



## Tema 2.- Los números complejos. Polinomios.

---

### 2.1.- Los números complejos. Operaciones.

- Forma binómica. Operaciones y propiedades.
- Forma exponencial. Potencias y raíces.

### 2.2.- Polinomios.

- Factorización de polinomios. El Teorema del resto.
- El Teorema fundamental del Álgebra.
- Las raíces de un polinomio real.

### 2.3.- Movimientos en el plano.

- Traslaciones.
- Homotecias.
- Giros.
- Proyecciones.
- Simetrías.
- Transformaciones lineales.

### 2.4.- Ejercicios.

### 2.5.- Apéndice: MATLAB.

---

En la sección 1 estudiamos los números complejos y sus operaciones. Por una parte, los utilizaremos para el estudio de la factorización de un polinomio y por otra, para expresar ciertas transformaciones del plano mediante operaciones sobre ellos. En la sección 2, dedicada a la factorización de polinomios, se puede apreciar la necesidad y conveniencia del estudio de los números complejos. La sección 3 está dedicada al estudio de algunas transformaciones del plano y a su expresión mediante números complejos y mediante matrices y vectores.

### 2.1.- Los números complejos. Operaciones.

Históricamente, los números complejos surgieron para tratar ecuaciones polinómicas, tales como  $x^2 + 1 = 0$ , que no tienen solución real. En esta dirección, el resultado principal que consideraremos en esta sección será **el Teorema Fundamental del Álgebra** que asegura que toda ecuación polinómica con coeficientes complejos tiene, al menos, una solución.

Previamente, habremos definido los números complejos, sus operaciones más importantes y la interpretación geométrica de las mismas, cuyo manejo nos permite describir transformaciones sobre el plano complejo.

Más importante que la definición en sí de los números complejos, son las operaciones que hay definidas sobre ellos y las propiedades de dichas operaciones. Un número complejo

vendrá dado por dos números reales o, si se quiere por un punto o un vector del plano. Sobre los números complejos definiremos las operaciones suma y producto. Desde el punto de vista de la operación suma, los números complejos pueden ser tratados como vectores reales de dos coordenadas. La operación producto tendrá, en los aspectos aritméticos, propiedades similares a las del producto de números reales. Dentro de los números complejos tendremos a los números reales. Cuando estemos considerando números complejos, no tendrá sentido trabajar con desigualdades a menos que previamente hayamos impuesto que los términos de dichas desigualdades sean números reales.

### 2.1.1.- Forma binómica. Operaciones y propiedades.

**Definición.** Un número complejo es un número de la forma  $z = a + bi$  (o  $z = a + ib$ ) donde  $i$  verifica que  $i^2 = -1$  y  $a$  y  $b$  son números reales. A  $i$  se le llama *unidad imaginaria*. Los números reales  $a$  y  $b$  se conocen, respectivamente, como *parte real* y *parte imaginaria* del número complejo  $z$  y se suele escribir

$$\operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

Esta expresión que acabamos de describir de los números complejos (más adelante veremos otra) se denomina **forma binómica** del número.

Dos números complejos  $z$  y  $w$  son iguales si, y sólo si,

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w).$$

Al conjunto de los números complejos lo denotaremos por  $\mathbb{C}$ , es decir,

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

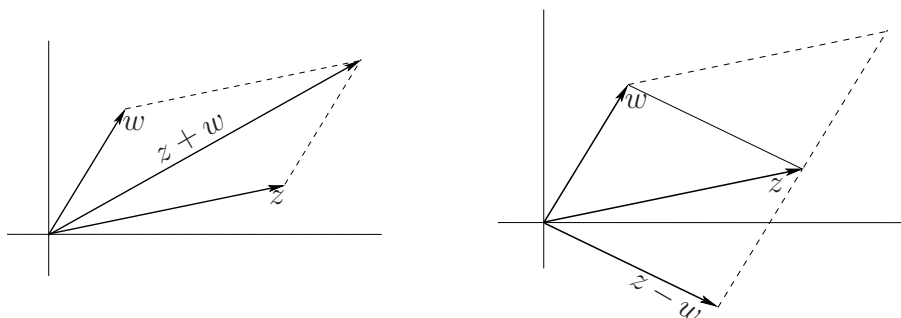
Sea  $z = a + bi$ . Si  $b = 0$  escribiremos simplemente  $z = a$ . Si  $a = 0$  escribiremos  $z = bi$ . En este último caso diremos que  $z$  es un **número imaginario puro**. En lo que sigue identificaremos el número real  $a$  con el número complejo  $a + 0i$ . De esta forma se puede entender que el conjunto de los números reales es un subconjunto del de los números complejos.

Un número complejo  $z = a + bi$  lo podemos representar por el punto  $P$  del plano que tiene por coordenadas cartesianas  $(a, b)$ . A veces también lo representaremos por el vector de posición  $\vec{OP}$  del punto  $P$ . Interpretado de esta manera, al plano cartesiano se le denomina también **plano complejo**. El eje de abscisas también se suele denominar **eje real** y el eje de ordenadas **eje imaginario**.

**Definición. Suma y Producto.** Dados dos números complejos  $z = a + bi$  y  $w = c + di$  definimos la suma  $z + w$  y el producto  $zw$  mediante:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c) + (b + d)i, \\ zw &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

La suma y la diferencia de dos números complejos se puede interpretar en el plano complejo de la misma forma que la suma y diferencia de vectores:



El producto de números complejos no tiene una interpretación directa en términos de los vectores asociados (no es el producto escalar de dos vectores, que es un número real). Más adelante daremos una interpretación geométrica del producto de dos números complejos.

En lo que se refiere a las propiedades de la suma y el producto, de forma genérica puede decirse que se verifican las mismas propiedades *algebraicas* que se conocen para la suma y el producto de números reales. Al considerar propiedades *algebraicas* se están excluyendo las propiedades de la suma y producto de números reales en las que aparecen desigualdades.

**Propiedades.** Sean  $z, w, v \in \mathbb{C}$ .

- (1) Conmutativas:  $z + w = w + z$  y  $zw = wz$ .
- (2) Asociativas:  $(z + w) + v = z + (w + v)$  y  $(zw)v = z(wv)$ .
- (3a) Existe un elemento nulo para la suma, el  $0 = 0 + 0i$  tal que  $z + 0 = 0 + z = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .
- (3b) Existe un elemento unidad para el producto, el  $1 = 1 + 0i$ , tal que  $z1 = 1z = z$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ .
- (4a) Cada número complejo  $z = a + bi$  tiene un elemento opuesto,  $-z = -a + (-b)i$ , tal que  $z + (-z) = 0$ .
- (4b) Cada número complejo  $z = a + bi \neq 0$  tiene un elemento inverso  $z^{-1}$  tal que

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

De hecho, si  $z = a + bi \neq 0$  se tiene que  $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$ .

- (5) Distributiva (del producto respecto a la suma)  $z(w + v) = zw + zv$ .

