Conceptos básicos del modelo de valor en riesgo

La metodología de valor en riesgo, promovida y difundida por JP Morgan en 1994, se considera como un nivel de referencia (*Benchmark*) y un estándar en los mercados financieros, lo que permite comparar la exposición de riesgo de mercado entre diversas instituciones.

4.1 Definición del valor en riesgo

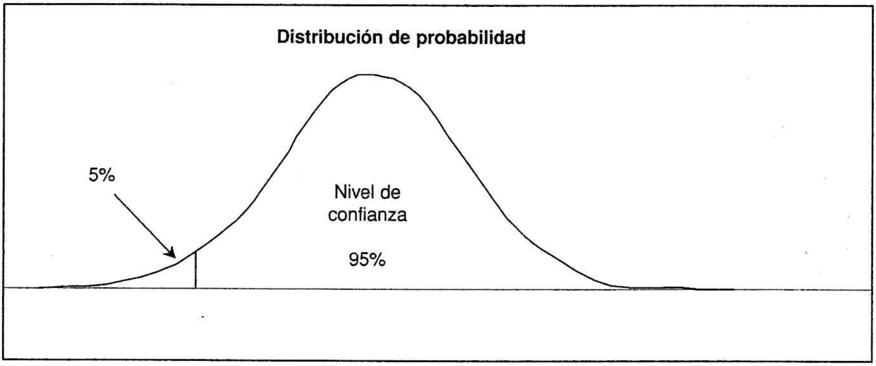
El valor en riesgo (VaR) es un método para cuantificar la exposición al riesgo de mercado por medio de técnicas estadísticas tradicionales.

El valor en riesgo es una medida estadística de riesgo de mercado que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolios en un intervalo de tiempo y con cierto nivel de probabilidad o confianza.

Es importante destacar que la definición de valor en riesgo es válida únicamente en condiciones normales de mercado, ya que en momentos de crisis y turbulencia la pérdida esperada se define por pruebas de *stress* o valores extremos, que se detallan en el capítulo 8.

Para entender este concepto, a continuación se presenta un ejemplo: un inversionista tiene un portafolios de activos con un valor de 10 millones de pesos, cuyo VaR de un día es de $250,000 con 95% de nivel de confianza (significa que la pérdida máxima esperada en un día será $250,000 en 19 de cada 20 días). En otras palabras, sólo un día de cada 20 de operación del mercado (1/20 = 5%), en condiciones normales, la pérdida que ocurrirá puede ser mayor a $250,000.

En una empresa o institución financiera, los miembros del consejo de administración son quienes deben definir dos aspectos fundamentales para el cálculo del VaR: el *nivel de confianza* que desean tener para determinar el VaR, y el *horizonte de tiempo* con que se va a medir. El Banco Internacional de Liquidaciones (BIS) recomienda definir 99% de nivel de confianza y un horizonte de 10 días para los intermediarios financieros. Sin embargo, JP Morgan recomienda 95% de probabilidad en un horizonte de un día, para operaciones en mercados líquidos (*Riskmetrics: daily earnings at risk, DEAR*).[1]



Como se puede observar, el VaR no otorga certidumbre con respecto a las pérdidas que se podrían sufrir en una inversión, sino una expectativa de resultados basada en estadística (series de datos en el tiempo) y en algunos supuestos de los modelos o parámetros que se utilizan para su cálculo.

Por este motivo, las instituciones deben, en adición al cálculo del VaR, complementar su medición de riesgos con otras metodologías, como el análisis de *stress* (valores extremos), las reglas prudenciales, los procedimientos y políticas de operación, los controles internos, los límites y las reservas de capital adecuadas.

4.2 Metodologías para el cálculo del VaR

El Valor en Riesgo se puede calcular mediante dos métodos:

1) Métodos paramétricos.
2) Métodos no-paramétricos.

4.2.1 Métodos paramétricos

Tienen como característica el supuesto de que los rendimientos del activo en cuestión se distribuyen de acuerdo con una curva de densidad de probabilidad normal, como se indicó con anterioridad.

Sin embargo, en la práctica se ha observado que la mayoría de los activos no siguen un comportamiento estrictamente normal, sino que son aproximados a la curva normal y, por tanto, los resultados que se obtienen al medir el riesgo son una aproximación.

