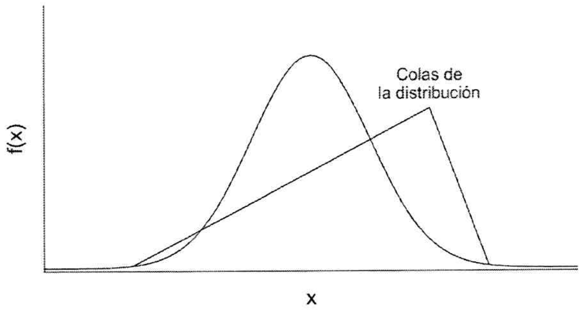
B.7. Medidas de forma y sus estimadores

El Ejemplo B.9 nos permite observar lo disímiles que son las distribuciones (en este caso las muestrales) de los rendimientos. Frecuentemente, la forma de la distribución es importante pues permite tomar decisiones de inversión entre diferentes activos o portafolios o implicará emplear modelos más o menos sofisticados para la medición del riesgo.

Una característica importante de las distribuciones son "las colas de la distribución" (ver Figura B.7), las cuales corresponden a la probabilidad de que ocurran los valores extremos. En otras palabras, las colas corresponden a las porciones de la distribución que se encuentran más a la izquierda (cola izquierda) y más a la derecha (cola derecha).

Figura B.7: Colas de una distribución

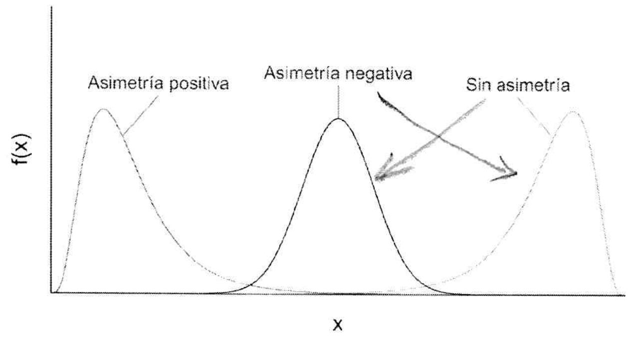


Las colas de la distribución son muy interesantes de estudiar en las finanzas. Por ejemplo, si se trata de la distribución de los rendimientos, la cola de la izquierda corresponde a la probabilidad de tener pérdidas muy por debajo de la media y la cola de la derecha corresponde a la probabilidad de obtener rendimientos muy por encima del promedio. Ambos casos son interesantes de estudiar.

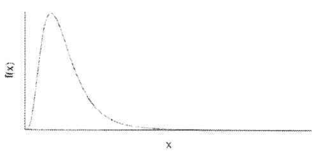
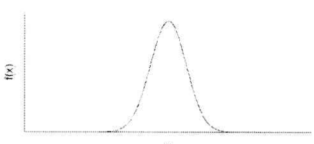
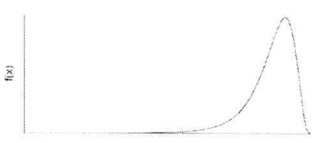
En general, cuando ambas colas de la distribución tienen igual longitud, diremos que la distribución es simétrica o no posee asimetría. Por otro lado, si la cola izquierda (derecha) es más "corta" (larga) que la derecha, entonces se dirá que la distribución tiene asimetría positiva (negativa) (ver Figura B.8). En algunos casos la asimetría positiva también se conoce como asimetría a la derecha, mientras que la asimetría negativa se denomina asimetría a la izquierda.

Una de las características importantes de las distribuciones simétricas es que, dado que las colas son idénticas, entonces la mediana y la media coinciden. Para el caso de una distribución con sesgo positivo, la media será mayor que la mediana, y lo contrario sucederá para el caso en el que el sesgo es negativo. Intuitivamente, esta es la razón para que se asigne un signo al sesgo, pues de cierta forma el signo del sesgo está dado por la diferencia entre la media y la mediana ($\mu - \xi$).

