta

$$x+2y+3=0 \qquad \begin{matrix} x = 1 \\ y = -2 \end{matrix}$$

$$1+2.(-2)+3=0$$

$$1-4+3=0$$

$$0=0 \; comprobado$$

Si el punto (1,-2) equidistante de los puntos (-5,1) y (7,-5) entonces es el punto medio

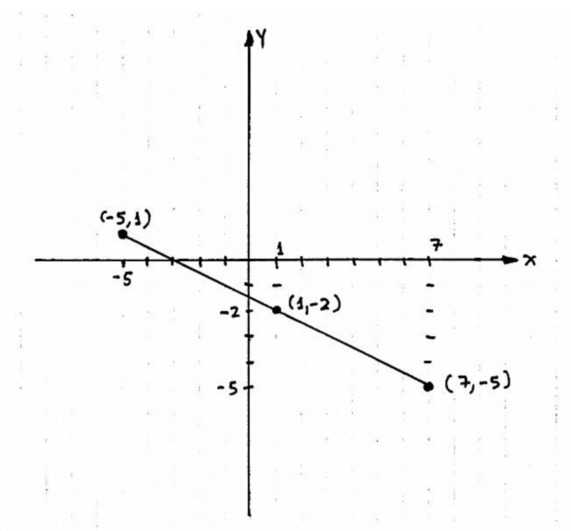
Comprobando $\quad XM = \frac{X_1+X_2}{2} \qquad YM = \frac{Y_1+Y_2}{2}$

$$XM = \frac{-5+7}{2} \qquad YM = \frac{1-5}{2}$$

$$XM = \frac{2}{2} \qquad YM = \frac{-4}{2}$$

$$XM = 1 \qquad YM = -2$$

PM = (1,-2)



19. La pendiente de una recta que pasa por el punto a (3,2) es igual a $\frac{3}{4}$. situar dos puntos sobre esta recta que disten 5 unidades de a.

Sol. Tenemos de datos el punto A (3,2) y m = $\frac{3}{4}$ m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, además sabemos que d=5

$\frac{3}{4}=\frac{y-2}{x-3}$

$3x-9=4y-8$

$3x-9+8=4y$

$\frac{3x-1}{4}=y$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$5=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$

$5=\sqrt{(x-3)^2+\left(\frac{3x-1}{4}-2\right)}$ $\quad pero\ y=\frac{3x-1}{4}$

$5=\sqrt{(x-3)^2+\left(\frac{3x-1-8}{4}\right)^2}$

$5=\sqrt{(x-3)^2+\left(\frac{3x-9}{4}\right)^2}$ $\quad (\ \ )^2$

$(5)^2=\left(\sqrt{(x-3)^2+\left(\frac{3x-9}{4}\right)^2}\right)^2$

$25=x^2-6x+9+\frac{9x^2-54x+81}{16}.(16)m.c.m$

$400=16x^2-96x+144+9x^2-54x+81$

$400=25x^2-150x+225$

$0=25x^2-150x-175 \quad \% \ 25$

$0=x^2-6x-7$

$0=(x-7)(x+1)$

$x=7;\ x=-1 \quad como\ \ y=\frac{3x-1}{4}$

$para\ x=7$

$y=\frac{3.7-1}{4}=\frac{20}{4}$

$y=5$

$P_1(7,5)$

$para\ x=-1$

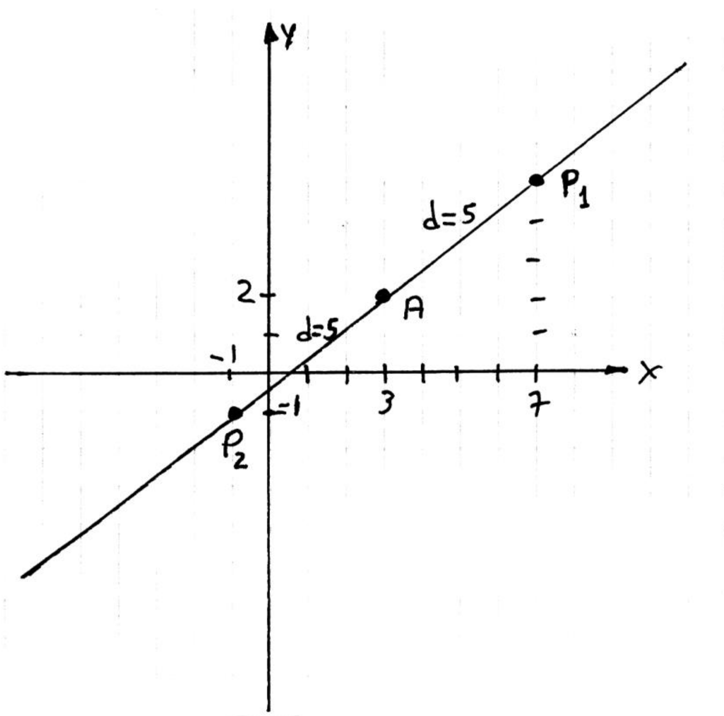
$y=\frac{3.-1-1}{4}$

$y=\frac{-3-1}{4}=\frac{-4}{4}$

$y=-1$

$P_2(-1,-1)$

GRAFICANDO



20. El ángulo formado por la recta que pasa por los puntos (-4,5)y (3,y) con la que pasa por (-2,4)y (9,1) es de 135° hallar el valor de "y"