Como es habitual, para los números reales, el inverso  $z^{-1}$  de  $z \neq 0$  y un producto  $wz^{-1}$  los representaremos por  $\frac{1}{z}$  y  $\frac{w}{z}$ , respectivamente.

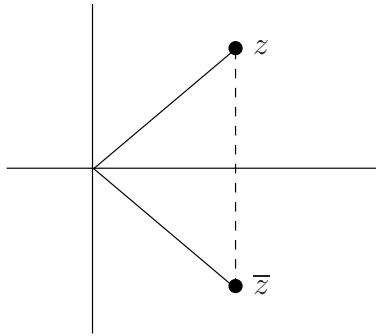
La parte real y la parte imaginaria en una división de números complejos puede obtenerse de la siguiente forma. Si  $z = a + bi \neq 0$  y  $w = c + di$

$$\frac{w}{z} = \frac{c + di}{a + bi} = (c + di)(a + bi)^{-1} = (c + di) \left( \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right) = \frac{(c + di)(a - bi)}{a^2 + b^2}.$$

No obstante, tras estudiar la conjugación y el módulo veremos otra forma más eficiente para calcular el inverso de un número complejo o dividir números complejos.

**Observación.** No es posible establecer en el conjunto de los números complejos una relación de orden que verifique las mismas propiedades que verifica la relación de orden que conocemos entre los números reales.

**Definición. Conjugado.** Sea  $z = a + bi$  un número complejo. Se define el conjugado de  $z$ , y se representa por  $\bar{z}$ , como el número complejo  $\bar{z} = a - bi$ .



Geoméricamente, si el número complejo  $z = a + bi$  se representa por el punto  $P = (a, b)$ , su conjugado  $\bar{z} = a - bi$  se representa por el punto  $P' = (a, -b)$  que es el simétrico de  $P$  respecto del eje  $X$ .

Notemos que las partes real e imaginaria de un número complejo se pueden expresar en términos del número complejo y de su conjugado,

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2a \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ z - \bar{z} &= 2ib \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{aligned}$$

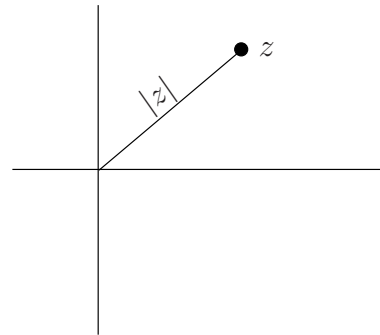
### Propiedades del conjugado.

- (1)  $\overline{\bar{z}} = z$
- (2)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .
- (3)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ .
- (4) Si  $z_2 \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ .
- (5)  $z \bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$ . Por tanto,  $z \bar{z} > 0$  para todo  $z \neq 0$ .

**Definición. Módulo.** Se define el módulo del número complejo  $z = a + bi$ , y se representa por  $|z|$ , como el número real

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Considerando el punto  $P = (a, b)$ , asociado al número complejo  $z = a + bi$ , el módulo de  $z$  no es otra cosa que la longitud del segmento  $\overline{OP}$  (la distancia entre el origen de coordenadas y el punto  $P$ ).



### Observaciones.

- a) Nótese que  $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$ . Por tanto,  $|z|^2 = z \bar{z}$  y  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .
- b) Podemos observar también que para dividir dos números complejos  $w/z$ , basta con multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\frac{w}{z} = \frac{w \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{w \bar{z}}{|z|^2}.$$

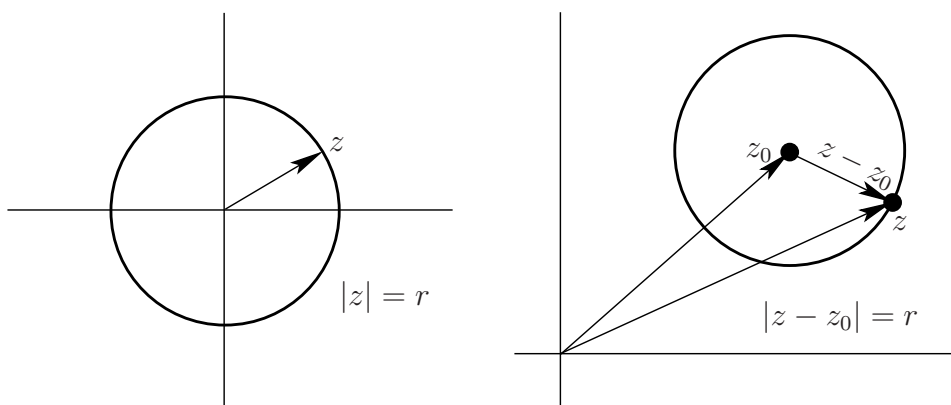
El módulo permite trabajar con distancias en el plano. Así, si los números complejos  $z_1 = a_1 + b_1i$  y  $z_2 = a_2 + b_2i$  se representan en el plano por los puntos  $P_1 = (a_1, b_1)$  y  $P_2 = (a_2, b_2)$ , respectivamente, entonces

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

y su módulo  $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$  es la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, el conjunto de puntos  $P = (x, y)$  del plano que equidistan del origen  $O$  una cantidad constante  $r$ , es decir, los puntos  $P = (x, y)$  de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio  $r$ , pueden expresarse en términos de las coordenadas cartesianas mediante la ecuación  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$  y mediante los números complejos por la ecuación  $|z| = r$  (ver figura).

De la misma forma, si el número complejo  $z_0 = x_0 + y_0i$  se representa en el plano por el punto  $C = (x_0, y_0)$ , entonces el conjunto de puntos  $P = (x, y)$  del plano que equidistan de  $C$  una cantidad constante  $r$ , es decir, los puntos  $P = (x, y)$  de la circunferencia de centro  $C$  y radio  $r$  (ecuación cartesiana  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$ ) se puede expresar en forma compleja mediante  $|z - z_0| = r$  (ver figura).



En lo que se refiere a la suma las propiedades del módulo coinciden con las propiedades del cálculo de distancias y de la norma/módulo de vectores.

**Propiedades del módulo.** Sean  $z, z_1$  y  $z_2$  números complejos.

- (1)  $|z| = 0$  si, y sólo si,  $z = 0$ .
- (2)  $|z| = |\bar{z}|$ .
- (3a)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .
- (3b) Si  $z_2 \neq 0$ ,  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ .
- (4)  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ .
- (5) **Desigualdad triangular:**  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

Demostremos la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2) (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
 &= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
 &\leq |z_1|^2 + 2|\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})| + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
 &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|
 \end{aligned}$$

en la cuarta igualdad usamos que  $\overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{z_1} \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} z_2$  y, por tanto,

$$z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} = 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}).$$

**Ejercicio.** Demuestra que  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .

### 2.1.2.- Forma exponencial. Potencias y raíces.

- Coordenadas polares.

