CAPÍTULO 2

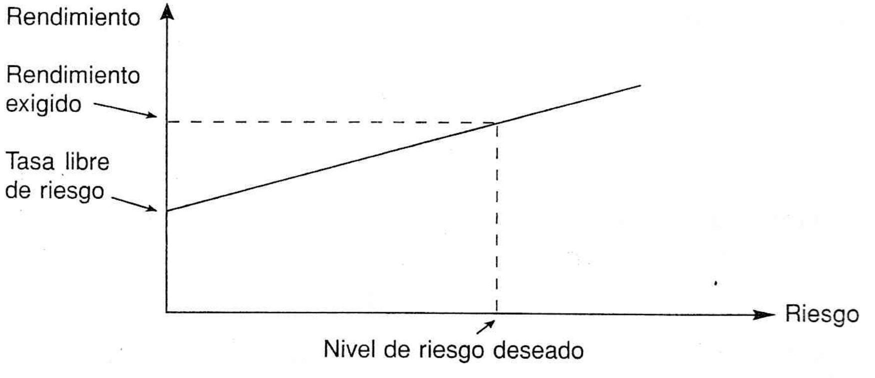
Rendimiento y riesgo

Para entender los modelos que miden el riesgo, es necesario conocer algunos aspectos de matemáticas y estadística. En este capítulo se explica la manera de medir tanto el rendimiento como el riesgo. Especial atención merece la curva de distribución normal, la cual es el "corazón" en los supuestos de algunos modelos para medir el riesgo.

Existe consenso en el mundo académico en el sentido de que los precios de las acciones en los mercados organizados se comportan de acuerdo con una caminata aleatoria, es decir, que el precio de una acción al día de hoy es independiente de los precios observados en días anteriores y que, por tanto, los mercados no tienen memoria y no son predecibles. Ésta es la base para considerar que el supuesto de normalidad en los rendimientos de los precios de los instrumentos financieros es un supuesto razonable, aunque la curva normal en el mundo real, no siempre es perfecta.

Rendimiento y riesgo

En la teoría financiera existen dos variables básicas que es preciso entender y saber calcular apropiadamente para tomar decisiones de inversión: el rendimiento y el riesgo. En la medida en que una inversión es más riesgosa, debe exigírsele un mayor rendimiento:



2.1 Rendimiento

El rendimiento de un activo o portafolios es el cambio de valor que registra en un periodo con respecto a su valor inicial:

$$R_i = \frac{\Delta \text{Valor}}{\text{Valor}_{inicial}} = \frac{\text{Valor}_{final} - \text{Valor}_{inicial}}{\text{Valor}_{inicial}}$$

Como ejemplo considere que el día de ayer el valor de un portafolios fue de 97.5 millones de pesos y hoy registra un valor de 98.3 millones de pesos; el rendimiento de un día es de:

$$R_i = \frac{98.3 - 97.5}{97.5} = 0.82\%$$

El rendimiento también se puede definir en función del logaritmo de la razón de rendimientos como sigue:

$$R_i = Ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

El rendimiento de un portafolios se define como la suma ponderada de los rendimientos individuales de los activos que componen el portafolios, por el peso que tienen dichos activos en el portafolios:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i$$

El rendimiento promedio se define como la suma de los rendimientos de cada uno de los activos, entre el número de activos:

$$R_{prom} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$$

El rendimiento anualizado se define como:[1]

$$R_{anual} = \left(1 + R_n\right)^n - 1$$

Como ejemplo considere que el rendimiento diario de un portafolios es de 0.02%. Dicho rendimiento anualizado (considerando 252 días hábiles) es de:

