] Proposition[section] Defin

Sistemas Lineales

Apuntes para el curso de Sistemas Lineales

COLABORADOR 1

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, 2026

Contents

1. Introducción

1.1 Señales y sistemas

Los conceptos de señales y sistemas surgen en gran variedad de campos. Tienen gran importancia en áreas tan diversas como: comunicaciones, aeronáutica, diseño de circuitos, acústica, ingeniería biomédica, ...

Aunque la naturaleza física de estas señales y sistemas pueda ser muy distinta, hay dos elementos comunes que permiten estudiarlas de forma conjunta:

- **Señales**: cualquier función de una o más variables independientes que porta o contiene alguna información sobre el comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno y que puede ser almacenada, presentada o manipulada.
  Se caracterizan por:
  - Pueden ser medidas.
  - Transportan alguna información.

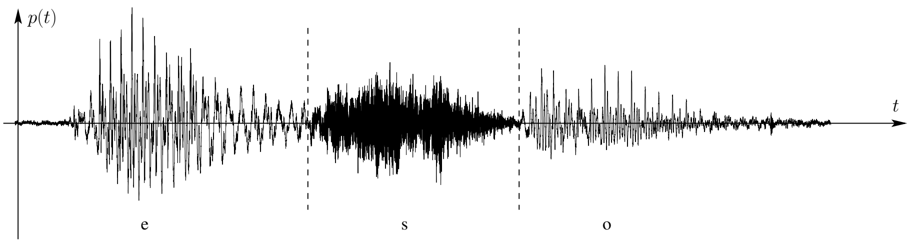


Figure 1.1: Ejemplo de señal

- **Sistemas**: cualquier proceso a través del cual unas señales se transforman en otras. Responden a la señal de entrada produciendo otra señal de salida o un cierto comportamiento.
  También se llama sistema al medio físico que soporta las señales.
  Las vamos a ver como “cajas negras”.

Ejemplo: Sistema: circuito eléctrico. Señales: voltajes y corrientes en el circuito, en función del tiempo.

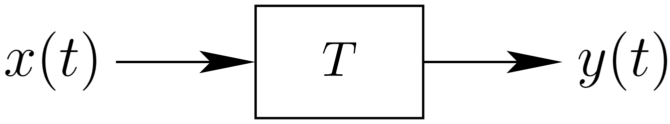
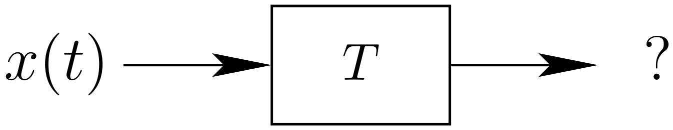


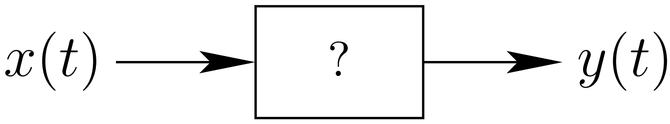
Figure 1.2: Ejemplo de sistema

1.2 Problemas de procesado de señales

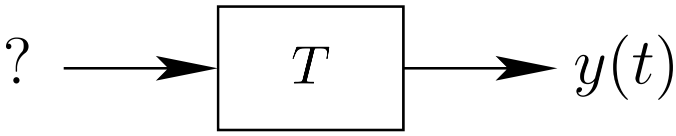
- **Análisis**: estudiar la respuesta de un sistema específico a diversas entradas. (Convolución). Ejemplo: análisis de circuitos.



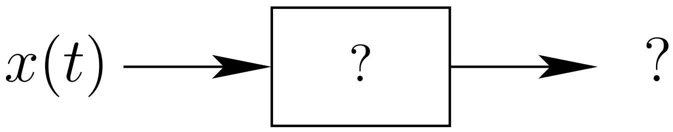
- **Diseño o identificación**: diseñar sistemas para procesar señales de determinada forma. Ejemplos: restauración (voz, imagen, ...), realce, extracción de características.



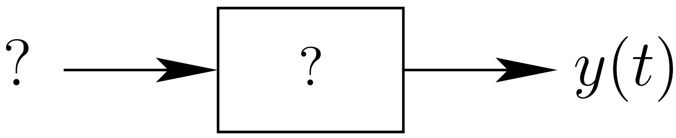
- **Deconvolución**: obtener entrada para un sistema dado a partir de su salida. Ejemplos: eliminar aberraciones en lentes de cámaras fotográficas o movimiento.



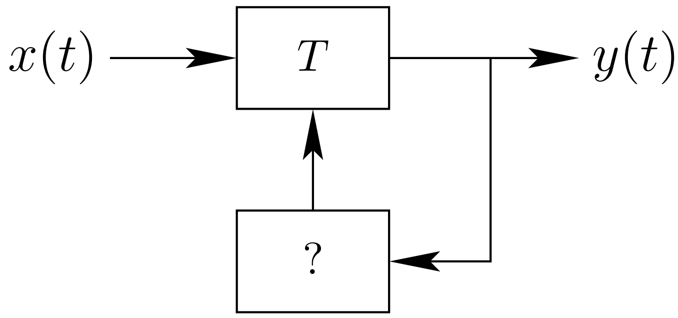
- **Filtrado**: obtener el sistema y la señal de salida que permite modificar una señal de entrada de determinada forma. Ejemplo: eliminar altas frecuencias de señal musical.



- **Modelado**: diseñar un sistema y la señal de entrada que nos permite obtener una salida determinada. Ejemplo: sintetizar voz.



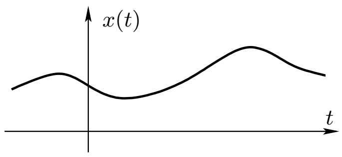
- **Control**: diseñar un sistema que controle a otro a partir de su salida. Ejemplos: sistema de control de planta química, piloto automático.



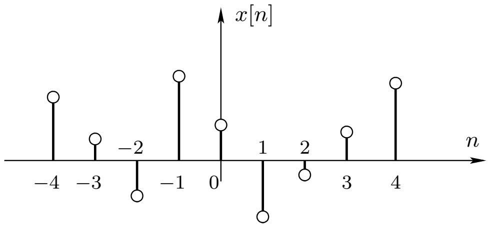
1.3 Clases de señales

Tipos de señales:

- Según el rango de variabilidad de la variable independiente: continua vs. discreta.

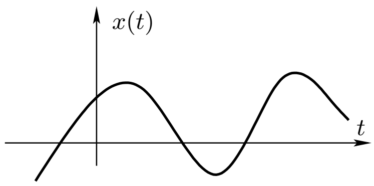


Señal continua

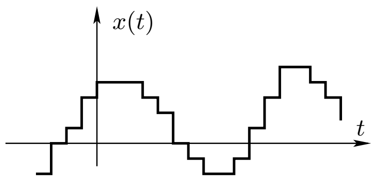


Señal discreta

  - **Continua**: valores para todos los puntos del eje de abscisas. Ejemplo: señales en circuitos eléctricos y mecánicos.
  - **Discreta**: valores en puntos discretos y equiespaciados del eje de abscisas. Ejemplo: promedio de la bolsa cada día.
- Según el rango de variabilidad de la variable dependiente: analógica vs. digital.

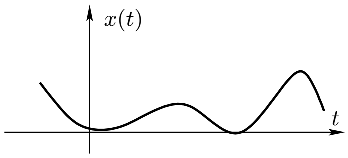


Señal analógica

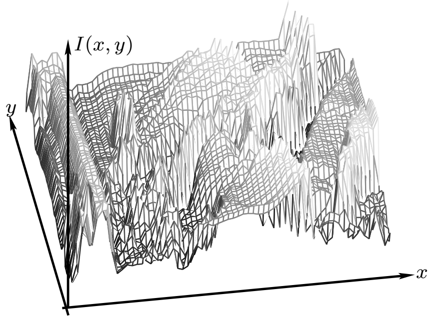


Señal digital

  - **Analógica**: puede tomar cualquier valor dentro de un rango. Ejemplo: temperatura.
  - **Digital**: puede tomar sólo valores cuantizados. Ejemplo: luz encendida o apagada.
- Según el número de variables independientes: unidimensional vs. multidimensional.
- Según la incertidumbre de la variable dependiente: señal determinista vs. aleatoria.
  - **Determinista**: se conocen los valores que toma en todos y cada uno de sus instantes.
  - **Aleatoria o estocástica**: hay incertidumbre sobre el valor que toma en alguno de sus instantes. Asociado al concepto de probabilidad.



Señal unidimensional



Señal bidimensional

$$\text{Señal}\begin{cases}\text{Determinista}\begin{cases}\text{Estacionaria}\begin{cases}\text{Periódica}\\ \text{No periódica}\end{cases}\\ \text{No Estacionaria}\end{cases}\\ \text{Aleatoria o Estocástica}\begin{cases}\text{Estacionaria}\begin{cases}\text{Ergódica}\\ \text{No ergódica}\end{cases}\\ \text{No estacionaria}\end{cases}\end{cases} \tag{1.1}$$

Tipos de sistemas: continuos, discretos, analógicos, digitales.

1.4 Ejemplos de señales y sistemas

Ejemplos de señales:

- Habla: telefonía, radio, ..., vida cotidiana.
- Señales biomédicas:
  - 1-D: encefalograma, electrocardiograma.
  - 2-D: radiografía, angiografía, ecografía.
  - 3-D: TAC, RM, ultrasonidos 3D, vídeo.
  - 4-D: secuencias temporales de volúmenes.
  - N-D: volúmenes con datos tensoriales para estudiar fibras nerviosas del cerebro.
- Sonido y música.
- Vídeo e imagen.
- Señales de radar, sonar, satélite.
- Comunicación de datos entre ordenadores.

Otros ejemplos:

- Circuitos eléctricos:
  - Señales: $I(t), V(t)$.
  - Sistema: propio circuito.
- Automóvil:
  - Señales: entrada: presión en pedales y giro del volante. Salida: aceleración y dirección del automóvil.
  - Sistema: automóvil.
- Compresión de imagen:

  - Señales: imagen comprimida y sin comprimir.
  - Sistemas: compresor y descompresor.
- Transmisión de señal de radio:
  - Señal: señal de audio modulada.
  - Sistema: medio de transmisión (atmósfera).

Ejemplos de procesado de señal:

- Eliminación de ruido en voz de piloto de avión (comunicaciones).
- Realce de fotografías.
- Extracción de parámetros de interés:
  - Formantes de la voz (identificación).
  - Reconocimiento de habla.
  - Identificación de formas (visión artificial).

Introducción a los sistemas lineales

En este tema vamos a describir el lenguaje matemático que nos permitirá desarrollar herramientas muy poderosas para analizar señales y sistemas en muy diversos campos.

2. Señales continuas y discretas

La información de una señal está contenida en un patrón de variaciones con una forma determinada.

2.1 Introducción

Ejemplo 1: señal de voz humana (variaciones de presión acústica).

Distintos patrones de variación producen distintos sonidos:

Ejemplo 2: fotografía (blanco y negro).

Señal bidimensional. Variaciones del nivel de gris.

Representación matemática: funciones de una o más variables independientes.

Aquí sólo nos ocuparemos de señales con una variable independiente.

En general consideramos que es el tiempo: $x(t)$ (aunque no tiene por qué).

Vamos a considerar **dos tipos básicos de señales**:

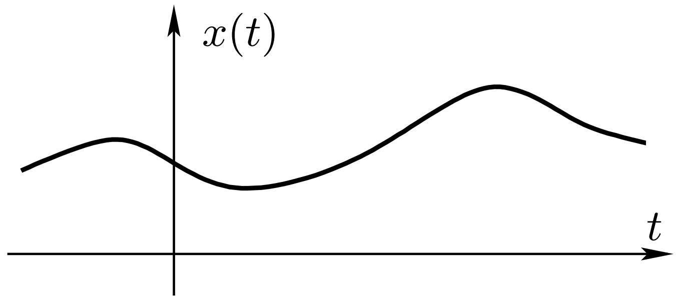
- **Continuas**: la variable independiente es continua $\Rightarrow$ se definen para una sucesión continua de valores de la variable independiente.
  Notación: $\boxed{x(t)}$, con $t \in$.

