

# Montaña rusa

Plangeamiento, modelado y simulación

César Menéndez Fernández

30 de agosto de 2025

## Contenidos de la presentación

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Historia . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.3. Geometría . . . . .	3
<b>2. Ecuaciones</b>	<b>5</b>
<b>3. Simulación</b>	<b>6</b>
3.1. Modelo 2D . . . . .	7
3.2. Modelo 3D . . . . .	12
<b>4. Trabajo</b>	<b>13</b>
<b>5. Anexos</b>	<b>14</b>
5.1. Paquetes . . . . .	14

## 1. Introducción

### 1.1. Historia

#### Orígenes y evolución

El origen de las montañas rusas se remonta al siglo XVII en Rusia, que eran enormes toboganes de madera cubiertos de hielo, erigidos en las proximidades de San Petersburgo. En 1784, Catalina la Grande mandó construir una versión de verano de estas atracciones, equipando carros con ruedas que rodaban por guías .

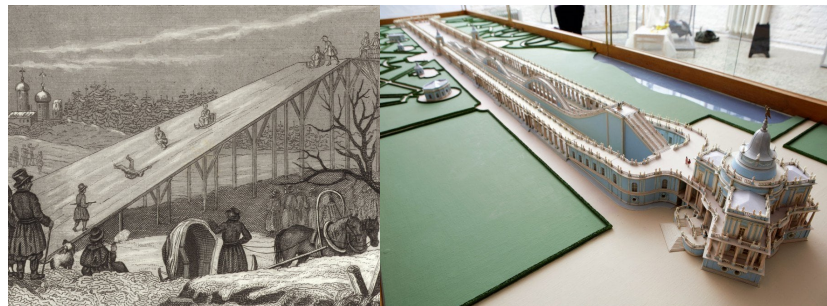


Figura 1: Tobogán de hielo con estructura de madera y versión de Catalina la Grande. Fuente: Puerta a Rusia

La idea del popular entretenimiento se importó a Francia, de manos de los soldados que participaron en las guerras napoleónicas, a principios del siglo XIX. Se construyeron estructuras similares llamadas Les Montagnes Russes à Belleville en París, donde los carros corrían sobre ruedas y seguían un canal de guía. A diferencia de sus antecesoras rusas, estas atracciones estaban pensadas para funcionar todo el año y eran operadas en parques

públicos, como el Parc Beaujon, inaugurado en París en 1817. La incorporación de las ruedas representó un avance significativo en cuanto a control de movimiento y reducción de fricción.



Figura 2: Les Montagnes Russes, en París. Fuente: Wikipedia

En Pensilvania, la Mauch Chunk Switchback Railway (1820) servía para transportar carbón, pero pronto se convirtió en una atracción turística: los visitantes bajaban aprovechando la fuerza de la gravedad y luego el tren volvía a subir sin motores. En 1884 se construyó el parque de atracciones de Nueva York, con atracciones hechas de madera. Marcus A. Thomson fue el responsable, y recibió la patente .

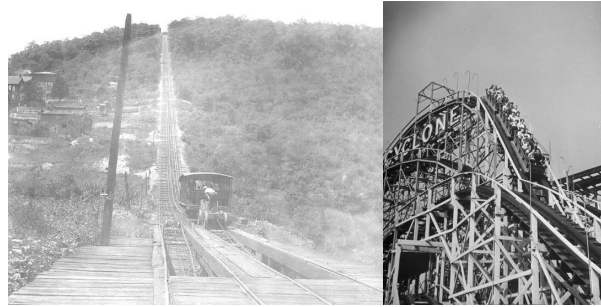


Figura 3: Gravity Switchback Railway, en Pensilvania y Cyclone en Coney Island, Nueva York. Fuente: Wikipedia y Art.com

En 1912, John Miller se convirtió en el padre de la montaña rusa moderna. al introducir el sistema de ruedas de sujeción inferior (up-stop wheels), una innovación que evitaba que los vagones se despegaran de la vía en descensos rápidos o crestas pronunciadas. Gracias a este mecanismo, se pudo aumentar significativamente la velocidad y altura de las atracciones sin comprometer la seguridad, marcando el nacimiento de la montaña rusa moderna .

Aunque la Segunda Guerra Mundial y la Gran Depresión redujeron el interés de estas atracciones, a partir de los años 1950, el uso del acero revolucionó la industria con circuitos más suaves y loops.

Ya en el año 2000, la tecnología digital y la ingeniería computacional permitieron montañas rusas magnéticas, lanzamientos hidráulicos y diseños extremos como los gigacoasters y inverted coasters, llevando la experiencia a límites antes impensables .

## Ecuaciones

El vagón con pasajeros es el elemento más importantes de una montaña rusa. Su seguridad debe ser máxima mientras minora las pérdidas de energía. Se modela en mecánica clásica aplicando la segunda ley de Newton<sup>1</sup>

$$\sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Las principales fuerzas actuantes son

- Fuerzas conservativas: peso del vagón ( $\vec{P}$ ) y reacción normal de las vías ( $\vec{N}$ ) que evita la separación del vagón.
- Fuerzas no conservativas: fuerza de rozamiento ( $\vec{F}_r$ ), debida a la fricción entre el vagón y los raíles, y fuerza de resistencia viscosa ( $\vec{F}_v$ ), producida cuando un sólido se intenta desplazar en un fluido viscoso.