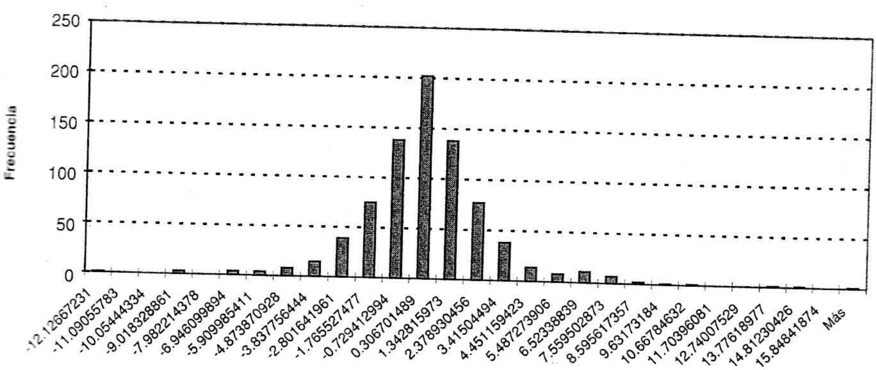
$$R_{anual} = (1 + .0002)^{252} - 1 = 5.17\%$$

2.2 Medición del riesgo

Una distribución de frecuencias muestra la manera como los rendimientos de algún activo o portafolios de activos se han comportado en el pasado. Cuando esta distribución se grafica (histograma de frecuencias) asume una figura en particular. Los pasos principales para construir una distribución de frecuencias son los siguientes:

a) Determinar las observaciones de mínimo y máximo valor en la serie de tiempo.
b) Elegir un número de subintervalos de igual magnitud que cubra desde el mínimo hasta el máximo valor. Éstos son los rangos o clases.
c) Contar el número de observaciones que pertenecen a cada rango o intervalo. Ésta es la frecuencia por clase.
d) Determinar la frecuencia relativa mediante la división entre la frecuencia por clase y el número de observaciones. Es decir, la frecuencia relativa es una fracción de las observaciones que pertenecen a cada clase.

A continuación se presenta un histograma de los rendimientos de la tasa de interés TIIE a 28 días, con observaciones desde abril de 1996 hasta mayo de 1999:

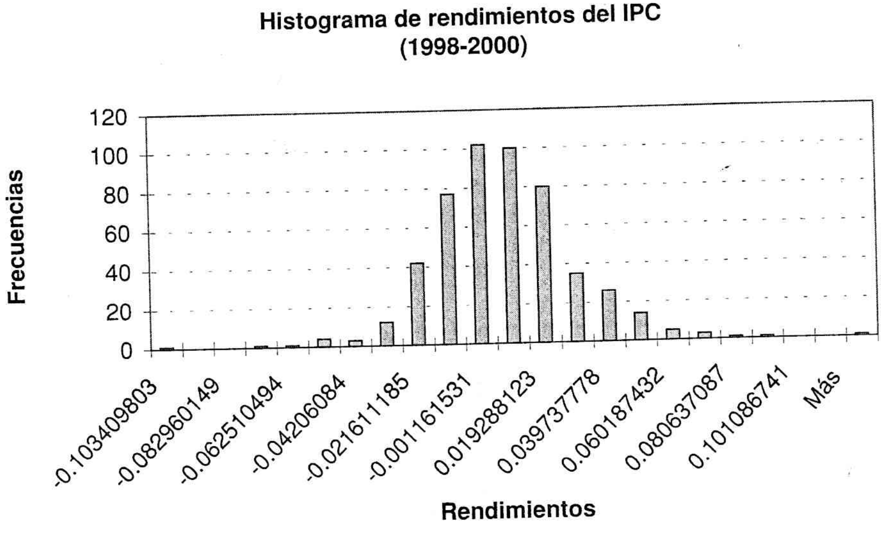


2.3 Distribución normal o de campana

Los instrumentos financieros presentan por lo general una distribución de probabilidad normal, la cual está definida por una curva simétrica en forma de campana. No obstante que esta curva fue propuesta por De Moivre, está relacionada también con los nombres de Pierre Laplace y Carl Gauss, quienes trabajaron en el desarrollo y la aplicación de esta distribución.