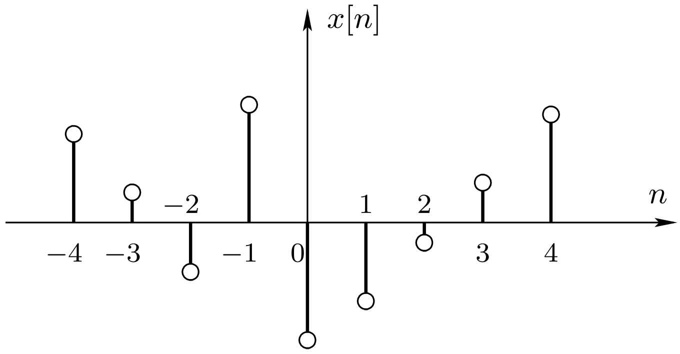
Ejemplos: señal de voz con el tiempo, presión atmosférica con altitud.

- **Discretas**: la variable independiente sólo toma un conjunto discreto de valores. También se las llama **secuencia discreta**.
  Notación: $\boxed{x[n]}$, con $n \in$.

Ejemplos: valor del IBEX-35 al final de cada sesión, muestreo de señales continuas (muestras equiespaciadas).

Vamos a ir viendo las señales continuas y discretas de forma paralela, para irlas relacionando. En el capítulo de muestreo (7), veremos cómo se puede pasar de unas a otras, idealmente sin error.





2.2 Clases de señales

Veremos a continuación distintos tipos de señales que tendrán importancia a lo largo de toda la asignatura.

- **Real e imaginaria**: simetría respecto a la conjugación.
  - **Real pura**: simétrica respecto a la conjugación.

$$x^*(t) = x(t), \tag{2.1}$$

$$x^*[n] = x[n]. \tag{2.2}$$

  - **Imaginaria pura**: antisimétrica respecto a la conjugación.

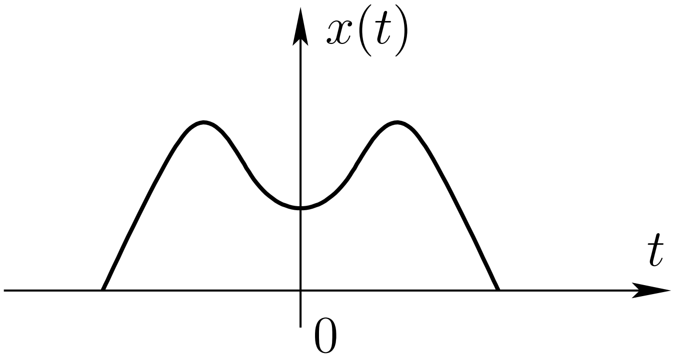
$$x^*(t) = -x(t), \tag{2.3}$$

$$x^*[n] = -x[n]. \tag{2.4}$$

- **Par e impar**: simetría respecto a la inversión en el tiempo. Se aplica a señales reales.
  - **Par**: simétrica respecto al eje de ordenadas.

$$x(-t) = x(t), \tag{2.5}$$

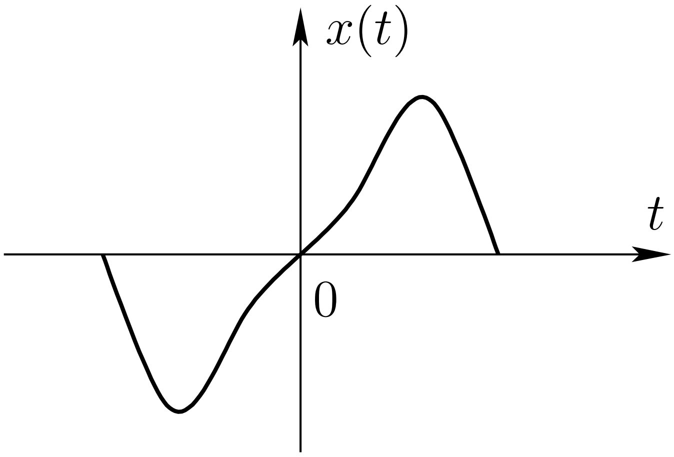
$$x[-n] = x[n]. \tag{2.6}$$



– **Impar**: antisimétrica respecto al eje de ordenadas.

$$x(-t) = -x(t), \tag{2.7}$$

$$x[-n] = -x[n]. \tag{2.8}$$



En el origen, como $x(0) = -x(0)$, se cumple:

$$x(0) = 0, \tag{2.9}$$

$$x[0] = 0, \tag{2.10}$$

- **Hermítica y antihermítica**: Equivalente para señales complejas.
  – **Hermítica**: simétrica respecto al eje de ordenadas y la conjugación.

$$x^*(-t) = x(t), \tag{2.11}$$

$$x^*[-n] = x[n]. \tag{2.12}$$

– **Antihermítica**: antisimétrica respecto al eje de ordenadas y la conjugación.

$$x^*(-t) = -x(t), \tag{2.13}$$

$$x^*[-n] = -x[n]. \tag{2.14}$$

Toda señal se puede poner como suma de sus partes real e imaginaria, par e impar, hermítica y antihermítica:

$$x(t) = x_r(t) + x_i(t) = \Re\{x(t)\} + \Im\{x(t)\}. \tag{2.15}$$

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = \mathscr{E}\sqsubseteq\{x(t)\} + \mathscr{O}\lceil\{x(t)\}, \quad x(t) \in . \tag{2.16}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_a(t). \tag{2.17}$$

Las expresiones para el caso discreto son equivalentes.

Cálculo de la parte par e impar de una señal:

$$\Big\{ x(t) = x_e(t) + x_o(t),\ x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) = x_e(t) - x_o(t). \tag{2.18}$$

$$\Downarrow \tag{2.19}$$

Parte par e impar de una señal:

$$\Big\{ x_e(t) = \tfrac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right],\ x_o(t) = \tfrac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]. \tag{2.20}$$

Se cumple:

$$x_e(0) = x(0), \qquad x_e[0] = x[0]. \tag{2.21}$$

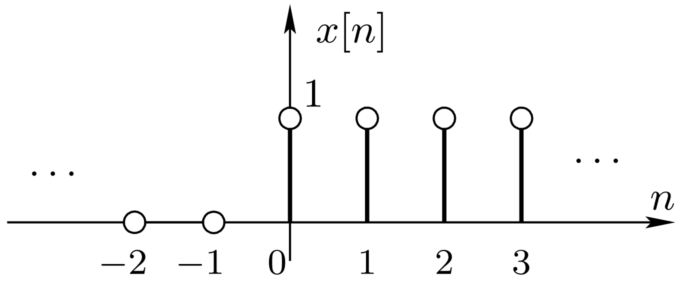
$$x_o(0) = 0, \qquad x_o[0] = 0. \tag{2.22}$$

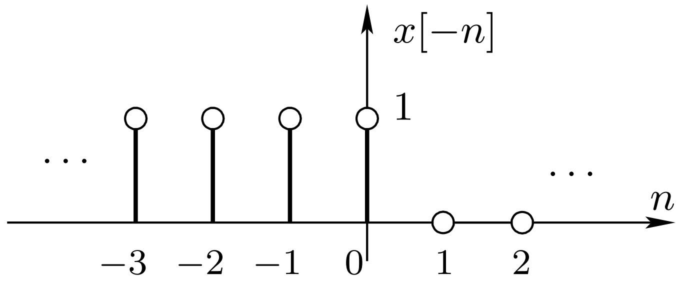
Parte real e imaginaria:

$$\Big\{ x_r(t) = \tfrac{1}{2}\left[x(t) + x^*(t)\right],\ x_i(t) = \tfrac{1}{2}\left[x(t) - x^*(t)\right]. \tag{2.23}$$

Parte hermítica y antihermítica:

$$\Big\{ x_h(t) = \tfrac{1}{2}\left[x(t) + x^*(-t)\right],\ x_a(t) = \tfrac{1}{2}\left[x(t) - x^*(-t)\right]. \tag{2.24}$$





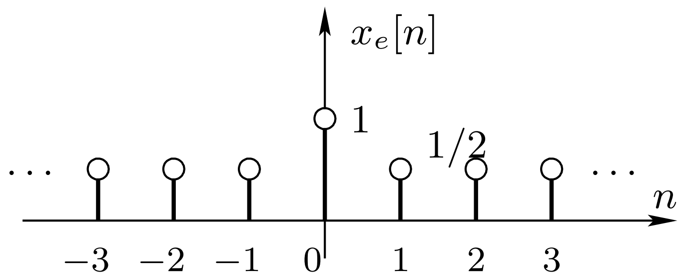
Para el caso discreto las expresiones son equivalentes.

Ejemplo: Cálculo de la parte par e impar de una señal:

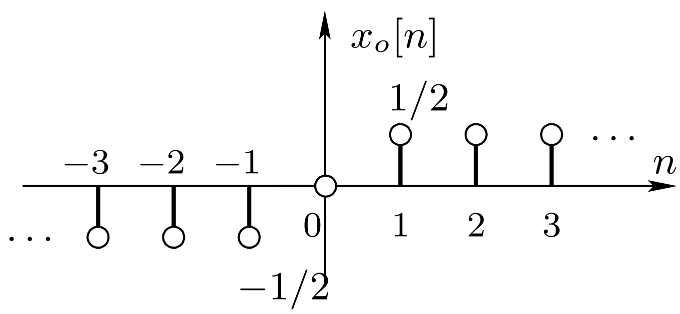
$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0,\ 0, \\ n < 0. \end{cases}$$

$$x[-n] = \begin{cases} 1, & n \leq 0,\ 0, \\ n > 0. \end{cases}$$

$$x_e[n] = \begin{cases} 1/2, & n < 0,\ 1, \\ n = 0,\ 1/2, & n > 0. \end{cases}$$



$$x_o[n] = \begin{cases} -1/2, & n < 0,\ 0, \\ n = 0,\ 1/2, & n > 0. \end{cases}$$



A continuación veremos otros tipos de señales: periódicas y de energía y de potencia.

2.3 Señales periódicas

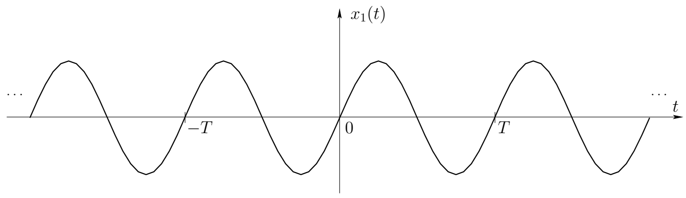
Dada su importancia las vemos aparte.

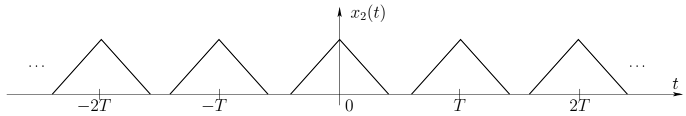
- Una señal **continua**, $x(t)$, es **periódica** si:

$$\exists\, T \in^{+} \; / \quad \boxed{x(t) = x(t+T)}, \qquad \forall t \in . \tag{2.25}$$

T: **periodo** de la señal.

Ejemplos:





Si $x(t)$ es periódica con periodo T, también lo es con periodo mT, $m \in$.

T_0: **periodo fundamental** de la señal. Valor más pequeño de T para el que se satisface:

$$x(t) = x(t+T_0). \tag{2.26}$$

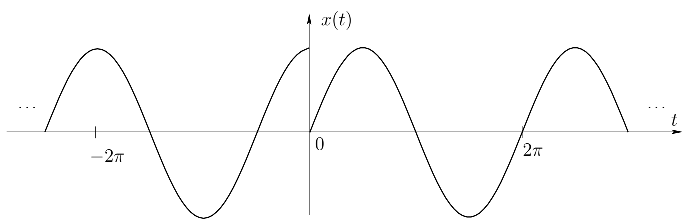
Si $x(t)$ es constante, no está definido T_0, ya que es periódica para cualquier T.

Señal aperiódica: si no es periódica.

Ejemplos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), \quad t < 0,\ \sin(t), \\ t \geq 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Se cumple que $\cos(t) = \cos(t+2\pi)$ para $t < -2\pi$ y $\sin(t) = \sin(t+2\pi)$, para $t \geq 0$, pero no se cumple $x(t) = x(t+2\pi)$, $\forall t$.



Estudiar el caso:

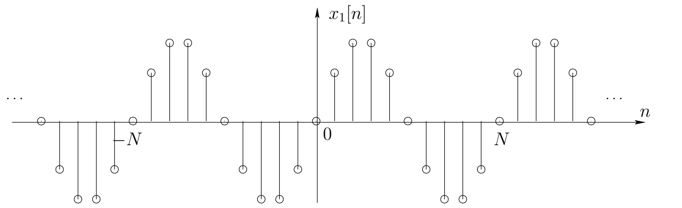
$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), \quad t < 0,\ \cos(-t), \\ t \geq 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

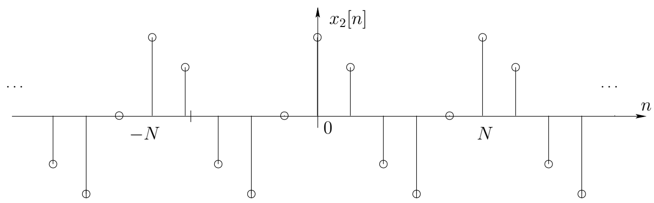
- Una señal **discreta**, $x[n]$, es **periódica** si:

$$\exists\, N \in / \quad \boxed{x[n] = x[n+N]}, \quad \forall n \in . \tag{2.29}$$

N: **periodo** de la señal.