Como acabamos de ver, al número complejo  $z = a + bi$  le corresponde el punto  $P$  del plano de coordenadas  $(a, b)$ . Si representamos por  $r$  la longitud del segmento  $\overline{OP}$ , que une el origen  $O$  de coordenadas y  $P$ , y por  $\theta$  el ángulo (los ángulos) que forma  $\overline{OP}$  con el semieje positivo de abscisas, se dice que  $(r, \theta)$  son las coordenadas polares del punto  $P$ . Si  $r = 0$ , es decir, si  $P \equiv O$ , entonces el ángulo  $\theta$  no está definido. Consideraremos, por tanto, que  $z \neq 0$ . En este caso,  $r$  es único pero  $\theta$  no lo es. Dado  $r > 0$ , cualesquiera dos ángulos que se diferencien en un múltiplo entero de  $2\pi$  (número completo de vueltas) dan lugar al mismo punto. Se establece como convenio que  $\theta$  es positivo si es medido en sentido antihorario, y negativo en caso contrario. A cualquiera de tales números  $\theta$  se le llama **argumento** de  $z$  y se representa mediante  $\arg(z)$ . Se sigue fácilmente que, para números complejos cuya parte real sea no nula, se tiene que

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2} = |z| \quad \text{y que} \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{y}{x}.$$

Si para  $x \neq 0$  se calcula el argumento de  $z = x + iy$  utilizando la función *arco tangente* de una calculadora (o de cualquier paquete de cálculo matemático), lo que se obtiene es un ángulo que está en el intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Dicho ángulo puede ser uno de los argumentos de  $z$  o uno de los argumentos de  $-z$  (puesto que  $\frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$ ). Para determinar si se trata de uno o de otro hay que tener en cuenta los signos de la parte real y de la parte imaginaria. Por otra parte, para obtener alguno de los argumentos de  $z$  que no esté en el intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  habrá que suma algún múltiplo apropiado de  $2\pi$ .

El argumento de un número complejo con parte real nula puede ser  $-\frac{\pi}{2} (+2k\pi)$  si la parte imaginaria es negativa o  $\frac{\pi}{2} (+2k\pi)$  si la parte imaginaria es positiva.

Puesto que  $a = r \cos \theta$  y  $b = r \operatorname{sen} \theta$ , tenemos que  $z$  se puede expresar de la forma

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

La expresión de un número complejo no-nulo en términos de su módulo  $r$  y su argumento  $\theta$  (uno de ellos) se suele denominar **forma polar o trigonométrica** de  $z$ .

Notemos que para que dos números complejos, dados en forma trigonométrica por uno cualquiera de sus argumentos,

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

sean iguales tiene que ser iguales sus módulos pero no necesariamente tienen que serlo los argumentos considerados

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

El uso de la forma trigonométrica permite dar una **interpretación geométrica del producto de dos números complejos**. Para los números  $z_1$  y  $z_2$  considerados tenemos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i (\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Es decir, el producto de dos números complejos es un número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y uno de sus argumentos es la suma de los argumentos.

El inverso del número complejo  $z = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$  se puede obtener en forma trigonométrica del siguiente modo:

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} = \frac{1}{r} \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)} = \frac{1}{r} \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta)^2 + (\operatorname{sen} \theta)^2} \\ &= r^{-1} (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = r^{-1} (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)). \end{aligned}$$

Del mismo modo podemos dividir dos números complejos,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)].$$

### Forma exponencial de un número complejo.

Observemos que, en los cálculos anteriores, el término  $f(\theta) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  tiene algunas de las propiedades de una función exponencial (de exponente real), pues

$$f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) f(\theta_2).$$

Es posible mostrar, aunque está fuera del alcance de este curso, que la función exponencial real  $e^t$  puede extenderse de manera razonable al caso de exponentes complejos y que dicha extensión, para el caso de un exponente complejo imaginario puro, está dada necesariamente por la siguiente fórmula llamada fórmula de Euler.

<b>Fórmula de Euler:</b> $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$
---

Utilizaremos esta expresión como definición de  $e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . De esta forma, se puede representar todo número complejo (forma exponencial) mediante

$$z = r e^{i\theta} (= r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))$$

siendo  $r$  el módulo de  $z$  y  $\theta$  uno cualquiera de sus argumentos.



Leonhard Euler  
1707-1783

Las propiedades *aritméticas* de la exponencial real  $e^t, t \in \mathbb{R}$ , se cumplen para la exponencial compleja  $e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$ . Las propiedades de la exponencial real relativas a desigualdades, crecimiento, etc. no son trasladables a la exponencial compleja y de hecho no tienen sentido para ésta. Para cualquier  $\theta \in \mathbb{R}$ , los puntos  $e^{i\theta}$  son puntos de la circunferencia unidad y cuando  $\theta \rightarrow +\infty$  ó  $\theta \rightarrow -\infty$  dichos puntos recorren la circunferencia unidad en sentido positivo o negativo, respectivamente.

**Propiedades.** Sean  $z = re^{i\theta}, r > 0$ , y  $w = \rho e^{i\varphi}, \rho > 0$ , dos números complejos dados en forma exponencial.

$$(1) |z| = |re^{i\theta}| = r \text{ y } \arg(z) = \theta.$$

$$(2) z = w \equiv re^{i\theta} = \rho e^{i\varphi} \iff \begin{cases} r = \rho \text{ y} \\ \theta - \varphi \text{ es un múltiplo entero de } 2\pi. \end{cases}$$

$$(3) \bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} = r \frac{1}{e^{i\theta}}.$$

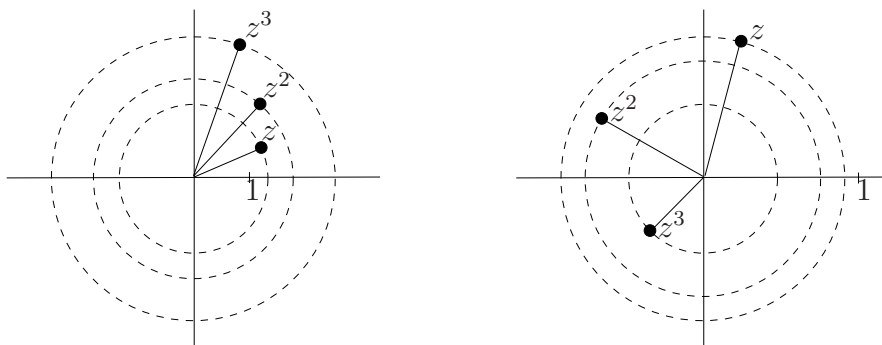
$$(4) zw = (re^{i\theta})(\rho e^{i\varphi}) = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}, \quad \frac{z}{w} = \frac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\varphi)}.$$

### • Potencias de un número complejo. Fórmula de De Moivre.

Utilizando las propiedades que hemos visto del cálculo de productos y cocientes de números complejos dados en forma polar-trigonométrica-exponencial, las potencias enteras de un número complejo  $z \neq 0$  son fáciles de expresar en términos del módulo y el argumento de  $z$ . Si  $z = re^{i\theta}$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$  tenemos:

$$z^0 = 1 \text{ (por convenio)}, z^1 = z = re^{i\theta}, z^2 = r^2 e^{i2\theta} \text{ y, en general, } z^n = r^n e^{in\theta}$$

La interpretación geométrica del cálculo de las potencias de un número complejo es sencilla. Simplemente hay que elevar el módulo a  $n$  y multiplicar el argumento por  $n$ . En la figura se consideran dos situaciones, módulo mayor que 1 o módulo menor que 1.



