ntic master School

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
DE MADRID

Tema 2 Series Temporales

2.1.- Introducción.

2.2.- Función de autocorrelación simple y función de autocorrelación parcial.

2.3. El modelo ARMA(p,q).

- 2.3.1. El modelo autorregresivo AR(p).
- 2.3.2. El modelo de medias móviles MA(q).

2.4. El modelo ARIMA(p,d,q).

2.5.- El modelo ARIMA estacional.

2.6.- La metodología Box-Jenkins.

2.7.- Transformaciones para estabilizar la varianza.

2.8.-Identificación y estimación del modelo ARIMA.

2.9.-Diagnósis del modelo.

- 2.9.1.- Significación estadística de los parámetros.
- 2.9.2.- Análisis de los residuos.
- 2.9.3.-. Medidas de la adecuación del modelo.

2.10. Cálculo de las predicciones

2.1.- INTRODUCCIÓN.

Una **serie temporal** es una realización de un proceso estocástico, donde los elementos están ordenados y corresponden a instantes equidistantes del tiempo. Un **proceso estocástico** es una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo. Algunos **conceptos básicos** de procesos estocásticos:

Estacionarios

- Toman valores estables en el tiempo alrededor de un valor central, sin mostrar una tendencia o crecer o decrecer a lo largo del tiempo.

No estacionarios

- Pueden mostrar tendencia, estacionalidad y otros efectos evolutivos en el tiempo.

Un **proceso estocástico es estacionario** en sentido estricto cuando **las distribuciones marginales de cualquier conjunto de k variables son idénticas, en distribución y parámetros.**

Nos basta con que el proceso sea **estacionario en sentido débil**, es decir

$$\begin{cases} \mu_t = \mu & \forall t \\ \sigma_t^2 = \sigma^2 & \forall t \\ Cov(x_t, x_{t+k}) = E\left[(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)\right] = \gamma_k & \forall k \end{cases}$$

La **media y la varianza permanecen constantes** con el tiempo y la tercera que **la covarianza** entre dos variables de la serie **depende sólo de su separación en el tiempo.**

$$\rho_k = \frac{Cov(x_t, x_{t-k})}{\sqrt{Var(x_t)Var(x_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad \gamma_0 = \sigma_{x_t}^2 \quad \forall t$$

Una propiedad importante de los procesos estacionarios es que son **estables ante las combinaciones lineales.** En particular, **los incrementos de una serie estacionaria son estacionarios.**

$$\omega_t = x_t - x_{t-1}$$

Un proceso estocástico es un ruido blanco si

$$E\left[X(t)\right] = 0 \qquad V\left[X(t)\right] = \sigma^2 \qquad \gamma_k = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots$$

Se define **el operador de retardo B** de la siguiente manera:

$$BX_t = X_{t-1} \qquad B^2 X_t = X_{t-2} \qquad B^k X_t = X_{t-k}$$

El operador de retardo es lineal $$B\left(aX_t + bY_t\right) = aX_{t-1} + bY_{t-1}$$

2.2. FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN SIMPLE (ACF) Y FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN PARCIAL (PACF).

Si de un proceso estacionario observamos $x_1, x_2, \ldots, x_T$

podemos calcular los estimadores de los parámetros anteriores.

El **estimador de la media** $\hat{\mu} = \overline{x}$

La **varianza de este estimador** es $Var(\overline{x}) = \frac{1}{T}\left[\sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{T-1}\left(1-\frac{i}{T}\right)\gamma_i\right] = \frac{\gamma_0}{T}\left[1+2\sum_{i=1}^{T-1}\left(1-\frac{i}{T}\right)\rho_i\right]$

El estimador de la autocovarianza de orden k es $\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}(x_t - \overline{x})(x_{t-k} - \overline{x})$

El estimador del coeficiente de correlación lo calcularemos $r_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$

Estos coeficientes de correlación muestrales expresados en función del retardo forman la ***función de autocorrelación muestral ACF*** y su representación es el ***correlograma*****.**

Estas cantidades **miden la relación lineal entre las variables de la serie separadas por k posiciones.**

La ***función de autocorrelación parcial PACF*** es una medida de la correlación entre observaciones de una serie de tiempo que se encuentran separadas por k unidades de tiempo, después de ajustarse para la presencia de los demás términos de desfase más corto. Es decir, para estimar el valor k de la función, se estima mediante una regresión de X_t sobre X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-k} .

Ambas funciones nos ayudan a determinar los parámetros de los modelos que vamos a estudiar.

Se observan ambas funciones conjuntamente.

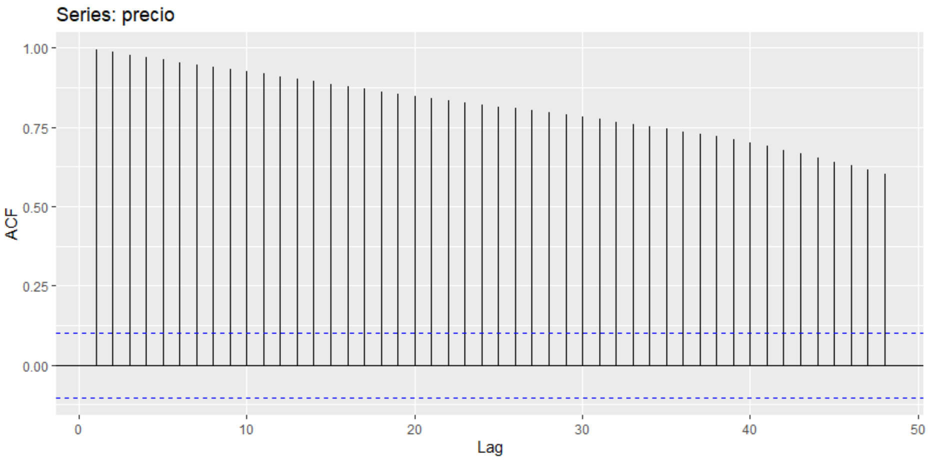
La función ACF nos servirá para identificar si la serie es o no estacionaria.

Ejemplo de correlogramas.

La observación y el análisis de la ACF y PACF nos sirve para detectar, la estacionariedad, el tipo de modelo observando los retardos que son significativamente diferentes de cero.

Con R, obtenemos la representación gráfica de estas funciones mediante la siguiente sintaxis:

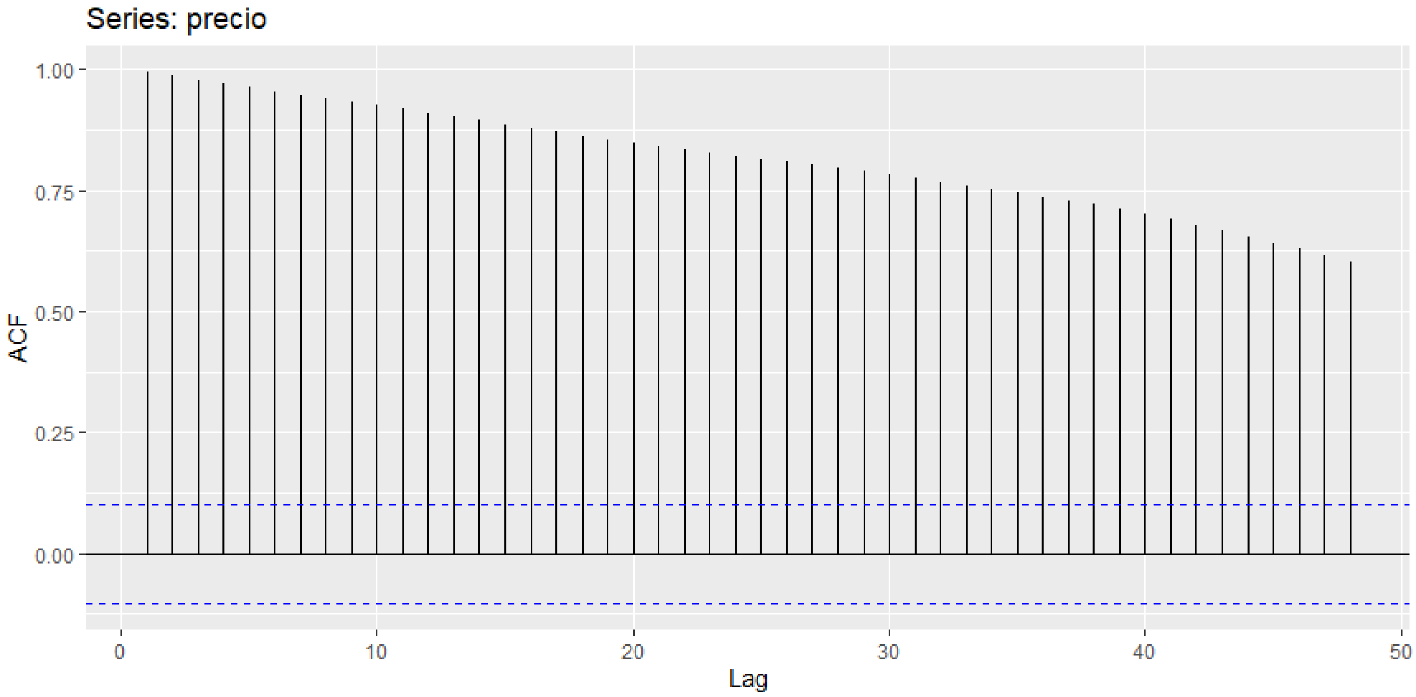
```
#Calculamos  las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48:  ggAcf(precio, lag=48)
#Calculamos  las autocorrelaciones parciales hasta el retardo 48:  ggPacf(precio, lag=48)
```



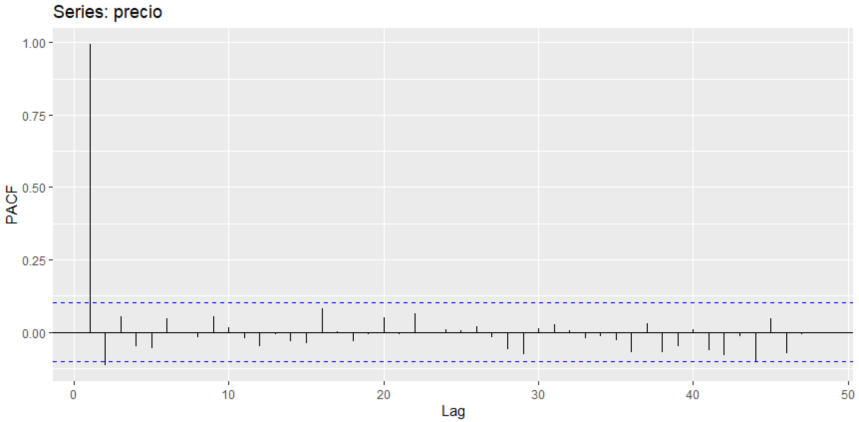
Si el correlograma ACF **decrece lentamente** la serie es **no estacionaria**,

Si el correlograma ACF **se corta o decrece rápidamente** podemos considerar la serie **estacionaria.**

Esta función también nos va a indicar el tipo de modelo a ajustar y el orden de los parámetros del mismo.



La **función de autocorrelación parcial (PACF)** nos servirá para identificar el modelo autorregresivo a utilizar. Por ejemplo, **un modelo AR(p) tiene "solo los p primeros" coeficientes de correlación parcial distintos de cero.**