Ejemplos:





Si $x[n]$ es periódica con periodo N, también lo es con periodo mN, $m \in$.

N_0: **periodo fundamental** de la secuencia discreta. Valor más pequeño de N para el que se satisface:

$$x[n] = x[n+N_0]. \tag{2.30}$$

Si $x[n]$ es constante, $N_0 = 1$, que es el periodo mínimo que puede tener una señal discreta.

Señal aperiódica: si no es periódica.

2.4 Parámetros de interés

Vemos algunos parámetros de interés de las señales, tanto continuas como discretas.

- **Valor medio**:
  - El **valor medio en un intervalo** viene dado por:
    - **Señales continuas**:\

En el intervalo $t1 \leq t \leq t_2$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt. \tag{2.31}$$

Para un intervalo simétrico, $-T \leq t \leq T$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt. \tag{2.32}$$

  - **Señales discretas**:

En el intervalo $n_1 \leq n \leq n_2$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]. \tag{2.33}$$

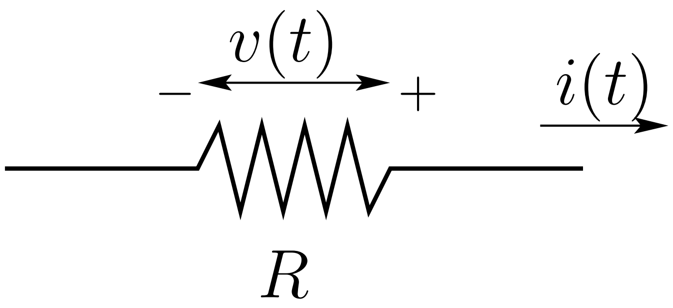
Para un intervalo simétrico, $-N \leq n \leq N$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]. \tag{2.34}$$

- El **valor medio** viene dado por:
  - **Señales continuas**:
    $$x_{\mathrm{AV}} \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt. \tag{2.35}$$
  - **Señales discretas**:
    $$x_{\mathrm{AV}} \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x[n]. \tag{2.36}$$
- El **valor medio** para **señales periódicas** también se puede calcular de la siguiente forma:
  - **Señales continuas**:
    $$x_{\mathrm{AV}} \triangleq \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)dt. \tag{2.37}$$
  - **Señales discretas**:
    $$x_{\mathrm{AV}} \triangleq \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[n]. \tag{2.38}$$

- **Valor de pico**:
  - **Señales continuas**:
    $$x_p \triangleq \max\{|x(t)|,\ t \in\}. \tag{2.39}$$
  - **Señales discretas**:
    $$x_p \triangleq \max\{|x[n]|,\ n \in\}. \tag{2.40}$$
- **Potencia instantánea**:
  Por analogía con las señales que representan magnitudes físicas, se puede hablar de potencia y energía.

Así por ejemplo, para una resistencia, la potencia instantánea:



$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t) = Ri^2(t). \tag{2.41}$$

Vemos que es proporcional a la señal al cuadrado. En otros ejemplos ocurre lo mismo.

- **Señales continuas**:

$$P_i(t) \triangleq |x(t)|^2. \tag{2.42}$$

- **Señales discretas**:

$$P_i[n] \triangleq |x[n]|^2. \tag{2.43}$$

- **Energía**: suma (integral) de la potencia instantánea.
  - Energía total **en un intervalo** de tiempo:

- ◦ **Señales continuas**:
  En el intervalo $t1 \leq t \leq t_2$:

$$E \triangleq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt. \tag{2.44}$$

  Para un intervalo simétrico, $-T \leq t \leq T$:

$$E_T \triangleq \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt. \tag{2.45}$$

- ◦ **Señales discretas**:
  En el intervalo $n_1 \leq n \leq n_2$:

$$E \triangleq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2. \tag{2.46}$$

  Para un intervalo simétrico, $-N \leq n \leq N$:

$$E_N \triangleq \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2. \tag{2.47}$$

– La **energía total** (en un intervalo infinito) viene dada por:
- ◦ **Señales continuas**:

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \tag{2.48}$$

- ◦ **Señales discretas**:

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2. \tag{2.49}$$

Hay señales para las que esta integral (sumatorio) no converge, como por ejemplo:

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad x_2(t) = C. \tag{2.50}$$

$$x_1[n] = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad x_2[n] = C. \tag{2.51}$$

En estos casos, $E_\infty = \infty$.
Por ello, nos va a interesar otra medida relacionada, que es la potencia media.

- **Potencia media**: valor medio de la potencia instantánea.
  – En general, la potencia media viene dada por:
  - ◦ **Señales continuas**:

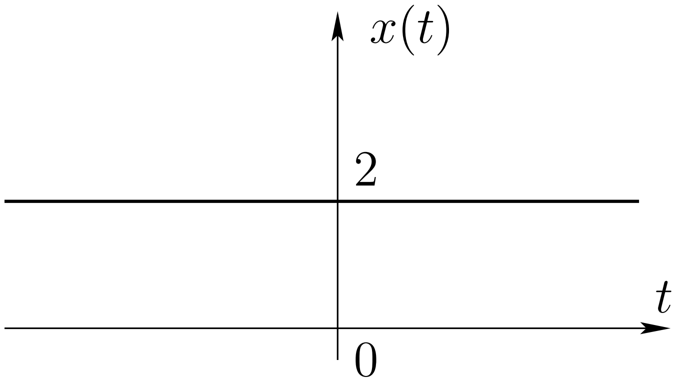
$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt. \tag{2.52}$$

  - ◦ **Señales discretas**:

$$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2. \tag{2.53}$$

  – En el caso particular de **señales periódicas**, también son aplicables las siguientes expresiones:
  - ◦ **Señales continuas**:

$$P_\infty \triangleq \frac{1}{T} \int_{<T>} |x(t)|^2 dt. \tag{2.54}$$



- **Señales discretas**:

$$P_\infty \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n \in <N>} |x[n]|^2. \tag{2.55}$$

Ejemplo: $x(t) = 2$.

$$P_i(t) = |x(t)|^2 = 4. \tag{2.56}$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 4dt = \infty. \tag{2.57}$$

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_i(t) dt = \lim_{T \to \infty} \frac{4T}{T} = 4. \tag{2.58}$$

2.5 Señales de energía y de potencia

Según las definiciones de energía y de potencia de una señal, se puede hablar de tres clases de señales:

- **Señales de energía**: son señales con **energía total finita**.

$$0 < E_\infty < \infty. \tag{2.59}$$

Tienen $P_\infty = 0$:

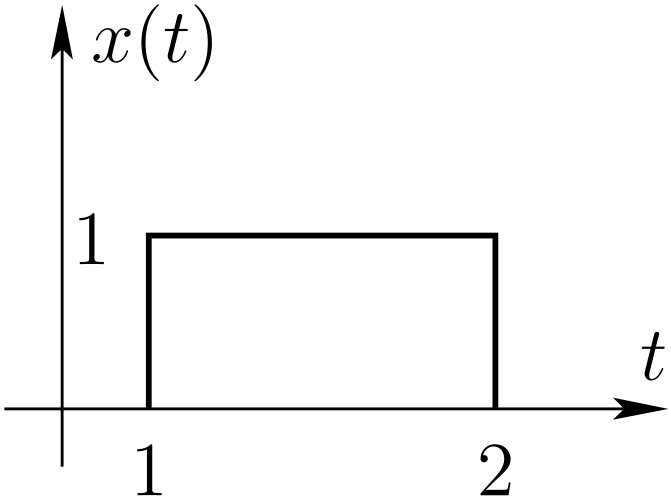
$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{E_T}{2T} = 0. \tag{2.60}$$

$$P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{E_N}{2N+1} = 0. \tag{2.61}$$

Ejemplo:

$$E_\infty = 1 \Rightarrow P_\infty = 0. \tag{2.62}$$

- **Señales de potencia**: son señales con **potencia media finita**.



$$0 < P_\infty < \infty \quad \Rightarrow \quad E_\infty = \infty. \tag{2.63}$$

Dado que tienen $P_\infty > 0$, integrando (sumando) en un intervalo infinito, se obtiene $E_\infty = \infty$.

Ejemplos:

$x_1(t) = 2$.
$x_2(t)$: cualquier señal periódica con valor de pico, x_p, finito.

- **Señales con E_∞ y P_∞ infinitas**.

Ejemplo: $x(t) = t$.

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |t|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} t^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{t^3\big|_{-T}^{T}}{3} = \lim_{T\to\infty} \frac{2T^3}{3} = \infty. \tag{2.64}$$

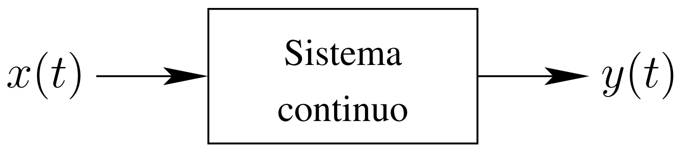
$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |t|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_T}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{2T^3}{6T} = \infty. \tag{2.65}$$

3. Sistemas continuos y discretos

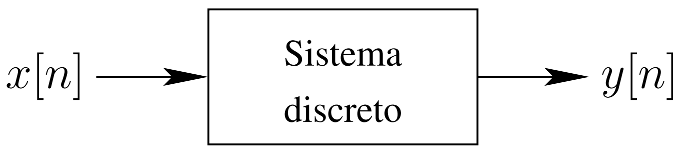
Sistema: proceso por el cual las señales de entrada son transformadas por el sistema, o provocan que éste responda de alguna forma, dando lugar a otras señales como salidas.

Según si las señales de entrada y salida son continuas o discretas, se habla de:

- **Sistemas continuos**: Señales continuas de entrada son transformadas en señales continuas de salida: $x(t) \ \rightarrow y(t)$.



- **Sistemas discretos**: Señales discretas de entrada son transformadas en señales discretas de salida: $x[n] \ \rightarrow y[n]$.



Además existen sistemas que tienen entrada continua y salida discreta (muestreadores) y viceversa (interpoladores), que veremos en el tema de muestreo (tema 7).

3.1 Ejemplos sencillos de sistemas

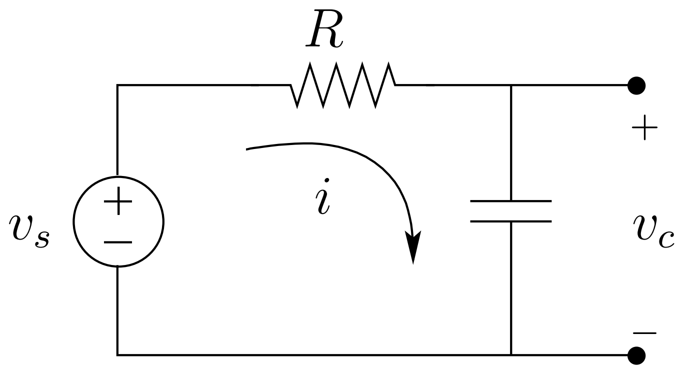
Una de las ventajas del estudio de sistemas es que sistemas muy distintos físicamente producen expresiones matemáticas similares.