Para exponentes negativos  $n = -1, -2, -3, \dots$  las expresiones anteriores siguen siendo válidas. Siendo  $m = -n$  tenemos

$$z^n = (z^{-1})^m = \left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}\right)^m = (r^{-1})^m e^{-im\theta} = r^n e^{in\theta}.$$



**Fórmula de De Moivre.** Siendo  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  se verifica:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \equiv (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta).$$

**Ejemplo.** Las potencias de la unidad imaginaria  $z = i$  son

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = 1, \\ i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = 1, \\ i^8 = 1, & i^9 = i & \dots & \dots \end{array}$$

Es decir, las potencias de la unidad imaginaria se repiten de cuatro en cuatro. Por tanto, para calcular, por ejemplo,  $i^{1397}$  lo que haríamos sería dividir el exponente entre cuatro, hallar el resto (en este caso se tendría  $1397 = 4 \cdot 349 + 1$ ) y expresar:

$$i^{1397} = i^{4 \cdot 349 + 1} = (i^4)^{349} \cdot i^1 = i.$$

### • Raíces de un número complejo. Representación gráfica.

Se dice que el número complejo  $z = re^{i\theta}$  es raíz  $n$ -ésima de  $w = \rho e^{i\varphi} \neq 0$  si, y sólo si,  $z^n = w$ :

$$\sqrt[n]{w} = z \Leftrightarrow w = z^n.$$

Veamos cuántas raíces  $n$ -ésimas tiene un número complejo. Según la definición dada deberá ser

$$w = z^n \Leftrightarrow \rho e^{i\varphi} = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

De acuerdo con la caracterización de la igualdad de números complejos dados en forma polar tenemos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = r^n \\ n\theta = \varphi + 2k\pi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{array} \right. \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ahora bien, al dar valores a  $k$  obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } k = 0 \longrightarrow z_1 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}}, \\ \text{Para } k = 1 \longrightarrow z_2 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2\pi}{n}}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \text{Para } k = n - 1 \longrightarrow z_n = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}} \\ \text{Para } k = n \longrightarrow z_{n+1} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2n\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{n} + 2\pi)}. \end{array} \right.$$

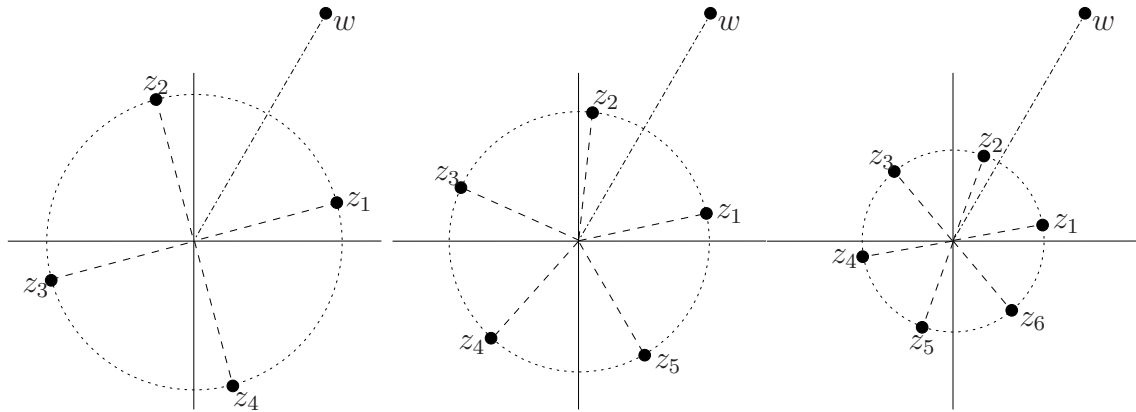
y esta última raíz  $z_{n+1} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}} = z_1$ . Por tanto, todo número complejo no nulo tiene  $n$  raíces  $n$ -ésimas (distintas).

**Representación gráfica de las raíces.** Observamos que todas las raíces  $n$ -ésimas del número complejo  $w = \rho e^{i\varphi}$  tienen el mismo módulo  $\sqrt[n]{|w|}$ , y los argumentos de dos raíces obtenidas para  $k = p$  y  $k = p + 1$  se diferencian en

$$\frac{\varphi + 2(p+1)\pi}{n} - \frac{\varphi + 2p\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

Por tanto, los puntos que representan a esas  $n$  raíces son los vértices de un polígono regular de  $n$  lados inscrito en una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio  $\sqrt[n]{\rho}$ .

En la siguiente figura hemos representado las raíces cuartas, quintas y sextas de un número complejo  $z$  de módulo mayor que 1 y argumento  $\pi/3$ .



**Ejemplo.** Raíces  $n$ -ésimas de la unidad.

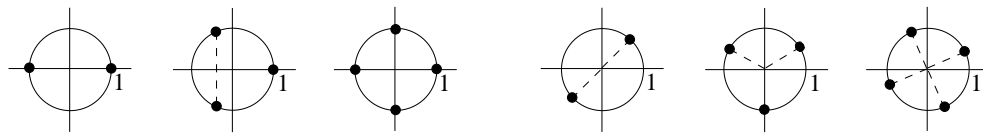
El número  $w = 1$  es un número complejo que tiene módulo la unidad y su argumento es cero, es decir, escrito en forma exponencial  $w = 1 = e^{i0}$ . Entonces

$$\sqrt[n]{1} = e^{i \frac{0+2k\pi}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = e^{i0} = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1, \\ w_2 = e^{i2\pi/n} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}, \\ w_3 = e^{i4\pi/n} = \cos \frac{4\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ w_n = e^{i2(n-1)\pi/n} = \cos \left( \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{2(n-1)\pi}{n} \right). \end{cases}$$

Estos  $n$  números se denominan las raíces  $n$ -ésimas de la unidad.

En las figuras siguientes se esquematizan las raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de  $w = 1$  y de  $w = i$ .