Figura 4: Dragon Khan y Shambala, en por Aventura. Fuente: Wikipedia

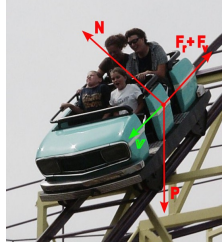


Figura 5: Fuerzas actuantes sobre el vagón

Sustituyendo las expresiones de las fuerzas (tomando la resistencia aerodinámica)

$$\vec{P} = m\vec{g}, \vec{F}_r = -\mu \left\| \vec{N} \right\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \vec{F}_v = -\frac{1}{2}c_a S_f \rho_a \|\vec{v}\| \vec{v}$$

donde “ $\mu$ ” es el coeficiente de rozamiento,  $c_a$  el coeficiente de fricción y  $S_f$  la superficie frontal del vagón.

$$m\vec{g} + \vec{N} - \mu \left\| \vec{N} \right\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} - \frac{1}{2}c_a S_f \rho_a \|\vec{v}\| \vec{v} = m \cdot \vec{a} \quad (1)$$

Puesto que la dirección de la velocidad varía con la trayectoria, es necesario hacer el estudio local, utilizando la geometría diferencial de curvas.

## 1.2. Objetivos

### Objetivos

- Diseñar en 2D /3D el recorrido de una montaña rusa.
- Simular su comportamiento y obtener el valor de las magnitudes físicas (velocidad, fuerzas) que pueden condicionar la integridad personal y estabilidad de la misma.
- Obtener los valores críticos (máximos o mínimos) que la hacen posible.

## 1.3. Geometría

### Geometría diferencial de curvas

La Geometría diferencial es la rama de las Matemáticas que estudia, aplicando métodos de análisis infinitesimal, imágenes geométricas, curvas y superficies, así como familias de ambas. El rasgo fundamental de la geometría diferencial es que se ocupa de las propiedades “locales”, esto es, en las características de trozos infinitesimales.

La Geometría diferencial surgió y se desarrolló estrechamente ligada al análisis que, a su vez, nació en gran medida de problemas geométricos (conceptos como tangentes o áreas precedieron a los de derivada o integral).

<sup>1</sup>O con la formulación lagrangiana, aplicable a sistemas no inerciales.

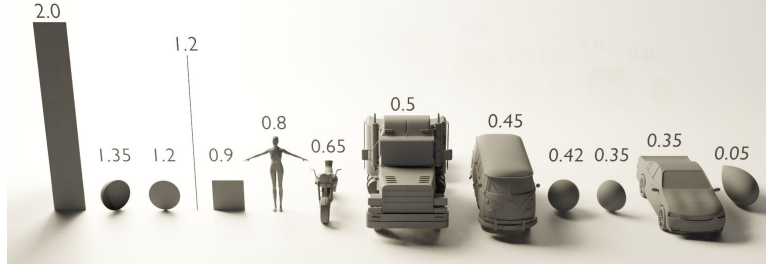


Figura 6: Coeficiente de arrastre  $c_a$  de diferentes formas

El surgimiento de la geometría diferencial se remonta a la primera mitad del siglo XVIII ligándose a los nombres de L. Euler y G. Monge. En 1827 C. F. Gauss publica su obra “Estudio general sobre superficies de curvas” que sentó las bases de la teoría actual de superficies. N.I. Lobachevski descubrió la geometría no euclídea en 1826. Y en 1854 G. F. B. Riemann en su conferencia “Sobre las hipótesis en las que se funda la Geometría” sentó las bases de la Geometría de Riemann.

### Parámetro arco y triedro de Frenet

La expresión paramétrica de la curva  $\vec{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}$  permite describir trayectorias complejas de manera precisa. El parámetro natural es la longitud del arco de curva, definido mediante

$$s = \int_{u_0}^u \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} d\xi = \int_{u_0}^u \|\dot{r}(u)\| d\xi \quad (2)$$

Se definen localmente tres vectores (tangente  $\vec{t}$ , normal  $\vec{n}$  y binormal  $\vec{b}$ ) a partir de las expresiones:

$$\vec{t} = \begin{cases} \frac{\dot{r}(u)}{\|\dot{r}(u)\|} \\ \dot{r}(s) \end{cases}, \quad \vec{n} = \begin{cases} \frac{\vec{b}(u) \times \vec{t}(u)}{\|\dot{r}(s)\|} \\ \dot{r}(s) \end{cases}, \quad \vec{b} = \begin{cases} \frac{\dot{r}(u) \times \ddot{r}(u)}{\|\dot{r}(u) \times \ddot{r}(u)\|} \\ \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) \end{cases}$$

donde  $\times$  representa el producto vectorial.

- $\vec{t}$ : tangente a la trayectoria; orienta la velocidad y aceleración lineal.
- $\vec{n}$ : muestra la dirección en que se curva la trayectoria ; orienta la aceleración normal.
- $\vec{b}$ : muestra la dirección en que se retuerce la trayectoria.

