Centro de Enseñanza Técnica Industrial

Ingeniería Mecatrónica

Tarea 3

Micro Robótica

Autor: Juan Pablo García Guzmán, Miguel Ángel Mendoza Hernández
Matrícula: 21110430, 20110144.
Versión
14 de marzo de 2024

Dr. Jorge A. Lizárraga

Índice general

Capítulo 1

Desarrollo del Proyecto

1. Explique de forma trigonométrica como obtener las matriz de rotación $\overset{(x)}{R}$ y $\overset{(y)}{R}$ para un punto $r_{0,1}$ y $r_{0,2}$.
2. Utilice imágenes de apoyo.
3. Fundamente con ecuaciones y explicaciones textuales.

Realizamos los cálculos en base a [1] haciendo la proyección del vector $r_{1,p}$ con los cosenos directores del sistema cero:

$$\begin{aligned}
x_{0,p} &= r_{0,p} \cdot i_0 = r_{1,p} \cdot i_0 \\
&= x_{0,p} i_0 \cdot i_0 + y_{0,p} j_0 \cdot i_0 + z_{0,p} k_0 \cdot i_0 \\
&= x_{1,p} i_1 \cdot i_0 + y_{1,p} j_1 \cdot i_0 + z_{1,p} k_1 \cdot i_0 \\
y_{0,p} &= r_{0,p} \cdot j_0 = r_{1,p} \cdot j_0 \\
&= x_{0,p} i_0 \cdot j_0 + y_{0,p} j_0 \cdot j_0 + z_{0,p} k_0 \cdot j_0 \\
&= x_{1,p} i_1 \cdot j_0 + y_{1,p} j_1 \cdot j_0 + z_{1,p} k_1 \cdot j_0 \\
z_{0,p} &= r_{0,p} \cdot j_0 = r_{1,p} \cdot j_0 \\
&= x_{0,p} i_0 \cdot k_0 + y_{0,p} j_0 \cdot k_0 + z_{0,p} k_0 \cdot k_0 \\
&= x_{1,p} i_1 \cdot k_0 + y_{1,p} j_1 \cdot k_0 + z_{1,p} k_1 \cdot k_0 \\
x_{0,p} &= x_{1,p} i_1 \cdot i_0 + y_{1,p} j_1 \cdot i_0 + z_{1,p} k_1 \cdot i_0 \\
y_{0,p} &= x_{1,p} i_1 \cdot j_0 + y_{1,p} j_1 \cdot j_0 + z_{1,p} k_1 \cdot j_0 \\
z_{0,p} &= x_{1,p} i_1 \cdot k_0 + y_{1,p} j_1 \cdot k_0 + z_{1,p} k_1 \cdot k_0
\end{aligned} \tag{1}$$

Lo anterior da como resultado la siguiente matriz:

$$R_0 \cdot r_{1,p} = \begin{bmatrix} x_{1,p} i_1 \cdot i_0 & y_{1,p}, j_1 \cdot i_0 & z_{1,p} k_1 \cdot i_0 \\ x_{1,p} i_1 \cdot j_0 & y_{1,p}, j_1 \cdot j_0 & z_1, k_1 \cdot j_0 \\ x_{1,p} i_1 \cdot k_0 & y_{1,p} j_1 \cdot k_0 & z_{1,p} k_1 \cdot k_0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

que también puede expresarse de la siguiente manera:

$$R_0 \cdot r_{1,\rho} = \begin{bmatrix} i_1 \cdot i_0 & j_1 \cdot i_0 & k_1 \cdot i_0 \\ i_1 \cdot j_0 & j_1 \cdot j_0 & k_1 \cdot j_0 \\ i_1 \cdot k_0 & j_1 \cdot k_0 & k_1 \cdot k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,p} \\ y_{1,p} \\ z_{1,p} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Donde la matriz que multiplica por la izquierda es el producto punto de los cosenos directores del sistema 1 con el sistema 0. El resultado de estos productos puede obtenerse con la definición del producto punto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha. \tag{4}$$

1.0.1. Matriz de rotación en Z:

Dado que estamos hablando de cosenos directores, la magnitud de ambos siempre será la unidad, por lo que su producto punto será el coseno del ángulo entre sus colas.

Nos apoyamos en el siguiente diagrama para calcular cada producto punto, por lo cual:
calculamos los productos de cosenos directores que están a una separación de θ entre ellos

$$\begin{aligned} i_1 \cdot i_0 &= \cos\theta \\ j_1 \cdot j_0 &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Calculamos los productos de los cosenos directores que son paralelos entre sí:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot k_0 &= \cos 0^\circ \\ &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Los que son perpendiculares entre sí:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot i_0 &= \cos 90^\circ \\ &= 0 \\ k_1 \cdot j_0 &= 0 \\ i_1 \cdot k_0 &= 0 \\ j_1 \cdot k_0 &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Finalmente para ángulos complementarios podemos usar identidad trigonométrica de la diferencia de cosenos:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot j_0 &= \cos\left(90 - \theta^\circ\right) \\ &= \cos\theta\cos 90^\circ + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 90^\circ \\ &= \operatorname{sen}\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

y para ángulos obtusos usamos la suma de cosenos:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot i_0 &= \cos\left(\theta + 90^\circ\right) \\ &= \cos\theta\cos 90^\circ - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 90^\circ \\ &= -\operatorname{sen}\theta, \end{aligned} \tag{9}$$

por lo que nuestra ecuación termina como:

$$R_0 \cdot r_{1,p} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,p} \\ y_{1,p} \\ z_{1,p} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