**Observación.-** En general, para tener una expresión de las raíces  $n$ -ésimas de un número complejo, hace falta obtener el argumento de dicho número complejo. Sin embargo, para el caso de las raíces cuadradas,  $n = 2$ , el problema se puede abordar directamente en forma binómica. Por ejemplo, para calcular las raíces cuadradas de  $w = 3 - 2i$  basta con resolver el sistema de dos ecuaciones (no lineales) que se obtiene al plantear la ecuación  $z^2 = w$  con  $z = x + yi$ . Desarrollando el primer término e igualando tenemos

$$(x + iy)^2 = 3 - 2i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -2 \end{cases}$$

Despejando  $y$  en función de  $x$  de la segunda ecuación,  $y = -\frac{1}{x}$ , y sustituyendo en la primera tenemos una ecuación bicuadrada,

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = 3 \iff x^4 - 1 = 3x^2 \iff x^4 - 3x^2 - 1 = 0.$$

Resolvién esta ecuación tenemos

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} & \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}, \\ x^2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0 & \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Y basta ahora obtener el valor de  $y$  correspondiente a cada valor de  $x$ ,

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} & \Rightarrow y = -\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{13}}} & \Rightarrow z_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} - i\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{13}}}, \\ x = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} & \Rightarrow y = +\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{13}}} & \Rightarrow z_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{13}}} = -z_1. \end{cases}$$

Como es lógico se obtienen dos soluciones que son las dos raíces cuadradas de  $w$  (hacer la comprobación).

## 2.2.- Polinomios.

### 2.2.1.- Factorización de polinomios. El teorema del resto.

De forma indistinta usaremos los términos **cero** ó **raíz** de un polinomio

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

(con coeficientes reales o complejos) para designar a los números complejos  $z_0 \in \mathbb{C}$  que verifican que  $p(z_0) = 0$  (las soluciones complejas de la ecuación  $p(z) = 0$ ).

Al igual que para polinomios reales es fácil comprobar que para polinomios complejos se verifica el teorema del resto.

**Teorema del Resto.** Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  y sea  $p(z)$  un polinomio.

- (a) El resto de la división de  $p(z)$  entre  $z - z_0$  es  $p(z_0)$ . Es decir, hay un polinomio  $q(z)$  (de un grado menos que  $p(z)$ ) tal que

$$p(z) = (z - z_0)q(z) + p(z_0).$$

- (b)  $p(z_0) = 0$  si y sólo si  $p(z)$  es divisible por  $z - z_0$ .

### 2.2.2.- El teorema fundamental del álgebra.

Cualquier polinomio real se puede factorizar en un producto de polinomios reales de grados uno y dos. Obviamente hay polinomios reales que no pueden descomponerse en un producto de polinomios de grado uno; por ejemplo  $p(x) = x^2 + 1$ . El siguiente resultado permite establecer que cualquier polinomio (real o complejo) se puede descomponer en un producto de **polinomios complejos** de grado uno (iguales o distintos).

### El Teorema fundamental del Álgebra.

*Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene algún cero complejo.*

Aunque era un resultado intuitivo con anterioridad, la primera demostración del Teorema Fundamental del Álgebra se debe a C.F. Gauss. A lo largo de su vida dio muchas demostraciones de este resultado, aunque ninguna de ellas es puramente algebraica y la descripción de cualesquiera de ellas se sale de los objetivos de la asignatura.



Carl Friedrich Gauss  
1777-1855

Combinando el Teorema fundamental del Álgebra con el Teorema del resto, tenemos:

**Teorema.** Sea  $p(z)$  un polinomio complejo de grado  $n \geq 1$ ,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

- (1)  $p(z)$  tiene  $n$  raíces complejas (contando cada una según su multiplicidad). Es decir, existen  $n$  números complejos (iguales o distintos)  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  tales que

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

- (2) Se verifican las siguientes relaciones entre las raíces y los coeficientes de  $p(z)$ ,

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

De acuerdo con el teorema anterior las ecuaciones polinómicas del tipo  $x^2 + 1 = 0$ , que justificaron la ampliación del conjunto de los números reales porque esas ecuaciones no tienen solución real, tienen solución en el conjunto de los números complejos. Concretamente esa ecuación tiene como soluciones  $z_1 = i$  y  $z_2 = -i$ , de manera que  $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ .

### 2.2.3.- Las raíces de un polinomio real.

No es cierto que todo polinomio no constante con coeficientes reales tenga alguna raíz real; sin embargo se verifica el siguiente resultado.

**Teorema.**

- (1) Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene alguna raíz real.
- (2) En los polinomios con coeficientes reales las raíces complejas no reales aparecen por pares conjugados. Es decir, si  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$  es una raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces su conjugada  $\overline{z_0} = x_0 - iy_0 \in \mathbb{C}$  también lo es.

Resumiendo, en relación con la factorización de polinomios, la diferencia entre considerar o no los números complejos radica en que:

Todo polinomio, de grado  $n \geq 1$ , con coeficientes reales se puede factorizar:

- (a) como un producto de polinomios reales de grados uno y dos.
- (b) como un producto de polinomios complejos de grado uno.

## 2.3.- Movimientos en el plano.

Vamos a considerar aquí dos expresiones para transformaciones sencillas en el plano: traslaciones, homotecias, proyecciones ortogonales, giros y simetrías.

### 2.3.1- Traslaciones.

Como conocemos del estudio de los vectores en el plano y del estudio de los números complejos, la suma  $u + v$  de dos vectores, o la suma  $z + w$  de dos números complejos, se obtiene geoméricamente sin más que hacer la traslación, según el vector  $v$ , del punto cuyas coordenadas son las de  $u$  (o viceversa). Así, la transformación del plano consistente en desplazar cada punto según un vector  $(a, b)$  ( $a$  unidades hacia la derecha (izquierda) y  $b$  hacia arriba (abajo)) puede expresarse mediante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x', y') = (x, y) + (a, b); \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & w = z + (a + bi). \end{array}$$

### 2.3.2- Homotecias.

Para una homotecia de **centro el origen de coordenadas** y razón  $\rho > 0$ , es decir, la transformación que a cada vector  $v$  con origen en el origen de coordenadas le transforma en el vector  $w = \rho v$ , tenemos las expresiones

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x', y') = \rho(x, y) \\ & & = (\rho x, \rho y); \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \longrightarrow & w = \rho z \\ & & = \rho x + \rho yi. \end{array}$$

### 2.3.4.- Proyecciones ortogonales.

En lo que se refiere a proyecciones ortogonales, sabemos que calcular la parte real de un número complejo consiste simplemente en proyectar su afijo (el punto que lo representa) sobre el eje  $OX$ . Calcular la parte imaginaria consiste en proyectar sobre el eje  $OY$ . Así, tenemos

$$\begin{array}{ll} \bullet \text{ Sobre } OX : & \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x', y') = (x, 0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & w = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \end{array} \\ \\ \bullet \text{ Sobre } OY : & \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x', y') = (0, y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & w = i\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z}). \end{array} \end{array}$$

### 2.3.3.- Giros.

Si un punto  $P$  del plano tiene como coordenadas polares  $r > 0$  (su distancia al origen) y  $\theta$  (el ángulo que forma su vector de posición con el semieje positivo de abscisas), entonces sus coordenadas cartesianas son

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \operatorname{sen}(\theta) \end{cases} \quad (*)$$

y es fácil obtener las coordenadas cartesianas del punto que se obtiene al hacer un giro de **centro el origen de coordenadas** y ángulo  $\phi$ , pues es el punto cuya distancia al origen es