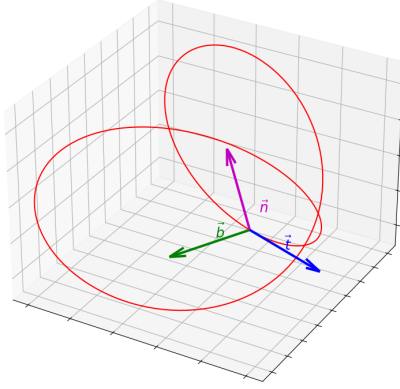
El triedro de Frenet  $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$  forma una base ortonormal, lo que permite expresar cualquier vector en esta base.

$$\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{t}) \vec{t} + (\vec{c} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\vec{c} \cdot \vec{b}) \vec{b}.$$

La curvatura  $\kappa$  es una medida del cambio de dirección del vector tangente; es nula si la trayectoria es recta. La torsión  $\tau$  mide el cambio de dirección del vector binormal; es nula si la trayectoria es plana. Se calculan mediante

$$\kappa = \begin{cases} \frac{\|\dot{r}(u) \times \ddot{r}(u)\|}{\|\dot{r}(u)\|^3} \\ \|\ddot{r}(s)\| \end{cases}, \quad \tau = \begin{cases} \frac{(\dot{r}(u) \times \ddot{r}(u)) \cdot \ddot{\dot{r}}(u)}{\|\dot{r}(u) \times \ddot{r}(u)\|^2} \\ \frac{\ddot{r}(s)}{\|\ddot{r}(s)\|} \end{cases}$$

Triedro de Frenet



Animación

## 2. Ecuaciones

### Modelo físico

Descomponiendo localmente las fuerzas de la ecuación 1, y tomando  $v = \vec{v} \cdot \vec{t}$ , se tiene que:

- $\vec{P} = -mg \left( (\vec{k} \cdot \vec{t}) \vec{t} + (\vec{k} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\vec{k} \cdot \vec{b}) \vec{b} \right)$
- $\vec{N} = N \vec{n}$
- $\vec{F}_r = -\mu |N| \text{sgn}(v) \vec{t}$
- $\vec{F}_v = -\frac{1}{2} c_a S_f \rho_a v^2 \text{sgn}(v) \vec{t} = -m c_v v^2 \text{sgn}(v) \vec{t}$   
con  $c_v = \frac{c_a S_f \rho_a}{2m}$

En las direcciones normal y binormal, la velocidad es nula puesto que el móvil no se puede despegar de la curva. Por su parte la aceleración se descompone en dos:

- $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{t}$ , aceleración tangencial que cuantifica la variación del módulo de la velocidad y es nula en un movimiento uniforme.
- $\vec{a}_n = \kappa v^2 \vec{n}$ , aceleración normal que modifica la dirección de la velocidad y se anula cuando el móvil sigue una trayectoria rectilínea.

Sustituyendo estas expresiones, la ecuación (1) queda

$$-mg \left( (\vec{k} \cdot \vec{t}) \vec{t} + (\vec{k} \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\vec{k} \cdot \vec{b}) \vec{b} \right) + N \vec{n} - \mu |N| \text{sgn}(v) \vec{t} - m c_v v^2 \text{sgn}(v) \vec{t} = m \left( \frac{dv}{dt} \vec{t} + \kappa v^2 \vec{n} \right)$$

Y descomponiendo en las tres componentes del triedro

$$\begin{cases} -mg (\vec{k} \cdot \vec{t}) - \mu |N| \text{sgn}(v) - m c_v v^2 \text{sgn}(v) = m \frac{dv}{dt} \\ -mg (\vec{k} \cdot \vec{n}) + N = m \kappa v^2 \\ -mg (\vec{k} \cdot \vec{b}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

donde se obtiene que no hay fuerzas en la dirección binormal.

Despejando la reacción normal en la segunda ecuación, se tiene que

$$N = m \left( \kappa v^2 + g \left( \vec{k} \cdot \vec{n} \right) \right) \quad (4)$$

Sustituyendo en la primera y simplificando

$$-g \left( \vec{k} \cdot \vec{t} \right) - \left( \mu \left| \kappa v^2 + g \left( \vec{k} \cdot \vec{n} \right) \right| + c_v v^2 \right) \operatorname{sgn}(v) = \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

### Modelo Matemático

El problema planteado entra en la categoría de problemas inversos, ya que la trayectoria del movimiento  $\vec{r}$  es conocida, y lo que se desea es conocer las fuerzas y velocidades a lo largo de la misma. La resolución del problema de valor inicial dado por la ecuación (5) permite determinar la velocidad, y sustituyendo en (4) se obtiene la normal y el resto de las fuerzas.

Utilizando el parámetro natural  $s$  se verifica que  $v = \frac{ds}{dt}$ . Y por definición (ver ecuación 2),  $\frac{ds}{du} = \|\dot{r}\|$ , así pues

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \frac{du}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{v}{\|\dot{r}\|}$$

Combinándolo con la ecuación (5) se llega a la formulación final

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\|\dot{r}\|} \\ -g \left( \vec{k} \cdot \vec{t} \right) - \left( \mu \left| \kappa v^2 + g \left( \vec{k} \cdot \vec{n} \right) \right| + c_v v^2 \right) \operatorname{sgn}(v) \end{pmatrix} \quad (6)$$

que permite obtener  $u(t)$ ,  $v(t)$  y  $N(t)$  (y  $r(u(t)) = r(t)$ ).