Sol. Para hallar el ángulo entre dos rectas tenemos la fórmula

$$\tan \emptyset = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}$$

$$\tan 135° \frac{\frac{y-5}{7} - \left(-\frac{3}{11}\right)}{1 + \frac{y-5}{7} \cdot \left(\frac{-3}{11}\right)}$$

$$-1 = \frac{\frac{y-5}{7} + \frac{3}{11}}{1 - \frac{3y-15}{77}}$$

$$-1 = \frac{\frac{11(y-5)+3.7}{77}}{\frac{77-3y+15}{77}}$$

$$-1 = \frac{11y - 55 + 21}{-3y + 92}$$

$$3y - 92 = 11y - 34$$

$$-92 + 34 = 11y - 3y$$

$$-58 = 8y$$

$$\frac{-58}{8} = y$$

$$-7{,}25 = y$$

$tenemos$:

$$\theta = 135°$$

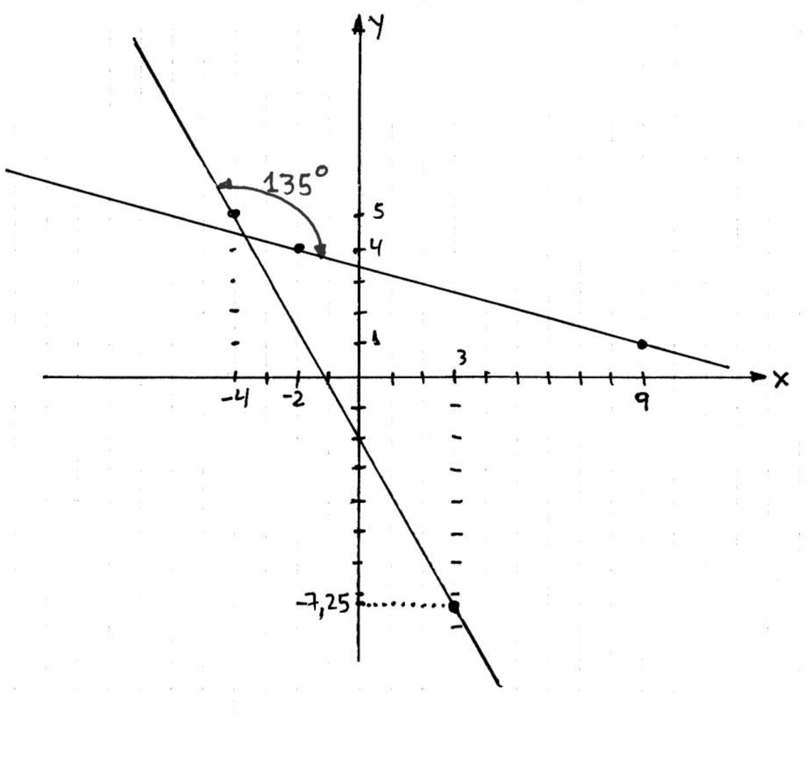
$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_2 = \frac{y-5}{3-(-4)}$$

$$m_2 = \frac{y-5}{7}$$

$$m_1 = \frac{1-4}{9-(-2)}$$

$$m_1 = \frac{-3}{11}$$



21. La recta L_2 forma un angulo de 60° con la recta L_1 si la pendiente de L_1es 1, hallar la pendiente de L_2

Sol. La fórmula para calcular el ángulo entre dos rectas

Es:

$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}$

$\tan 60° = \frac{m_2 - 1}{1 + m_2 . 1}$

$\sqrt{3} = \frac{m_2 - 1}{1 + m_2}$

$tenemos\ \theta = 60°$

$m_1 = 1$

$m_2 = ?$

$\sqrt{3}(1 + m_2) = m_2 - 1$

$\sqrt{3} + \sqrt{3}m_2 = m_2 - 1$

$\sqrt{3}m_2 - m_2 = -1 - \sqrt{3}$

$m_2(\sqrt{3} - 1) = -1 - \sqrt{3}$

$m_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$m_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$tambien\ podemos\ hacer$

$m_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\ racionalizando$

$m_2 = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1^2 - (\sqrt{3})^2}$

$m_2 = \frac{(1^2 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{1-3}$

$m_2 = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{-2}$

$m_2 = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}\ \%\ 2$

$m_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{-1}$

$m_2 = -2 - \sqrt{3}$

22. Hallar el área del triángulo cuyas coordenadas de sus vértices son: (-8,-2) ; (-4,-6) y (-1,5)

Sol. Aplicando el método por determinantes.