Ejemplos de sistemas continuos:

- Circuito RC:

Considerando $v_s(t)$ como la señal de entrada y $v_c(t)$ como la señal de salida, obtenemos:

$$v_s(t) = Ri(t) + v_c(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}, \tag{3.1}$$

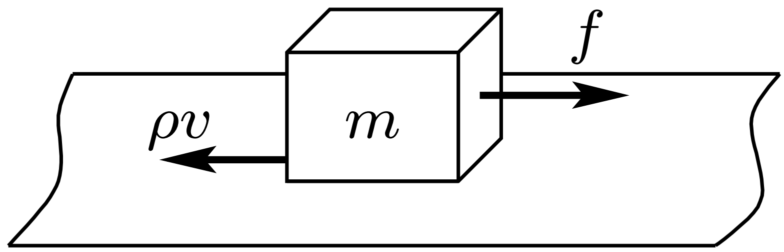


$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}. \tag{3.2}$$

Por tanto, se obtiene la siguiente ecuación diferencial que relaciona la salida con la entrada del sistema:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t). \tag{3.3}$$

- Objeto móvil:



Si consideramos $f(t)$ como la señal de entrada y $v(t)$ como la señal de salida, m la masa del objeto y ρv la resistencia por fricción:

$$f(t) = ma(t) + \rho v(t), \qquad a(t) = \frac{dv(t)}{dt}. \tag{3.4}$$

$$f(t) = m\frac{dv(t)}{dt} + \rho v(t). \tag{3.5}$$

Se obtiene la siguiente ecuación diferencial para el sistema:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t). \tag{3.6}$$

Ambos ejemplos son matemáticamente equivalentes, pues tienen la misma ecuación diferencial, que podemos escribir:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t), \tag{3.7}$$

siento $x(t)$ la señal de entrada al sistema, $y(t)$ la señal de salida y a y b constantes.

Ejemplos de sistemas discretos:

- Cuenta de ahorro en un banco al final de cada año:

Se obtiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n], \tag{3.8}$$

o de forma equivalente,

$$y[n] - 1.01y[n-1] = x[n]. \tag{3.9}$$

- Simulación digital del objeto móvil:

Tomamos el tiempo en intervalos de longitud Δ:

$$t = n\Delta. \tag{3.10}$$

Aproximamos la derivada mediante la primera diferencia:

$$\frac{dv(t)}{dt} \simeq \frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta}. \tag{3.11}$$

Por tanto, la ecuación diferencial queda:

$$\frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta} + \frac{\rho}{m}v(n\Delta) = \frac{1}{m}f(n\Delta), \tag{3.12}$$

usando las siguientes definiciones de señales discretas a partir de las continuas muestreadas:

$$\begin{cases} v[n] = v(n\Delta), \\ f[n] = f(n\Delta), \end{cases} \tag{3.13}$$

obtenemos:

$$v[n] - v[n-1] + \frac{\rho\Delta}{m}v[n] = \frac{\Delta}{m}f[n], \tag{3.14}$$

y agrupando términos:

$$v[n]\frac{m+\rho\Delta}{m} - v[n-1] = \frac{\Delta}{m}f[n]. \tag{3.15}$$

Si finalmente dividimos la ecuación por el factor $(m+\rho\Delta)/m$:

$$v[n] - \frac{m}{m+\rho\Delta}v[n-1] = \frac{\Delta}{m+\rho\Delta}f[n]. \tag{3.16}$$

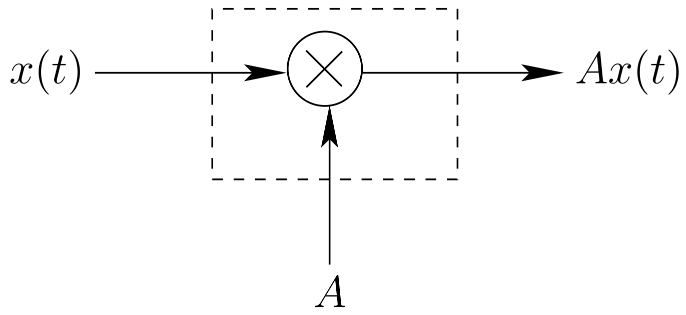
Se puede observar que ambos son ejemplos del mismo tipo de sistema, ya que tienen la misma ecuación en diferencias:

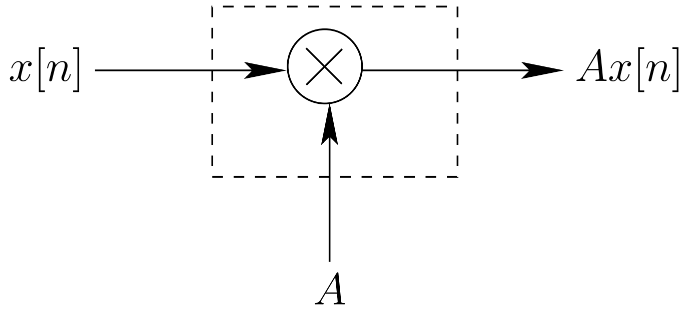
$$y[n] - ay[n-1] = bx[n]. \tag{3.17}$$

3.2 Sistemas elementales (transformación de la variable independiente)

Un concepto fundamental en el análisis de señales y sistemas es el de la transformación de una señal mediante un cierto sistema. Vamos a ver algunas transformaciones elementales de señales, que serán muy importantes en el resto de la asignatura, y nos permitirán entender mejor algunas propiedades de las señales, ya vistas, como son las señales pares e impares, reales e imaginarias, hermíticas y antihermíticas (ver seccción 2.\ref{clases_senales}), señales periódicas (ver sección 2.\ref{periodicas}), y de sistemas, que veremos en la sección 2.\ref{propiedades_sistemas}.

En primer lugar veremos algunas transformaciones elementales sobre la amplitud de la señal, o sumas y diferencias sobre la señal:

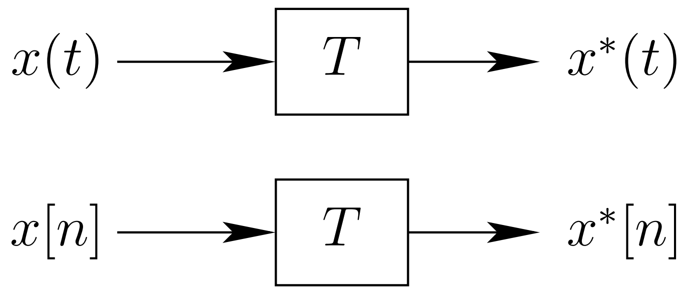




- **Cambio de nivel**: multiplicación de la señal por una constante.

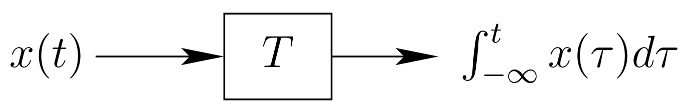
Amplificación: $A > 1$.\ Atenuación: $A < 1$.

- **Conjugación**:

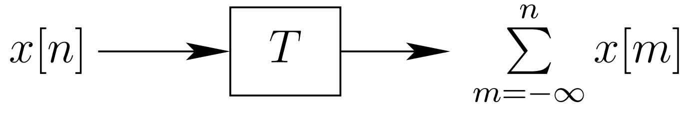


Se ha usado en señales reales e imaginarias y hermíticas y antihermíticas.

- **Integración**:



- **Sumación o acumulación**: equivalente a la integración para señales discretas.



- **Derivación**: operación inversa a la integración.
- **Diferenciación o primera diferencia**: operación inversa a la sumación.

A continuación veremos operaciones elementales realizadas sobre la variable independiente.

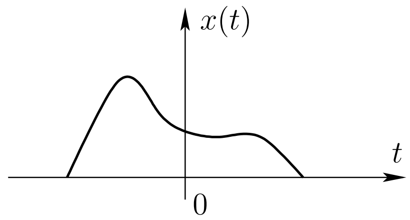
- **Desplazamiento o corrimiento en el tiempo**:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow \frac{dx(t)}{dt}$$

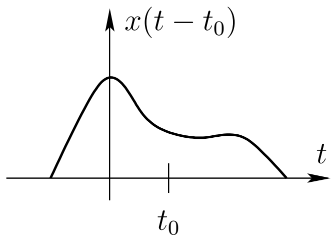
$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x[n] - x[n-1]$$

– Continuo:

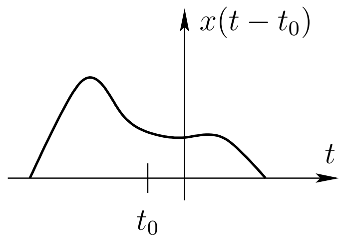
$$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x(t - t_0)$$



∗ **Retardo**: $t_0 > 0$.

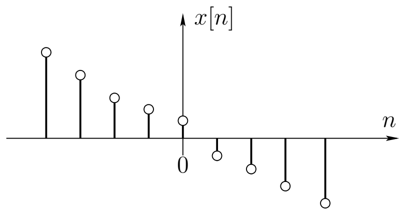


∗ **Adelanto**: $t_0 < 0$.

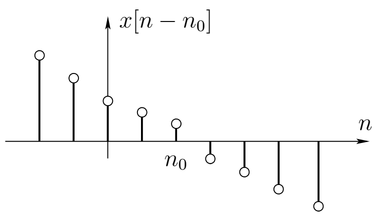


- Discreto:

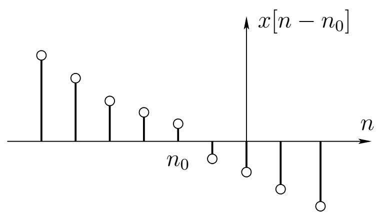
$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x[n - n_0]$$



∗ **Retardo**: $n_0 > 0$.

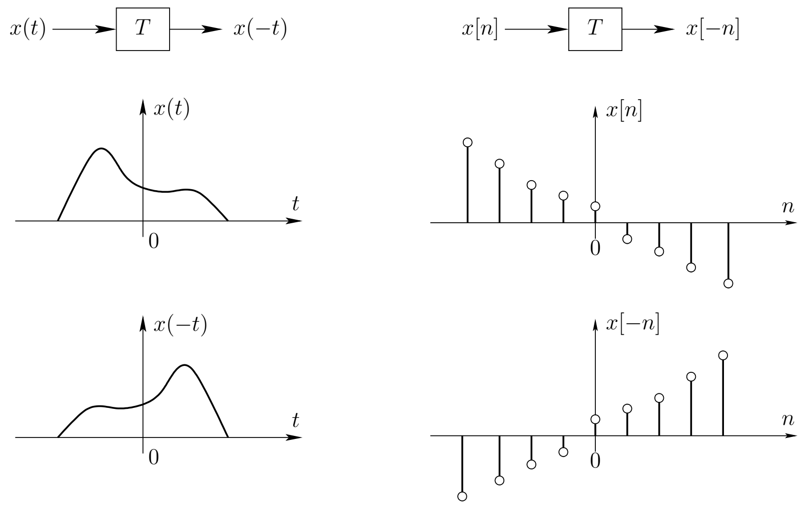


∗ **Adelanto**: $n_0 < 0$.



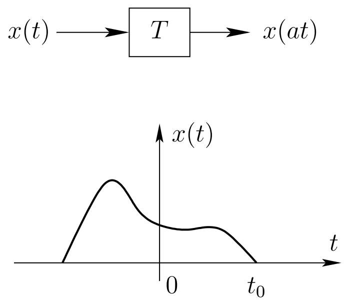
Se ha usado para definir las señales periódicas.

- **Inversión en el tiempo o abatimiento**: reflexión respecto al origen de tiempos.

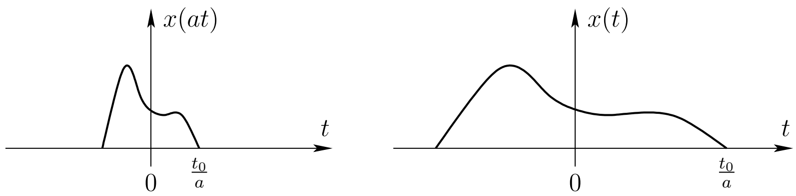


Se ha usado para definir señales pares e impares y hermíticas y antihermíticas. **Ejemplo**: cinta escuchada al revés.

- **Cambio de escala**:
  - Continuo:



∗ **Compresión**: $a > 1$. ∗ **Expansión**: $a < 1$.



Si $x(t_0) = 0, \quad at = t_0 \Rightarrow t = t_0/a.$

- Discreto:

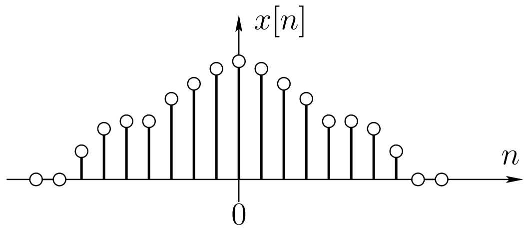
La expansión discreta o inserción de ceros se define de la siguiente forma:

$$x[n/k] \triangleq \begin{cases} x[n/k], & n = Mk, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}, \qquad M \in . \tag{3.18}$$

Ejemplo: cambio de velocidad en disco de vinilo.