La distribución normal tiene un papel importante en cualquier campo de la estadística y, en particular, en la medición de riesgos en finanzas. Los parámetros más importantes que la definen son la media y la desviación estándar, siendo la notación más conocida como $N(\mu,\sigma)$. Otros indicadores importantes que definen a la distribución normal son el sesgo y la kurtosis. El sesgo debe ser de cero (simetría de la curva perfecta) y la kurtosis de tres (en tres desviaciones estándar se cuenta con el 99.7% de las observaciones).

Como ejemplo tomemos los rendimientos o variaciones porcentuales diarias del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC) durante tres años (1998 a 2000), es decir, un número de 509 observaciones. A continuación se presenta una gráfica del histograma de frecuencias:

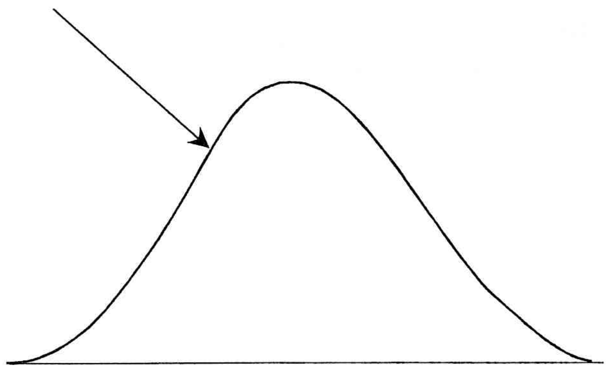


En este caso, la media de los rendimientos es de 0.091% y la desviación estándar diaria de rendimientos es de 2.29%. Si tomamos la media más tres desviaciones estándar, tenemos que el rendimiento es de 6.96%, y la media menos tres desviaciones estándar es de –6.78%. Esto significa que son muy pocas las observaciones que están fuera de este periodo, de hecho sólo son siete observaciones (5 en la cola superior y 2 en la cola inferior), por lo que se puede ver que tres desviaciones estándar comprenden el 98.6% de las observaciones totales.

En estadística es posible demostrar que si consideramos una muestra de tamaño n perteneciente a una población que se distribuye normalmente (con media μ y desviación estándar σ), dicha muestra tendrá una distribución normal de media $\bar{x}$ y desviación estándar $\sigma / \sqrt{n}$. El teorema del límite central establece que aun cuando la muestra de tamaño n es suficientemente grande, la distribución de la muestra es aproximadamente normal, sin importar la distribución de la población. En este sentido, la distribución normal juega un papel importante en el desarrollo de las finanzas y procedimientos para la administración de riesgos.

La distribución normal de probabilidad de una variable aleatoria continua se puede representar como un histograma de frecuencias de una forma suavizada y basada en un número grande de observaciones. A continuación se muestra la ecuación de la distribución normal y la manera como se representa:

$$f(x)=\frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad \sigma > 0,\ -\infty < \mu < \infty, -\infty < x < \infty$$



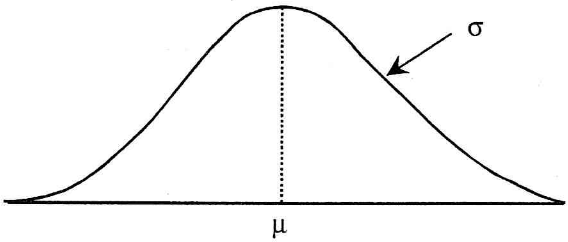
La función de densidad normal contiene dos parámetros básicos: μ y σ. El primero es la media y el segundo la desviación estándar de la distribución correspondiente, por esto se localiza el centro de la distribución y se determina el grado de dispersión.