$r$  (coincide con la de  $P$ ) y cuyo vector de posición forma con el semieje positivo de abscisas el ángulo  $\theta + \phi$ , es decir, el punto cuyas coordenadas cartesianas son

$$\begin{cases} x' = r \cos(\theta + \phi) = r [\cos(\theta) \cos(\phi) - \sin(\theta) \sin(\phi)] \\ y' = r \sin(\theta + \phi) = r [\sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\theta) \sin(\phi)] \end{cases}$$

y teniendo en cuenta las relaciones (\*) se obtiene

$$\begin{cases} x' = x \cos(\phi) - y \sin(\phi) \\ y' = y \cos(\phi) + x \sin(\phi) \end{cases}$$

Las relaciones anteriores las podemos expresar en forma matricial/vectorial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde la matriz  $G$  involucrada se denomina matriz del giro (de centro 0 y ángulo  $\phi$ ). Hacer la anterior transformación sobre el vector de coordenadas  $(x, y)$  es lo mismo que multiplicar al número complejo  $z = x + iy$  por el número complejo de módulo 1 y argumento  $\phi$ , es decir por  $e^{i\phi}$ . Así, tenemos la expresión del giro en forma compleja

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \longrightarrow & w = e^{i\phi} z \end{array}$$

Desde este punto geométrico, la multiplicación (de un número complejo genérico) por el número complejo de módulo  $\rho$  y argumento  $\phi$ , es decir  $\rho e^{i\phi}$ , consiste en hacer un giro (de centro el origen y ángulo  $\phi$ ) y una homotecia (de centro el origen y razón  $\rho$ ).

En el tema anterior hemos estudiado las ecuaciones reducidas de las **hipérbolas**. Estas ecuaciones reducidas se obtienen al considerar un sistema de coordenadas cuyos ejes sean los ejes de simetría de la hipérbola. Ahora estamos en condiciones de comprobar que las gráficas  $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$ , son un caso particular de hipérbola tal y como la hemos considerado en el tema anterior.

Si hacemos un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo  $\phi = -\frac{\pi}{4}$  radianes obtenemos los puntos de coordenadas  $(x', y')$  dados por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Puesto que la anterior relación es equivalente a

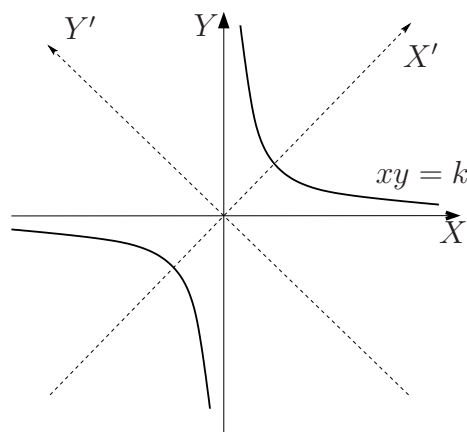
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

sustituyendo  $(x, y)$  en la ecuación  $xy = k$  tenemos

$$\left( \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right) = k \iff \frac{(x')^2}{2k} - \frac{(y')^2}{2k} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera con centro  $(x' = 0, y' = 0) \equiv (x = 0, y = 0)$ , con ejes

$$\begin{aligned} \bullet y' = 0 &\equiv \frac{x - y}{\sqrt{2}} = 0 \quad y \\ \bullet x' = 0 &\equiv \frac{x + y}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$



y con asíntotas  $y' = \pm x'$  (o lo que es lo mismo  $y = 0$  y  $x = 0$ ).

Cuando una hipérbola (equilátera) viene dada por una ecuación del tipo  $xy = k$  se dice que la hipérbola está referida a sus asíntotas y cuando viene dada por una ecuación del tipo  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$  se dice que está referida a sus ejes.

**Ejercicio.-** Comprueba que los focos de la hipérbola  $xy = 1$  son los puntos  $F_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$  y  $F_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

### 2.3.5.- Simetrías.

Por último, podemos considerar dos tipos de simetría: simetría respecto a un punto o simetría respecto a una recta. Yendo a la situación más simple, tenemos la simetría respecto al origen de coordenadas,

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (-x, -y) \in \mathbb{R}^2,$$

que podemos expresar en forma matricial y compleja, respectivamente, como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \longrightarrow & w = -z. \end{array}$$

La simetría respecto al eje  $OX$  tiene expresiones simples tanto en forma matricial como compleja:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + yi & \longrightarrow & w = \bar{z}. \end{array}$$

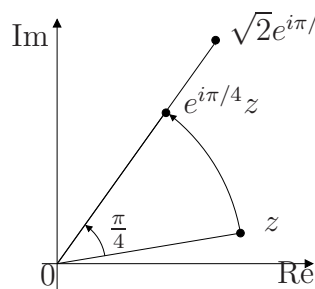
### Ejemplos.

(1) ¿Qué representa geoméricamente la transformación:  $z \in \mathbb{C} \rightarrow (1 + i)z - 2 \in \mathbb{C}$  ?

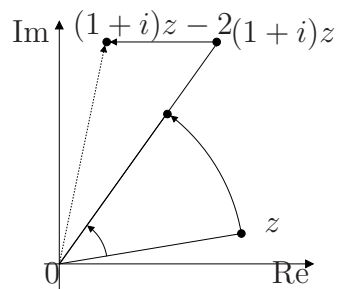
Puesto que  $1 + i$  tiene módulo  $\sqrt{2}$  y argumento  $\frac{\pi}{4}$  rad., tenemos que

$$(1 + i)z = \sqrt{2} e^{i\pi/4} z$$

es el número complejo/punto/vector que se obtiene al hacer un giro de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  rad. (y centro el origen) y una homotecia de razón  $\sqrt{2}$ . Una vez hechas estas transformaciones, nos queda restar 2, es decir, hacer (sobre lo obtenido) la traslación de vector  $(-2, 0)$ .

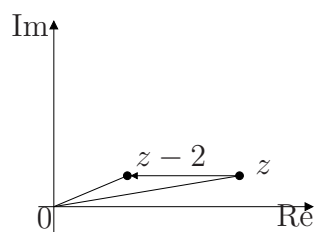


Primero giramos ...

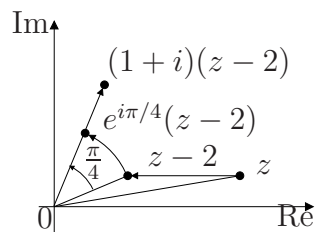


y luego trasladamos.

Notemos que si bien hacer primero el giro y después la homotecia da el mismo resultado que hacer primero la homotecia y después el giro, esto no sucede con la traslación; no es lo mismo hacer primero el giro (o la homotecia) y después la traslación que hacerlo al revés. Si hicieramos primero la traslación y después el giro y la homotecia el resultado sería  $(1+i)[z-2]$ .



Primero trasladamos



y luego giramos...