## 3. Simulación

### Proceso de la simulación

1. Definir  $r(u)$

Interpolación: dadas las coordenadas de varios puntos, encontrar una curva paramétrica que pase por ellos.

2. Resolución de la ecuación diferencial  $y' = f(t, y(t))$

Se obtienen pares  $\{(t_k, y(t_k))\}$

a) Derivación:  $\frac{y(t_k+h) - y(t_k)}{h} \approx f(y(t_k), y(t_k))$ .

b) Integración:  $\int_{t_0}^t y'(t) dt = \int_{t_0}^t f(y(t), y(t)) dt$ .

c) Otros (desarrollo de Taylor):  $y(t_k + h) = y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2!} y''(t_k) + \dots$  donde  $y''(t) = f_t + f_y y'$ .

3. Modificación de  $r(u)$  para que cumpla los criterios de seguridad (p.e. la aceleración no puede superar 4g durante más de 4").
4. Ecuaciones no lineales: obtener los valores de los parámetros que hacen el trayecto inviable (detienen el vagón antes de finalizar el trayecto o la aceleración supera los límites, ver norma UNE-EN13814:2006).

### Parámetros<sup>2</sup>

- Masa del vagón: 800 kg (4 pax)

El peso de un vagón varía significativamente dependiendo del modelo y su capacidad. De media, un vagón vacío suele pesar entre 200 y 600 kg, al que hay que sumarle el peso de los pasajeros (75Kg de promedio). Por lo tanto, el peso total de un vagón cargado podría oscilar entre los 500 y los 900 kg, o incluso más en algunos casos.

---

<sup>2</sup>Ver, por ejemplo, el TFG de V.Goncalves

- Coeficiente de fricción:  $\mu = 0.015$

La fuerza de fricción se opone al deslizamiento entre dos superficies en contacto, siendo mayor cuando las superficies están inmóviles. El coeficiente disminuye cuando hay lubricación entre ambas.

- Coeficiente de resistencia aerodinámica o de arrastre:  $c_a = 0.4$

Se denomina resistencia aerodinámica a la fuerza que sufre un cuerpo al moverse en el aire. Este coeficiente es una cantidad adimensional que se usa para cuantificar dicha resistencia y esta asociado tanto a la forma como a la superficie del objeto.

- Superficie frontal:  $S_f = 2 \text{ m}^2$

La resistencia aerodinámica al desplazamiento no solo depende de su coeficiente de resistencia, sino también del tamaño de la superficie que desplaza el fluido.

- Densidad del aire:  $\rho_a = 1.225 \text{ Kg/ m}^3$

La densidad del aire varía con la altura, la temperatura y la presión, que a su vez depende de la velocidad del viento. Si bien la variación es pequeña, se toma el caso más desfavorable.

- Velocidad inicial:  $v_0 = 2 \text{ m/s}$

Se considera una velocidad inicial baja, originada por el sistema mecánico que controla la elevación inicial del vehículo.

### 3.1. Modelo 2D

#### Verificación del modelo

Se considera el descenso por un plano inclinado siguiendo la trayectoria (rectilínea)

$r(u) = (100u, 0, 100(1-u))$  con  $u \in [0, 1]$

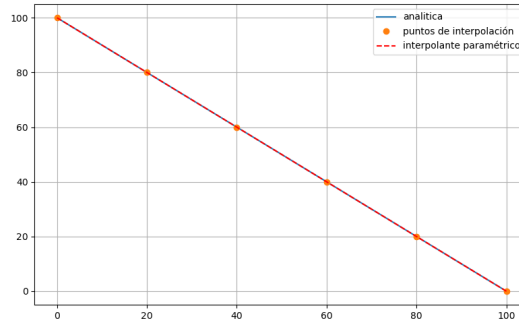


Figura 7: Trayectoria (plano inclinado)

Por tanto

$$\dot{r}(u) = (100, 0, -100), \quad \ddot{r}(u) = \ddot{r}'(u) = (0, 0, 0)$$

Triedro de Frenet

$$\vec{t} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \simeq (0.70710678, 0, -0.70710678)$$

$$\vec{n} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \simeq (0.70710678, 0, 0.70710678)$$

$$\vec{b} = (0, -1, 0)$$

siendo  $\kappa = 0$  y donde  $s = 100\sqrt{2}u$

Las ecuaciones 4 y 5, se reducen a:

$$N = mg \left( \vec{k} \cdot \vec{n} \right) = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{g}{\sqrt{2}} - \left( \mu \frac{g}{\sqrt{2}} + c_v v^2 \right) = \frac{dv}{dt}$$

- En ausencia de fuerzas disipativas ( $\mu = c_a = 0$ )

$$\frac{g}{\sqrt{2}} = a \rightarrow \begin{cases} a = \frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{dv}{dt} \\ v = \frac{gt}{\sqrt{2}} = \frac{ds}{dt} \\ s = \frac{gt^2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Igualando el espacio recorrido, se obtiene la relación de  $u$  con  $t$

$$\frac{gt^2}{2\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}u \rightarrow u = \frac{gt^2}{400}$$