La curva normal está centrada alrededor de la media, la cual se representa por μ. La variación o dispersión alrededor de la media se expresa en unidades de la desviación estándar, representada por σ. En un portafolios, la media es simplemente su rendimiento promedio, y a la desviación estándar se le define como volatilidad. Las expresiones para su cálculo son las siguientes:[2]

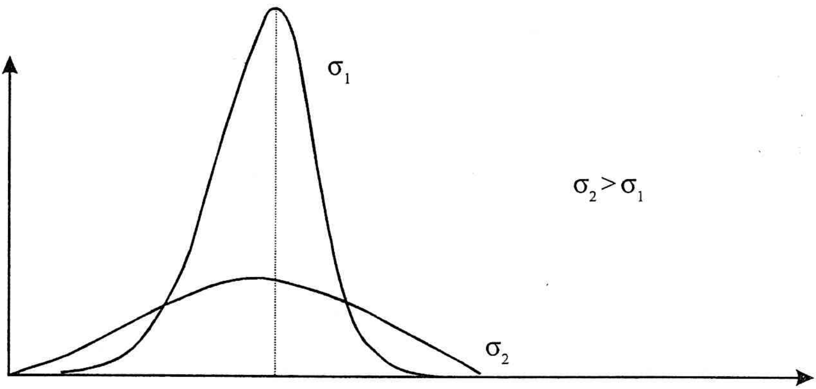
$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i-\mu)^2}{n-1}}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} P_i R_i \qquad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} P_i[R_i-\mu]^2}$$

donde P_i es la probabilidad de ocurrencia.

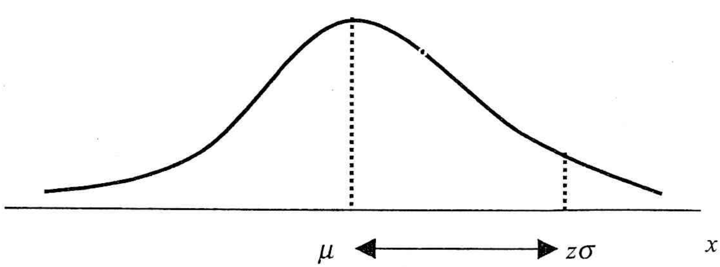


A continuación se muestra una gráfica de dos distribuciones de probabilidad normal que tienen la misma media pero diferente dispersión:



En esta gráfica se observa que la distribución de probabilidad 2 tiene mayor dispersión que la distribución 1 y, por tanto, tiene mayor riesgo.

Cabe señalar que la función de densidad normal es simétrica con respecto a la media y, por tanto, sólo se necesita tabular las áreas de un lado de la media. Las áreas tabuladas son áreas a la derecha o a la izquierda de valores de z, en donde z es la distancia de un valor x respecto de la media, expresada en unidades de desviación estándar.



Si lo anterior es cierto, entonces debe quedar claro que:

$$x = \mu + z\sigma$$

y por tanto

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Si la variable aleatoria x es el rendimiento de algún factor de riesgo (precio de acciones, tasas de interés o tipos de cambio), entonces siempre será posible transformar dicha variable aleatoria normal en z mediante la expresión anterior.

Si z localiza un punto medido a partir de la media de una variable aleatoria normal con la distancia expresada en unidades de la desviación estándar de la variable aleatoria normal original, el valor medio de z tiene que ser 0 y su desviación estándar igual a 1. A z se le conoce como la variable aleatoria normal estándar y tiene una distribución normal $N(0,1)$.

Adicionalmente a la media y a la desviación estándar, la curva de distribución normal tiene dos características: el sesgo y la kurtosis, a los cuales se les conoce también como el tercer y cuarto momentos, respectivamente.

El sesgo es un indicador que mide la simetría de la curva. En el caso de una curva normal perfecta, el sesgo será igual a cero. Si éste es distinto de cero, estará sesgada hacia la izquierda o hacia la derecha, según el signo del sesgo.