Las expresiones matriciales de las anteriores operaciones las podemos obtener sin más que determinar la parte real y la parte imaginaria de los resultados. Para  $w = (1+i)z-2$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (2) ¿Cómo podemos expresar en términos complejos la transformación del plano consistente en hacer una simetría respecto al eje  $OY$ ? En términos de parte real y parte imaginaria tenemos:

$$z = x + yi \in \mathbb{C} \rightarrow w = -x + yi$$

y teniendo en cuenta que  $x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,  $y = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ , obtenemos

$$w = -\frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \frac{1}{2i}(z - \bar{z})i = -\bar{z}.$$

O sea, que hacer una simetría respecto al eje  $OY$  es lo mismo que hacer la simetría respecto al eje  $OX$  seguida de la simetría respecto al origen.



### 2.3.6.- Transformaciones lineales en el plano.

Notemos que las homotecias, los giros y las simetrías con *centro el origen de coordenadas* son transformaciones en el plano real que quedan definidas mediante una matriz (real,  $2 \times 2$ ). Lo mismo sucede con las proyecciones ortogonales y las simetrías cuando se consideran rectas que *pasan por el origen de coordenadas*. Es decir, se trata de transformaciones de vectores del plano,  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , para las cuales puede determinarse una matriz  $A$  (real,  $2 \times 2$ , única) para la que se verifica que  $T(v) = Av$  para cualquier vector  $v \in \mathbb{R}^2$ . Este tipo de transformaciones tiene buenas propiedades que provienen del hecho de que *respetan las combinaciones lineales*, es decir, el transformado de una combinación lineal de vectores es igual a la combinación lineal de los transformados,

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

Las transformaciones que verifican la condición anterior se denominan **transformaciones lineales**. Obviamente la condición anterior es equivalente a que se respeten *múltiplos y sumas de vectores*,

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) + \beta T(v), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall v \in \mathbb{R}^2,$$

$$T(u + v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

El concepto de transformación lineal lo consideraremos más adelante para vectores con un número genérico (finito) de coordenadas reales o complejas. Dichas transformaciones podrán ser tratadas mediante una cierta matriz (real o compleja). Algunas de las características más importantes de la transformación lineal estarán asociadas a los sistemas de ecuaciones que tienen a la matriz en cuestión como matriz de coeficientes de las incógnitas.

Cuando se consideran homotecias, giros o simetrías con centro en un punto que no es el origen de coordenadas (o proyecciones y simetrías respecto de rectas que no pasan por el origen de coordenadas) la transformación se puede obtener mediante una ecuación de la forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

donde  $a, b, c, d, \alpha$  y  $\beta$  son constantes reales. Por tanto, son transformaciones que pueden obtenerse mediante una transformación lineal (dada por la matriz) y una traslación (dada por el vector de coordenadas  $(\alpha, \beta)$ ).

## 2.4.- Ejercicios.

**Ejercicio 1.** Dados los números complejos  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 1 - i$ ,  $z_3 = 3 + 4i$ , calcula

$$5z_1 + 2z_2 - z_3, \quad z_1^2, \quad z_1 z_2 \overline{z_3}, \quad \frac{z_1 z_3}{z_2}, \quad |2z_1 - 3z_3|, \quad \left| \frac{z_1 z_3}{z_2} \right|, \quad \frac{z_1^n}{z_2^{n-2}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Ejercicio 2.** Dados los números complejos  $z_1 = -2$ ,  $z_2 = -2i$ ,  $z_3 = 3 - 3i$ , y  $z_4 = -2 + 2\sqrt{3}i$ :

(1) Represéntalos geoméricamente y escribirlos en forma polar y exponencial.

(2) Calcula y representa geoméricamente:  $z_1 + z_3$ ,  $z_2 z_3$ ,  $z_3 z_4$ ,  $\frac{z_3}{z_4}$ ,  $z_3^{27}$ ,  $z_4^{200}$ .

(3) Calcula y representa geoméricamente:  $\sqrt[3]{z_1}$ ,  $\sqrt[5]{z_3}$ ,  $\sqrt[4]{z_4}$ ,  $\sqrt[4]{z_1^2}$ ,  $(\sqrt[4]{z_1})^2$ .

**Ejercicio 3.**

(1) Utilizando la fórmula de De Moivre, expresa  $\sin(2\theta)$ ,  $\cos(2\theta)$ ,  $\sin(3\theta)$  y  $\cos(3\theta)$  en función de  $\sin(\theta)$  y  $\cos(\theta)$ .

(2) Siendo  $z = re^{ix}$ , calcula  $\frac{(z + \overline{z})(z^2 + \overline{z}^2) \cdots (z^n + \overline{z}^n)}{\cos(x) \cos(2x) \cdots \cos(nx)}$ .

(3) Siendo  $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$  (comprueba que  $z^4 = \overline{z}$ ), calcula  $w = 1 + z + z^4 + z^9 + z^{16}$ .

**Ejercicio 4.** Calcula:

(1) La parte imaginaria de  $(1 - i)^5$  y la parte real de  $(1 - i)^{2002}$ .

(2) Las raíces sextas de  $z = -1$ .

(3) La parte real de las sumas  $\sum_{k=0}^{100} i^k$ ,  $\sum_{k=0}^{100} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^k$ .

**Ejercicio 5.** Representa en el plano complejo las curvas y recintos determinados por las siguientes igualdades y desigualdades:

(1)  $\operatorname{Ima}\left(\frac{1}{z}\right) > \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ .

(2)  $\operatorname{Re}(z^2) = 0$ .

(3)  $\operatorname{Ima}(z^2) = 3$ .

(4)  $|z - 3| = |z + i|$ .

(5)  $|z - 3| > |z + i|$ .

**Ejercicio 6.** Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas y factoriza los polinomios correspondientes:

$$z^2 - 2z + 2 = 0, \quad z^2 + (i - 1)z - i = 0, \quad z^6 - 2z^3 + 2 = 0.$$

**Ejercicio 7.** (1) Resuelve, para  $n = 1, 2, \dots$ , la ecuación polinómica:  $z^n + (z - 2)^n = 0$ .



(2) Resuelve las siguientes ecuaciones (no polinómicas)

$$(a) \bar{z} - \frac{1}{z} = 3i; \quad (b) (\bar{z})^2 = z^2.$$

**Ejercicio 8.** Indica la respuesta correcta. El teorema fundamental del álgebra garantiza que un polinomio real de grado 9,

- ☐ tiene 9 raíces reales porque sus coeficientes son reales.  
☐ no puede tener raíces reales.  
☐ tiene 9 raíces complejas.

