Centro de Enseñanza Técnica Industrial

Ingeniería Mecatrónica

Tarea: 1

Micro Robótica

Autor: Juan Pablo García Guzmán, Miguel Ángel Mendoza Hernández
Matrícula: 21110430, 20110144.
Versión
13 de febrero de 2024

Dr. Jorge A. Lizárraga

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Para esta actividad tenemos seis problemas los cuales debemos resolver con los conocimientos adquiridos previamente en la materia de álgebra lineal, los cuales van desde sencillos ejercicios como lo son simples sumas, restas, multiplicaciones y cálculo de inversas, como análogo entre números escalares y matrices, así como sus propiedades y reglas básicas que dictan bajo qué condiciones se pueden aplicar y cómo se deben de realizar, además de también problemas un poco más avanzados que impliquen la solución de ecuaciones matriciales en las que se aplican estas herramientas de calculo mencionadas. Es importante mencionar que aunque no parezca un trabajo con demasiada complejidad nos va a ayudar para las situaciones que representan posteriormente, así como también para llevar un orden al momento de realizar nuestras ecuaciones para que de esta manera sea lo más legible así como entendible tanto para nosotros como las demás personas a las que se le presenten. El objetivo de esto implicará realizar estos cálculos y plasmarlos en un software para después verlos aplicados de manera física.

Una de las herramientas que emplear para realizar esta actividad y la cual es muy importante es MatLab y es con la que trabajaríamos por el resto del semestre, con la ayuda de esta herramienta nos permite ingresar lo que serían las matrices acomodarlas conforme a nuestro gusto y de una manera más simple y rápida de hacer los cálculos que necesitemos, así como poder representar en los modelos en 3D, esto nos ayuda a que tengamos una visualización de lo que estamos o queremos haciendo, así como también nos ayuda por si tenemos algún error lo veamos y corregirlo a tiempo y a la hora de llevarlo a la parte física presente las menores fallas posibles.

Capítulo 2

Desarrollo del Proyecto

Realice los siguientes cálculos considerando:

$$a = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y \quad c = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

- $2a + 4b - 3c$
- $2b - 7c + 2a$
- $\alpha a - \frac{1}{\beta} b$, con α y $\beta \in \mathbb{R}$
- Determine E tal que $EA + 2B - 3C$ sea una matriz de ceros $\in \mathbb{R}^{3\times 2}$
- Determine G tal que $A + B + G$ sea una matriz de unos $\in \mathbb{R}^{3\times 2}$
- Dados $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, encuentre una matriz X tal que $AX + XB = C$.

2.0.1. Ejercicio 1:

- $2a + 4b - 3c$

Para realizar la operación anterior, se sabe que la multiplicación de escalares por matrices y la adición entre una o más matrices ser realiza término por término.

$$2\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 33 \\ 14 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2.0.2. Ejercicio 2:

Para realizar la siguiente operación, se sabe que la multiplicación de escalares por matrices y la adición entre una o más matrices ser realiza término por término.

- $2b - 7c + 2a$

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41 \\ 73 \\ 32 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2.0.3. Ejercicio 3:

Para este ejercicio se realizaron los mismos pasos como los anteriores, multiplicación de escalares y adición de matrices.

- $\alpha a - \frac{1}{\beta}b$, con α y $\beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix} - \frac{1}{\beta}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\alpha - \frac{1}{\beta} \\ 7\alpha + \frac{2}{\beta} \\ -8\alpha - \frac{3}{\beta} \end{bmatrix} \tag{3}$$

2.0.4. Ejercicio 4:

- Determine E tal que $EA + 2B - 3C$ sea una matriz de ceros $\in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Tenemos la siguiente ecuación que debemos de resolver:

$$EA + 2B - 3C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

En este caso, no podemos simplemente aplicar álgebra de matrices para encontrar una solución directa para la matriz E debido a que esto implicaría encontrar una matriz inversa para la matriz A y, al ser no ser una matriz cuadrada no es posible calcular una inversa. Podemos comenzar a buscar una matriz que pueda cumplir lo requerido. Para empezar, necesitamos una matriz que pueda multiplicarse por la matriz A, esto sería una matriz en $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Sin embargo, el resultado de ese producto sería una matriz en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y eso nos impediría realizar las operaciones de suma y resta con las matrices B y C. Una alternativa para solucionar esto sería una matriz en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ que nos permite realizar lo anterior mencionado. Entonces tenemos que:

$$E = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \\ e_7 & e_8 & e_9 \end{bmatrix} \tag{5}$$

y realizando la sustitución en la ecuación (4), tenemos:

$$\begin{bmatrix} e_1 - 2e_2 & 4e_1 - 2e_2 - 8e_3 \\ e_4 - 2e_5 & 4e_4 - 2e_5 - 8e_6 \\ e_7 - 2e_8 & 4e_7 - 2e_8 - 8e_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -41 \\ 9 & -2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \tag{6}$$

por lo anterior nos podemos dar cuenta que obtendremos un sistema con un número de incógnitas mayor al número de ecuaciones que tenemos, por lo que trataremos de reducir el número de incógnitas haciendo la matriz simétrica:

$$E = \begin{bmatrix} e_1 & e_4 & e_5 \\ e_4 & e_2 & e_6 \\ e_5 & e_6 & e_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Usando este valor para E, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} e_1 - 2e_4 & 4e_1 - 2e_4 - 8e_5 \\ e_4 - 2e_2 & 4e_4 - 2e_2 - 8e_6 \\ e_5 - 2e_6 & 4e_5 - 8e_3 - 2e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -41 \\ 9 & -2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Pero desafortunadamente no existe una matriz inversa para el sistema anterior, por lo que queda seguir buscando una alternativa como hacer la diagonal inferior negativa respecto a la superior:

$$E = \begin{bmatrix} e_1 & e_4 & e_5 \\ -e_4 & e_2 & e_6 \\ -e_5 & -e_6 & e_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

finalmente nos resulta un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} e_1 - 2e_4 & 4e_1 - 2e_4 - 8e_5 \\ -2e_2 - e_4 & -4e_4 - 2e_2 - 8e_6 \\ 2e_6 - e_5 & 2e_6 - 4e_5 - 8e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -41 \\ 9 & -2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \tag{10}$$

que podemos ordenar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -41 \\ 9 \\ -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{11}$$

ahora solo debemos de obtener cada uno de los valores de e, que podemos obtener al multiplicar al vector de entrada por la inversa de la matriz de los coeficientes de la salida. Finalmente, obtenemos que la matriz E que buscabamos es:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{127}{12} & \frac{139}{16} \\ \frac{127}{12} & \frac{19}{24} & \frac{171}{32} \\ -\frac{139}{16} & -\frac{171}{32} & -\frac{529}{128} \end{bmatrix} \tag{12}$$

2.0.5. Ejercicio 5:

- Determine G tal que $A+B+G$ sea una matriz de unos $\in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$\begin{aligned}
A+B+G &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
G &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - A - B \\
G &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \\
G &= \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 3 & 2 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13}$$

2.0.6. Ejercicio 6:

- Dados $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, encuentre una matriz X tal que $AX + XB = C$.

Proponemos una matriz X 2x2 de la siguiente forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Entonces, realizamos una sustitución de nuestra matriz X en la ecuación dada y simplificamos la ecuación para buscar los coeficientes de cada celda.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_3 & 3x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5x_1 & 6x_2 \\ 5x_3 & 6x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 7x_1 & 8x_2 \\ 8x_3 & 9x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
x_1 &= \frac{1}{7} \\
x_2 &= 0 \\
x_3 &= 0 \\
x_4 &= \frac{1}{9} \\
x &= \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{15}$$

note que el producto entre A, B y X es conmutativo por ser matrices diagonales por lo que también podríamos haber obtenido la inversa de la suma de A con B y multiplicar por la derecha a la matriz C para así obtener la matriz X.

2.1. Código Matlab

Se hizo uso de Matlab para comprobar los resultados obtenidos. 2.1.1

Código Matlab 2.1.1: Tarea1

```
clc; close all;clear;

% Tarea 1
% Realizar los siguientes calculos considerando:
a = [-4;7;-8];
b = [1;-2;3];
c = [5;-9;-6];

A = [1 4;-2 -2; 0 -8];
B = [-4 7; 0 1 ; 8 -3];
C = [5 -9; 3 0 ; 6 1];

% Problema 1:
% 2*a + 4*b - 3*c
SolucionProblema1 = 2*a + 4*b - 3*c;

% Problema 2:
% 2*b - 7*c + 2*a
SolucionProblema2 = 2*b - 7*c + 2*a;

syms alpha betta

% Problema 3:
SolucionProblema3 = alpha*a - 1/betta*b;

% Problema 4:
% Determine E tal que EA+ 2Bâ 3C sea una matriz real de ceros 3
    Ã 2

syms e1 e2 e3 e4 e5 e6
E = [ e1 e4 e5 ; -e4 e2 e6 ; -e5 -e6 e3 ];

D = E*A+ 2*B - 3*C;

Y = [
    1 0 0 -2 0 0;
    4 0 0 -2 -8 0;
    0 -2 0 -1 0 0;
    0 -2 0 -4 0 -8;
    0 0 0 0 -1 2;
    0 0 -8 0 -4 2
];

b = [ 23; -41; 9; -2; 2; 9 ];

solucionE = Y\b;

e1 = solucionE(1);
e2 = solucionE(2);
```

```
e3 = solucionE(3);
e4 = solucionE(4);
e5 = solucionE(5);
e6 = solucionE(6);

E = [ e1 e4 e5 ; -e4 e2 e6 ; -e5 -e6 e3 ];
SolucionProblema4 = E;
Comprobacion5 = E*A+ 2*B - 3*C;

% Problema 5:
% Determine G tal que A + B + G sea una matriz real de unos 3Ã 2
G = ones(size(A)) - A - B;
SolucionProblema5 = G;

%Problema 6:

A1 = [2 0 ; 0 3];
B1 = [5 0 ; 0 6];
C1 = eye(2);

SolucionProblema6 = C1/(A1 + B1);
Comprobacion6 = SolucionProblema6*A1 + SolucionProblema6*B1;
```

Capítulo 3

Conclusiones

3.1. Conclusión del proyecto

Esta actividad nos ayudó como un repaso de álgebra lineal en cuanto las operaciones básicas de adicción y producto así como nos ayudó a resaltar las propiedades conmutativas de los productos con matrices diagonales o también las propiedades de inversión de matrices que sólo puede realizarse con matrices cuadradas y que incluso no siempre existe su inversa.

Al principio no tuvimos problemas con la resolución de las matrices, ya que solo se trataban de realizar unas simples operaciones de sumas, restas, multiplicaciones, sin embargo en el problema número 4 presentamos unas complicaciones porque para empezar, no podemos solucionar para E directamente usando álgebra de matrices puesto que no se trata de matrices cuadradas y también nos limitaba a buscar una matriz con dimensiones específicas puesto que necesitábamos multiplicarla y sumar el resultado a otras matrices.

Bibliografía

[1] D. J. A. Lizarraga, *Modelado de Robots manipuladores Recopilatorio de clases y fundamentos*, vol. 1, pp. 21–40. N/a, 2024.

[1]