La kurtosis es el indicador que mide el nivel de levantamiento de la curva respecto a la horizontal. Esta situación se presenta cuando existen pocas observaciones muy alejadas de la media. A este fenómeno de alta kurtosis también se le conoce como *fat tails*. La kurtosis de una distribución normal perfecta es igual a 3. A continuación se muestran las fórmulas para calcular tanto el sesgo como la kurtosis:

$$Sesgo = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^3}{(n-1)\sigma^{3/2}}$$

$$Kurtosis = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^4}{(n-1)\sigma^{4}}$$

Para saber si una distribución de frecuencias se comporta de acuerdo con una distribución normal, existen varias pruebas. La más sencilla es la de Jarque-Bera,[3] que consiste en lo siguiente:

Se calcula el estadístico de prueba dado por:

$$LM = N\left[\frac{Sesgo^2}{6} + \frac{(Kurtosis-3)^2}{24}\right]$$

Donde *LM* es un estadístico de prueba y se distribuye de acuerdo con una curv ji-cuadrada con dos grados de libertad, por lo que es necesario realizar una prueb de hipótesis en la cual la hipótesis de interés (hipótesis nula) consiste en que l curva es normal con un nivel de confianza (por ejemplo, 95%) y la hipótesis alterna tiva consiste en que no pasa dicha prueba (es decir, no es normal).

Como ejemplo, tomemos la serie de tiempo de los rendimientos del IPC duran te el año 2000, considerando 258 días. El sesgo es de 0.1376 y la kurtosis de 3.81 Con esta información, el valor de *LM* (estadístico de prueba) es de 7.86. Si desea mos 95% de confianza para realizar la prueba de normalidad, en tablas de una distri bución ji-cuadrada con dos grados de libertad, se obtiene 5.99. Dado que el estadístic de prueba es mayor que 5.99, se concluye que no se acepta la hipótesis de interés, e decir, que la serie de tiempo no se comporta de acuerdo con una curva normal, co un nivel de confianza del 95%. Sin embargo, al tomar más datos históricos, el sesg tiende a ser más pequeño y la kurtosis más cercana a 3, lo que significa que con u número suficiente de datos pasaría la prueba de normalidad de Jarque-Bera.

Por otra parte, vale la pena aclarar que la media y la desviación estándar de u periodo pueden ser transformadas a otro periodo. Por ejemplo, si tenemos la medi y la volatilidad diaria, es posible determinar los parámetros anuales mediante la siguientes expresiones:

$$\mu_{anual} = \mu_{diaria} t$$

$$\sigma_{anual} = \sigma_{diaria} \sqrt{t}$$

Observe que los ajustes en la volatilidad a diferentes horizontes de tiempo d ben realizarse con la raíz cuadrada del periodo, y por tanto, la volatilidad es u función del tiempo expresada de manera no lineal.

2.4 Covarianza

Es una medida de relación lineal entre dos variables aleatorias describiendo el m vimiento conjunto entre éstas. Dichas variables pueden ser los rendimientos de portafolios.

La covarianza se determina de acuerdo con la siguiente expresión:

$$COV(R_i, R_j) = \sum_{i=1}^{n} P_i[R_i - \mu_i][R_j - \mu_j]$$

también se puede aplicar la siguiente expresión:

$$COV(R_i, R_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [R_i - \mu_i][R_j - \mu_j]$$

2.5 Correlación

Debido a la dificultad para interpretar la magnitud de la covarianza, suele utilizarse la correlación para medir el grado de movimiento conjunto entre dos variables o la relación lineal entre ambas. La correlación se encuentra entre −1 y +1 y se determina de acuerdo con la siguiente expresión:

$$Corr(R_i, R_j) = \rho_{ij} = \frac{COV(R_i, R_j)}{\sigma_i \ \sigma_j}$$

donde:

ρ_{ij}	es la correlación entre los activos *i* y *j*.
$COV(R_i, R_j)$	es la covarianza entre los activos *i* y *j*.
σ_i	es la volatilidad del activo *i*.
σ_j	es la volatilidad del activo *j*.

El coeficiente de correlación de Pearson se calcula en función de los rendimientos observados de la siguiente manera:

$$Corr(x_i, y_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2}}$$

El signo positivo en el coeficiente de correlación significa que las dos variables se mueven en la misma dirección, mientras más cercano a la unidad, mayor será el grado de dependencia mutua. El signo negativo indica que las dos variables se mueven en sentidos opuestos. Asimismo, mientras más cercano a cero sea el coeficiente de correlación, mayor será el grado de independencia de las variables.