Figura B.8: Tipos de asimetría de diferentes distribuciones



Cuadro B.3: Interpretación del coeficiente de simetría

A ? 0	Interpretación	Gráfico
>	Asimetría a la derecha	
=	Simetría	
<	Asimetría a la izquierda	

En la práctica se puede calcular un *coeficiente de asimetría* que permite determinar el signo de la asimetría de la distribución de una muestra. Este coeficiente de asimetría[9] se

[9]Para el caso poblacional, el coeficiente de asimetría corresponde a: $A = E\left[X^3\right]/E\left[(X-\mu)^3\right] = \mu_3/\sigma^3$.

estima por medio de la siguiente fórmula:

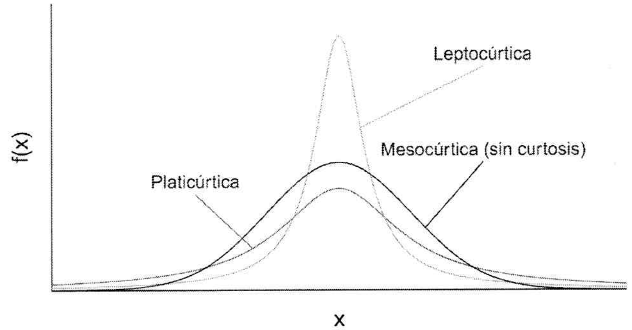
$$A = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3. \tag{B.16}$$

En Excel este coeficiente de asimetría se puede calcular rápidamente mediante la función "COEFICIENTE.ASIMETRIA()". Para el caso de los rendimientos de la TRM tenemos una asimetría de 0.0394. Así, existe una leve asimetría a la derecha (positiva).

Otra medida de la forma de una distribución corresponde a la *curtosis*. La curtosis tiene que ver con qué tan "aplanada" o "picuda" es una distribución. Para efectos de comparación, se emplea como distribución referente la distribución normal o acampanada (esta distribución es estudiada en detalle en el respectivo capítulo). Una distribución que es relativamente más picuda que una distribución normal se denomina leptocúrtica. Contrariamente, aquella distribución más plana que la distribución normal se denomina platicúrtica (ver Figura B.9).

Es ampliamente conocido que la curtosis de la distribución normal[10] corresponde a 3. Dado que la distribución de referencia siempre es la normal, comúnmente se le sustraen a la curtosis tres unidades, denominando a esta cantidad como el *exceso de curtosis* (con respecto a la normal) dado que permite una más fácil interpretación[11]. De esta manera, si el exceso de curtosis es positivo, implicará que la distribución es relativamente picuda con respecto a la normal (leptocúrtica) y un exceso de curtosis negativo implicará una distribución platicúrtica.

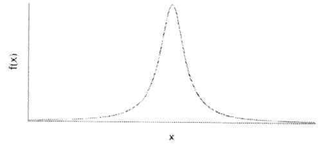
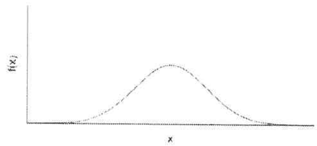
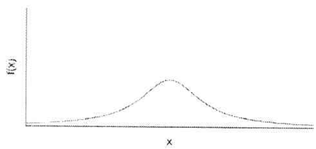
Figura B.9: Tipos de curtosis de diferentes distribuciones



[10]La curtosis poblacional se define como $E\left[X^4\right]/E\left[(X-\mu)^4\right] = \mu_4/\sigma^4$.

[11]En este caso el exceso de curtosis será: $\kappa = E\left[X^4\right]/E\left[(X-\mu)^4\right] - 3 = \mu_4/\sigma^4 - 3$.