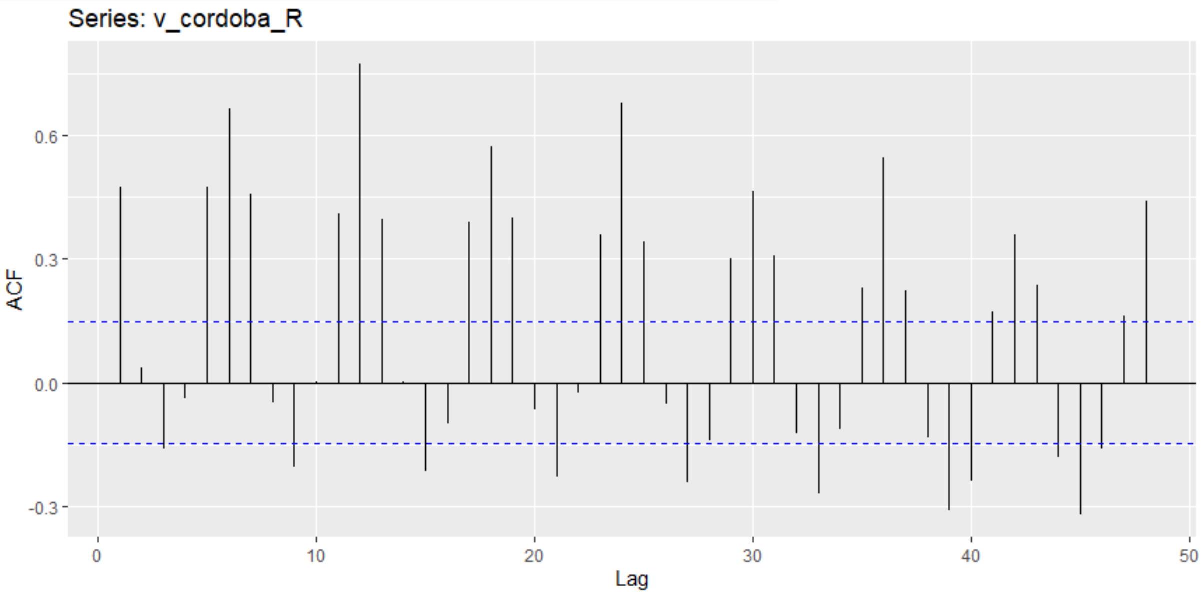


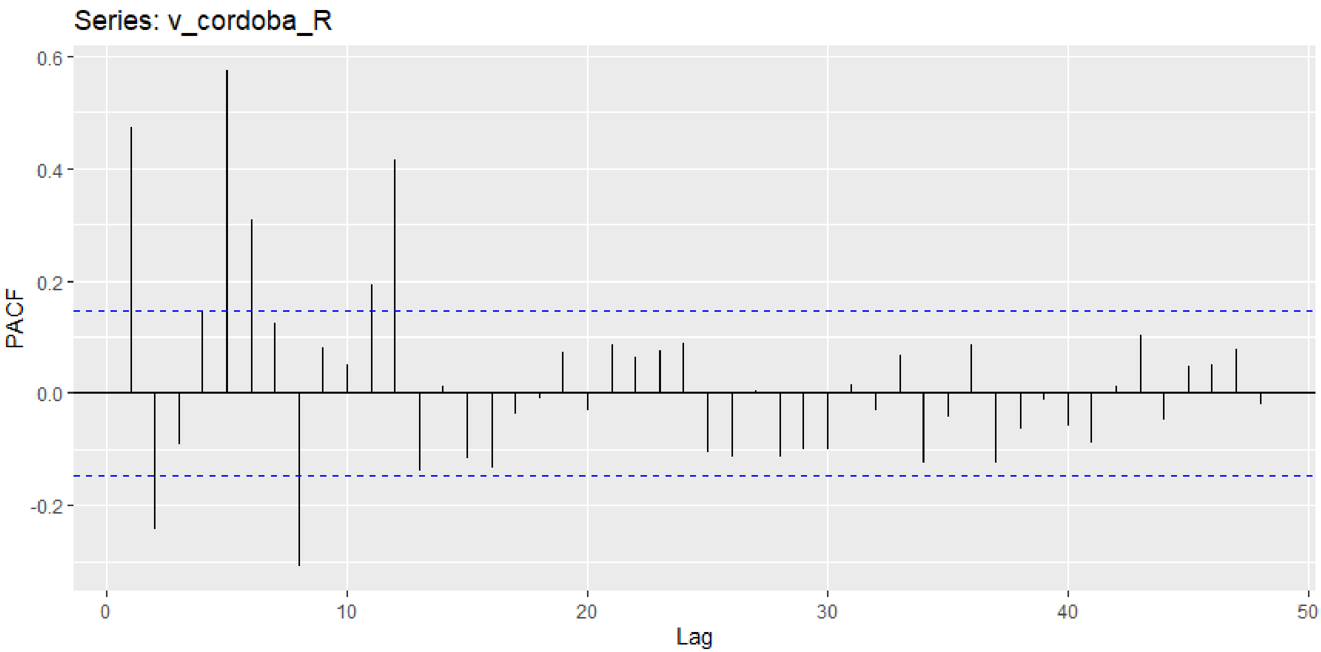
Las autocorrelaciones simples (ACF) y las parciales (PACF) aparecen representadas con las bandas de confianza que se calculan utilizando el error Standard aproximado, como $\pm 2/\sqrt{T}$

Observemos que estas bandas representan el intervalo de confianza en el que podría estar el coeficiente de autocorrelación calculado si el verdadero valor del poblacional fuera cero. Por esto, un coeficiente de correlación dentro de las bandas se considera cero.

Ejemplo: Veamos ahora un ejemplo de una serie con comportamiento estacional.

```
#Calculamos  las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48
ggAcf(v_cordoba_R, lag=48)
#Calculamos  las autocorrelaciones parciales hasta el retardo 48
ggPacf(v_cordoba_R, lag=48)
```





Se observa un comportamiento repetitivo de las autocorrelaciones cada 12 meses en la ACF, observando como la autocorrelación más fuerte es en los retardos múltiplos de 12.

2.3. PROCESO AUTORREGRESIVO AR(P).

Comenzamos con el modelo autoregresivo que **generaliza la idea de regresión** para representar la relación entre la variable de interés y las observaciones pasadas. Existe dependencia lineal entre las distintas observaciones de la variable.

$$AR(1) \equiv X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t$$

a_t es un proceso de ruido blanco con varianza σ^2

Esta dependencia puede también extenderse a las p observaciones pasadas **AR(p)**

$$AR(p) \equiv X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + a_t$$

Utilizado el operador de retardo la ecuación anterior se puede escribir como:

$$(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)\, X_t = a_t \qquad B^k (X_t) = X_{t-k}$$

2.3.1. El proceso AR(1).

$$AR(1) \equiv X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t$$

El modelo AR(1) es un proceso estacionario si $|\phi_1| < 1$

La función de autocorrelación es

$$\rho_k = \phi_1^k \Rightarrow$$

Va decreciendo de forma geométrica

Esto implica que la **ACF** de **un proceso AR(1)** pueda tener el siguiente aspecto:

$\phi_1 > 0$ → **La ACF será una función positiva y decreciente**

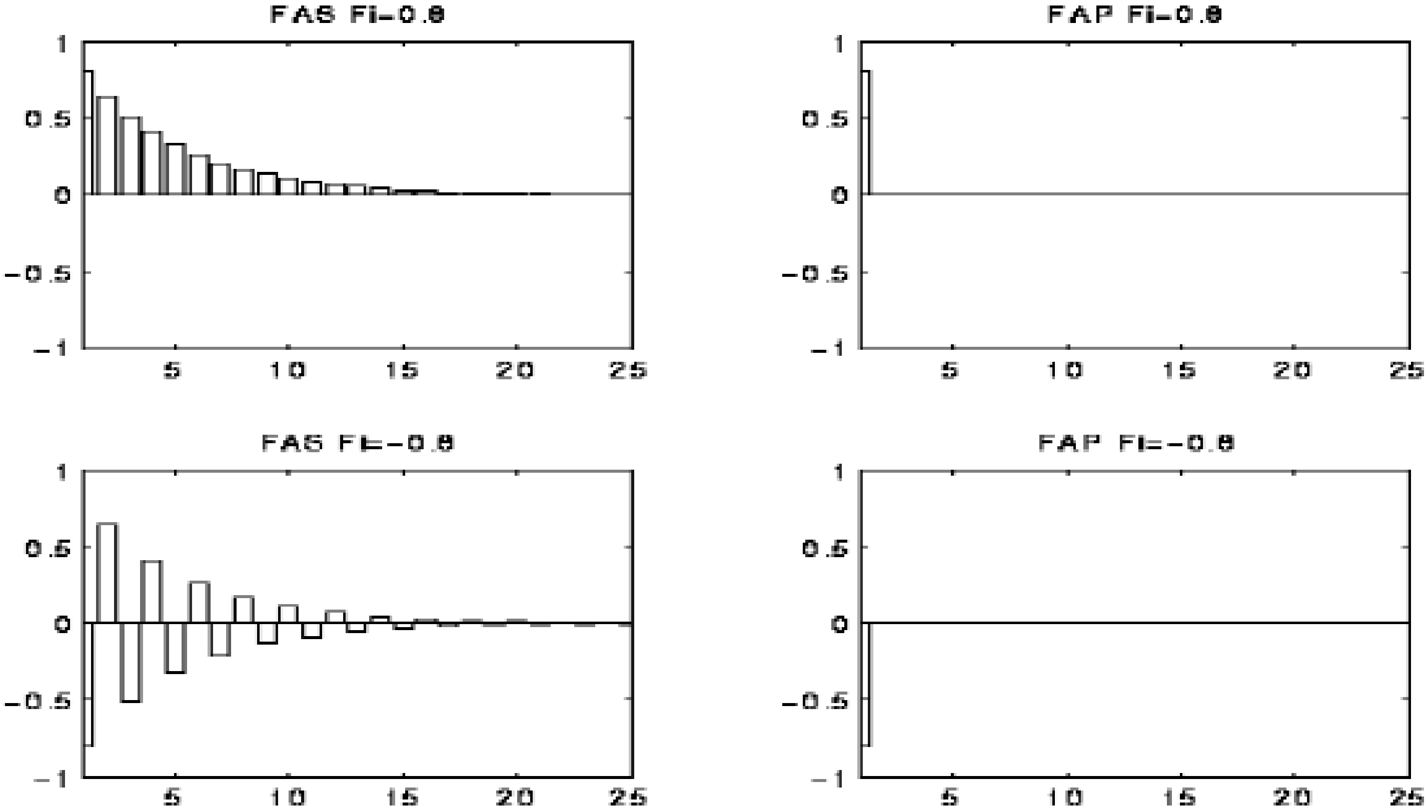
$\phi_1 < 0$ → **La ACF será una función alternada,** y tendrá retardos pares positivos, y retardos impares negativos.

En cuanto a la **PACF,** como **sólo existe influencia de primer orden**

$\phi_1 > 0$ → **La PACF tendrá un único retardo significativo, el primero, y será positivo.**

$\phi_1 < 0$ → **La PACF tendrá un único retardo significativo y será negativo.**

Ejemplo de funciones de autocorrelación para $\phi_1 \pm 0.8$



2.3.2. El proceso AR(2).

El proceso autorregresivo de segundo orden tiene por ecuación

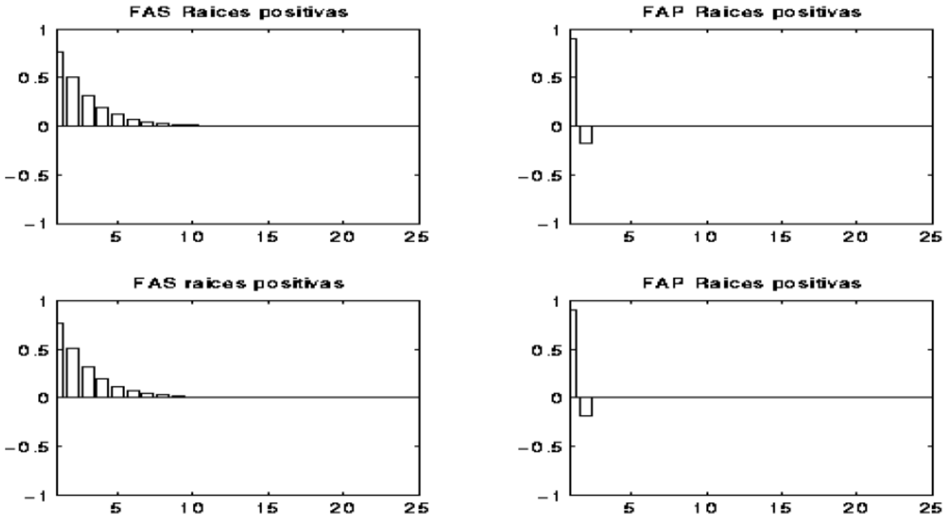
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t$$

Se puede demostrar que el proceso AR(2) será estacionario siempre que las raíces del denominado polinomio característico estén fuera del círculo unidad.

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$$

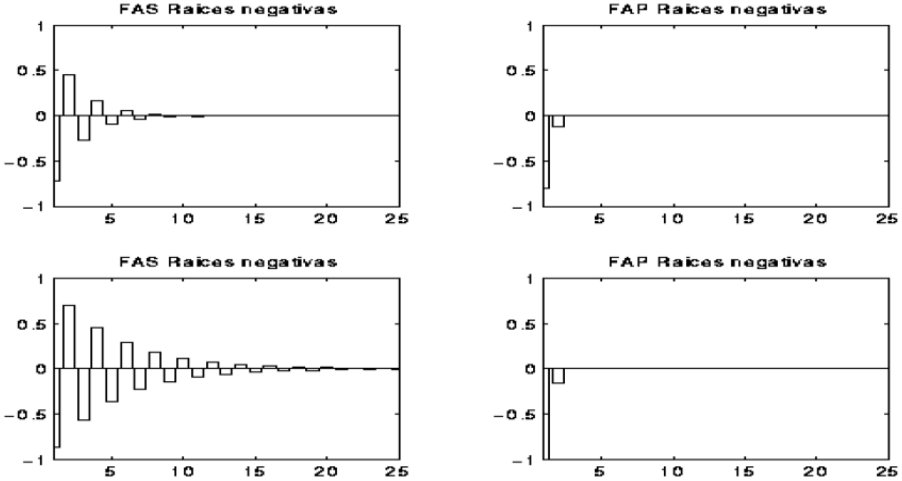
Los patrones clásicos que presentarían la ACF y la PACF para un proceso autoregresivo de segundo orden son los que se presentan a continuación.

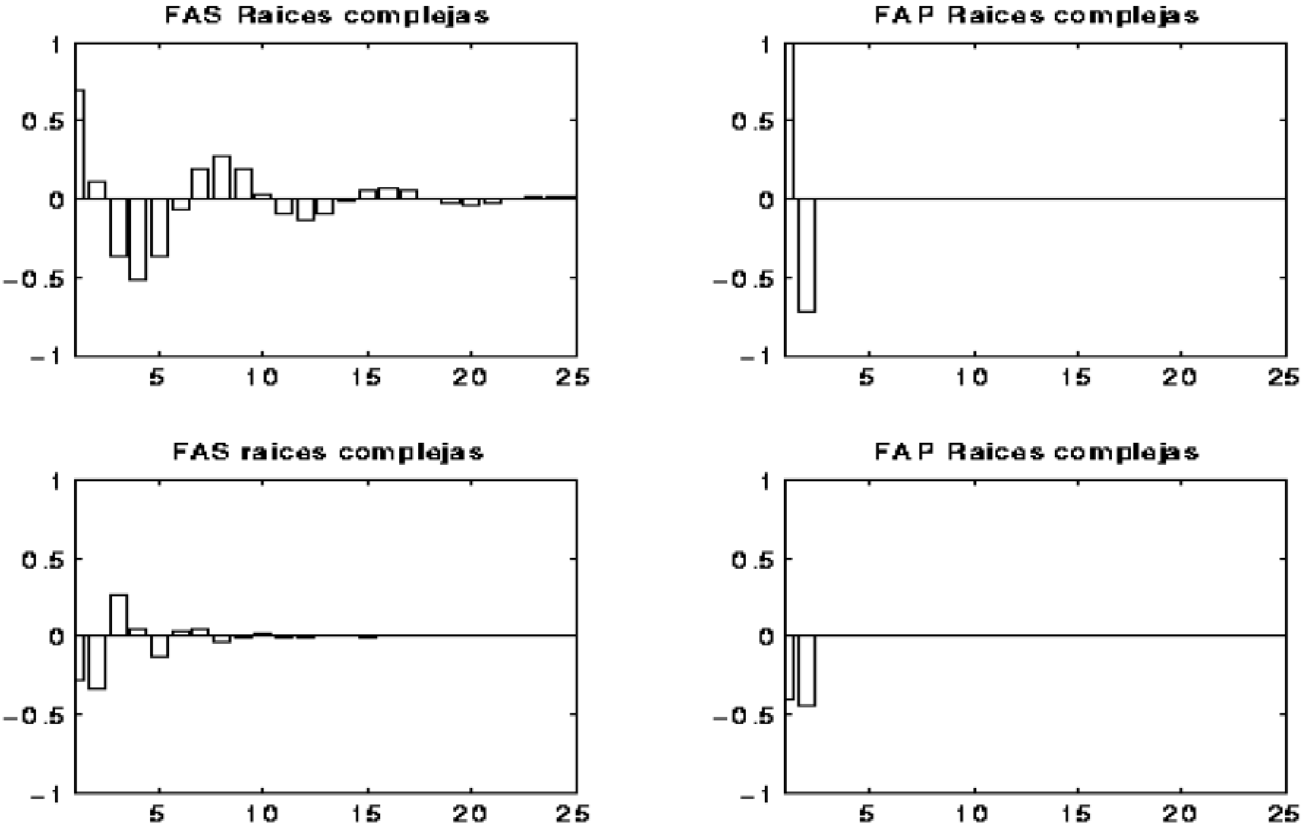
La PACF del proceso autoregresivo de segundo orden, tendrá los dos primeros retardos significativos.