4.2.1.1 El valor en riesgo de un activo individual

Bajo el supuesto de normalidad y de media de rendimientos igual a cero, el modelo paramétrico que determina el valor en riesgo de una posición es el siguiente:

$$VaR = F \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$

donde:

F = factor que determina el nivel de confianza del cálculo. Para un nivel de confianza de 95%, F= 1.65, y para un nivel de confianza de 99%, F= 2.33.
S = monto total de la inversión o la exposición total en riesgo.
σ = desviación estándar de los rendimientos del activo.
t = horizonte de tiempo en que se desea calcular el VaR (*holding period*).

Para ilustrar lo anterior, observe el siguiente ejemplo: un inversionista compra 10,000 acciones en el mercado accionario cuyo precio es de \$30 por acción y su volatilidad es de 20% anual (un año consta de 252 días de operación en el mercado, aproximadamente). Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95% de confianza.

$$VaR = 1.65 \times \$300{,}000 \times 0.20 \times \sqrt{1/252} = \$6{,}236.41$$

Esto significa que se espera que un día de cada 20, es decir, un día hábil del mes, el inversionista sufrirá una pérdida de \$6,236.41 o más. Esta cifra se puede utilizar como límite para el operador de la posición, como revelación de información de riesgos del portafolios o como margen en contratos de futuros.

4.2.1.2 El valor en riesgo de un portafolios de activos (método de varianza-covarianza o delta-normal)

Para entender este concepto, tómese el caso más sencillo: suponga un portafolios con dos activos riesgosos en cuyo caso se tiene un peso específico del activo 1 en el portafolios, $w1$, y un peso específico del activo 2 en el portafolios, $w2$, de tal suerte que ($w1 + w2 = 1$). De acuerdo con la teoría desarrollada por Markowitz, la varianza del portafolios es:

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2\, w_1 w_2\, \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

Donde *rho* es el coeficiente de correlación entre los rendimientos de los dos activos. El VaR del portafolios es:

$$VaR = F\,\sigma_p S\sqrt{t} = F\left[w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2\, w_1 w_2\, \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\right]^{1/2} S\sqrt{t}$$

$$VaR = \left[VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\,\rho_{12} VaR_1 VaR_2\right]^{1/2}$$

A este VaR se le conoce también como el VaR diversificado porque toma en cuenta las correlaciones de los rendimientos entre instrumentos. Note que el VaR diversificado es menor que la suma aritmética de los VaR individuales. Para el caso general en el que se tienen más de dos activos en el portafolios, se llega a lo siguiente:

$$VaR_p = F\,\sigma_p S\sqrt{t} = F\left[w\sigma\, C\sigma\, w^T\right]^{1/2} S\sqrt{t} = \left[VaR \times C \times VaR^T\right]^{1/2}$$

Donde VaR es un vector de VaR individuales de dimensiones ($1 \times n$), C es la matriz de correlaciones de dimensiones ($n \times n$) y VaR^T es el vector transpuesto de VaR individuales de dimensiones ($n \times 1$).

Si las correlaciones son menores que uno, entonces el VaR diversificado será menor que la suma de los VaR individuales.

Cuando se trata del cálculo del valor en riesgo de un portafolios de n activos, es necesario utilizar matrices y manipular este tipo de instrumentos. A continuación se explican algunos conceptos relacionados con las matrices.

Manipulación de matrices

Una matriz es un arreglo de números compuesto de renglones y columnas. Cuando el número de renglones y columnas coinciden, se le denomina matriz cuadrada. Un ejemplo es:

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 6 \\ 8 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Al conjunto de datos compuesto por 17, 9 y 12 se le conoce como *la diagonal* de la matriz, y este concepto se utiliza en matrices cuadradas.

Una matriz simétrica es aquella en que los elementos que no pertenecen a la diagonal tienen su reflejo o se repiten separados por dicha diagonal. La matriz señalada anteriormente es un ejemplo de simétrica. Note que el número 6 del tercer renglón, segunda columna, es el mismo 6 del segundo renglón, tercera columna.

