Centro de Enseñanza Técnica Industrial

Ingeniería Mecatrónica

Tarea 2

Micro Robotica

Autor: Juan Pablo García Guzmán, Miguel Ángel Mendonza Hernández
Matrícula: 21110430, 20110144.
Versión
16 de febrero de 2024

Dr. Jorge A. Lizárraga

Índice general

Capítulo 1

Desarrollo del Proyecto

1. Demuestre que al multiplicar dos matrices triangulares superiores el resultado es una una matriz triangular superior.

2. Determine la matriz inversa (si existe) de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -12 & -2 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix}$.

- Determine si E es invertible; de ser así utilice el método de la adjunta para calcular su inversa.
- Calcule $E^{-1} + \operatorname{Adj} E$.
- Calcule $E^T + E^{-1} + \operatorname{Adj} E$.
- Calcule $\left(E^{-1} + E^T\right) + E^T + E^{-1} + \operatorname{Adj} E$.

1.0.1. Ejercicio 1:

- Demuestre que al multiplicar dos matrices triangulares superiores el resultado es una una matriz triangular superior.

sean dos matrices:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ 0 & v_{22} & v_{23} \\ 0 & 0 & v_{33} \end{bmatrix}.$$

Realizamos el producto entre ellas de manera que:

$$UV = \begin{bmatrix} u_{11}v_{11} & u_{11}v_{12} + u_{12}v_{22} & u_{11}v_{13} + u_{12}v_{23} + u_{13}v_{33} \\ 0 & u_{22}v_{22} & u_{22}v_{23} + u_{23}v_{33} \\ 0 & 0 & u_{33}v_{33} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

y también hacemos el producto entre V y U para comprobar que obtenemos también una matriz triangular superior:

$$VU = \begin{bmatrix} u_{11}v_{11} & u_{12}v_{11} + u_{22}v_{12} & u_{13}b_{11} + u_{23}v_{12} + u_{33}v_{13} \\ 0 & u_{22}v_{22} & u_{23}v_{22} + u_{33}v_{23} \\ 0 & 0 & u_{33}v_{33} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

1.0.2. Ejercicio 2:

- Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Calculamos el determinante obteniendo como resultado 0, por lo tanto no tiene inversa:

$$det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0. \tag{4}$$

1.0.3. Ejercicio 3:

Realizamos el cálculo de la matriz inversa, según [1] Dada la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Comprobamos si existe su inversa calculando su determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) \\ &= -5 - 3 \\ &= -8. \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora que comprobamos que se puede calcular su inversa, empezamos con obtener su matriz de cofactores:

$$\operatorname{cof}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

donde:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & \text{-1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\
c_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & \text{-1} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \\
c_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\
c_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\
c_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
c_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \\
c_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \text{-1} \end{vmatrix} = -2 \\
c_{32} &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \text{-1} \end{vmatrix} = 1 \\
c_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.
\end{aligned} \tag{7}$$

Entonces:

$$\operatorname{cof}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & \text{-5} & \text{-1} \\ \text{-2} & 1 & 5 \\ \text{-2} & 1 & \text{-3} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Después, obtenemos la matriz adjunta haciendo la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\operatorname{Adj}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & \text{-2} & \text{-2} \\ \text{-5} & 1 & 1 \\ \text{-1} & 5 & \text{-3} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Finalmente, dividimos la matriz adjunta entre el determinante de la matriz y obtenemos así la inversa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

1.0.4. Ejercicio 4:

Dada la matriz:

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ,$$

calculamos su determinante de la siguiente ecuación para ver si existe su inversa.

$$\begin{aligned} \det(C) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} &= -1(-2)\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(42+3) + 0(0-6) + 0(0-14) \\ &= 45. \end{aligned} \tag{11}$$

Al corroborar que no es igual a cero ahora calculamos sus cofactores.

$$\operatorname{cof}(c) = \begin{bmatrix} 0 & -45 & 0 \\ 12 & -6 & -6 \\ 2 & 14 & 14 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Ahora calculamos su adjunta y obtenemos lo siguiente:

$$\operatorname{adj}(C) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 2 \\ -45 & -6 & 14 \\ 0 & -6 & 14 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

En seguida calculamos su inversa y obtenemos la siguiente matriz:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{15} & \frac{1}{45} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{15} & \frac{7}{45} \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{7}{45} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