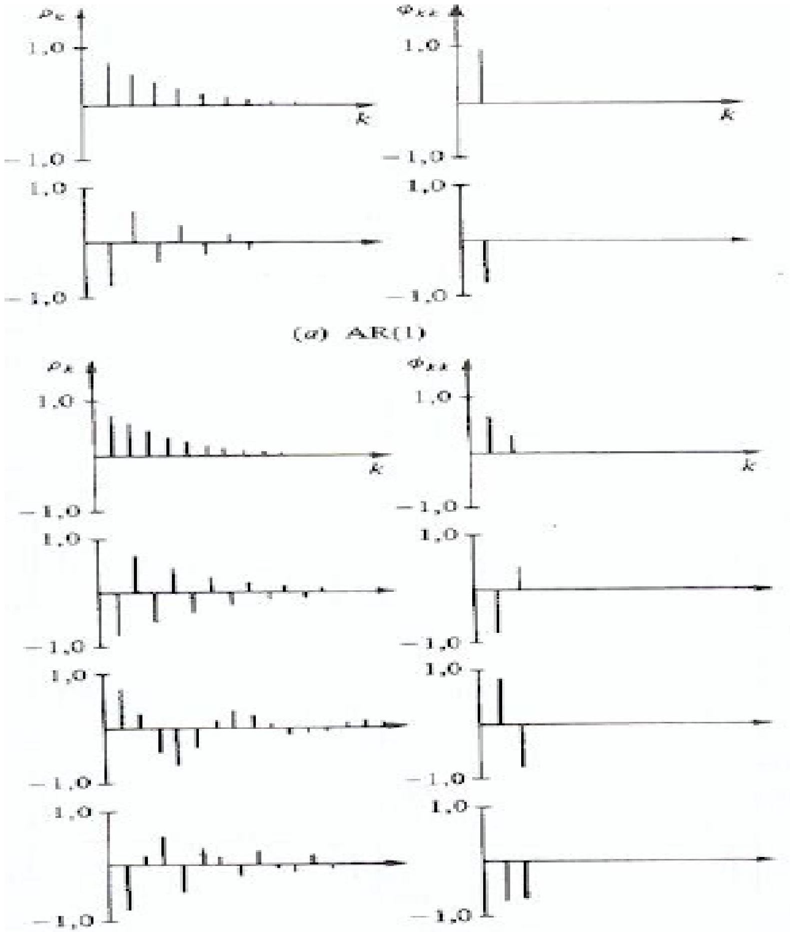


Raíces positivas

Raíces negativas




FAS Raices complejas
FAP Raices complejas
FAS raices complejas
FAP Raices complejas
1
0.5
0
-0.5
-1
5
10
15
20
25



(a) AR(1)

(b) AR(2)

2.3.3. El proceso autoregresivo general AR(p).

$$AR(p) \equiv X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + a_t$$

Veamos ahora la **condición de estacionariedad**

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$$

Así el proceso será estacionario si las raíces de dicho polinomio estén fuera del círculo unidad.

2.4. PROCESO DE MEDIAS MÓVILES MA(q).

Los modelos de medias móviles son modelos en el que la variable se obtiene como un promedio de variables ruido blanco.

Estos procesos son **la suma de procesos estacionarios y por lo tanto sea cual sea el valor del parámetro es estacionario** a diferencia de los modelos AR .

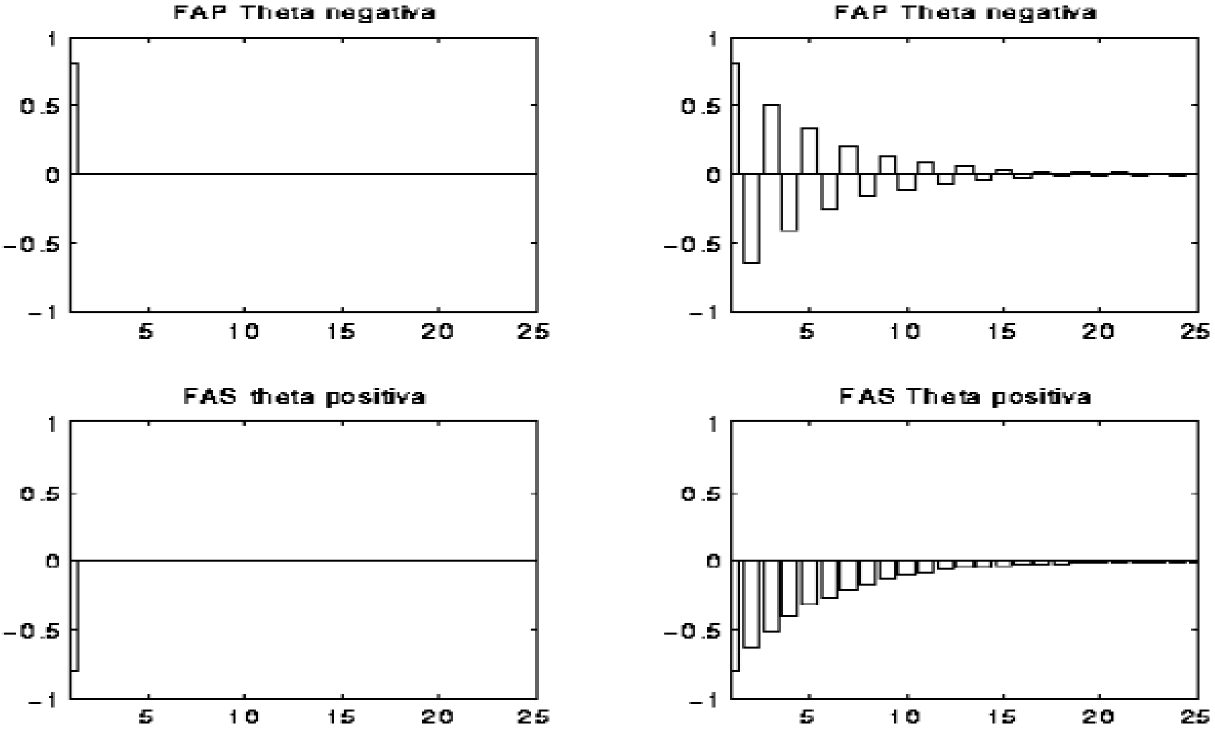
2.4.1. El proceso de media móvil de orden 1 MA(1).

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

El modelo puede escribirse en función del operador de retardo como:

$$X_t = \left(1 - \theta_1 B\right) Z_t$$

$|\theta_1| < 1$ ⇒ El proceso es ***invertible***.



2.4.2.- El proceso MA(q).

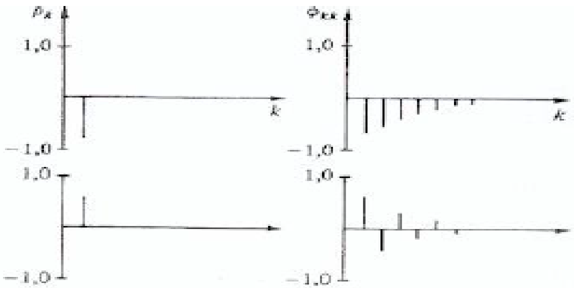
Generalizando la idea podemos escribir procesos cuyo valor actual no sólo dependa del último error, sino de los q últimos errores. Se obtiene entonces el proceso MA(q) cuya expresión general es:

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \ldots . - \theta_q Z_{t-q}$$

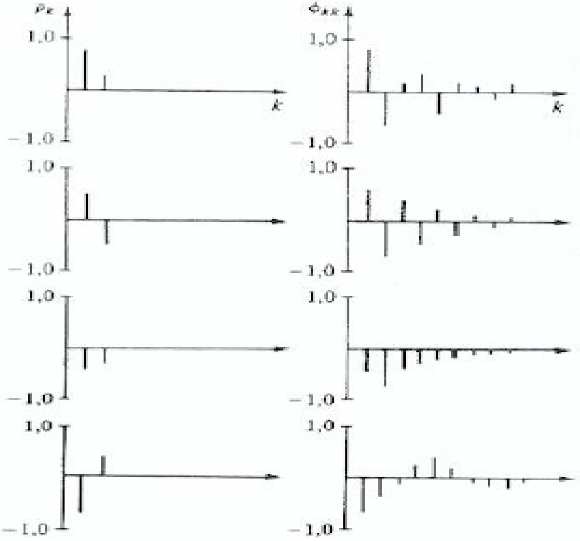
Introduciendo la notación del operador de retardo queda:

$$X_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots . - \theta_q B^q\right) Z_t \iff X_t = \theta_q\left(B\right) Z_t$$

Este proceso es la suma de procesos estacionarios y por lo tanto sea cual sea el valor de los parámetros es **estacionario. El proceso es invertible si las raíces del polinomio característico están fuera del círculo unidad.**



(a) MA(1)



(b) MA(2)

La función de autocorrelación de un proceso MA(q) tiene la misma *"forma"* que la función de autocorrelación parcial de un modelo AR(q). **Concluimos que existe una dualidad entre los modelos AR y MA, de manera que la ACF de un MA es como la PACF de un AR y viceversa.**

2.5. EL PROCESO ARMA(p,q).

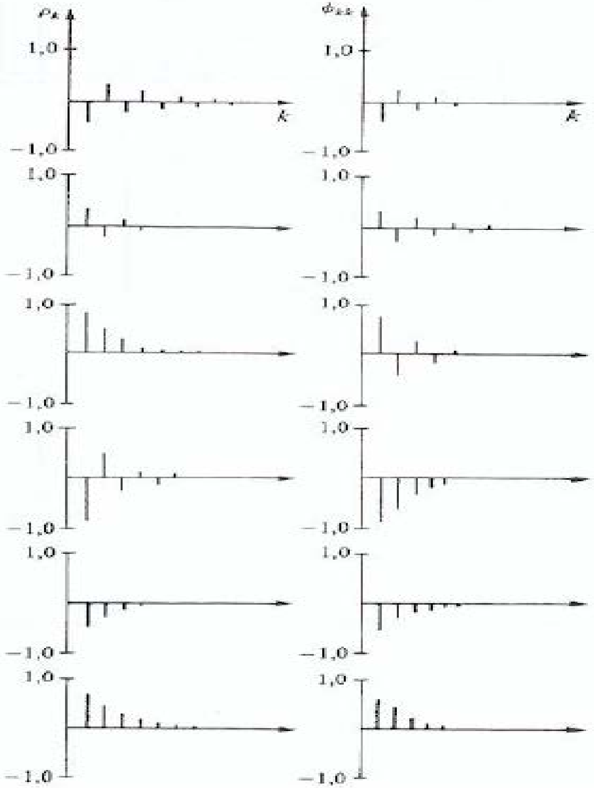
Una extensión natural de los modelos anteriores es aquella que incluye términos autorregresivos y términos de medias móviles. Se representan por la ecuación:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \ldots - \phi_p X_{t-p} = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \ldots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p\right) X_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q\right) Z_t$$

Este proceso es estacionario si lo es su parte AR y es invertible si lo es su parte MA.



ARMA(1,1)

IDENTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

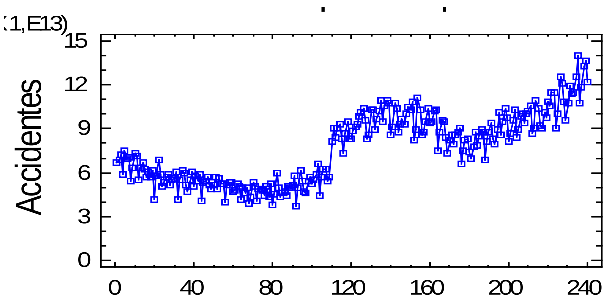
Proceso	Función de autocorrelación (ACF)	Función de autocorrelación parcial (ACFP)
MA(q)	Solo los **q** primeros coeficientes son significativos. El resto se anulan bruscamente (coef. 0 para **retardo >q**)	Decrecimiento rápido exponencial atenuado u ondas sinusoidales.
AR(p)	Decrecimiento rápido exponencial atenuado u ondas sinusoidales.	Solo los **p** primeros coeficientes son significativos. El resto se anulan bruscamente (coef. 0 para retardo >q)
ARIMA(p, d, q)	Comportamiento irregular en los retardos (1, ... , q) con **q** picos. Decrecimiento para retardos posteriores a **q**.	Decrece (aproximadamente con exponenciales atenuados y ondas sinusoidales). No cero pronto.

2.6.- PROCESOS INTEGRADOS: EL MODELO ARIMA(p,d,q).