Cuadro B.4: Interpretación del coeficiente de curtosis

C ? 0	Interpretación	Gráfico
>	Distribución leptocúrtica (picuda)	
=	Distribución mesocúrtica (por ej.: distribución normal)	
<	Distribución platicúrticas (plana)	

Como lo hemos discutido hasta ahora, en la práctica no se conoce la distribución poblacional, y por tanto se debe emplear una muestra para inferir el comportamiento de la población. En este caso, la manera de inferir el exceso de curtosis a partir de una muestra es empleando la siguiente fórmula:

$$C = \left[\frac{n\,(n+1)}{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 \right] - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)\,(n-3)}. \tag{B.17}$$

En Excel el exceso de curtosis se puede calcular rápidamente mediante la función "CURTOSIS()". Para el caso de los rendimientos de la TRM tenemos un exceso de curtosis de 6.1376. Por tanto, la distribución empírica de los rendimientos de la TRM es leptocúrtica; es decir, más picuda que una distribución normal. Noten que esto implica que existe mayor probabilidad de encontrarse en el centro de la distribución de los rendimientos de la TRM que lo que ocurriría si la distribución fuera de la familia normal[12].

[12]Para una discusión de la familia de distribución normal, ver el capítulo relevante.

Ejemplo B.10 Comparando la forma de la distribución empírica de la volatilidad del rendimiento de dos activos

Comparemos la forma de las distribuciones empíricas del rendimiento diario de la TRM y la acción de Bancolombia para el periodo comprendido entre enero 2 de 2007 y diciembre 28 de 2012 (emplee los datos que se encuentran disponibles en el archivo de Excel que acompaña este apéndice). El histograma de estos dos rendimientos se presenta en el Ejemplo B.9. En la siguiente tabla se reportan el coeficiente de asimetría y la curtosis de ambas muestras.

Cuadro B.5: Coeficiente de asimetría y exceso de curtosis de los rendimientos diarios de la TRM y la acción de Bancolombia

	Rendimiento diario	
	TRM	Bancolombia
C. Asimetría	0.0394	0.0134
Exceso de curtosis	6.1376	4.6699

De acuerdo con estos resultados se puede concluir que los rendimientos de la TRM poseen una distribución relativamente más "picuda" que los rendimientos de la acción de Bancolombia. Además, ambas distribuciones muestran un ligero sesgo positivo.

B.8. Covarianza y correlación entre dos variables aleatorias

Hasta el momento hemos considerado medidas que describen la distribución de una variable aleatoria. Ahora consideremos una medida que permite relacionar dos variables aleatorias: la covarianza entre dos variables aleatorias X y Y denotada por $\text{Cov}[X, Y]$ o $\sigma_{X,Y}$ se define como:

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]. \tag{B.18}$$

La anterior expresión permite determinar que cuando, por ejemplo, la variable X está por encima de su media ($(X - \mu_X) > 0$) y la variable Y también está por encima de su respectiva media ($(Y - \mu_Y) > 0$), entonces la covarianza será positiva[13]. En otras palabras, una covarianza positiva implicará que cuando una variable está por encima de su media, la otra también lo estará. Por otro lado, si una variable está por encima de su media y la otra está por debajo de su respectiva media, entonces la covarianza será negativa[14].

[13] Lo mismo será cierto para cuando ambas variables se encuentren por debajo de sus respectivas medias.
[14] La covarianza para una muestra puede calcularse por medio de Excel con la función: "COVAR()".

Recuadro B.3 Independencia lineal entre dos variables aleatorias

Dos variables aleatorias, X y Y, se consideran estadísticamente independientes, u ortogonales, si, y solamente si

$$E[XY] = E[X]\,E[Y]\,. \tag{B.19}$$

Es importante notar que independencia estadística entre dos variables no implica que no exista relación alguna entre ellas; como se verá más adelante, independencia estadística solo implica que no existe una relación lineal entre las dos variables.