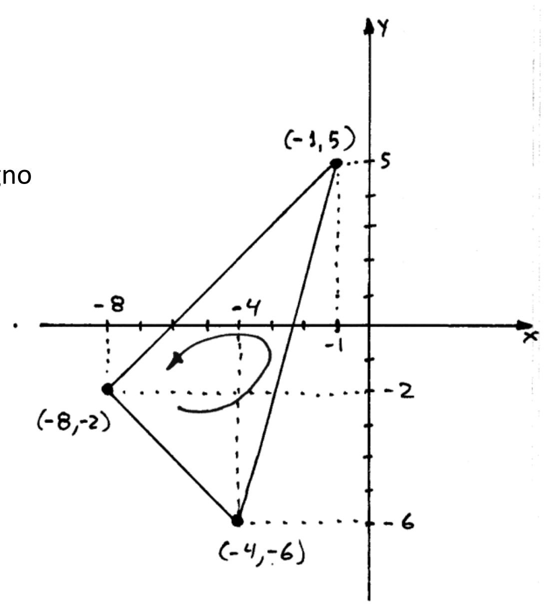
$\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ -4 & -6 \\ -1 & 5 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}$ Cuando es hacia arriba cambien el signo

$A = \frac{1}{2} = \left[48 - 20 + 2 + 40 - 6 - 8\right]$

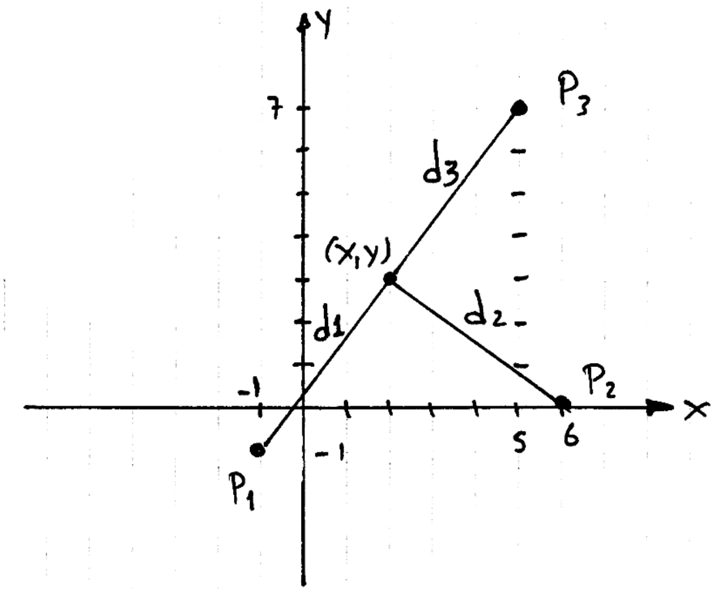
$A = \frac{1}{2} = \left[90 - 34\right]$

$A = \frac{1}{2} = [56]$

$A = 28_{ul^2}$



23. Hallar el punto que equidiste de los puntos $P_1(-1,-1)$, $P_2(6,0)$ y $P_3(5,7)$



$d_{1=}d_2$

$\left(\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2}\right)^2$

$(x+1)^2+(y+1)^2 = (x-6)^2+(y)^2$

$x^2+2x+1+y^2+2y+1 = x^2-12x+36+y^2$

$2x+1+2y+1 = -12x+36$

$2x+2y+2 = -12x+36$

$14x+2y = 34\ \%2$

$7x+y = 17$ ①

$d_1 = d_3$

$\left(\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\right) = \left(\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}\right)^2$

$(x+1)^2+(y+1)^2 = (x-5)^2+(y-7)^2$

$x^2+2x+1+y^2+2y+1 = x^2-10x+25+y^2-14y+49$

$2x+1+2y+1 = -10x+25-14y+49$

$2x+2y+2 = -10x-14y+74$

$12x+16y = 72\ \%\ 4$

$3x+4y = 18$ ②

formando el sistema

con ① *y* ②

$$\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} 7x+y=17 \\ 3x+4y=18 \end{cases}\Bigg|(-4)$$

$-28x-4y = -68$

$\underline{3x+4y=18}$

$-25x=-50(-1)$

$25x = 50$

$x = \frac{50}{25}$

$x = 2$

① $7x+y = 17$

$7.2+y = 17$

$14+y = 17$

$y = 17-14$

$y = 3$

$P(2,3)$