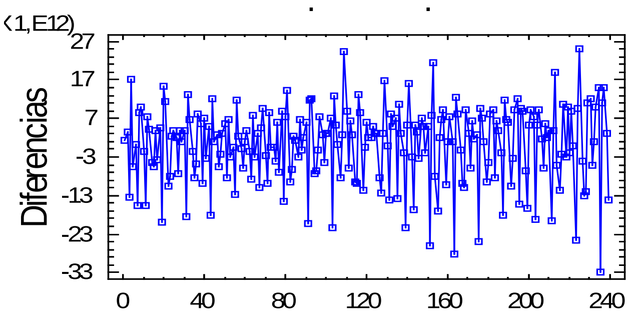
- Cuando **el nivel de la serie no es constante en el tiempo**, pudiendo en particular tener tendencia creciente o decreciente, diremos que **la serie es no estacionaria en la media.**
- Cuando **la variabilidad se modifica en el tiempo**, diremos que la serie **es no estacionaria en la varianza.**

Los procesos no estacionarios más importantes son **los procesos integrados**, que tienen la propiedad fundamental de que **al diferenciarlos se obtienen procesos estacionarios.**

Frecuentemente las series económicas no son estacionarias pero sus diferencias relativas, o las diferencias cuando medimos la variable en logaritmos, son estacionarias. Por ejemplo la serie número de accidentes es no estacionaria en media.



$$\omega_t = X_t - X_{t-1}$$

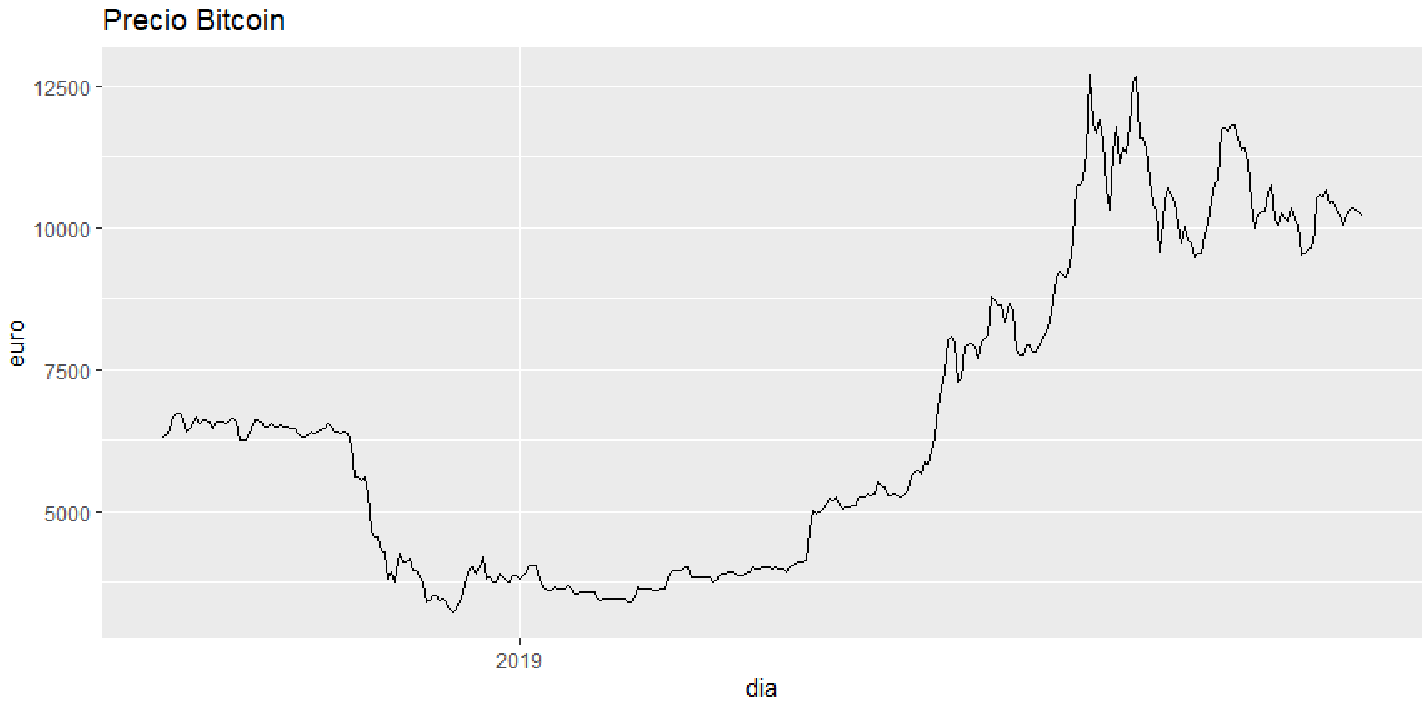


Diremos que un proceso es integrado de orden 1 si $\omega_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}$ ya es estacionaria.

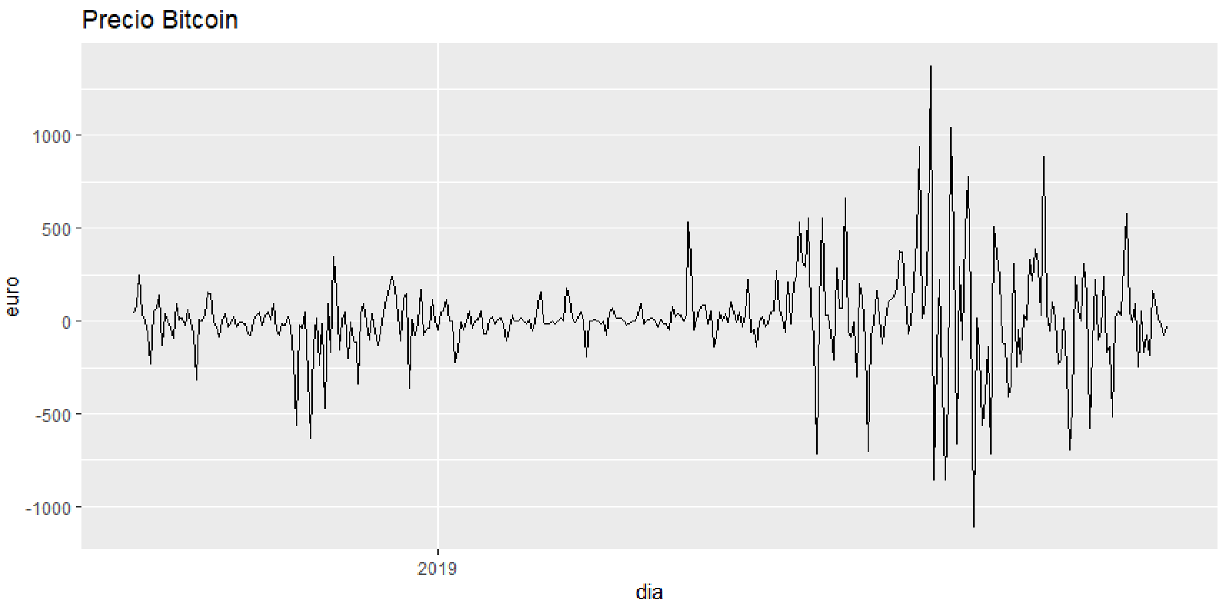
En general si necesitamos realizar “d” diferencias diremos que es un proceso integrado de orden d. Así el modelo ARIMA(p,d,q) se expresa:

$$\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p\right)(1-B)^d\ X_t=\left(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q\right)Z_t$$

```
autoplot(precio)+ ggtitle("Precio Bitcoin") + xlab("dia") +
ylab("euro")
```

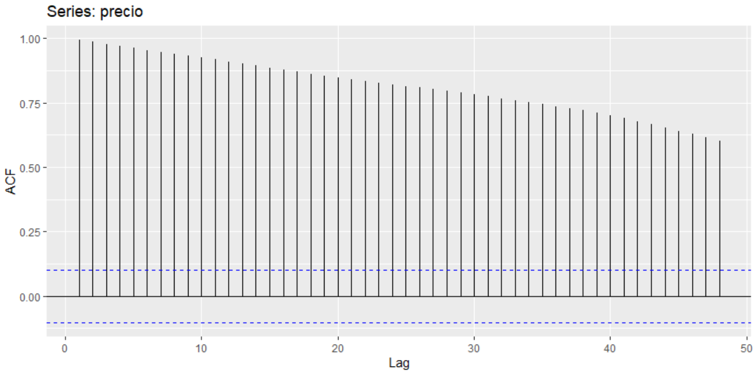


```
#Serie diferenciada
autoplot(diff(precio))+  ggtitle("Precio Bitcoin") +  xlab("dia") +
ylab("euro")
```



Como vemos, la serie ya tiene media constante aunque podría ser que la varianza no lo fuera.

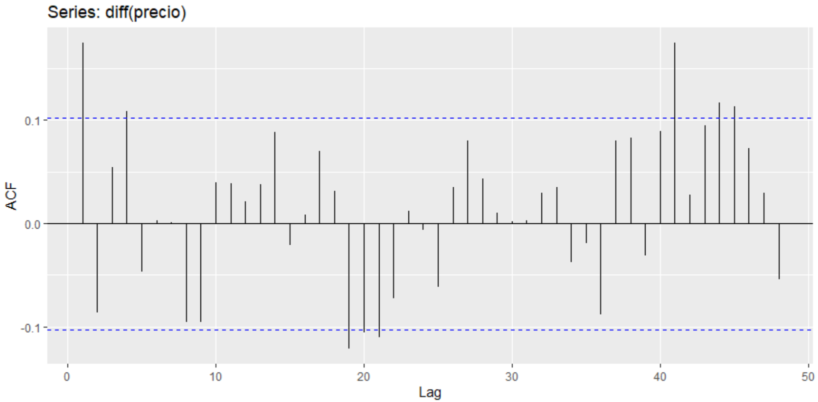
Si estudiamos el correlograma de la serie no estacionaria vemos que decrece muy lentamente y de forma lineal.



ggAcf(precio, lag=48)

#Calculamos las autocorrelaciones simples de la serie diferenciada hasta el retardo 48

ggAcf(diff(precio), lag=48)



2.7.- EL MODELO ARIMA ESTACIONAL.

En el tema de métodos descriptivos vimos que podíamos eliminar la estacionalidad mediante diferencias con los índices estacionales.

Podemos convertir una serie con estacionalidad en estacionaria mediante las diferencias de orden s, siendo s el periodo de la serie.

Definimos el operador diferencia de periodo s o diferencia estacional de orden 1 como

$$\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s} = \left(1 - B^s\right) X_t$$

Un modelo estacional general será de la forma $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$

$$\left(1-\Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \ldots - \Phi_P B^{Ps}\right)\left(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p\right)\left(1-B^s\right)^D (1-B)^d X_t =$$

$$\left(1-\Theta_1 B - \Theta_2 B^{2s} - \ldots - \Theta_Q B^{Qs}\right)\left(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q\right) Z_t$$

Veamos algunos ejemplos de este modelo:

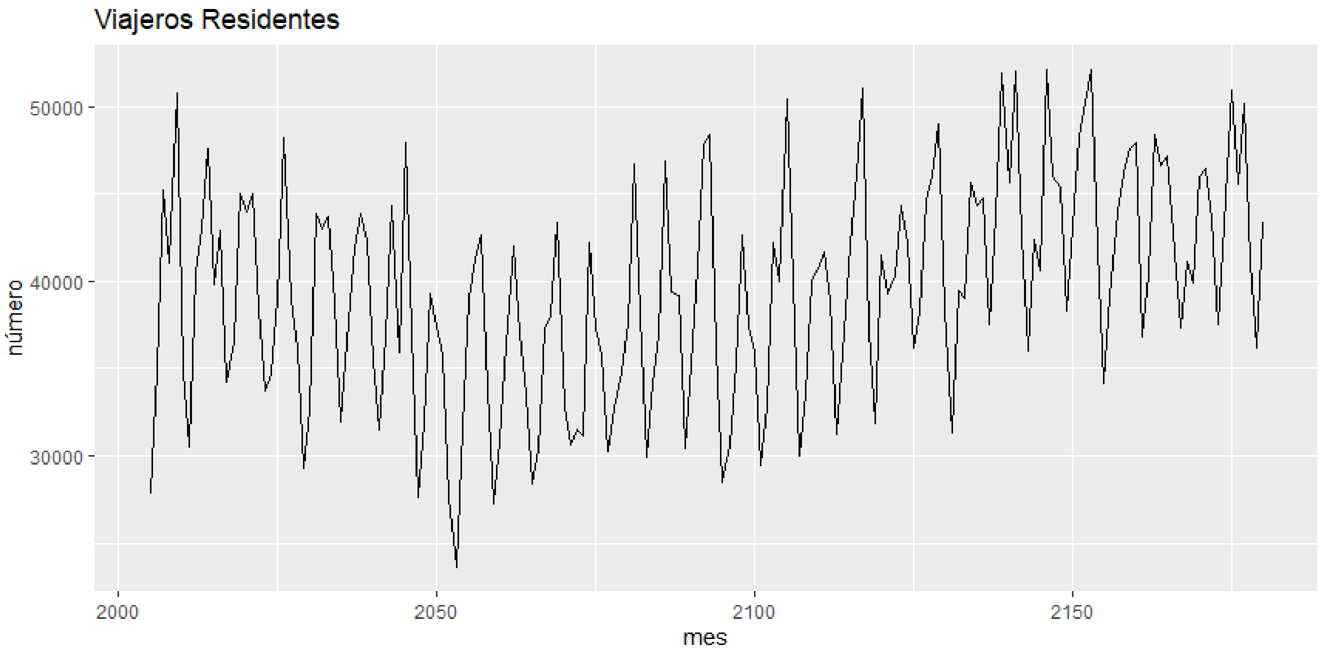
$$ARIMA(1,0,0)(1,0,0)_{12} \Rightarrow \left(1-\Phi_1 B^{12}\right)\left(1-\phi_1 B\right) X_t = Z_t$$

$$ARIMA(1,0,0)(0,0,1)_{12} \Rightarrow \left(1-\phi_1 B\right) X_t = \left(1-\Theta_1 B^{12}\right) Z_t$$

$$ARIMA(2,0,0)(1,0,0)_{12} \Rightarrow \left(1-\Phi_1 B^{12}\right)\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right) X_t = Z_t$$

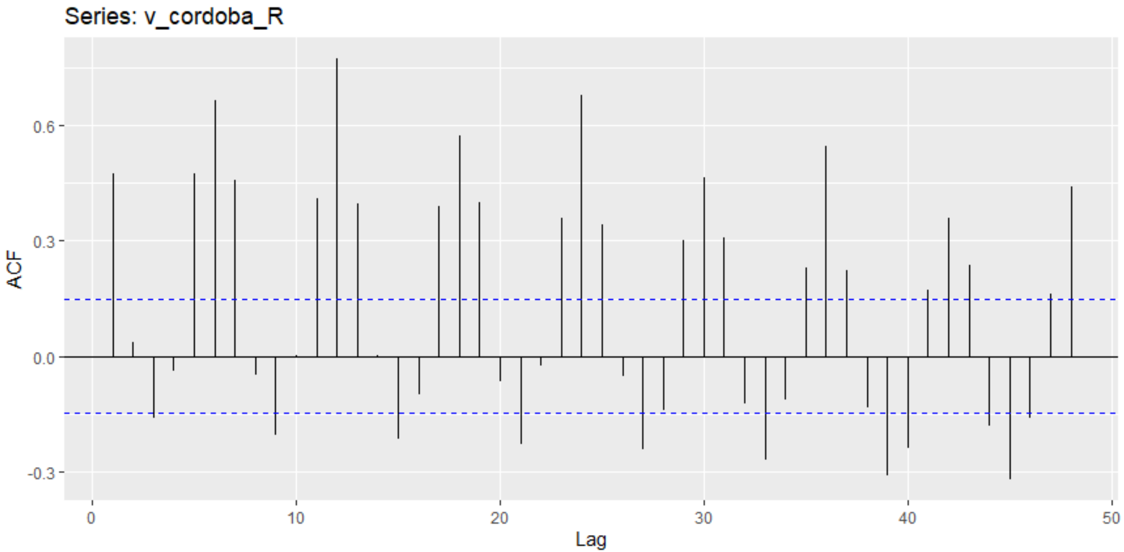
Ejemplo: La serie de viajeros en Córdoba es claramente estacional. La siguiente sintaxis nos permite ver la gráfica de la serie y los autocorrelogramas.

```
autoplot(v_cordoba_R)+  ggtitle("Viajeros Residentes") +  xlab("mes") +  ylab("número")
```