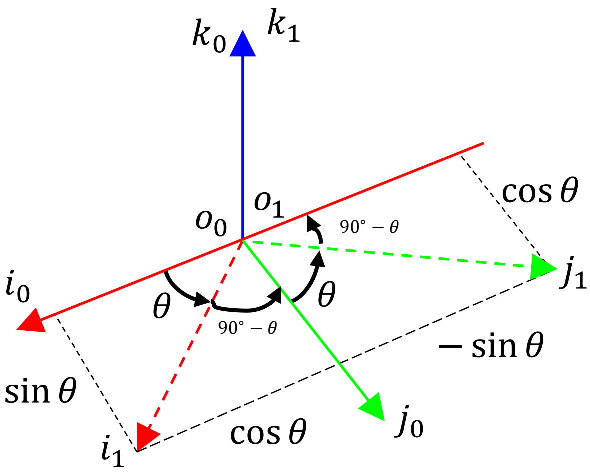

Figura 1.1: Rotación respecto al Eje Z

1.0.2. Matriz de rotación en X:

Puede seguirse el mismo procedimiento para cuando hacemos una rotación en los ejes X e Y para obtener:

Tenemos los cosenos directores que tienen un ángulo θ entre ellos:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot i_0 &= \cos\theta \\ k_1 \cdot k_0 &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{11}$$

Los cosenos directores que tienen un ángulo obtuso entre ellos:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot j_0 &= \cos\left(90 + \theta°\right) \\ &= -\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

Los cosenos directores que son ángulos complementarios:

$$\begin{aligned} j_1 \cdot k_0 &= \cos\left(90 - \theta°\right) \\ &= \operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{13}$$

Los cosenos directores que son paralelos entre ellos:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot i_0 &= \cos\theta \\ &= 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Tenemos los cosenos directores que tienen un ángulo de 90° entre ellos:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot k_0 &= \cos 90° \\ &= 0 \\ i_1 \cdot k_0 &= 0 \\ j_1 \cdot i_0 &= 0 \\ k_1 \cdot i_0 &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Finalmente la matriz de rotación queda como:

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{16}$$

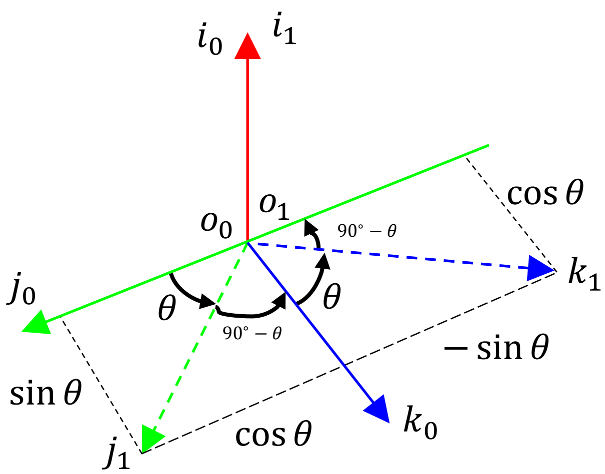

Figura 1.2: Rotación respecto al Eje X

1.0.3. Matriz de rotación en Y:

Tenemos los cosenos directores que tienen un ángulo θ entre ellos:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot i_0 &= \cos\theta \\ k_1 \cdot k_0 &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{17}$$

Tenemos los cosenos directores que tienen un ángulo de 90° entre ellos:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot j_0 &= \cos 90^\circ \\ &= 0 \\ k_1 \cdot j_0 &= 0 \\ j_1 \cdot k_0 &= 0 \\ j_1 \cdot i_0 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Los cosenos directores que son paralelos entre ellos:

$$\begin{aligned} j_1 \cdot j_0 &= \cos 0 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{19}$$

Los cosenos directores que son ángulos complementarios:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot i_0 &= \cos(90^\circ - \theta) \\ &= \operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{20}$$

Los cosenos directores que tienen un ángulo obtuso entre ellos:

$$\begin{aligned} i_1 \cdot k_0 &= \cos(90^\circ + \theta) \\ &= -\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{21}$$

y finalmente la matriz de rotación queda como:

$$R_0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{22}$$

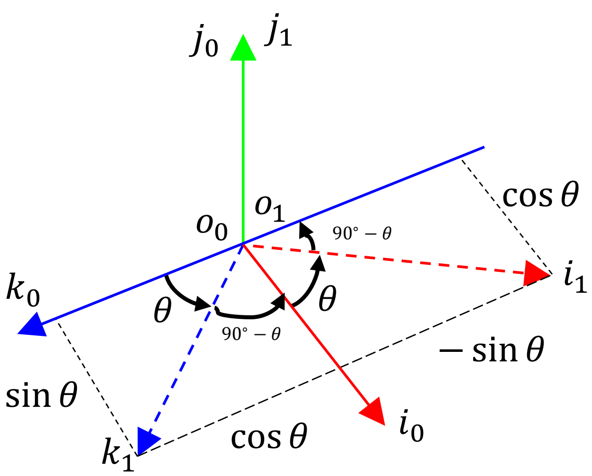

Figura 1.3: Rotación respecto al Eje Y

Bibliografía

[1] J. A. Lizarraga, *Modelado de Robots manipuladores Recopilatorio de clases y fundamentos*, vol. 1, pp. 43–46. N/a, 2024.