Al igual que con la varianza de una variable aleatoria, el cálculo directo de la covarianza es muy engorroso. Afortunadamente, es fácil mostrar que

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]\,E[Y]\,. \tag{B.20}$$

La expresión B.20 ayuda a entender la utilidad de la covarianza entre dos variables aleatorias. Noten que en caso de que las variables estocásticas X y Y sean independientes, se tendrá que $E[XY] = E[X]\,E[Y]$. Así, $\text{Cov}[X, Y] = 0$. Por tanto, la covarianza entre dos variables aleatorias será cero si no existe relación lineal (independencia) entre las variables.

Una importante propiedad de la covarianza es: $\text{Cov}[a + bX, c + dY] = bd\,\text{Cov}[X, Y]$, donde a, b, c y d son constantes y naturalmente X y Y son variables aleatorias.

Como se mencionó anteriormente, la covarianza entre dos variables estocásticas mide la relación lineal entre las variables, pero esta depende de las unidades en que están medidas X y Y. Para tener una medida del grado de dependencia lineal entre dos variables aleatorias que no dependa de las unidades y por tanto pueda ser comparada, se emplea el coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias X y Y.

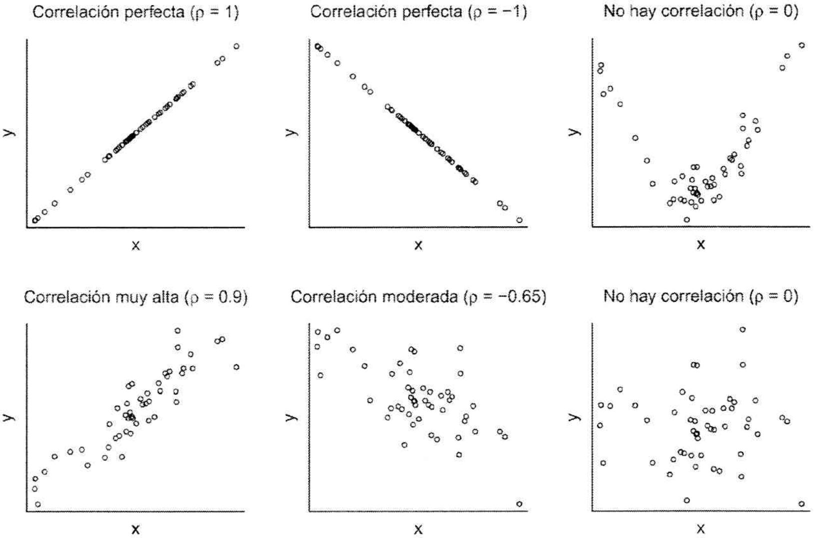
La correlación entre dos variables aleatorias[15], denotada por ρ, está definida por:

$$\rho = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]\,\text{Var}[Y]}}. \tag{B.21}$$

Es fácil mostrar que $0 \leq \rho \leq 1$ (ver Ejercicio 7 al final de este capítulo). La correlación entre dos variables aleatorias tiene una interpretación muy sencilla; por ejemplo, una correlación de 1 (o de -1) entre las variables aleatorias X y Y implica una relación lineal perfecta y positiva (negativa) entre las dos variables; mientras que una correlación de cero implica que no existe relación lineal entre las variables (ver Figura B.10).

[15] También conocido como el coeficiente de correlación.

Figura B.10: Diagramas de dispersión y sus correspondientes correlaciones



Ejemplo B.11 Cálculo de la covarianza y correlación de una variable aleatoria discreta

Continuando con el Ejemplo B.1, ahora consideremos un segundo activo: un bono del tesoro de los Estados Unidos. Supongamos que se conoce que el rendimiento de este activo será 0.27 %, 0.5 % y 1 % en caso de que la economía experimente una situación de "recesión", "normal" o de "auge", respectivamente. Encuentre la correlación entre los rendimientos de estos dos activos. **Respuesta**: Los datos se resumen en la siguiente tabla.