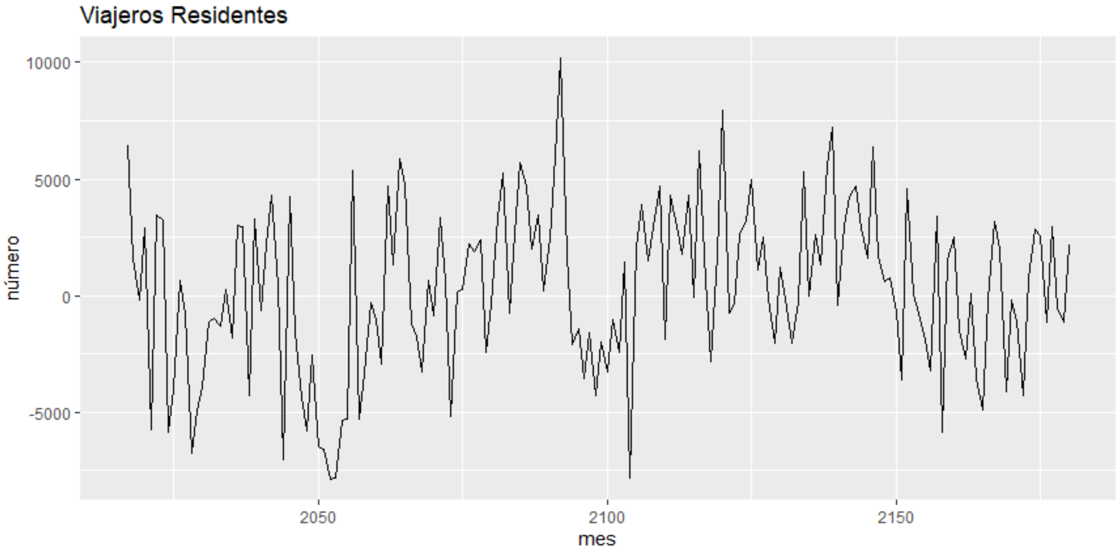
Si representamos sus correlogramas se observa la estructura estacional y la no estacionariedad en media que se refleja en el gráfico de la serie.

```
#Calculamos  las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48

ggAcf(v_cordoba_R, lag=48)
```

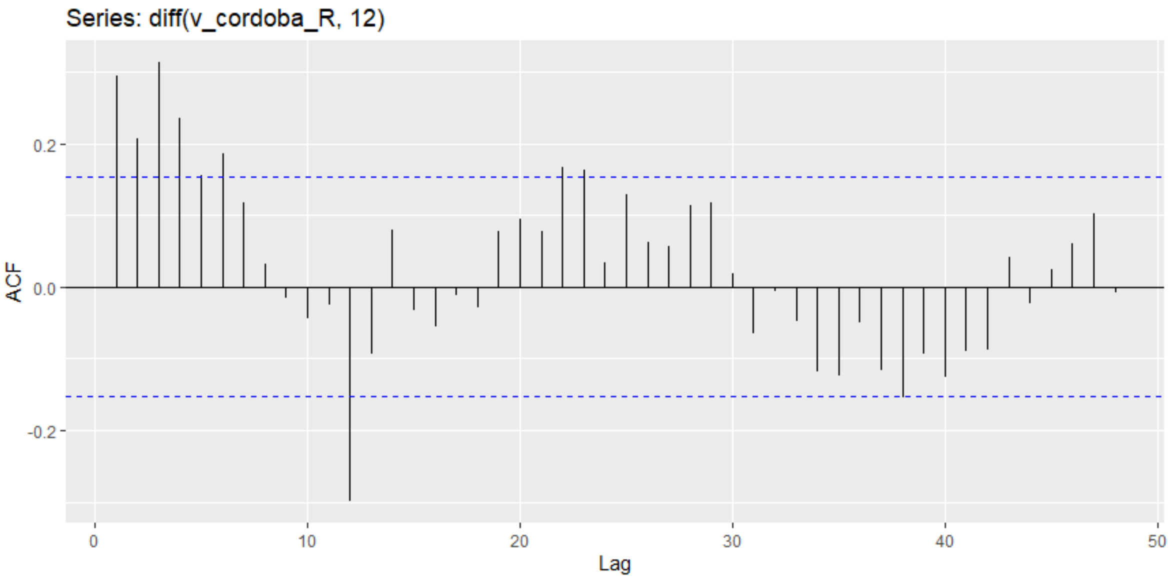


Si diferenciamos la serie, mediante una diferenciación de orden estacional, y calculamos sus funciones de autocorrelación tenemos

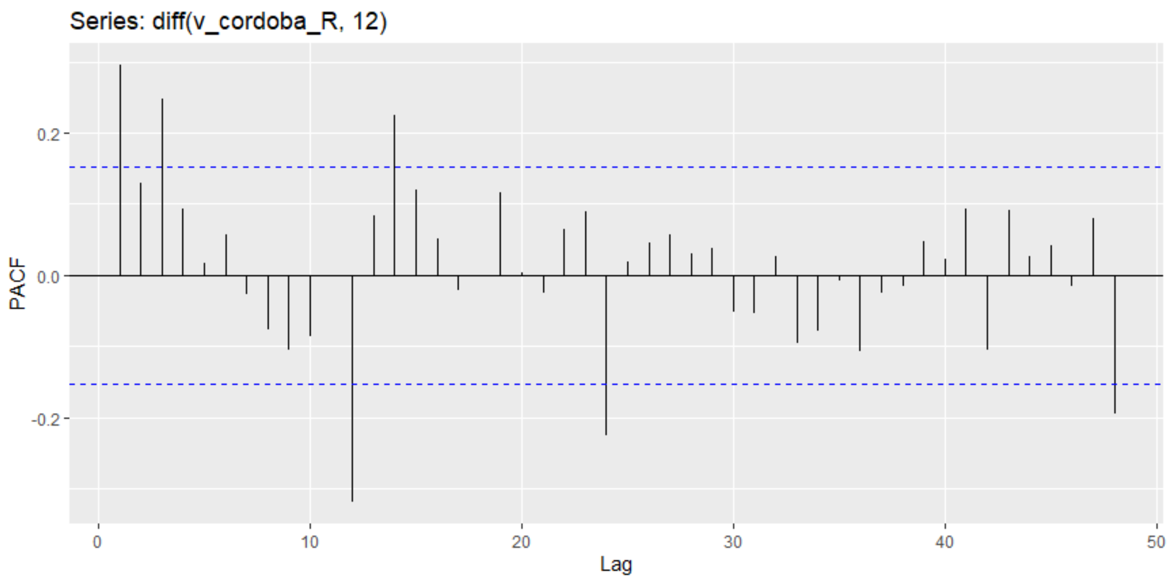
```
#Serie diferenciada estacionalmente

autoplot(diff(v_cordoba_R,12))+  ggtitle("Viajeros Residentes") +  xlab("mes") +  ylab("número")
```



```
#Calculamos  las autocorrelaciones simples de la serie diferenciada
ggAcf(diff(v_cordoba_R,12), lag=48)
```



```
#Calculamos  las autocorrelaciones parciales de la serie diferenciada
ggPacf(diff(v_cordoba_R,12),lag=48)
```



En donde podemos ver que el proceso ya es estacionario y teniendo en cuenta las correlaciones distintas de cero tanto en las correlaciones simples como en las parciales podría ajustarse a un modelo

$$ARIMA(3,0,0)(0,1,1)_{12}$$

3.1.- La Metodología Box-Jenkins.

Anteriormente hemos estudiado las propiedades teóricas de los modelos ARIMA, a continuación vamos a analizar **como ajustar dichos modelos a series reales.** Box y Jenkins propusieron utilizar una metodología que se resume en cuatro etapas:

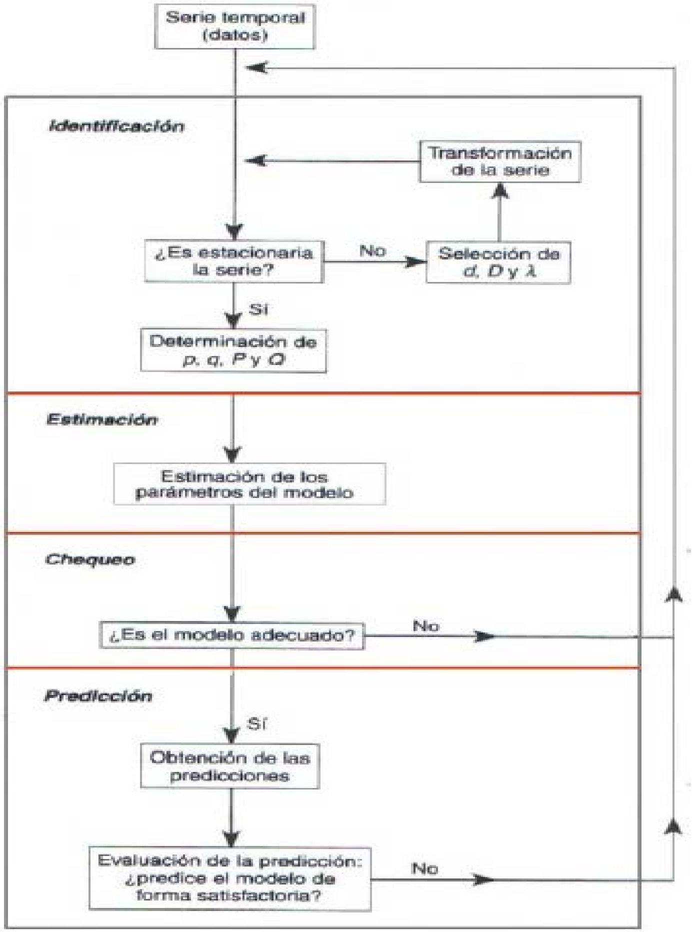
- **Paso 1. Identificación del modelo:** Utilizamos los datos históricos de la serie para encontrar el modelo apropiado.

- **Paso 2. Estimación:** Estimamos los parámetros del modelo escogido utilizando los datos históricos.

- **Paso 3. Validación del modelo:** Realizamos distintos contrastes para decidir si el modelo construido es adecuado. Si no lo es volveríamos al paso 1.

- **Paso 4. Predicción:** Una vez que el modelo ha sido construido y comprobada su adecuación lo utilizamos para hacer predicciones.

METODOLOGÍA BOX-JENKINS



3.2 TRANSFORMACIONES PARA ESTABILIZAR LA VARIANZA.

Cuando la falta de estacionariedad además viene dada por una varianza que aumenta o disminuye con la media de la serie, podemos utilizar las transformaciones Box-Cox para estabilizarla. Dichas transformaciones tienen la expresión general:

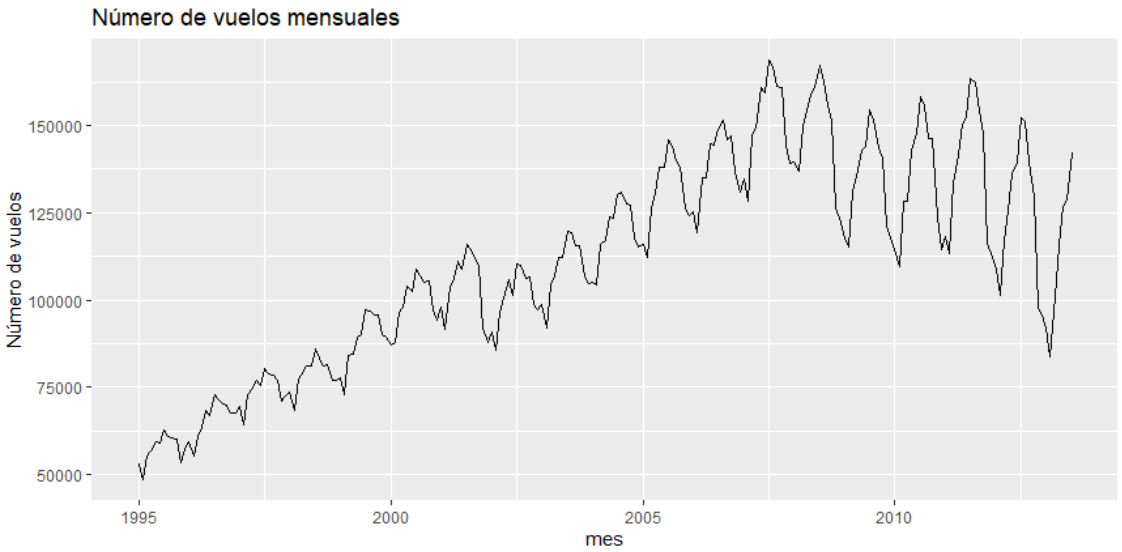
$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y^{\lambda}-1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log y & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Esta familia se utiliza para valores de y mayores que cero, pero se puede expresar de forma más general utilizando el valor de λ_2 para que y sea positivo.