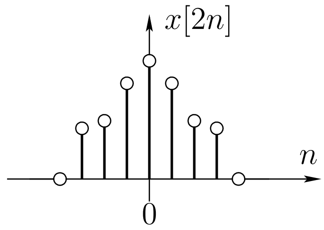
- **Transformación lineal del eje de tiempos**:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x[n-n_0]$$



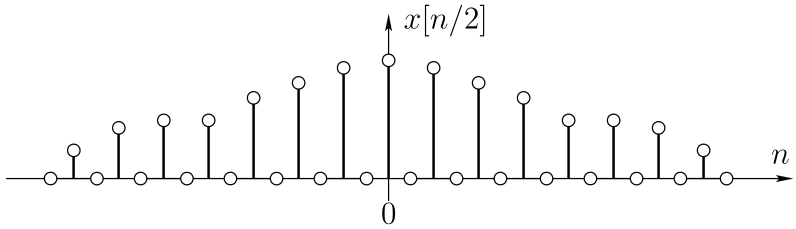
$*$ **Compresión o diezmado**:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x[kn],\ k \in \mathbb{N}$$



$*$ **Expansión o inserción de ceros**:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x[n/k],\ k \in \mathbb{N}$$



$$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x(\alpha t + \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

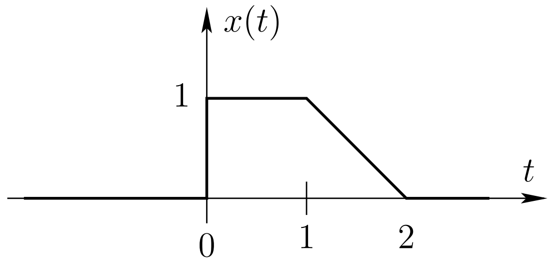
Conserva la forma de la señal, pero:

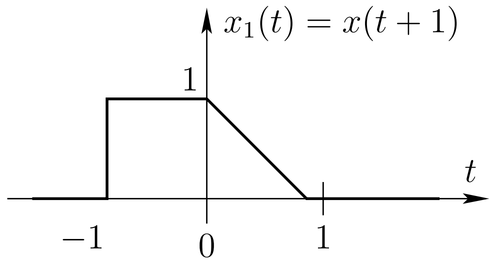
- $|\alpha| < 1$: alarga linealmente la señal.
- $|\alpha| < 1$: comprime linealmente la señal.
- $\alpha < 0$: invierte en el tiempo la señal.
- $\beta \neq 0$: desplaza en el tiempo la señal.

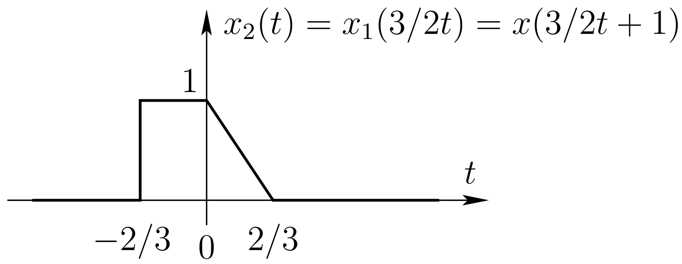
Forma de hacerlo gráficamente de forma sistemática\footnote{Se puede hacer en el orden inverso pero hay que tener cuidado.}:

- Desplazamiento: $x(t) \rightarrow x(t+\beta)$.
- Escalamiento y/o inversión: $x(t+\beta) \rightarrow x(\alpha t+\beta)$.

Ejemplo: $x(t) \rightarrow x\left(\frac{3}{2}t+1\right)$.







Podemos comprobar que en ciertos instantes temporales de interés el resultado es correcto:

- $t = -\frac{2}{3} \Rightarrow x\left(\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\right) = x(-1+1) = x(0)$;
- $t = 0 \Rightarrow x\left(\frac{3}{2}\cdot 0+1\right) = x(1)$;
- $t = \frac{2}{3} \Rightarrow x\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+1\right) = x(1+1) = x(2)$.

4. Señales elementales

Vamos a ver algunos tipos de señales que no sólo aparecen con frecuencia, sino que además sirven como bloques fundamentales (bases) mediante los que formar muchas otras señales más complejas.

4.1 Señales exponenciales y senoidales

4.1.1 Continuas

Señal exponencial compleja continua:

$$x(t) = Ce^{st}, \quad C, s \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

$$C = |C|e^{j\theta}, \tag{4.2}$$

$$s = \sigma + j\omega_0. \tag{4.3}$$

Dependiendo de las constantes C y s, podemos tener señales con distintas características:

- **Señales exponenciales reales**: $C, s \in$, $(s = \sigma)$.

$$x(t) = Ce^{\sigma t}, \quad C, \sigma \in . \tag{4.4}$$

Hay tres posibilidades, según el signo de σ:

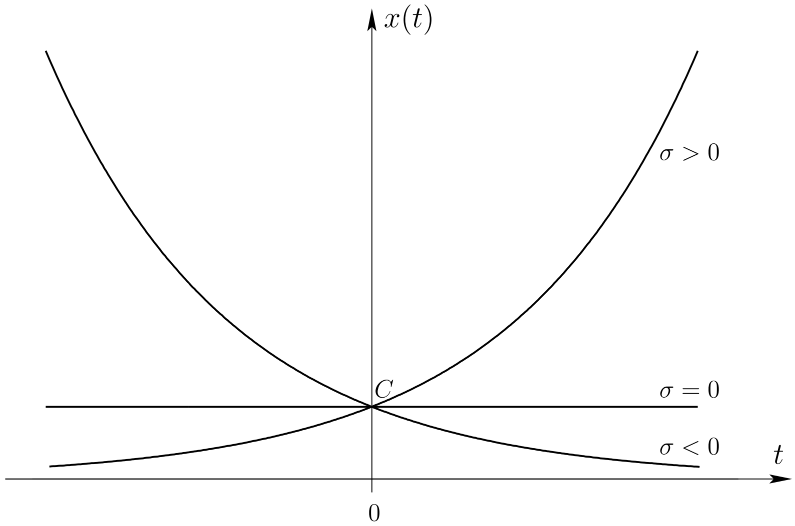
- **Creciente**: $\sigma > 0$.

Ejemplos: reacciones en cadena, población con nacimiento y sin muerte.

- **Decreciente**: $\sigma < 0$.

Ejemplos: circuitos RC, sistemas mecánicos amortiguados.

- **Constante**: $\sigma = 0$.



- **Señales periódicas exponencial compleja y senoidal**:

$$\boxed{s = j\omega_0}, \tag{4.5}$$

puramente imaginaria.

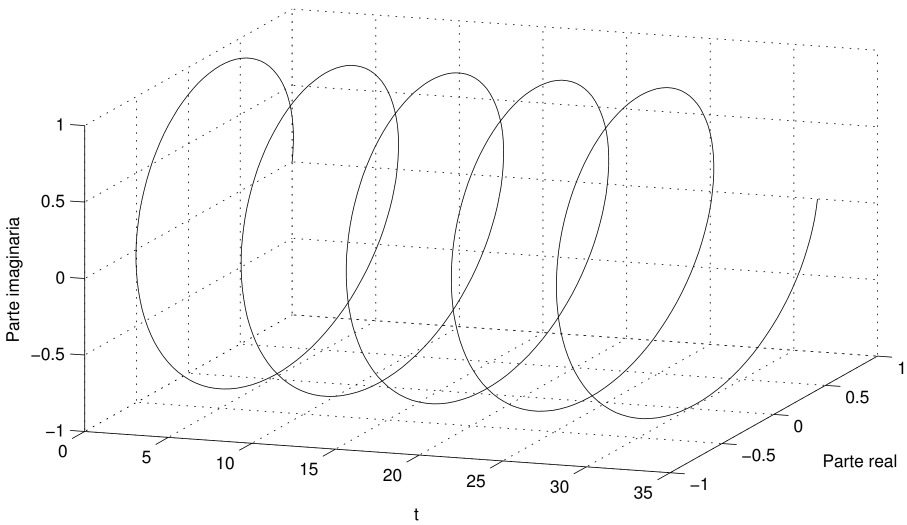
$$x(t) = Ce^{j\omega_0 t}, \quad C \in \mathbb{C},\ \omega_0 \in . \tag{4.6}$$

Podemos expresarlas de la siguiente forma:

$$x(t) = |C|e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} = |C|e^{j(\omega_0 t+\theta)}. \tag{4.7}$$

El caso más sencillo de exponencial compleja es para la constante $C = 1$:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}. \tag{4.8}$$



Son **señales periódicas**, ya que cumplen la ecuación \eqref{eq:periodica_continua}:

$$x(t) = x(t+T),\ \forall t, \tag{4.9}$$

$$|C|e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} = |C|e^{j\theta}e^{j\omega_0(t+T)} = |C|e^{j\theta}e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T} \tag{4.10}$$

$$\Downarrow \tag{4.11}$$

$$e^{j\omega_o T} = 1. \tag{4.12}$$

Si $\omega_0 = 0$, la señal es constante, $x(t) = C$, y es periódica, para cualquier periodo, T.

Si $\omega_0 \neq 0$, para que se cumpla la condición dada por la ecuación \eqref{eq:condicion_exp_periodica}, $\omega_0 T$ debe ser múltiplo de 2π, es decir:

$$\omega_0 T = 2\pi m,\ m \in . \tag{4.13}$$

Según la definición vista de periodo fundamental (valor mínimo del periodo), éste debe cumplir:

$$\omega_0 T = \pm 2\pi, \tag{4.14}$$

por lo que el periodo fundamental de una exponencial compleja continua es:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}. \tag{4.15}$$

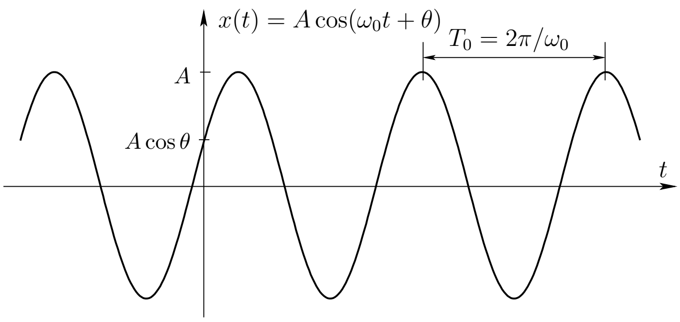
ω_0 es la frecuencia fundamental, en rad/s, de la exponencial compleja periódica, y está relacionada con la frecuencia fundamental en Hertzios:

$$\omega_0 = 2\pi f_0. \tag{4.16}$$

Las exponenciales $e^{j\omega_0 t}$ y $e^{-j\omega_0 t}$ tienen el mismo periodo fundamental, T_0.

Una señal muy relacionada con la exponencial compleja periódica son las señales senoidales (seno y coseno):

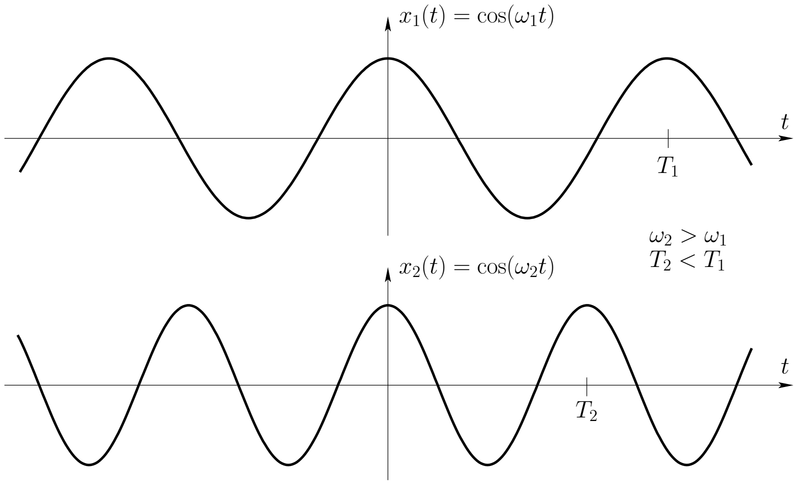
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta). \tag{4.17}$$



En la ecuación \eqref{eq:periodo_frecuencia} se observa que el periodo fundamental y la frecuencia fundamental son inversamente proporcionales. Como se ve en la siguiente gráfica, si se aumenta la frecuencia fundamental, aumenta la velocidad de oscilación y disminuye el periodo fundamental, y viceversa. Además este incremento en la velocidad de oscilación con la frecuencia fundamental es monótono, es decir, siempre que se aumente la frecuencia fundamental de la señal exponencial compleja, aumenta la velocidad de oscilación.