Cuadro B.6: Coeficiente de correlación de los rendimientos diarios de la TRM y la acción de Bancolombia

	Probabilidad	Rendimiento diario	
Escenario	del escenario	CDT	Bono del Tesoro US
Recesión	0.2	−1.7 %	0.27 %
Normal	0.3	1.2 %	0.50 %
Auge	0.5	3.5 %	1.00 %

Denotemos con Z la variable aleatoria que corresponde al rendimiento del bono del tesoro. Entonces, es fácil mostrar que $E[Z] = 0.7\,\%$ y $\mathrm{Var}[Z] = 0.00001$. Recuerden que para el caso del rendimiento de los CDT teníamos $E[W] = 1.77\,\%$ y $\mathrm{Var}[W] = 0.0004$. Ahora:

$$\begin{aligned} E[WZ] &= \sum_{i=1}^{3} w_i z_i \Pr(W = w_i, Z = z_i) \\ &= (-1.7\,\% \times 0.27\,\% \times 0.2) + (1.2\,\% \times 0.5\,\% \times 0.3) + (3.5\,\% \times 1\,\% \times 0.5) \\ &= 0.00018. \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{Cov}[W, Z] = E[WZ] - E[W]\,E[Z] = 0.00018 - (0.0177 \times 0.007) = 0.000059$. Entonces la correlación entre el rendimiento de estos activos será:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}[W, Z]}{\sqrt{\mathrm{Var}[W]\,\mathrm{Var}[Z]}} = \frac{0.000059}{\sqrt{0.0004 \times 0.00001}} = 0.966.$$

Por lo tanto, la correlación entre los dos rendimientos es de 0.966. La alta correlación positiva entre los rendimientos de estos dos activos tiene grandes implicaciones. Por ejemplo, si se deseara conformar un portafolio con solo estos dos activos, el "riesgo" asociado al portafolio sería muy alto. La razón es que cuando un activo tiene rendimientos por encima de su media, el otro también los tendrá; pero lo peligroso es cuando un activo tiene rendimientos por debajo de su media, pues el otro también tendrá rendimientos por debajo de su media. Lo ideal en este caso sería tener dos activos con una fuerte correlación, pero negativa (¿por qué?).

Recuadro B.4 Interpretación intuitiva del coeficiente de correlación estimado

Al estimar un coeficiente de correlación a partir de una muestra, convencionalmente la pregunta es: ¿qué tan grande debe ser una correlación para ser considerada alta? La verdad no existe una respuesta correcta a esta pregunta, pero sí existe una "regla tácita" que se emplea en la práctica. El siguiente cuadro puede ser empleado para interpretar los resultados del cálculo de la correlación.

Cuadro B.7: Resumen de la interpretación intuitiva del coeficiente de correlación

Si	Conslusión
$\lvert\rho\rvert = 1$	Correlación perfecta
$0.9 \leq \lvert\rho\rvert < 1$	Correlación muy alta
$0.8 \leq \lvert\rho\rvert < 0.9$	Correlación alta
$0.6 \leq \lvert\rho\rvert < 0.8$	Correlación moderada
$0.3 \leq \lvert\rho\rvert < 0.6$	Correlación mala o débil
$\lvert\rho\rvert < 0.3$	No hay correlación

El coeficiente de correlación entre dos variables se puede estimar por medio de la siguiente fórmula:

$$r_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_X s_Y}. \tag{B.22}$$

Este coeficiente puede ser estimado en Excel por medio de la función "COEF.DE.CORREL()". Por ejemplo, para el caso del rendimiento diario de la TRM y de la acción de Bancolombia tenemos una correlación de 0.0250, lo cual implica que prácticamente no existe correlación entre los dos rendimientos.

B.9. Comentarios finales

Hasta el momento hemos repasado las medidas poblacionales, y sus estimadores, que permiten describir el comportamiento de una población. En el siguiente apéndice se discute el problema práctico que existe en el momento de estimar un valor poblacional: la probabilidad de que un valor estimado sea exactamente igual al valor poblacional es cero. Este "problema" práctico lo resolveremos efectuando pruebas de hipótesis y construyendo intervalos de confianza.