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{(y+\lambda_2)^{\lambda_1}-1}{\lambda_1} & \text{si } \lambda_1 \neq 0 \\ \log(y+\lambda_2) & \text{si } \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

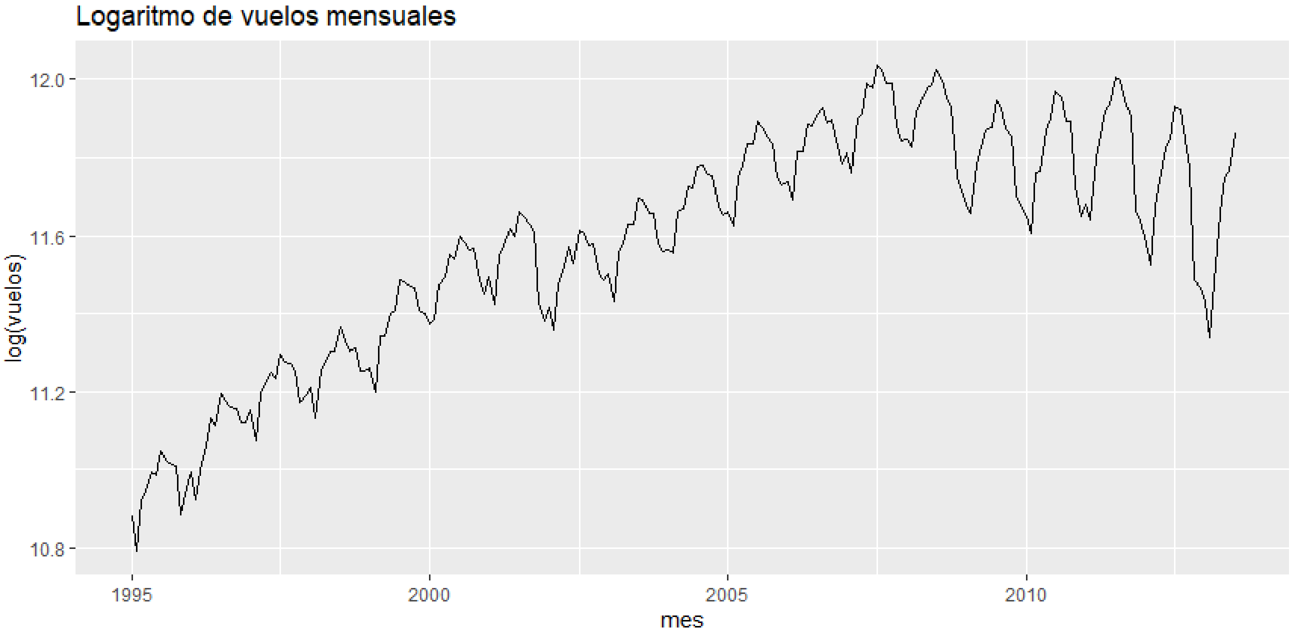
Por ejemplo, la serie número de vuelos España desde Enero de 1995 tiene la siguiente representación gráfica:

```
#Número de vuelos en España
vuelos <- ts(VUELOS[,-1], start=c(1995,1), frequency=12)
autoplot(vuelos)+  ggtitle("Número de vuelos mensuales") +
  xlab("mes") +  ylab("Número de vuelos")
```



Para estabilizar la varianza tomamos logaritmos y representamos la serie para observar el efecto de esta transformación.

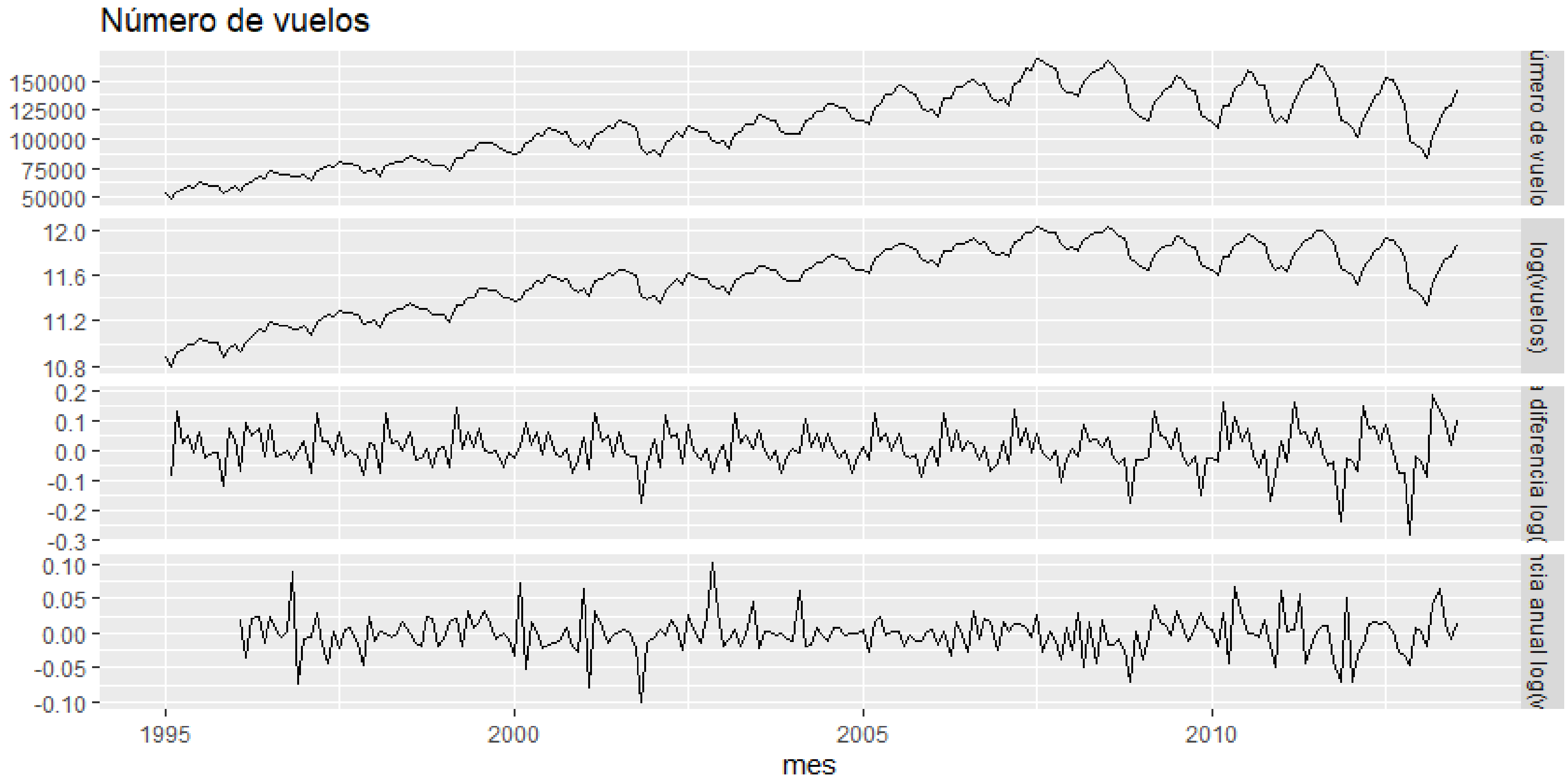
```
autoplot(log(vuelos))+  ggtitle("Logaritmo de vuelos mensuales") +
  xlab("mes") +  ylab("log(vuelos)")
```



Mediante la función cbind creamos un dataframe con la serie original, el logaritmo de la serie, el logaritmo diferenciado una vez y sobre esta la diferenciación estacional. Estas cuatro series son representadas juntas utilizando el operador pipe de la librería dyplr

```
#Podemos representar a la vez la serie transformada por log y diferenciada
#la función cbind crea un dataframe con las columnas de las series
#el operador %>% nos facilita la comprensión de funciones anidadas
#En este caso la función autoplot se aplica al resultado de cbind
```

```
cbind("número de vuelos" = vuelos,
          "log(vuelos)" = log(vuelos),
    "primera diferencia log(vuelos)" = diff(log(vuelos)),
    "diferencia anual log(vuelos)" = diff(diff(log(vuelos)),12)) %>%
  autoplot(facets=TRUE) + xlab("mes") + ylab("") +
  ggtitle("Número de vuelos")
```


Número de vuelos
150000
125000
100000
75000
50000
12.0
11.6
11.2
10.8
0.2
0.1
0.0
-0.1
-0.2
-0.3
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
1995
2000
2005
2010
mes
log(vuelos)

3.3. IDENTIFICACIÓN DEL MODELO ARMA

La identificación puede hacerse siguiendo las siguientes reglas:

1.- **Decidir cual es el orden máximo de las partes AR y MA a la vista de las funciones de autocorrelación muestrales.**

2.- **Evitar la identificación inicial de modelos mixtos** ARMA y comenzar con modelos AR o MA, preferiblemente de orden bajo (*principio de parsimonia*). En la práctica la mayoría de las series reales pueden representarse con modelos ARMA con p y q menores que 3.

3.- **Intentar identificar la estructura de los valores separados por s periodos** en el caso de series con componente estacional.

3.4. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS.

Comenzaremos con un modelo sin parte estacional $ARMA(p,q)$

$$\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-....-\phi_p B^p\right)X_t=\left(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-....-\theta_q B^q\right)Z_t$$

Se trata de estimar $\phi_1,...,\phi_p,\theta_1,...,\theta_q,\sigma^2 \ y \ \mu$

Se puede demostrar que si el modelo ARMA es estacionario e invertible, **los procedimientos de estimación máximo verosímil y estimación por mínimos cuadrados condicionales (CLS)** o no condicionales **conducen a estimadores óptimos.**

Ejemplo:

Vamos a estudiar las series de tasa de paro en España, en Cataluña y en la Comunidad de Madrid. Estas series las tenemos en el fichero Paro que tiene por columnas el paro por comunidades autónomas.

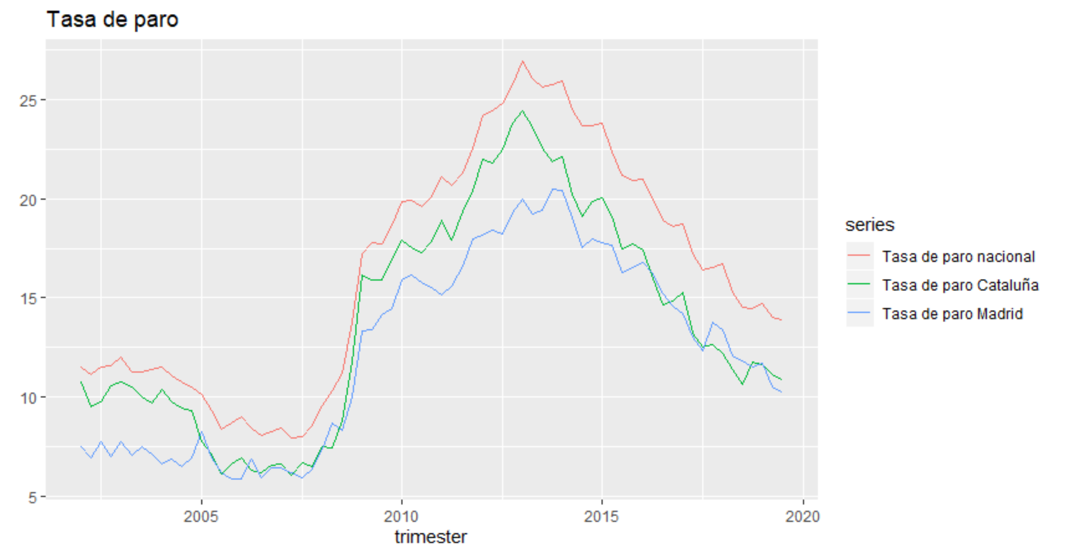
Arima1.R* × | Paro × | bitcoin.R × | fitprecio1 × | VUELOS ×

Filter

	...1	Total Nacional	01 Andalucía	02 Aragón	03 Asturias, Principado de	04 Balears, Illes	05 Canarias	06 Cantabria	07 Castilla y León	08 Castilla - La Mancha	09 Cataluña	10 Comunitat Valenciana	11 Extremadura
1	2002T1	11.55	18.95	5.42	9.15	8.96	10.57	9.54	10.83	9.72	10.76	10.07	19.
2	2002T2	11.15	18.62	5.86	10.28	6.74	11.33	9.73	10.65	9.35	9.53	11.19	18.
3	2002T3	11.49	20.26	5.57	9.67	6.07	11.11	10.25	10.23	9.17	9.78	11.29	19.
4	2002T4	11.61	20.15	6.54	10.12	8.69	11.32	10.58	10.15	9.85	10.61	10.71	18.
5	2003T1	11.99	19.00	7.38	12.44	12.68	10.69	10.07	11.39	10.93	10.74	11.60	19.
6	2003T2	11.28	17.95	6.74	10.82	9.39	11.43	10.29	11.17	10.07	10.53	11.42	16.
7	2003T3	11.30	18.50	5.88	11.80	7.02	11.20	10.86	10.83	9.75	10.02	11.27	15.
8	2003T4	11.37	18.35	6.53	10.14	10.01	12.04	10.42	11.02	9.80	9.72	10.68	17.
9	2004T1	11.50	17.15	6.82	11.46	12.75	12.79	11.44	11.61	9.97	10.37	10.26	17.
10	2004T2	11.09	17.36	5.52	10.34	9.06	12.70	10.55	10.97	8.90	9.76	10.27	18.
11	2004T3	10.74	17.47	4.73	9.25	6.77	11.45	9.16	9.77	8.98	9.44	11.19	16.
12	2004T4	10.53	15.99	5.56	10.24	8.09	10.75	11.10	10.48	10.20	9.32	10.11	17.
13	2005T1	10.17	14.29	6.16	11.18	10.70	12.74	9.83	10.15	9.63	7.79	10.24	17.
14	2005T2	9.32	13.71	6.43	10.68	6.06	12.18	9.11	8.65	9.41	7.11	9.27	15.
15	2005T3	8.41	13.50	5.23	8.99	4.91	11.03	7.07	7.68	8.44	6.13	7.88	15.