A partir de la relación de Euler:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t), \tag{4.18}$$



las señales senoidales también pueden ponerse en forma de exponencial compleja periódica:

$$A\cos(\omega_0 t+\theta) = \frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 t} = A\Re\{e^{j(\omega_0 t+\theta)}\}, \tag{4.19}$$

$$A\sin(\omega_0 t+\theta) = \frac{A}{2j}e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} - \frac{A}{2j}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 t} = A\Im\{e^{j(\omega_0 t+\theta)}\}. \tag{4.20}$$

Este tipo de señales aparecen en los sistemas físicos con conservación de energía, como por ejemplo, en la respuesta natural de un circuito LC, en el movimiento armónico simple o en la presión acústica de una nota musical.

\vspace*{1em} Las señales periódicas en general y éstas en particular, son ejemplos de señales de potencia (hacemos el cálculo para $x(t) = e^{j\omega_0 t}$):

$$E_0 = \int_0^{T_0} |e^{j\omega_o t}|^2 dt = \int_0^{T_0} 1 dt = T_0. \tag{4.21}$$

Como hay un número infinito de periodos, al integral a todo el tiempo, obtenemos una energía total:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{j\omega_o t}|^2 dt = \infty. \tag{4.22}$$

La potencia media la podemos obtener con la expresión para señales periódicas:

$$P_\infty = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |e^{j\omega_o t}|^2 dt = \frac{E_{T_0}}{T_0} = 1, \tag{4.23}$$

o bien con la expresión general:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |e^{j\omega_o t}|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1. \tag{4.24}$$

\vspace*{1em} Las señales periódicas exponenciales complejas son fundamentales para el análisis de señales y sistemas, pues se pueden emplear como base para muchas otras señales, como veremos en el tema 4.

Para ello es útil considerar **conjuntos de exponenciales complejas relacionadas armónicamente**:

$$\phi_k(t) = e^{j\omega_k t}. \tag{4.25}$$

Todas las exponenciales complejas relacionadas armónicamente tienen la propiedad de son periódicas con un periodo común T_0:\footnote{T_0 no es ahora el periodo fundamental de cada una, sino el periodo común de todas ellas.}

$$x(t) = x(t+T_0) \;\Rightarrow\; e^{j\omega_k T_0} = 1. \tag{4.26}$$

$$\omega_k T_0 = 2\pi k,\; k \in . \tag{4.27}$$

Si definimos ω_0 como\footnote{ω_0 tampoco es ahora la frecuencia fundamental de cada una, que será ω_k.}:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \tag{4.28}$$

la frecuencia fundamental de cada una de las exponenciales complejas relacionadas armónicamente es:

$$\omega_k = k\omega_0. \tag{4.29}$$

Sus frecuencias fundamentales, ω_k, son múltiplos enteros de una sola frecuencia, $\omega_0 > 0$.

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}. \tag{4.30}$$

El periodo fundamental de cada exponencial compleja relacionada armónicamente será:

$$\frac{2\pi}{|\omega_k|} = \frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|},\; k \in, \tag{4.31}$$

por lo que, como ya hemos dicho, $\phi_k(t)$ es también periódica con periodo T_0 (múltiplo del periodo fundamental).

Además dado que $k \in$, hay infinitas exponenciales complejas relacionadas armónicamente con un cierto periodo T_0.

- **Señales exponenciales complejas generales**:

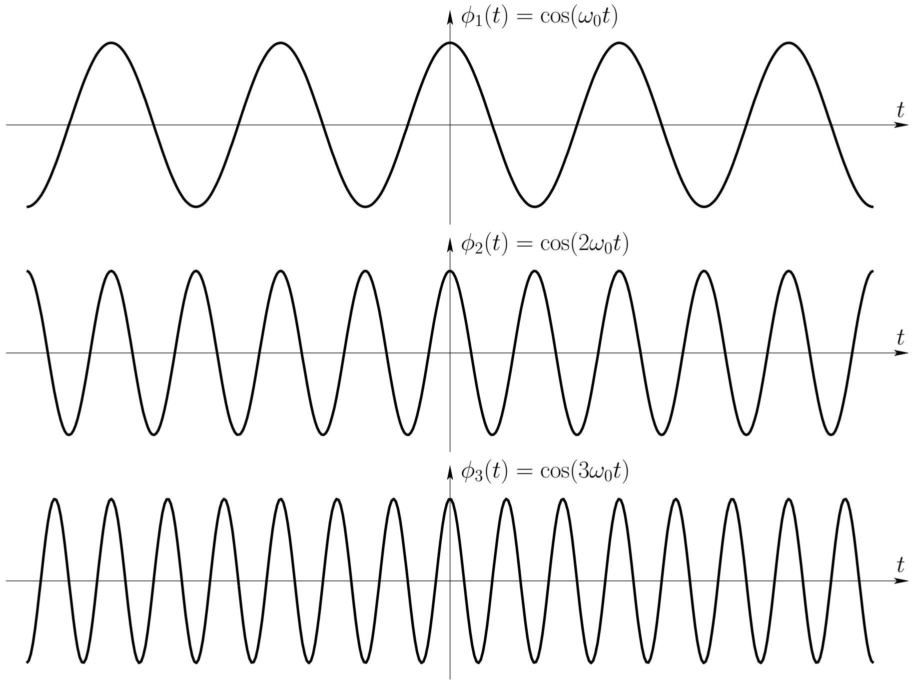
Tienen la forma más general:

$$x(t) = Ce^{st}, \quad C, s \in \mathbb{C}, \tag{4.32}$$

donde s está dado en forma rectangular y C en forma polar:

$$C = |C|e^{j\theta}, \tag{4.33}$$

$$s = \sigma + j\omega_0. \tag{4.34}$$



Podemos interpretarlas a partir de los dos casos anteriores:

$$x(t) = Ce^{st} = |C|e^{j\theta}e^{(\sigma+j\omega_0)t} = |C|e^{\sigma t}e^{j(\omega_o t+\theta)}, \tag{4.35}$$

y a partir de la ecuación de Euler:

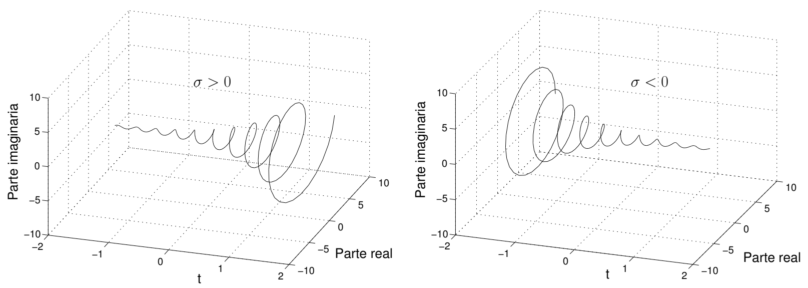
$$x(t) = |C|e^{\sigma t}\cos(\omega_o t+\theta) + j|C|e^{\sigma t}\sin(\omega_o t+\theta). \tag{4.36}$$

Corresponden a señales oscilantes crecientes o decrecientes, con envolvente:

$$\pm|C|e^{\sigma t}. \tag{4.37}$$

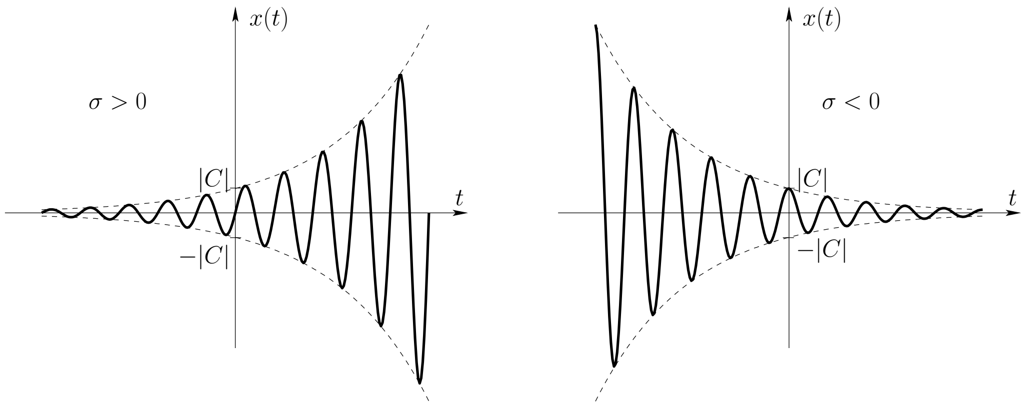
Según sea el signo de σ, tendremos:

- $\sigma = 0$: exponencial compleja periódica (partes real e imaginaria senoidales periódicas).
- $\sigma > 0$: exponencial compleja periódica por exponencial creciente\footnote{El resultado ya no es periódico} (partes real e imaginaria senoidal por exponencial creciente).
- $\sigma < 0$: exponencial compleja periódica por exponencial decreciente (partes real e imaginaria senoidal por exponencial decreciente).



En el caso real:

Ejemplos de este tipo de señales para el caso amortiguado ($\sigma < 0$) aparecen por ejemplo en circuitos RLC o en sistemas mecánicos con fuerzas de amortiguamiento y restauración.



4.1.2 Discretas

Señal exponencial compleja discreta:

$$x[n] = Cz^n, \quad C, z \in \mathbb{C}. \tag{4.38}$$

$$C = |C|e^{j\theta}, \tag{4.39}$$

$$z = |z|e^{j\Omega_0}. \tag{4.40}$$

Para que sea una expresión más análoga al caso continuo también se puede poner de la siguiente forma, aunque es menos habitual:

$$x[n] = Ce^{\beta n}, \quad C, \beta \in \mathbb{C}, \tag{4.41}$$

donde

$$z = e^{\beta}. \tag{4.42}$$

Dependiendo de las constantes C y z, podemos tener señales con distintas características:

- **Señales exponenciales reales**: $C, z = r \in$.

Según el valor de r:

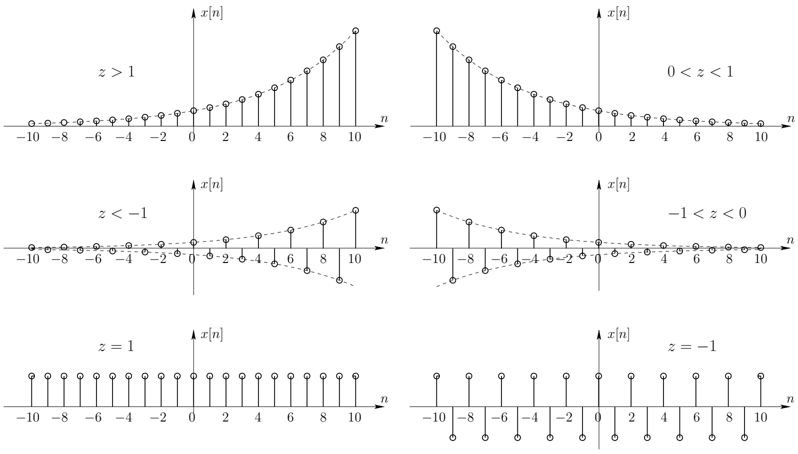
- $|r| > 1$: crece exponencialmente.
- $|r| < 1$: decrece exponencialmente.
- $r > 0$: valores del mismo signo.
- $r < 0$: valores con signo alterno.
- $r = 1$: valor constante.
- $r = -1$: valor alterno $\pm C$.

- **Señales senoidales**: $|z| = 1$.

$$x[n] = Ce^{j\Omega_0 n}, \quad C \in \mathbb{C},\ \Omega_0 \in . \tag{4.43}$$

Podemos expresarla de la siguiente forma:

$$x[n] = |C|e^{j\theta}e^{j\Omega_0 n} = |C|e^{j(\Omega_0 n + \theta)}. \tag{4.44}$$



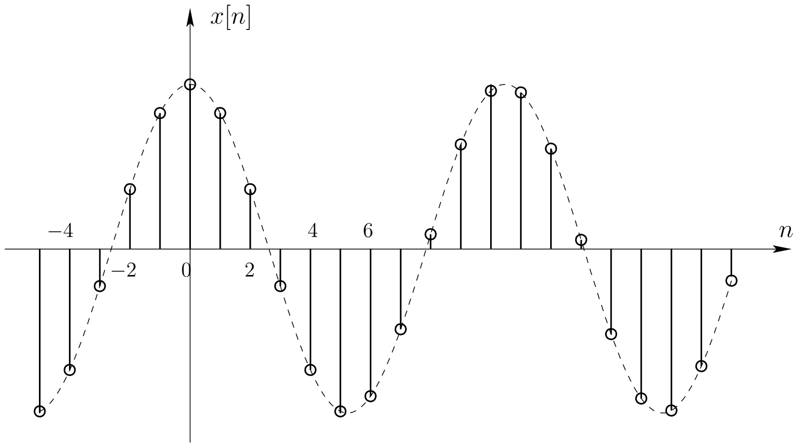
El caso más sencillo corresponde a $C = 1$ (ecuación de Euler):

$$e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + j\sin(\Omega_0 n). \tag{4.45}$$

al igual que en el caso continuo, está muy relacionada con las señales senoidales:

$$x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j\Omega_0 n}. \tag{4.46}$$

Al igual que en el caso continuo, son **señales de potencia** (E_∞ infinita, P_∞ finita), pero en este caso no son necesariamente periódicas, como veremos en la sección \ref{periodicidad_exp_discretas}.