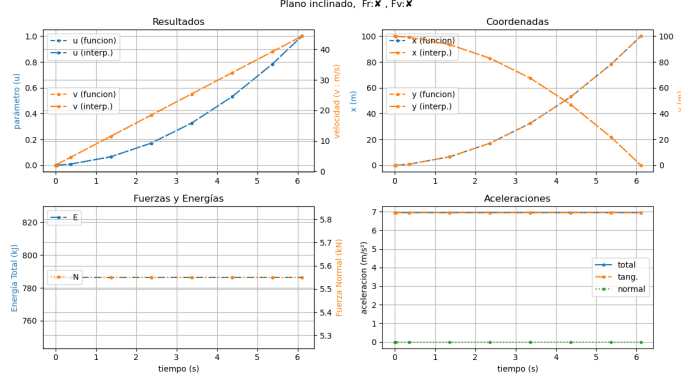


Figura 8: Resultados sin fuerzas disipativas

- Si solo hay fuerza de rozamiento ( $c_a = 0$ )

$$(1 - \mu) \frac{g}{\sqrt{2}} = a \rightarrow \begin{cases} a = \frac{(1-\mu)g}{\sqrt{2}} = \frac{dv}{dt} \\ v = \frac{(1-\mu)gt}{\sqrt{2}} = \frac{ds}{dt} \\ s = \frac{(1-\mu)gt^2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Igualando el espacio recorrido, se obtiene la relación de  $u$  con  $t$

$$\frac{(1-\mu)gt^2}{2\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}u \rightarrow u = \frac{(1-\mu)gt^2}{400}$$

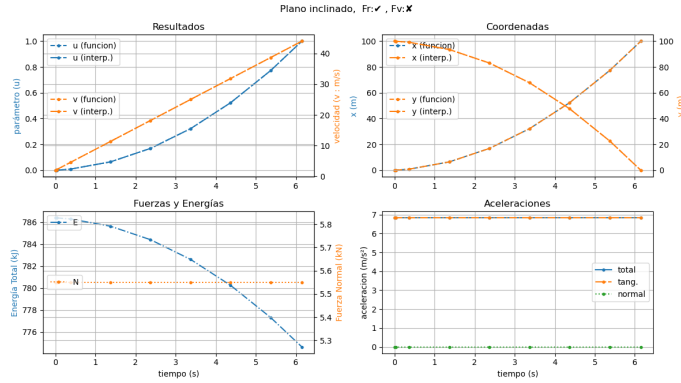


Figura 9: Resultados con fricción

- Con fuerza de rozamiento y resistencia aerodinámica

$$(1 - \mu) \frac{g}{\sqrt{2}} - c_v v^2 = \dot{v}$$

$$\text{Denotando por } \alpha = (1 - \mu) \frac{g}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha - c_v v^2 = \dot{v} \rightarrow v = -\sqrt{\frac{\alpha}{c_v}} \frac{1}{\tanh(\sqrt{\alpha c_v}(c-t))} \text{ con } c = \frac{\ln\left(\frac{c_v v_0 - \alpha}{c_v v_0 + \alpha}\right)}{2\sqrt{\alpha c_v}}$$

No tiene solución analítica real si  $c_v v_0 - \alpha < 0$ .

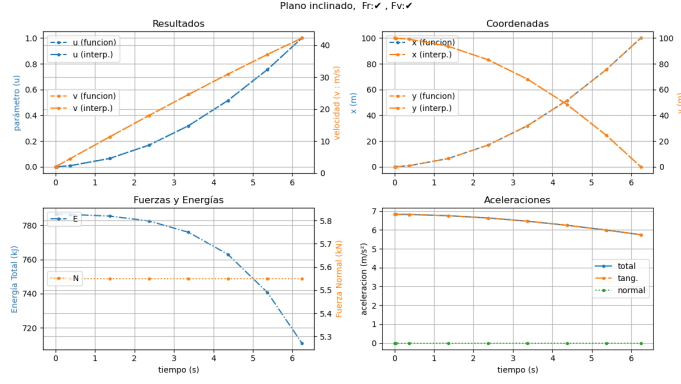
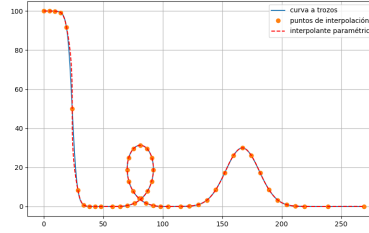


Figura 10: Resultados con fricción y arrastre

## Geometría

Se ha realizado un diseño inicial de una montaña rusa con los elementos básicos, combinando diferentes funciones



- Descenso pronunciado (sigmoide)

$$\begin{cases} x(u) = x_0 + u \\ y(u) = y_0 + \frac{A}{1+e^{mu}} \end{cases} \text{ con } x_0 = 20, y_0 = 0, A = 100, m = 0.5, u \in [-20, 20]$$