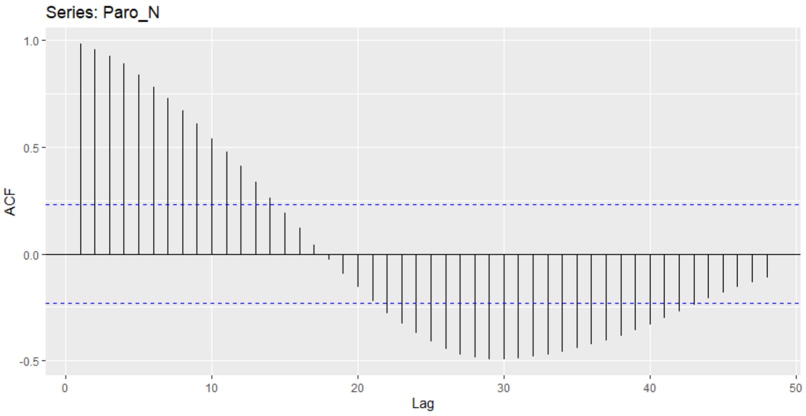
```r
#Tasa de paro por comunidades
Paro_T <- ts(Paro[,-1], start=c(2002,1), frequency=4)
Paro_N <- ts(Paro[,2], start=c(2002,1), frequency=4)
Paro_C <- ts(Paro[,11], start=c(2002,1), frequency=4)
Paro_Ma<- ts(Paro[,15], start=c(2002,1), frequency=4)
```

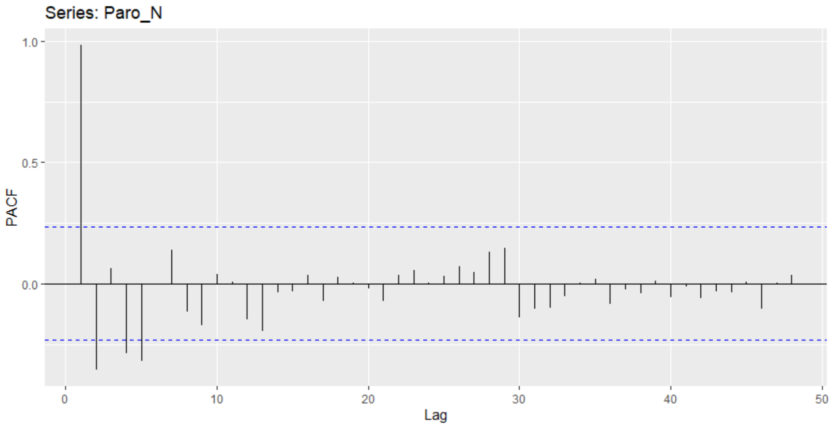
```r
cbind("Tasa de paro nacional" = Paro_N,
    "Tasa de paro Cataluña" = Paro_C,
    "Tasa de paro Madrid" = Paro_Ma) %>%
 autoplot() + xlab("trimestre") + ylab("") +
 ggtitle("Tasa de paro")
```



Para la serie Paro nacional comenzamos por calcular los autocorrelogramas

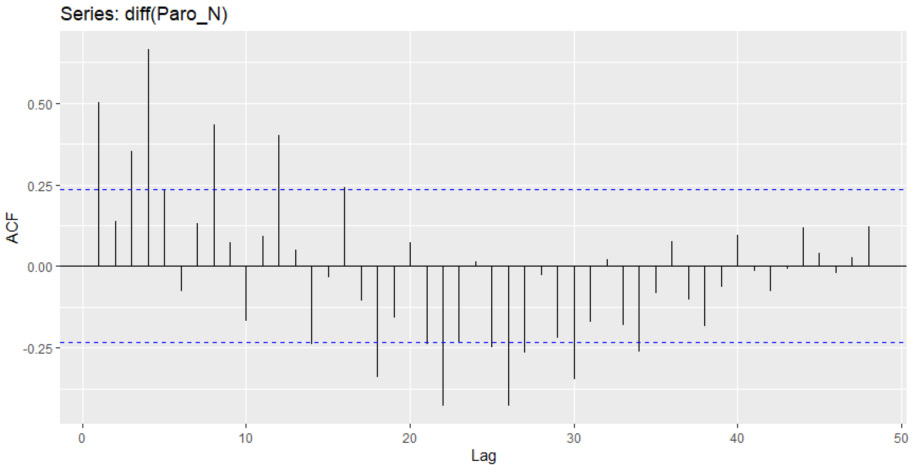
```
#Calculamos  las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48
ggAcf(Paro_N, lag=48)
#Calculamos  las autocorrelaciones parciales hasta el retardo 48
ggPacf(Paro_N, lag=48)
```

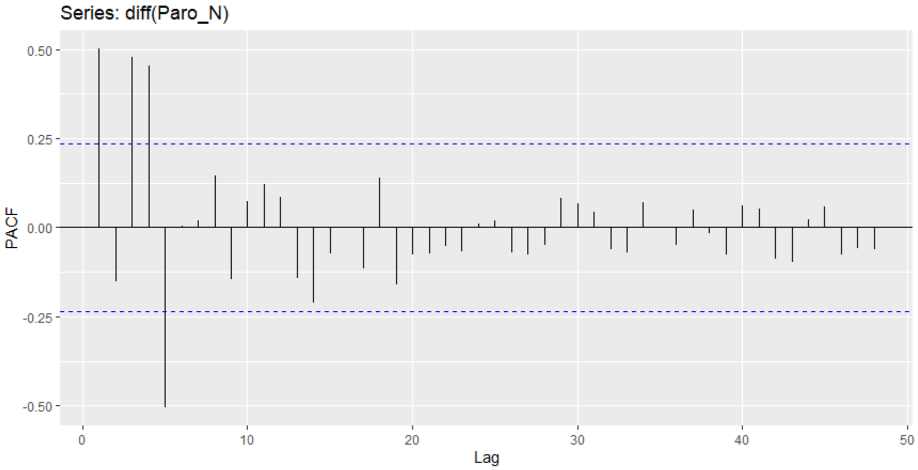




Puesto que en el gráfico de la serie hemos visto que la media no es constante porque la serie tiene tendencia y el ACF decrece de forma lenta es necesario hacer una diferenciación de orden 1.

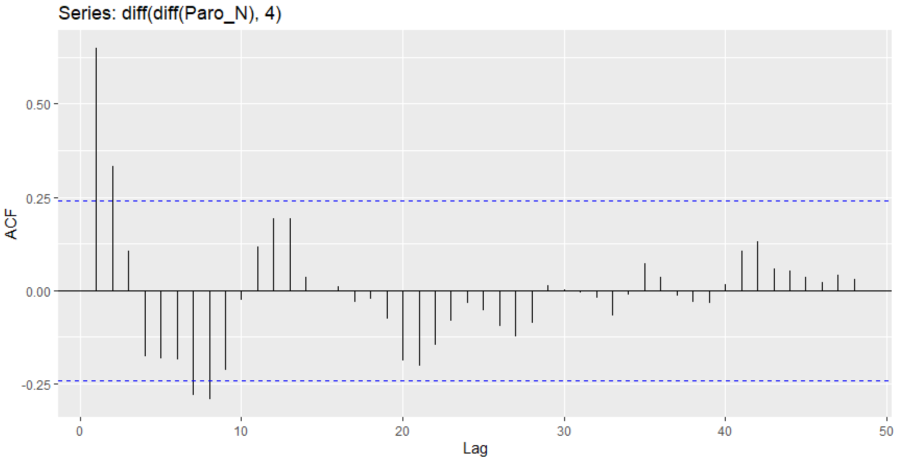
```
#Calculamos  las autocorrelaciones simples hasta el retardo 48
ggAcf(diff(Paro_N), lag=48)
#Calculamos  las autocorrelaciones parciales hasta el retardo 48
ggPacf(diff(Paro_N), lag=48)
```

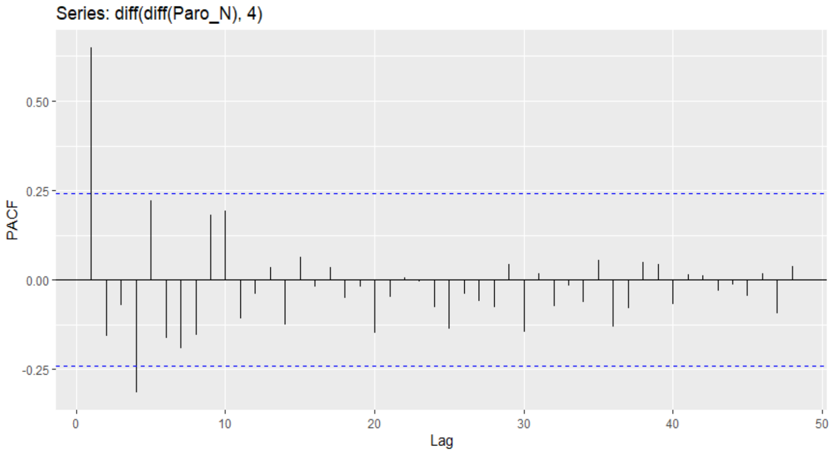




Observamos que las autocorrelaciones ya decrecen de forma más rápida pero los retardos múltiplos de 4 siguen teniendo una correlación muy alta. Por esto, es necesario hacer una diferenciación de orden 4 sobre la de orden 1.

```
ggAcf(diff(diff(Paro_N),4), lag=48)
ggPacf(diff(diff(Paro_N),4), lag=48)
```

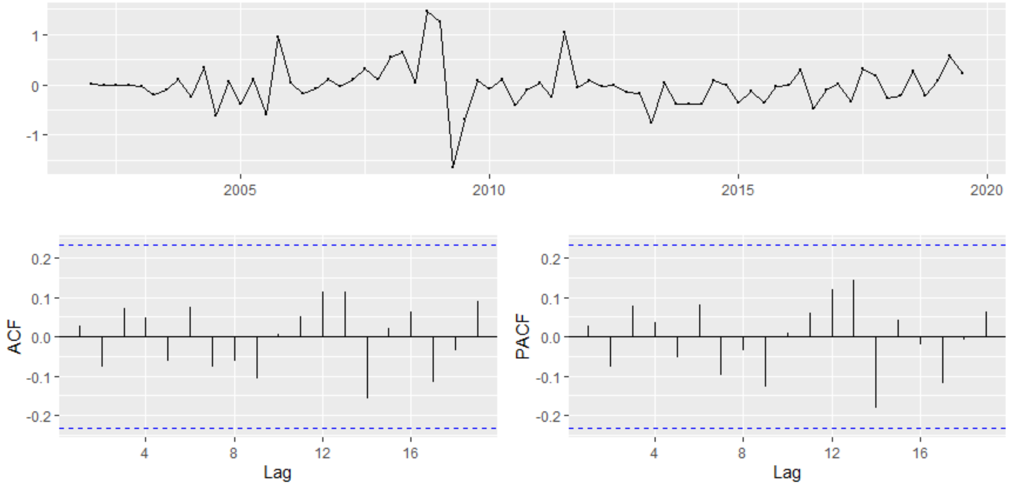




Con la serie doblemente diferenciada vemos, en el PACF, que la autocorrelación de orden 1 sigue siendo significativa y también la de orden 4. Por esto nuestro candidato a ajustar sería: ARIMA(1,1,0)(0,1,1)$_4$, o cualquiera de sus variaciones en las posiciones autoregresivas o de medias móviles.

```
#Ajuste manual fitARIMA<-arima(Paro_N,order=c(1,1,0), seasonal=c(0,1,1))

ct<-coeftest(fitARIMA) resi<-residuals(fitARIMA)  ggtsdisplay(resi)

Paro_N %>%  arima(order=c(1,1,0), seasonal=c(0,1,1)) %>%   residuals() %>% ggtsdisplay()
```

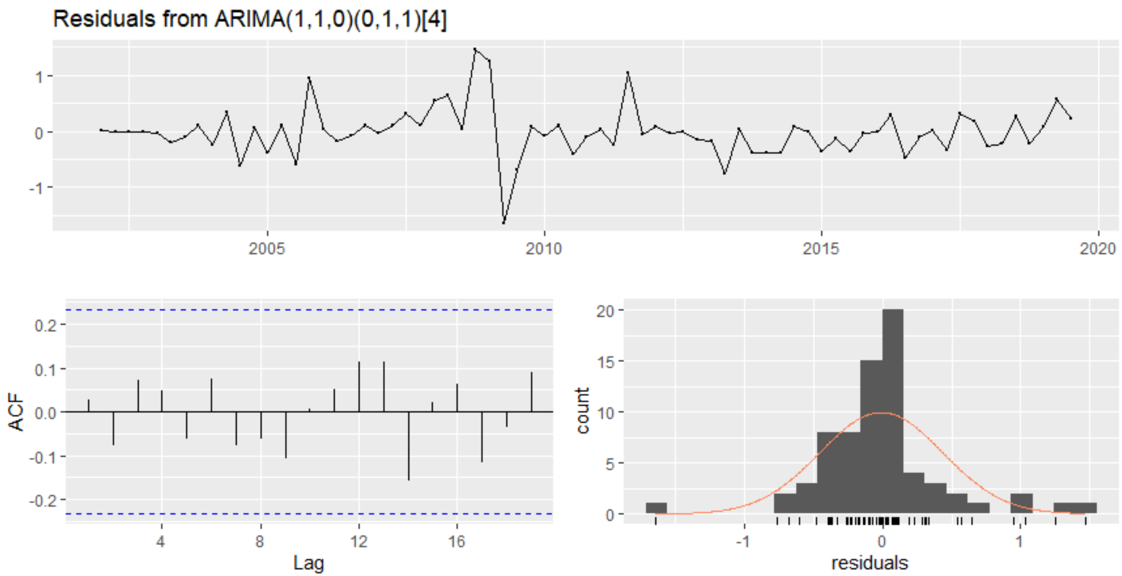
Con esta sintaxis ajustamos el modelo ARIMA y directamente dibujamos el análisis de los residuos lo que nos permite comprobar de una forma rápida si el modelo ajustado es correcto. El resultado es el siguiente:



Una función muy interesante es la función auto.arima, que encuentra el mejor modelo Arima ajustando todos los órdenes hasta que consigue que los residuos estén incorrelados

```
#Ajuste con la función auto.arima

fitparon1 <- auto.arima(Paro_N,seasonal=TRUE)

checkresiduals(fitparon1)
```

```
Ljung-Box test

data:  Residuals from ARIMA(1,1,0)(0,1,1)[4]
Q* = 2.5993, df = 6, p-value = 0.8572

Model df: 2.   Total lags used: 8
```



Los valores estimados para el modelo ARIMA ajustados los obtenemos con la función print:

```
print(fitparon1)
Series: Paro_N
ARIMA(1,1,0)(0,1,1)[4]

Coefficients:
         ar1     sma1
      0.7773  -0.7213
s.e.  0.0813   0.1333

sigma^2 estimated as 0.2138:  log likelihood=-43.35
AIC=92.7   AICc=93.08   BIC=99.26
```

$$(1-0.7773B)(1-B^4)(1-B)X_t = (1-0.7213B^4)Z_t$$

$$(1-0.7773B)(1-B^4)(1-B)X_t = (1-0.7213B^4)Z_t$$
$$(1-0.7773B)(1-B^4)(X_t - X_{t-1}) = -0.7213Z_{t-4} + Z_t$$
$$(1-0.7773B)(X_t - X_{t-1} - X_{t-4} + X_{t-5}) = -0.7213Z_{t-4} + Z_t$$
$$X_t - X_{t-1} - X_{t-4} + X_{t-5} - 0.78X_{t-1} + 0.78X_{t-2} + 0.78X_{t-5} - 0.78X_{t-6} = -0.7213Z_{t-4} + Z_t$$
$$X_t - 1.78X_{t-1} + 0.78X_{t-2} - X_{t-4} + 1.78X_{t-5} - 0.78X_{t-6} = -0.7213Z_{t-4} + Z_t$$
$$X_t = 1.78X_{t-1} - 0.78X_{t-2} + X_{t-4} - 1.78X_{t-5} + 0.78X_{t-6} - 0.7213Z_{t-4} + Z_t$$

$$X_t = 1.78X_{t-1} - 0.78X_{t-2} + X_{t-4} - 1.78X_{t-5} + 0.78X_{t-6} - 0.7213Z_{t-4} + Z_t$$

3.5.- DIAGNOSIS DEL MODELO

El objetivo perseguido al ajustar un modelo ARIMA es encontrar un modelo adecuado para representar la serie objeto del estudio. Después de que se han estimado los parámetros del modelo, en la etapa de diagnosis tenemos que evaluar la adecuación del modelo, comprobando que se satisfacen las hipótesis del mismo.