- **Señales exponenciales complejas generales**:

Tienen la forma más general:

$$x[n] = Cz^n, \quad C, z \in \mathbb{C}, \tag{4.47}$$

donde C y z están dados en forma polar:

$$C = |C|e^{j\theta}, \tag{4.48}$$

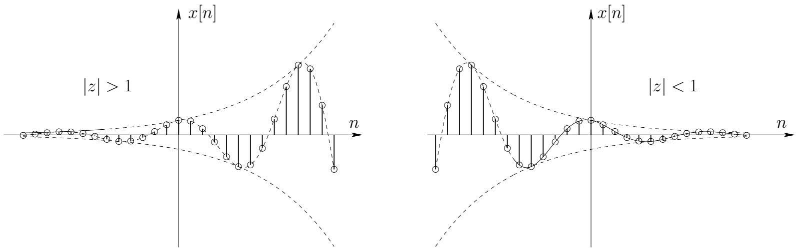
$$z = |z|e^{j\Omega_0}. \tag{4.49}$$

Podemos interpretarlas a partir de los dos casos anteriores, expresando:

$$x[n] = Cz^n = |C||z|^n e^{j(\Omega_0 n+\theta)} = |C||z|^n \cos(\Omega_0 n+\theta) + j|C||z|^n \sin(\Omega_0 n+\theta). \tag{4.50}$$

Según sea $|z|$ tenemos distintos casos:

- $|z| = 1$: señal senoidal (partes real e imaginaria senoidales).
- $|z| > 1$: señal senoidal por exponencial creciente.
- $|z| < 1$: señal senoidal por exponencial decreciente.



4.1.3 Propiedades de periodicidad de las exponenciales discretas

\label{periodicidad_exp_discretas} Para la señal periódica exponencial compleja continua hemos visto que tiene las siguientes propiedades:

- $e^{j\omega_0 t}$ es periódica, $\forall\ \omega_0$.
- Exponenciales complejas distintas para distintos valores de ω_0. Cuanto mayor sea ω_0, mayor será la velocidad de oscilación de la señal.
- Existen infinitas exponenciales complejas relacionadas armónicamente con un cierto periodo dado T_0.

Vamos a ver que estas propiedades son distintas para el caso de las exponenciales complejas senoidales discretas, lo que hará que haya que tener cierto cuidado al manejarlas.

Estudiaremos, sin pérdida de generalidad, las propiedades de $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$.

- **Periodicidad**:

Aunque una senoidal discreta oscile, y tenga envolvente periódica, no tiene por qué ser necesariamente periódica, pues dependerá de donde estén colocadas las muestras. Sabemos que para que sea periódica se debe cumplir:

$$x[n] = x[n+N], \tag{4.51}$$

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 (n+N)} \Rightarrow e^{j\Omega_0 N} = 1, \tag{4.52}$$

que se cumple sólo en el caso de que se cumpla la siguiente relación:

$$\Omega_0 N = 2\pi m,\ m \in . \tag{4.53}$$

Por lo tanto, **para que una señal senoidal discreta sea periódica**, debe cumplirse la siguiente condición:

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}, \tag{4.54}$$

o lo que es lo mismo, que esta expresión sea racional.

En este caso, podemos obtener el **periodo fundamental**, N_0, que será el mínimo valor del periodo:

$$N_0 = \min\left\{\frac{2\pi}{\Omega_0}m\right\},\ m \in . \tag{4.55}$$

La **frecuencia fundamental** ahora no será Ω_0, como en el caso continuo, sino:

$$\frac{\Omega_0}{m} = \frac{2\pi}{N_0}. \tag{4.56}$$

Veamos algunos ejemplos:\

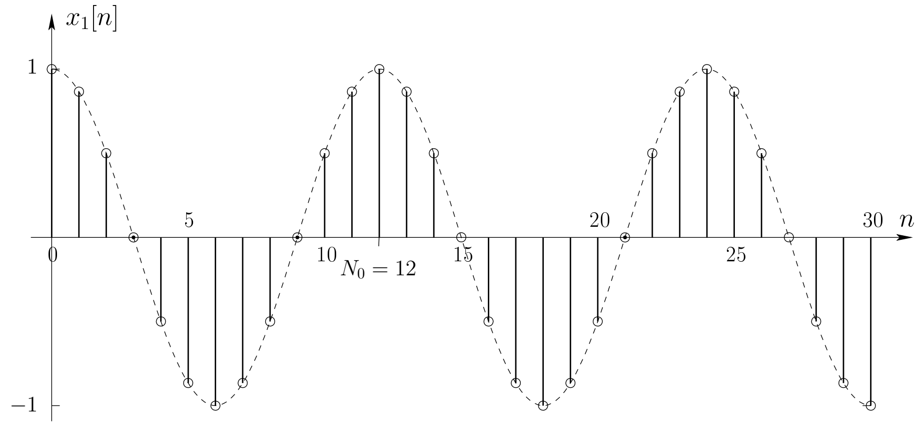
Ejemplo 1: $x_1[n] = \cos(2\pi n/12), \quad \Omega_0 = 2\pi/12 = \pi/6.$

$x_1[n]$ se puede ver como muestras de $x_1(t) = \cos(2\pi t/12)$ cada $t = 1s$. Esta señal tiene frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi/6$ rad/s y periodo fundamental $T_0 = 12s$.

El periodo fundamental será:

$$N_0 = \min\left\{\frac{2\pi}{\Omega_0}m\right\} = \min\left\{\frac{2\pi}{\pi/6}m\right\} = \min\{12m\},\ m \in \overset{m=1}{\Longrightarrow} N_0 = 12. \tag{4.57}$$

La señal $x_1[n]$ se repite cada 12 puntos, o lo que es lo mismo, cada periodo de la envolvente.



Ejemplo 2: $x_2[n] = \cos(8\pi n/31), \quad \Omega_0 = 8\pi/31.$

$x_2[n]$ se puede ver como muestras de $x_2(t) = \cos(8\pi t/31)$ cada $t = 1s$. Esta señal tiene frecuencia fundamental $\omega_0 = 8\pi/31$ rad/s y periodo fundamental $T_0 = 31/4s$.

El periodo fundamental será:

$$N_0 = \min\left\{\frac{2\pi}{\Omega_0}m\right\} = \min\left\{\frac{2\pi}{8\pi/31}m\right\} = \min\left\{\frac{31}{4}m\right\},\ m \in \overset{m=4}{\Longrightarrow} N_0 = 31. \tag{4.58}$$

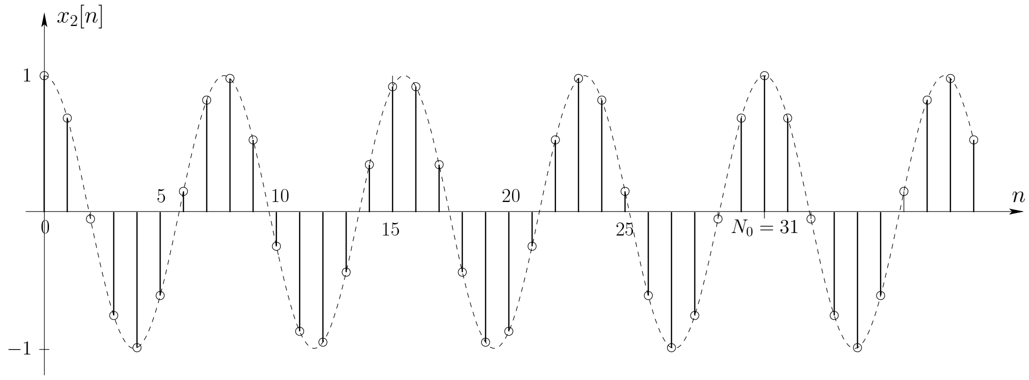
La señal $x_1[n]$ se repite cada 31 puntos, o lo que es lo mismo, cada cuatro periodos de la envolvente.

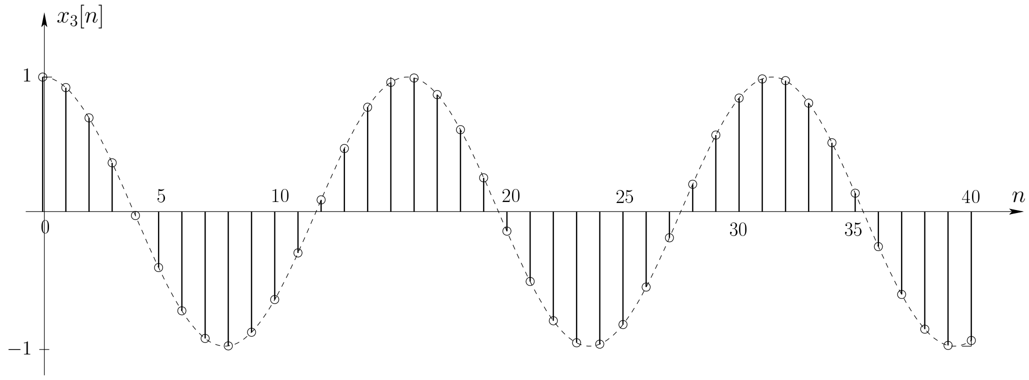
Ejemplo 3: $x_3[n] = \cos(2n/5), \quad \Omega_0 = 2/5.$

$x_3[n]$ se puede ver como muestras de $x_3(t) = \cos(2t/5)$ cada $t = 1s$. Esta señal tiene frecuencia fundamental $\omega_0 = 2/5$ rad/s y periodo fundamental $T_0 = 5\pi s$.

Tratamos de calcular el periodo fundamental de la señal discreta:

$$N_0 = \min\left\{\frac{2\pi}{\Omega_0}m\right\} = \min\left\{\frac{2\pi}{2/5}m\right\} = \min\{5\pi m\},\ m \in \Rightarrow \text{ No periódica.} \tag{4.59}$$





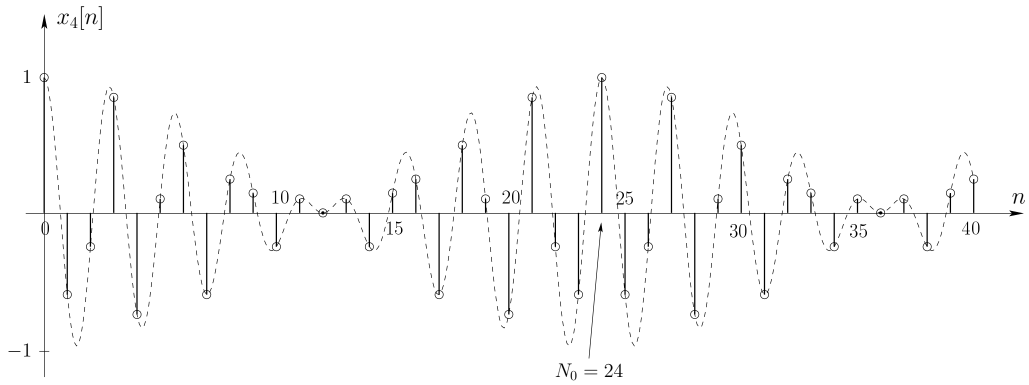
Aunque la envolvente, $x_3(t)$, es una señal periódica, la señal discreta, $x_3[n]$, no lo es.

Ejemplo 4: Consideremos ahora la suma de dos exponenciales complejas periódicas:

$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}$.

El primer término tiene periodo fundamental $N_1 = 3$, mientras que para el segundo $N_2 = 8$. La suma de ambos términos es periódica y tendrá como **periodo el mínimo común múltiplo de ambos**.

$$N_0 = \text{mcm}\{N_1, N_2\} = 24. \tag{4.60}$$



Se puede comprobar que **para señales continuas, una combinación lineal de señales periódicas no tiene por qué ser periódica**, ya que no siempre existe el mínimo común múltiplo de números reales. Para el caso discreto la **combinación lineal de señales periódicas siempre es periódica**, ya que para números naturales siempre existe su mínimo común múltiplo.