- Loop (clotoide)

$$\begin{cases} x(u) = x_0 + A \int_{u_0}^u \cos(\theta^2) d\theta \\ y(u) = y_0 + A \int_{u_0}^u \sin(\theta^2) d\theta \end{cases} \text{ con } x_0 = 50, y_0 = 0, A = 35, u \in [0, \sqrt{\pi}]$$

- Colina (campana de Gauss)

$$\begin{cases} x(u) = x_0 + u \\ y(u) = y_0 + Ae^{-(\frac{u}{s})^2} \end{cases} \text{ con } x_0 = 159, y_0 = 0, A = 30, s = 20, u \in [-52, 52]$$

- Recta final

$$\begin{cases} x(u) = x_0 + u \\ y(u) = y_0 + mu \end{cases} \text{ con } x_0 = 231, y_0 = 0, m = 0, u \in [0, 30]$$

Se puede estudiar dando la trayectoria interpolada para todo el trayecto o resolviendo de forma consecutiva el modelo en cada trayectoria simple.

## Selección del método

Existen varias familias de métodos para la resolución de SEDO (runge-Kutta, multipaso, etc.), con múltiples variaciones (explícitos, implícitos, adaptativos, predictor-corrector, etc.). Se deben comparar los métodos nativos del lenguaje para seleccionar el más adecuado. Para ello se considera el caso sin fuerzas disipativas, donde la energía debería permanecer constante.

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Se calcula la variación relativa de energía mediante

$$\Delta E = \frac{E_T(t_0) - E_T(t)}{E_T(t_0)}$$

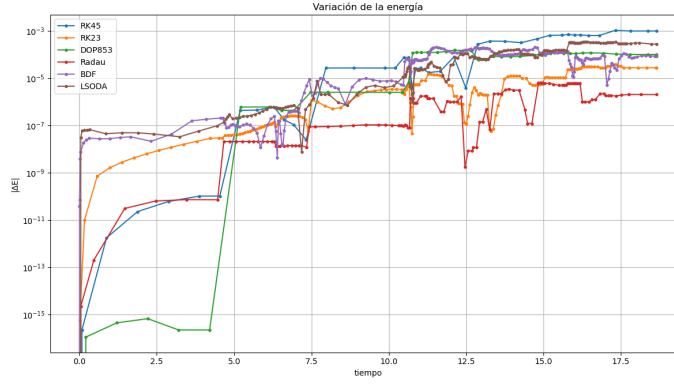


Figura 11: Errores relativos en la energía para los diferentes métodos

Utilizando la trayectoria interpolada, se obtiene:  
Resumiendo los resultados en una tabla

Método	Pasos	$\Delta E_{\min}$	$\Delta E_{\max}$	$\overline{\Delta E}$	$\sigma(\Delta E)$
RK45	42	-1.1e-03	+8.0e-05	-2.4e-04	+3.6e-04
RK23	170	-1.5e-05	+3.8e-05	+6.1e-06	+1.2e-05
DOP853	44	-2.5e-06	+1.6e-04	+7.0e-05	+5.6e-05
Radau	119	-6.4e-06	+2.3e-06	-9.8e-07	+2.5e-06
BDF	221	-9.8e-06	+2.1e-04	+6.7e-05	+6.4e-05
LSODA	197	-3.4e-04	+4.9e-05	-1.0e-04	+1.3e-04

Tanto la gráfica como la tabla sugieren que Radau es el método más adecuado en este caso.

### Simulación con interpolación

Una vez definidos los parámetros la geometría y el método de resolución, ya es posible simular el trayecto en esta montaña rusa (ver 12)

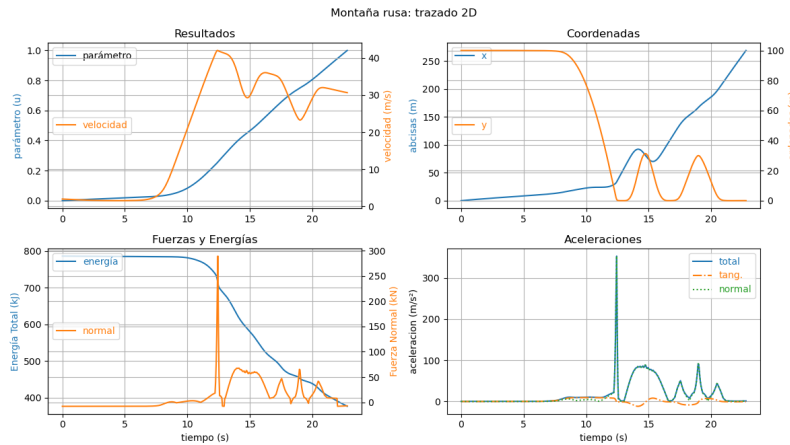
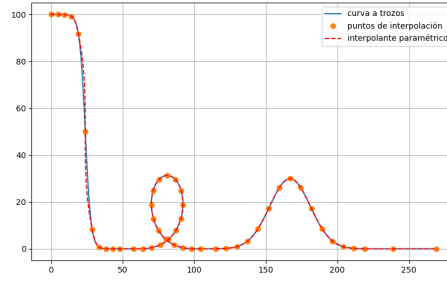