2.8 Distribución normal estandarizada

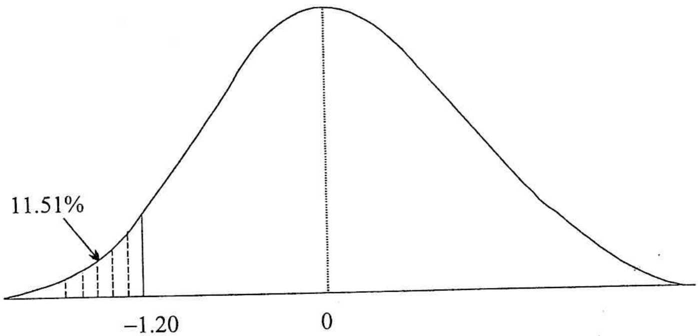
Se define a una curva normal estandarizada, como aquella que tiene una media igual a cero y una desviación estándar de uno: $N(0,1)$. Para transformar una curva normal a una estandarizada se debe encontrar un valor de Z, que es la variable normal estandarizada dada por:

$$Z = \frac{R_i - \mu}{\sigma}$$

Por ejemplo, si se desea conocer la probabilidad de que un portafolios registre un rendimiento de –2%, siendo que el rendimiento promedio es del 0.11%, y una volatilidad de 1.76%, el valor estándar de la curva normal es:

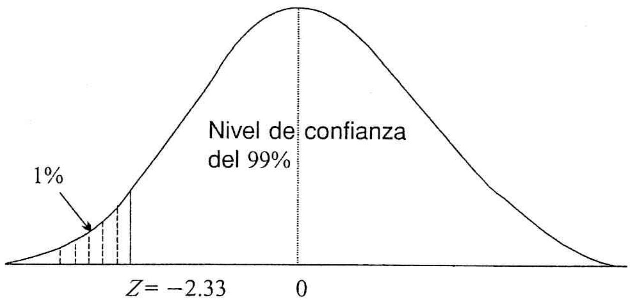
$$Z = \frac{-2\% - 0.11\%}{1.76\%} = -1.20$$

Una vez calculado el valor estándar de la curva normal, es posible calcular el área bajo la curva de la cola inferior. Los libros de matemáticas y estadística contienen una tabla para determinar probabilidades de colas inferiores. En las tablas se observa que para una Z de -1.20 corresponde una probabilidad de cola inferior del 11.51%.[4]



Por otra parte, los administradores de riesgos prefieren determinar un nivel de confianza o probabilidad y a partir de éste definir el rendimiento asociado a esa probabilidad. Usualmente el nivel de confianza se ubica en 95 o 99%. En estos casos, el área bajo la curva normal corresponde a 1.65 y 2.33 desviaciones estándar, respectivamente.[4]

Tomando como base el ejemplo anterior, se desea calcular el rendimiento de la cola inferior que se encuentre asociado a un 99% de nivel de confianza o probabilidad:



$$Z = \frac{R_i - \mu}{\sigma}$$

Despejando:

$$R_i = \mu + Z\sigma$$
$$R_i = 0.11\% + (-2.33)(1.76\%)$$
$$R_i = -3.99\%$$

Esto significa que el rendimiento futuro será menor a – 3.99% con una probabilidad del 99% mientras que existe 1% de probabilidad de que dicho rendimiento negativo sea mayor a 3.99%.

Notas

1. El concepto de rendimiento anualizado se explica con más detalle en el capítulo 5, en el tema de tasas de interés.
2. La fórmula que se enuncia corresponde a la volatilidad histórica. Sin embargo, existen otras formas más eficaces para calcular la volatilidad, las cuales se describen en el capítulo 3.
3. Para mayor detalle véase el artículo de Jarque-Bera: *A Test for Normality of Observations and Regression Residuals*, publicado por *International Statistical Review* (1987), pp. 163-172.
4. Consulte las tablas de una curva de distribución normal en libros de estadística tradicionales. También pueden obtenerse en excel de Microsoft.