3.5.1.- Significación estadística de los parámetros

Para cada uno de los parámetros del modelo especificado debemos realizar el contraste de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 &: \varphi = 0 \\ H_1 &: \varphi \neq 0 \end{aligned} \qquad \frac{\hat{\varphi}}{S\left(\hat{\varphi}\right)} \cong t_{T-k}$$

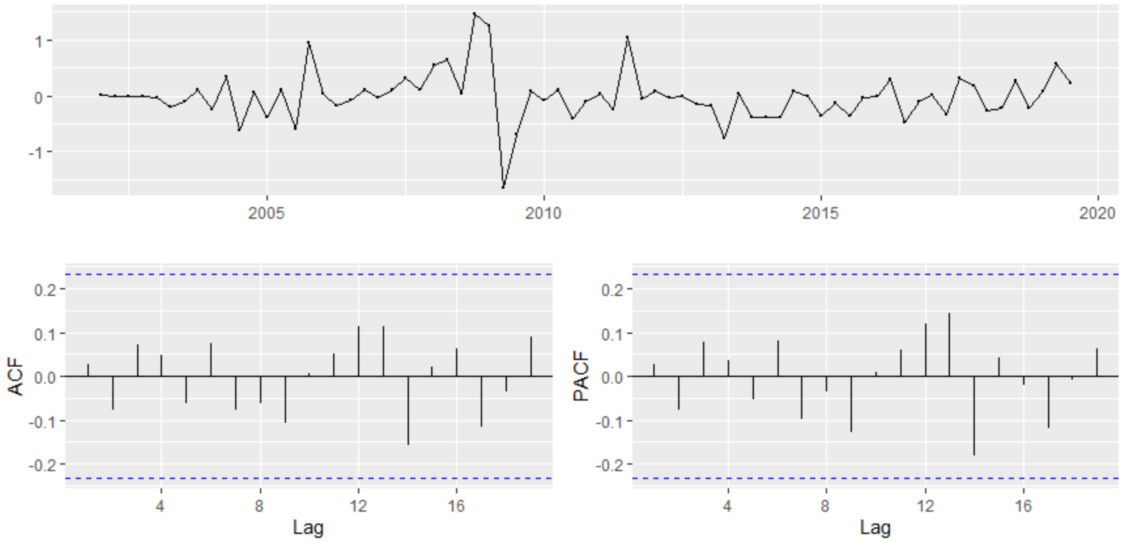
3.5.2. Análisis de los residuos.

Si el modelo se aproxima satisfactoriamente a la serie observada, los **residuos** deben tender a comportarse como **ruido blanco**.

Los residuos son ruido blanco si tienen distribución Normal, media cero, varianza constante y ausencia de correlación para cualquier retardo.

Se comprobaría mediante las funciones de autocorrelación de los residuos (FAC y FACP). Dichas funciones de autocorrelación deben ser nulas en todo su recorrido, excepto en cero. Si el modelo no aproxima satisfactoriamente a la serie observada, los residuos se comportarán como un ruido autocorrelado.

checkresiduals(fitparon1)



El contraste Ljung-Box nos permite comprobar si los residuos son incorrelados. Siendo esta la hipótesis nula asociada a este contraste.

```
Ljung-Box test
data:  Residuals from ARIMA(1,1,0)(0,1,1)[4]
Q* = 2.5993, df = 6, p-value = 0.8572
```

Un diagnóstico completo también surge de la inspección del **gráfico de los residuos**. Si los residuos provienen de un proceso de **ruido blanco**, deben ser incorrelacionados entre sí, lo que les hará **alternar en signo**, sin ningún criterio obvio. Por el contrario, rachas de residuos consecutivos de un mismo signo son, en general, un indicativo de mala especificación del modelo.

3.5.3. Otros métodos para contrastar la bondad del modelo.

Conviene estimar el modelo excluyendo algunas observaciones al final de la muestra. Si esto provoca una variación sensible en los valores estimados de los parámetros podría indicar una variación reciente de la estructura estocástica subyacente, lo que desaconsejaría el modelo para fines predictivos.

3.5.4. Medidas de la adecuación del modelo.

Cuando ajustamos un modelo calcularemos las medidas de adecuación de su ajuste basadas en los residuos del modelo para las T observaciones de que disponemos.

$$\varepsilon_t = X_t - \hat{X}_t$$

El valor total de estos residuos se resume en diferentes estadísticos que presentamos a continuación y cuya interpretación en general es sencilla: buscamos el menor error total posible medido de diferentes formas.

El Error Absoluto Medio:

$$MAE = \sum_{t=1}^{T} \frac{|e_t|}{T}$$

La suma de cuadrados de los errores:

$$SSE = \sum_{t=1}^{T} e_t^2$$

Si dividimos por los grados de libertad de los errores tenemos la Media de los Errores al cuadrado:

$$MSE = \sum_{t=1}^{T} \frac{e_t^2}{T-k}$$

La desviación estándar del error también llamada raíz de la media de los errores al cuadrado.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} \frac{\hat{e}_t^2}{T-k}}$$

En R podemos calcular todas estas medidas con la función accuracy.

```
# Accuracy
round(accuracy(fitparon1),3)
```

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
Training set	-0.009	0.439	0.283	0.153	1.969	0.142	0.028

El criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio de información bayesiano (BIC), medidas de bondad de ajuste, están basados en el logaritmo de la función de verosimilitud utilizada para calcular los estimadores de la serie bajo el supuesto de Normalidad de los residuos.

$$AIC = -2\ln(L) + 2k$$

$$BIC=-2ln(L)+ln(n)k$$

Donde *L* es la función de verosimilitud de la serie, *k* el número de parámetros y *n* el número de residuos calculados.

AIC y BIC introducen un término de penalización para el número de parámetros en el modelo, pero la penalización es mayor para BIC.

```
print(fitparon1)
sigma^2 estimated as 0.2138:  log likelihood=-43.35
AIC=92.7   AICc=93.08   BIC=99.26
```

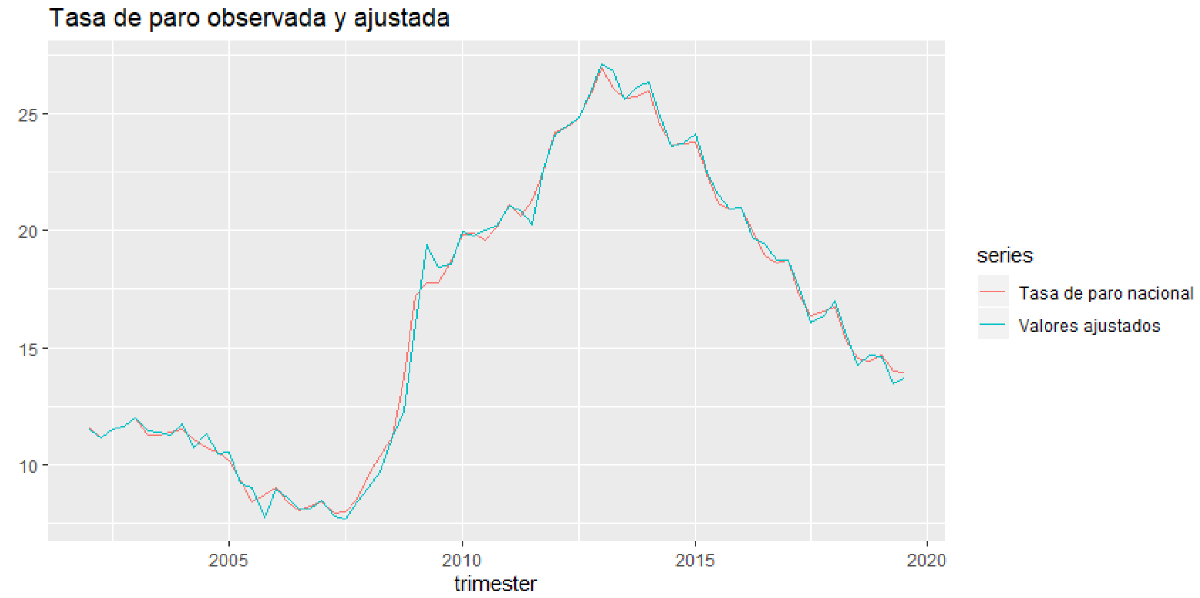
Resumimos a continuación algunas cuestiones sobre la interpretación y utilización de estos criterios:

- **El primer término de la definición es el que realmente mide el desajuste, su valor aumenta cuando peor es el ajuste;** mientras que el segundo, denominado de penalización, mide la complejidad del modelo a partir del número de parámetros.
- Siguen el principio de parsimonia: Cuando el número de parámetros de un modelo k aumenta los valores de estos criterios también, **por tanto escoger el modelo que tiene el mínimo valor supone elegir el modelo con el menor número de parámetros posible.**
- Si el número de parámetros de un modelo k aumenta, el modelo gana complejidad y el término de penalización se incrementa, pero a la vez el desajuste disminuye, por tanto el valor final obtenido para estos criterios supone un equilibrio entre reducir la complejidad (principio de parsimonia) y mantener un valor mínimo de desajuste entre el modelo teórico y estimado.
- Finalmente queremos destacar que estos criterios son una medida global de la bondad del ajuste del modelo, su cálculo se realiza desde un punto de vista predictivo lo que supone que los modelos identificados a partir de este criterio tienen un buen comportamiento respecto a la predicción.

CÁLCULO DE LAS PREDICCIONES

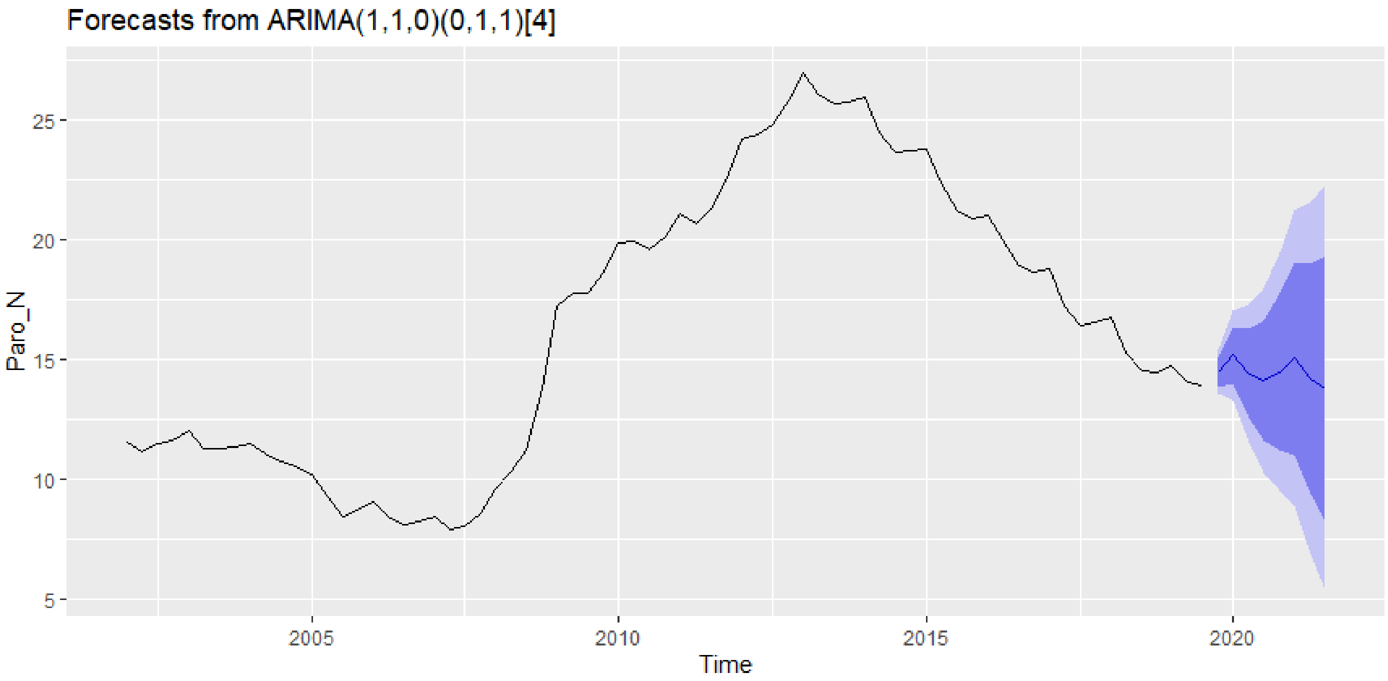
Para calcular las predicciones futuras es necesario previamente calcular los valores estimados mediante el modelo escogido para cada uno de los valores observados.

```
cbind("Tasa de paro nacional" = Paro_N, "Valores ajustados" =fitted(fitparon1)) %>%
  autoplot() + xlab("trimestrr") + ylab("") +   ggtitle("Tasa de paro observada y ajustada")
```



A partir de aquí podemos calcular las predicciones para los valores siguientes al último observado. El número de valores a predecir será indicado por h= , observemos que en el ejemplo h=12 significa un periodo completo de una año.

```
autoplot(forecast(fitparon1),h=12)
```



Bibliografía:

https://otexts.com/fpp2/

Avril Coghlan. A Little Book of R For Time Series.

Librería Forecast de R

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
DE MADRID