Si una matriz tiene n renglones y m columnas, se dice que tiene un orden $n \times m$. Por ejemplo, la matriz A tiene un orden de 3×3 (primero renglones y después columnas). El orden de la matriz se escribe usualmente debajo de la letra que la denota, por ejemplo $\underset{(3\times3)}{A}$.

Una matriz muy importante en la medición de riesgos es la llamada matriz de varianza-covarianza. La diagonal de la matriz está compuesta por las varianzas y los elementos fuera de la diagonal por covarianzas, a saber:

$$[\Sigma]=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \operatorname{cov}(r_1,r_2) & \operatorname{cov}(r_1,r_3) & \operatorname{cov}(r_1,r_4) \\ \operatorname{cov}(r_2,r_1) & \sigma_2^2 & \operatorname{cov}(r_2,r_3) & \operatorname{cov}(r_2,r_4) \\ \operatorname{cov}(r_3,r_1) & \operatorname{cov}(r_3,r_2) & \sigma_3^2 & \operatorname{cov}(r_3,r_4) \\ \operatorname{cov}(r_4,r_1) & \operatorname{cov}(r_4,r_2) & \operatorname{cov}(r_4,r_3) & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

Otra matriz interesante es la llamada de correlación, denotada por C. La diagonal de la matriz está compuesta por *unos* y los elementos fuera de la diagonal son los llamados coeficientes de correlación, que se obtienen mediante la siguiente expresión:

$$\rho_{ij}=\frac{\operatorname{cov}(r_i,r_j)}{\sigma_i\sigma_j} \quad \text{Matriz de correlación:} \quad [C]=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

A una matriz que tiene *unos* en la diagonal y *ceros* en los elementos que están fuera de la diagonal, se le denomina matriz identidad (normalmente se denota como I). Por otra parte, a una matriz que contiene sólo una columna o sólo un renglón, se le denomina vector.

En métodos multivariados es necesario considerar simultáneamente dos matrices que tengan los mismos elementos, pero donde los renglones de una matriz coincidan con el número de columnas de la otra. En este caso a una matriz se le denomina la transpuesta de la otra. Por ejemplo:

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -5 & 2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \text{ La matriz transpuesta de } B\text{, que denotaremos } B^T\text{, es } \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 9 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

En los modelos multivariados, las matrices se consideran como entidades equiparables a los números en la conocida aritmética escalar. Por tanto, las matrices pueden ser sumadas, restadas o multiplicadas, pero deben seguirse reglas específicas para realizar estas operaciones. Para sumar o restar matrices, éstas deben ser del mismo orden; simplemente se suma o resta elemento por elemento, por ejemplo:

$$\underset{(2\times 2)}{X} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \underset{(2\times 2)}{Y} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{entonces } \underset{(2\times 2)}{X+Y} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Dos matrices, A y B, se pueden multiplicar sólo si son compatibles; esto significa que para encontrar el producto $A \times B$, el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B. Note que si, por ejemplo, el orden de A es de 3×4 y el de B es de 4×5, entonces el orden del producto $A \times B$ será de 3×5.

En la actualidad ya no es necesario conocer los detalles de la multiplicación, pues los paquetes de cómputo realizan esta operación. En Excel, por ejemplo, la instrucción es =MMULT(A,B). Sin embargo, es indispensable saber si ambas matrices son compatibles y anticipar el orden del producto.

La división entre matrices es más compleja que la multiplicación. A este proceso se le denomina inversión de matrices. La matriz inversa se denota como A^{-1}. Al igual que en la aritmética escalar, el resultado de la multiplicación de A por su matriz inversa es la matriz identidad: $A \times A^{-1} = I$. Para una matriz de 2×2, la matriz inversa es:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

donde

$$|A| = ad - bc \neq 0$$

Matriz de varianza–covarianza

Una vez comprendida la manipulación de matrices, es importante saber cómo determinar la matriz de varianza-covarianza.