Figura 12: Resultados de la simulación

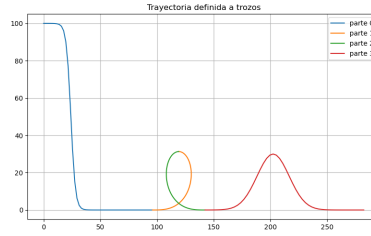
En resumen, la duración del trayecto es de 22.8s, con velocidades que oscilan entre 1.5 y 42 m/s y la aceleración llega a 352.8 m/s<sup>2</sup>. Se observa que la aceleración se debe fundamentalmente a su componente normal. En cualquier caso, están muy por encima de lo que puede soportar un ser humano. Habría que modificar la trayectoria, pues al final de la primera bajada se supera las 35g y tanto el bucle como la colina rondan las 10g. Hay que destacar que al realizar la interpolación mediante bsplines cúbicas, los resultados de la aceleración (derivada segunda) tienen variaciones más bruscas.



Animación

### Simulación consecutiva con las funciones

También se puede resolver de forma consecutiva la ecuación sobre cada función, cambiando las condiciones iniciales por los resultados del trayecto anterior. El modelo se ha simplificado tomando:



- Descenso pronunciado (sigmoide)

$$\begin{cases} x(u) = x_0 + u \\ y(u) = y_0 + \frac{A}{1+e^{mu}} \end{cases} \quad \text{con } x_0 = 24, y_0 = 0, A = 100, m = 0.5, u \in [-24, 72]$$

- Loop (clotoide)

$$\begin{cases} x(u) = x_0 + A \int_{u_0}^u \cos(\theta^2) d\theta \\ y(u) = y_0 + A \int_{u_0}^u \sin(\theta^2) d\theta \end{cases} \quad \text{con } x_0 = 96, y_0 = 0, A = 35, u \in [0, \sqrt{\pi}]$$

- Colina (campana de Gauss)

$$\begin{cases} x(u) = x_0 + u \\ y(u) = y_0 + Ae^{-\left(\frac{u}{s}\right)^2} \end{cases} \quad \text{con } x_0 \simeq 142.4, y_0 = 0, A = 30, s = 20, u \in [-60, 80]$$

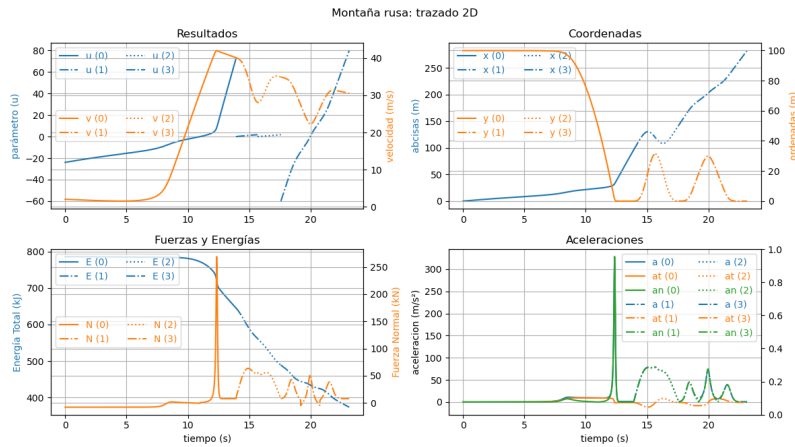


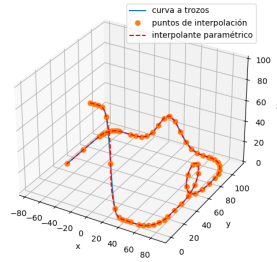
Figura 13: Resultados de la simulación

Teniendo en cuenta que el trayecto ha sufrido leves variaciones, si bien manteniendo las características de los elementos principales, los resultados no difieren significativamente de los obtenidos con la trayectoria interpolada. Las aceleraciones y tensiones máximas se dan en los mismos lugares y son casi iguales.

## 3.2. Modelo 3D

### Geometría

Se ha realizado un diseño inicial de una montaña rusa con los elementos básicos, combinando diferentes funciones



- Descenso pronunciado (sigmoide)
- Giro circular plano de  $90^\circ$  a izquierda (hélice con  $\alpha = 0$ ,  $R = 20$ )
- Loop (clotoide con  $\alpha = \arctan \frac{8}{\sqrt{\pi}}$ )
- Giro circular plano de  $90^\circ$  a izquierda ( $R = 25$ )
- Colina (campana de Gauss)
- Giro circular plano de  $90^\circ$  a izquierda ( $R = 15$ )
- Recta final

### Selección del método

Existen varias familias de métodos para la resolución de SEDO (runge-Kutta, multipaso, etc.), con múltiples variaciones (explícitos, implícitos, adaptativos, predictor-corrector, etc.). Se deben comparar los métodos nativos del lenguaje para seleccionar el más adecuado. Para ello se considera el caso sin fuerzas disipativas, donde la energía debería permanecer constante.