**Ejercicio 9.** Sin tratar de calcular las raíces de los siguientes polinomios,

$$P_1(z) = z^3 + 28z^2 + 2z - 1, \quad P_2(z) = z^4 + 2z^3 - 2z - 15, \\ P_3(z) = iz^2 + (3 - i)z - (1 + i), \quad P_4(z) = iz^5 + z^3 - (1 + i)z^2,$$

¿qué se puede decir de ellas?, ¿puede garantizarse la existencia de alguna raíz real?:

**Ejercicio 10.** Expresa mediante operaciones con números complejos y en términos matriciales las siguientes transformaciones del plano:

- (1) Proyección ortogonal sobre el eje  $OY$ .  
 (2) Giro con centro en el punto  $(1, 1)$  y ángulo  $\frac{\pi}{3} rad$ . (en sentido positivo).  
 (3) Homotecia con centro en  $(1, 2)$  y razón 3.

**Ejercicio 11.** ¿Qué representan geoméricamente las siguientes operaciones sobre números complejos y vectores respectivamente?

- (1) (a)  $(3 + i)^2 z - 2$ , (b)  $(3 + i)^2 (z - 2)$ , (c)  $(3 + i)^2 \bar{z} - 2$ .  
 (2) (a)  $-5 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , (b)  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 12.** Expresa mediante operaciones con números complejos y en términos matriciales las siguientes transformaciones del plano:

- (1) Giro con centro el origen y ángulo el ángulo  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$  que forma la recta  $y = 2x$  con el semieje positivo de abscisas.  
 (2) Giro con centro el origen que lleva el punto  $P = (1, 2)$  sobre el punto  $P' = (-2, 1)$ .  
 (3) Giro con centro  $C = (1, 0)$  que lleva el punto  $P = (1, 2)$  sobre el punto  $P' = (-2, 1)$ .

## 1.5.- Apéndice: MATLAB.

A continuación describimos algunas de las funciones de MATLAB relacionadas con el contenido de este tema.

### Números complejos.

- **La unidad imaginaria.** La unidad imaginaria se puede indicar mediante `I` o `J` salvo que se hayan usado dichas letras para indicar índices, variables, ... Las expresiones `5-2i`, `5-2*i`, `5-2j`, `5-2*j` y `5-2*sqrt(-1)` denotan todas al mismo número complejo.
- **Las partes real e imaginaria.** Siendo  $X$  una matriz (o un vector o un número) con entradas complejas,

`REAL(X)` es la parte real de  $X$ ,  
`IMAG(X)` es la parte imaginaria de  $X$ .

Siendo  $A$  y  $B$  matrices, vectores o números reales, con las mismas dimensiones, `C = COMPLEX(A,B)` nos da la matriz, vector o número complejo  $C = A + Bi$ .

- **El módulo y el conjugado.** Siendo  $X$  una matriz, vector o número complejos,  
`CONJ(X)` = `REAL(X) - i*IMAG(X)` es el complejo conjugado de  $X$ ,  
`ABS(X)` es el módulo de las entradas de  $X$ .
- **El argumento.** La función `ANGLE` permite obtener, en radianes, el argumento principal (el del intervalo  $(-\pi, \pi]$ ) de un número complejo. Siendo  $H$  una matriz con elementos complejos, la orden `ANGLE(H)` nos da la matriz de los ángulos de fase (argumentos) de las entradas de la matriz  $H$ .

**Polinomios.** Aunque algunas cosas puedan hacerse desde un punto de vista simbólico, la manipulación genérica que permite MATLAB de los polinomios es numérica y se efectúa a través del vector de coeficientes del correspondiente polinomio en orden de potencias decrecientes.

- **Las raíces de un polinomio.** `ROOTS`. Siendo  $C$  el vector de los  $n+1$  coeficientes del polinomio

$$C(1) * X^N + \dots + C(N) * X + C(N+1),$$

la orden `ROOTS(C)` calcula las raíces del polinomio descrito, es decir, las soluciones (reales o complejas) de la ecuación

$$C(1) * X^N + \dots + C(N) * X + C(N+1) = 0.$$

Consultar la orden `FZERO`.

- **Polinomio con raíces dadas.** `POLY`. Siendo  $V$  un vector, la orden `POLY(V)` nos da el vector de los coeficientes del polinomio cuyas raíces son los elementos del vector  $V$ .

Siendo  $A$  una matriz  $N \times N$ , la orden `POLY(A)`, es un vector fila cuyos  $N+1$  elementos son los coeficientes del polinomio (de grado  $N$ )  $\det(\lambda I - A)$ , polinomio que, salvo signo, denominaremos polinomio característico de la matriz  $A$  (ver Tema 9).

Para vectores, los comandos `ROOTS` y `POLY` son uno inverso del otro salvo ordenación, escalamiento y errores de redondeo.

- **Valores de un polinomio** `POLYVAL` permite evaluar un polinomio. Siendo  $P$  un vector de longitud  $N + 1$  cuyos elementos son los coeficientes de un polinomio, la orden

$$Y = \text{POLYVAL}(P, X),$$

nos da el valor del polinomio

$$P(1) * X^N + P(2) * X^{(N-1)} + \dots + P(N) * X + P(N+1)$$

en  $X$  que puede ser un número (real o complejo), una matriz o un vector. Cuando  $X$  es una matriz o un vector, el resultado es la matriz o vector formados con los valores del polinomio en las correspondientes **entradas** de  $X$ .

- **Polinomio de matriz.** Notemos que cuando se ejecuta `POLYVAL(P,X)` siendo  $P$  un polinomio (sus coeficientes) y  $X$  una matriz, es resultado es la matriz de los valores que alcanza el polinomio en cada una de las entradas de la matriz. Si, por ejemplo, tenemos el polinomio  $3t^2 - 2t + 5$  y siendo  $A$  una matriz cuadrada e  $I$  la matriz identidad del mismo orden que  $A$ , queremos obtener la matriz  $3A^2 - 2A + 5I$ , necesitamos otra función que es `POLYVALM`. La orden  $Y = \text{POLYVALM}(P, X)$  evalúa el polinomio dado por  $P$  en la matriz cuadrada  $X$ , en el sentido de las operaciones matriciales y no elemento a elemento.
- **Polinomio de interpolación.** La función `POLYFIT` permite *ajustar* un polinomio a unos datos dados, en el sentido de los *mínimos cuadrados* (ver Tema 7). Cuando las entradas del vector  $X = [X(1), \dots, X(k)]$  son distintas dos a dos,  $Y$  es un vector con las mismas dimensiones que  $X$  y  $N = k - 1$ , la orden

$$\text{POLYFIT}(X, Y, N)$$

nos da el polinomio (los coeficientes del polinomio)  $P$  de grado  $N$  que verifica que  $P(X(I)) = Y(I)$ ,  $I = 1, 2, \dots, k$ .

- **Descomposición en fracciones simples.** Consultar `RESIDUE`.

## Giros.

- **Giros en el plano.** `PLANEROT`

$$[G, Y] = \text{PLANEROT}(X),$$

donde  $X$  es un vector columna con dos entradas, da la matriz del giro que lleva el vector  $X$  sobre un vector  $Y = G * X$  que verifica  $Y(2) = 0$ ,  $Y(1) \geq 0$ , es decir sobre un vector del semieje positivo de abscisas.

- **Giros en el espacio.** Consultar el comando/función `ROTATE`.