Sea una matriz cuadrada en la cual la diagonal está compuesta por las volatilidades (desviaciones estándar) de cada activo del portafolios y los elementos fuera de la diagonal sean ceros, a saber:

fuera de la diagonal sean ceros, a saber:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

La matriz de varianza-covarianza denotada por Σ será aquella que se obtiene de multiplicar las siguientes matrices:

$$[\Sigma] = [\sigma][C][\sigma]$$

Donde C es la matriz de correlación explicada anteriormente. Al realizar este producto de matrices tendremos:

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{14}\sigma_1\sigma_4 \\ \rho_1^2\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \rho_{24}\sigma_2\sigma_4 \\ \rho_{31}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{32}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 & \rho_{34}\sigma_3\sigma_4 \\ \rho_{41}\sigma_1\sigma_4 & \rho_{42}\sigma_2\sigma_4 & \rho_{43}\sigma_3\sigma_4 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

Utilizando la teoría moderna de portafolios es posible medir el riesgo de mercado de una canasta o portafolios de activos. Para determinar el VaR del portafolios es necesario considerar los efectos de la diversificación con las correlaciones entre los rendimientos de los activos que conforman el portafolios. La metodología que se sigue, también llamada método de matriz de varianza-covarianza o delta-normal, es la siguiente:

$$VaR_p = F \times S \times \sigma_p \times \sqrt{t}$$

$$\sigma_p = \sqrt{[w]^T[\Sigma][w]}$$
$$[\Sigma] = [\sigma][C][\sigma]$$

Donde:

F = factor que define el nivel de confianza.
t = horizonte de tiempo en que se desea ajustar el VaR.
$[w]$ = vector de pesos de las posiciones del portafolios ($n \times 1$).
$[w]^T$ = vector transpuesto de los pesos de las posiciones del portafolios ($1 \times n$).
$[\Sigma]$ = matriz de varianza-covarianza que incluye las correlaciones entre los valores del portafolios ($n \times n$).

$[C]$ = matriz de correlaciones de los rendimientos de los activos del portafolios.
S = valor del portafolios.
σ_p = volatilidad del portafolios (1×1).

A continuación se muestra un ejemplo numérico considerando un portafolios de cinco activos (acciones o divisas), en el entendido de que la matriz de correlaciones, las posiciones y las volatilidades individuales son datos. En este ejemplo se desea conocer el valor en riesgo de un día con un nivel de confianza de 99%:

Ejemplo de valor en riesgo de un portafolios.
Método analítico o delta-normal.

Nivel de confianza	**99.0%**			Efecto de diversificación:	**44.1037**
No. de desviaciones estándar	**2.326**				
Volatilidad del portafolios =		**14.48%**	**anual**		
		0.91%	**diaria**		
Valor en riesgo =		**$106.05**	**diario**		

Portafolios:	**Vector de posiciones**	**Volatilidad anual (sigma)**		**VaR individual**	**wi**
ACTIVO 1	$2,000	20.00%		58.6097	40.00%
ACTIVO 2	$1,500	26.00%		57.1444	30.00%
ACTIVO 3	$500	26.00%		19.0481	10.00%
ACTIVO 4	$300	12.30%		5.4067	6.00%
ACTIVO 5	$700	9.70%		9.9490	14.00%
POSICIÓN NETA =	**$5,000**		**Suma**	**150.1580**	**100.00%**

Matriz de correlaciones:

	ACTIVO 1	ACTIVO 2	ACTIVO 3	ACTIVO 4	ACTIVO 5
ACTIVO 1	1	0.38	0.43	-0.23	-0.18
ACTIVO 2	0.38	1	0.24	0.65	-0.085
ACTIVO 3	0.43	0.24	1	-0.98	0.72
ACTIVO 4	-0.23	0.65	-0.98	1	0.07
ACTIVO 5	-0.18	-0.085	0.72	0.07	1

Matriz de volatilidades:

	ACTIVO 1	ACTIVO 2	ACTIVO 3	ACTIVO 4	ACTIVO 5
ACTIVO 1	20.00%	0	0	0	0
ACTIVO 2	0	26.00%	0	0	0
ACTIVO 3	0	0	26.00%	0	0
ACTIVO 4	0	0	0	12.30%	0
ACTIVO 5	0	0	0	0	9.70%

Como se puede observar, el valor en riesgo del portafolios es menor que la suma de los valores en riesgo individuales. A esta diferencia se le denomina el efecto de diversificación (parte superior derecha del cuadro: $44.10) y se debe a que los activos presentan correlaciones distintas de cero.