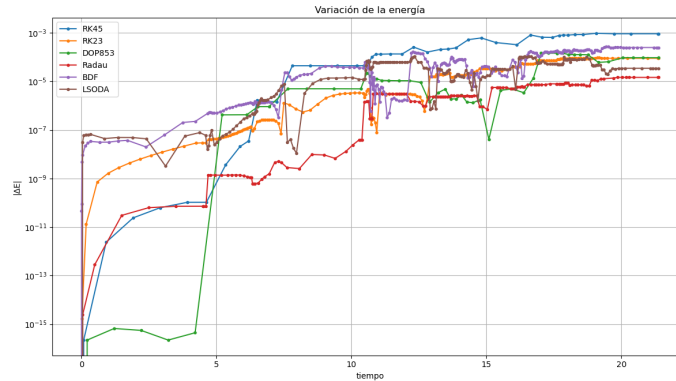


Figura 14: Errores relativos en la energía para los diferentes métodos

Resumiendo los resultados en una tabla

Método	Pasos	$\Delta E_{\min}$	$\Delta E_{\max}$	$\overline{\Delta E}$	$\sigma(\Delta E)$
RK45	46	-2.6e-04	+9.6e-04	+2.6e-04	+4.0e-04
RK23	184	-4.8e-06	+9.5e-05	+2.7e-05	+3.5e-05
DOP853	51	-9.4e-05	+1.5e-04	+1.4e-05	+6.0e-05
Radau	145	-3.1e-06	+1.5e-05	+2.5e-06	+5.1e-06
BDF	248	-4.3e-05	+2.8e-04	+6.9e-05	+8.8e-05
LSODA	242	-4.8e-05	+1.1e-04	+2.2e-05	+4.3e-05

Tanto la gráfica como la tabla sugieren que también Radau es el método más adecuado en este caso.

Simulación

Una vez definidos los parámetros la geometría y el método de resolución, ya es posible simular el trayecto en esta montaña rusa (ver 15)

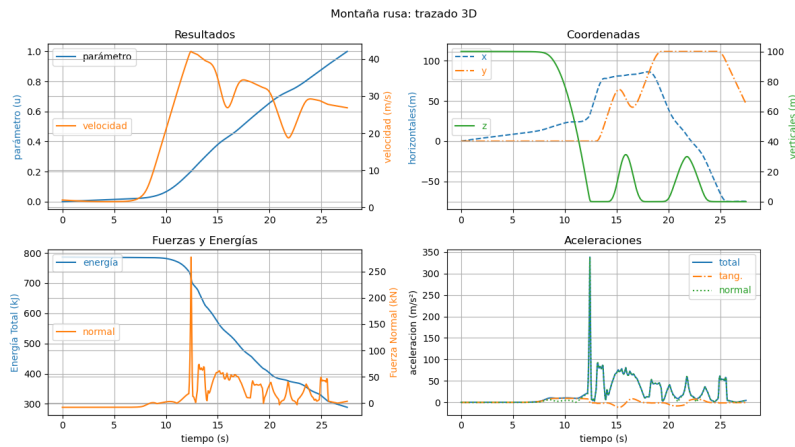
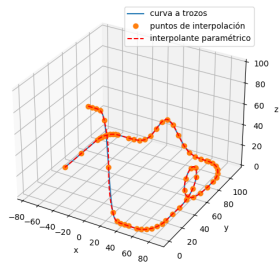


Figura 15: Resultados de la simulación

En resumen, la duración del trayecto es de 27.5s, con velocidades que oscilan entre 1.6 y 42 m/s y aceleraciones entre 0.1 y 351.1 m/s<sup>2</sup>. Independientemente del resto de los resultados, las aceleraciones también están muy por encima de lo que puede soportar un ser humano.



Animación

4. Trabajo

Tarea

La simulación se hará inicialmente en 2 dimensiones y posteriormente en 3.

- 1. Generar por puntos una montaña rusa en 2D/3D similares a las presentadas y generar la expresión paramétrica mediante bsplines. .... [2 pts.]
- 2. Resolver la EDO en el caso conservativo mediante diferentes métodos para simular su comportamiento y seleccionar justificadamente el método a utilizar. .... [2 pts.]
- 3. Resolver la EDO con fricción y rozamiento aerodinámico, estudiando si es viable. En caso de no serlo, modificar el diseño para hacerla viable, manteniendo los tres elementos constructivos. .... [2 pts.]
- 4. Manteniendo constantes el resto de parámetros, estudiar los intervalos válidos de {m, μ, c<sub>a</sub>, S<sub>f</sub>, v<sub>0</sub>}. .. [2 pts.]
- 5. Otros ..... [2 pts.]

## 5. Anexos

### 5.1. Paquetes

#### Introducción

Para la resolución de la tarea se suministran dos paquetes:

- **mrusapkg:**

Contiene funciones para la simulación de la montaña rusa, incluyendo la derivación de la función paramétrica, cálculo del triedro de Frenet, fuerza normal y aceleraciones y la ecuación diferencial que se utiliza en `solve_ivp`. La versión actual limita la expresión paramétrica a bspline (`scipy.interpolate.make_splprep`) o una lista con tres funciones simbólicas.

```
1 derivadas=trayec_der(curva_bspline)
2 solve_ivp(edofun_mr, ..., method=¿?, args=[derivadas,coefRoz, coefVis,grav], events=[
    finalVia,paradaVagon],... ).
```

- **curvaspkg:**

Funciones para generar y evaluar diversas curvas en 2D y 3D. Actualmente se reduce a funciones numéricas.