1.0.5. Ejercicio 5 :

- Sea $E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -12 & -2 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix}$,
- Determine si E es invertible; de ser así utilice el método de la adjunta para calcular

Calculamos su determinante para comprobar si existe una inversa:

$$\begin{aligned} \det(E) = 0\begin{vmatrix} 3 & -12 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} \\ = 0 + 2(10-6) + 2(-12+9) \\ = 2(4) + 2(-3) \\ = 2. \end{aligned} \tag{15}$$

Seguimos calculando la matriz de cofactores:

$$\mathrm{cof}(E) = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 6 & 2 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

la adjunta:

$$Adj(E) = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -3 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Finalmente la inversa de E:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

1.0.6. Ejercicio 6:

- Calcule $E^{-1} + \mathrm{Adj}\, E$

$$E^{-1} + \mathrm{Adj}(E) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 9 \\ -3 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & -\dfrac{9}{2} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

1.0.7. Ejercicio 7:

Calcule $E^T + E^{-1} + \mathrm{Adj}\, E$

$$\begin{aligned} E^T + E^{-1} + \mathrm{Adj}\, E &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -12 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 12 & 7 \\ -6 & -9 & 13 \\ 9 & -8 & -\dfrac{5}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

1.0.8. Ejercicio 8:

- Calcule $\left(E^{-1} + E^T\right) + E^T + E^{-1} + \mathrm{Adj}\, E$

$$\begin{aligned} \left(E^{-1} + E^T\right) + E^T + E^{-1} + \mathrm{Adj}\, E &= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -12 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 12 & 7 \\ -6 & -9 & 13 \\ 9 & -8 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 18 & 8 \\ -10 & -20 & 24 \\ 12 & -12 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{21}$$

1.1. Código Matlab

Comprobación de los cálculos realizados con el uso de MATLAB 1.1.1

Código Matlab 1.1.1: TAREA2

```
clc; close all; clear;
%%
%Problema 1:
% Demuestre que al multiplicar dos matrices triangulares
% superiores el resultado es una una matriz triangular
% superior.
syms u11 u12 u13 u22 u23 u33
syms v11 v12 v13 v22 v23 v33

U = [ u11 u12 u13; 0 u22 u23 ; 0 0 u33 ];
V = [ v11 v12 v13; 0 v22 v23 ; 0 0 v33 ];

%Valores numericos para ejemplificar
%U = [ 1 2 3; 0 5 6; 0 0 9 ];
%V = [ 6 8 9; 0 2 4; 0 0 10];

U*V;
V*U;
%%
% Problema 2:
% Determine la matriz inversa (si existe)
% de las siguientes matrices
A = [-1 2; 2 -4];
det(A); % esta matriz es singular
        % y no es posible obtener su inversa
        % debido que su determinante es cero.
%%
% Problema 3:
B = [1 2 0 ; 2 1 -1 ; 3 1 1];

Bdet = det(C); %Determinante de B
Bcof = adjoint(C)'; % Matriz de cofactores de B
Badj = adjoint(C); % Matriz adjunta de B
Binv = adjoint(C)/det(C); % inversa de B

%%
% Problema 4:

C = [0 -2 0; 7 0 -1; 3 0 6];
Cdet = det(C); %Determinante de C
Ccof = adjoint(C)'; % Matriz de cofactores de C
Cadj = adjoint(C); % Matriz adjunta de C
Cinv = adjoint(C)/det(C); % inversa de C

%%
% Problema 5
% Determine si E es invertible; de ser asÃ
% utilice el mÃ©todo de la adjunta para
% calcular su inversa.
```

```
E = [1 -3 0; 3 -12 -2;-2 10 2]; %Matriz E
Edet = det(E); %Determinante de E
Ecof = adjoint(E)'; % Matriz de cofactores de E
Eadj = adjoint(E); % Matriz adjunta de E
Einv = adjoint(E)/det(E); % inversa de E

%%
%Problema 6:
Einv + Eadj;

%%
% Problema 7:
E' + Einv + Eadj;

%%
% Problema 8:
(Einv+E')+E' + Einv + Eadj;
```

Bibliografía

[1] J. A. Lizarraga, *Modelado de Robots manipuladores Recopilatorio de clases y fundamentos*, vol. 1, pp. 30–32. N/a, 2024.