- **Ambigüedad**:

$$e^{j(\Omega_0+2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n}\underbrace{e^{j2\pi n}}_{1} = e^{j\Omega_0 n}. \tag{4.61}$$

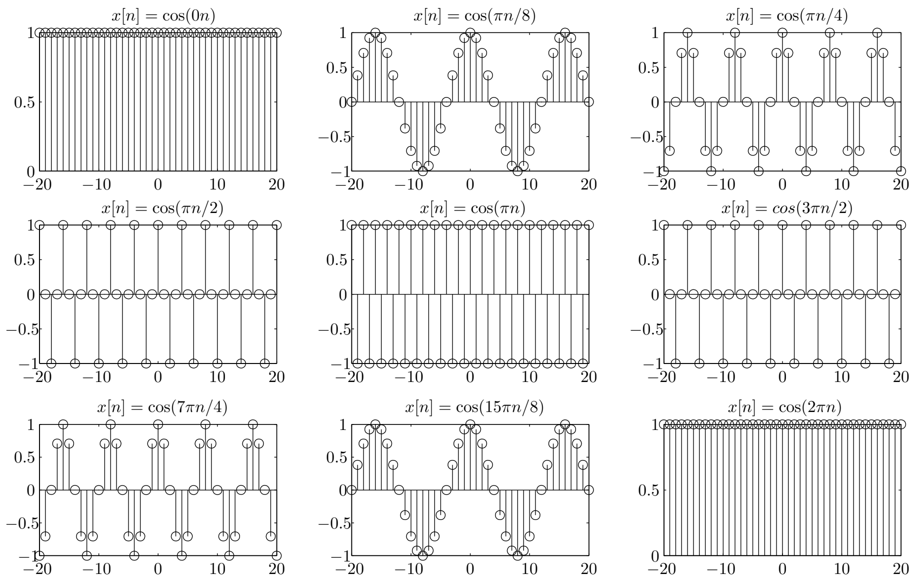
Una exponencial compleja discreta de frecuencia Ω_0 es la misma que una de frecuencia $\Omega_0 + 2\pi$, ..., $\Omega_0 + 2\pi k,\ k \in$.

Al contrario del caso continuo, en el cual todas las exponenciales complejas son distintas para distintos valores de ω_0, en el caso discreto **no son todas distintas**. Sólo es necesario considerar un intervalo para la frecuencia fundamental de longitud 2π. Por conveniencia se usa:

$$0 \leq \Omega_0 < 2\pi,\ \text{ó}\ -\pi \leq \Omega_0 < \pi. \tag{4.62}$$

Debido a esta periodicidad en la frecuencia fundamental, no hay un incremento continuo de la velocidad de oscilación con la frecuencia fundamental:

$$\begin{cases} 0 < \Omega_0 < \pi & \Rightarrow \text{Incremento de velocidad de oscilación,} \\ \pi < \Omega_0 < 2\pi & \Rightarrow \text{Disminución de velocidad de oscilación.} \end{cases} \tag{4.63}$$



Las exponenciales de baja frecuencia son las que tienen frecuencias cercanas a 0 ($2\pi k,\ k \in$).\ Las exponenciales de alta frecuencia son las que tienen frecuencias cercanas a π ($\pi(2k+1),\ k \in$).

En particular:

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n, \tag{4.64}$$

cambia de signo en cada punto. Es la señal discreta de mayor frecuencia posible.

- **Completitud**: está relacionado con las exponenciales complejas relacionadas armónicamente.

Al igual que para el caso de señales continuas tiene interés considerar **exponenciales complejas discretas periódicas relacionadas armónicamente** (con periodo común N):

$$\phi_k[n] = e^{j\Omega_k n}. \tag{4.65}$$

Todas las exponenciales complejas relacionadas armónicamente tienen la propiedad de que son periódicas con un periodo común N:\footnote{Siguiente la notación del Oppenheim, ahora usamos para el periodo común la notación N y no N_0.}

$$x[n] = x[n+N]\ \Rightarrow\ e^{j\Omega_k N} = 1. \tag{4.66}$$

$$\Omega_k N = 2\pi k,\ k \in . \tag{4.67}$$

Si definimos Ω_0 como\footnote{Ω_0 no es la frecuencia fundamental de cada una, que será Ω_k.}:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}, \tag{4.68}$$

la frecuencia fundamental de cada una de las exponenciales complejas relacionadas armónicamente será:

$$\Omega_k = k\Omega_0 = k\frac{2\pi}{N}. \tag{4.69}$$

Sus frecuencias fundamentales, Ω_k, son múltiplos enteros de una sola frecuencia, $\Omega_0 > 0$.

$$\phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}. \tag{4.70}$$

Pues bien, en el caso continuo todas las exponenciales complejas relacionadas armónicamente con un cierto periodo T_0 son distintas, y hay infinitas:

$$\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{4.71}$$

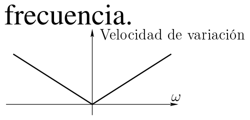
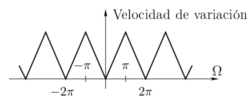
Para el caso discreto esto no es así, ya que:

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\underbrace{e^{j2\pi n}}_{1} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \phi_k[n]. \tag{4.72}$$

Por lo tanto, **sólo existen** N **exponenciales complejas discretas relacionadas armónicamente de periodo** N.

$$\phi_0[n] = \phi_N[n],\ \phi_1[n] = \phi_{N+1}[n],\ \phi_{-1}[n] = \phi_{N-1}[n],\ ... \tag{4.73}$$

En la tabla 1 se muestra un resumen comparativo de las propiedades de las exponenciales complejas senoidales continuas y discretas.

	Continua $t \in \mathbb{R},\ \omega_0 (rad/s)$	**Discreta** $n \in \mathbb{Z},\ \Omega_0 (rad/muestra)$
Periodicidad $(\mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0})$.	Siempre son periódicas. No todas las exponenciales complejas son periódicas. **Debe cumplirse:** $\Omega_0 N = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$. N_0 es el mínimo N que cumple esa relación.	
Ambigüedad	Son todas distintas. $e^{j(\omega_0+2\pi k)t} = e^{j\omega_0 t}, e^{j2\pi kt} \neq e^{j\omega_0 t}$.	Dos exponenciales son iguales si Ω_0 varía en un múltiplo entero de 2π. $e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n}, e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n}$.
Combinación lineal de señales periódicas	No siempre periódica. Ej.: $T_1 = 1,\ T_2 = \sqrt{2} \Rightarrow noexiste \mathrm{T}_0$ con $n_1 T_1 = n_2 T_2$.	Siempre periódica. Si N_1, N_2 son periodos $\Rightarrow \mathrm{N}_0 = \mathrm{mcm}(N_1, N_2)$ y $N_0 = n_1 N_1 = n_2 N_2$.
Completitud	Infinitas exponenciales complejas armónicas de periodo T_0. $\phi_k(t) = e^{j\omega_k t} = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$.	Sólo hay N exponenciales complejas armónicas de periodo N. $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$. $\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \phi_k[n]$.
Velocidad de variación	Aumenta linealmente con la frecuencia. 	Frecuencias bajas: cercanas a $2\pi k$. **Frecuencias altas: cercanas a $\pi(2k+1)$.** 

4.2 Señales impulso unitario y escalón unitario

Veremos a continuación otras señales básicas como son el impulso unitario u el escalón unitario, tanto continuo como discreto. Estas señales serán fundamentales para la caracterización de señales y sistemas que veremos en el tema 3. Comenzaremos por las señales discretas, que son más sencillas en este caso que las continuas.

4.2.1 Discretas

- **Impulso unitario**\footnote{También llamado delta de Kronecker, especialmente en matemáticas.}: $\delta[n]$

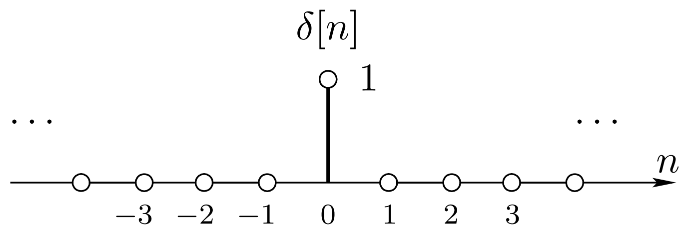
Se define como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \tag{4.74}$$

Es una señal que vale 1 exclusivamente cuando su argumento es cero y cero en caso contrario.

Cuestión: £Cómo serán las señales $\delta[n-3]$, $\delta[n+1]$ y $\delta[n-n_0]$?

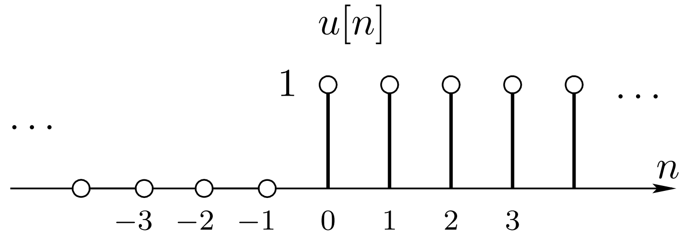
- **Escalón unitario**: $u[n]$.



Se define:

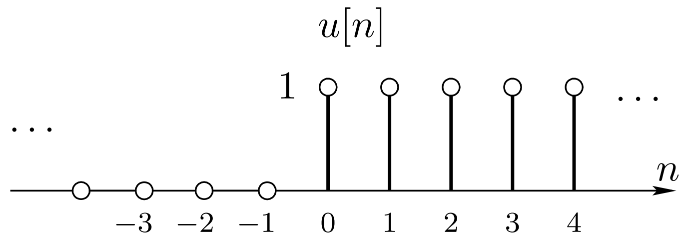
$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases} \tag{4.75}$$

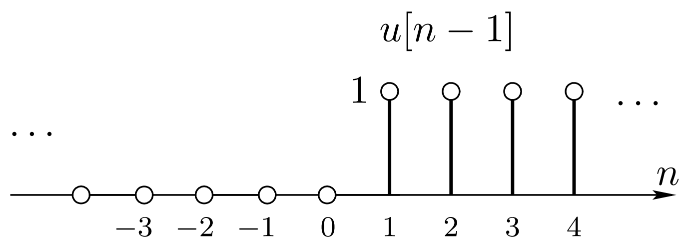
Es una señal que vale 1 cuando su argumento es mayor o igual que cero y cero en caso contrario.



Se puede ver que ambas señales están relacionadas. El impulso unitario discreto es la primera diferencia del escalón unitario discreto:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \tag{4.76}$$



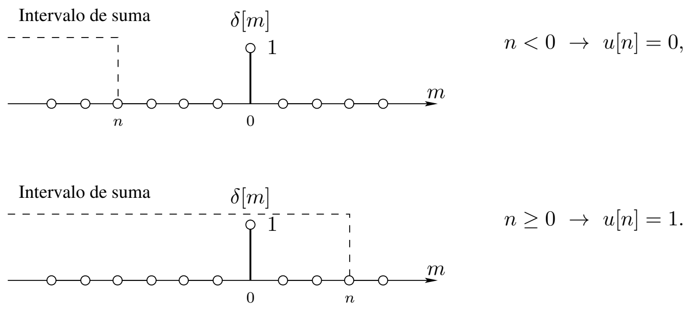


Por su parte, el escalón unitario es la sumación del impulso unitario:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]. \tag{4.77}$$

Haciendo un cambio de variable, esta expresión se transforma en otra equivalente que será útil en el tema 3:

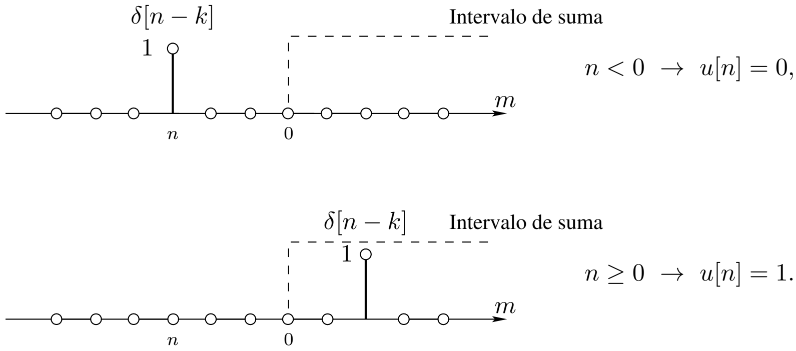
$$\text{c.v.:} \;\; k = n - m \;\Rightarrow\; m = n - k, \tag{4.78}$$



$$u[n] = \sum_{k=\infty}^{0} \delta[n-k], \tag{4.79}$$

y colocando el extremo menor del sumatorio abajo, como es norma habitual:

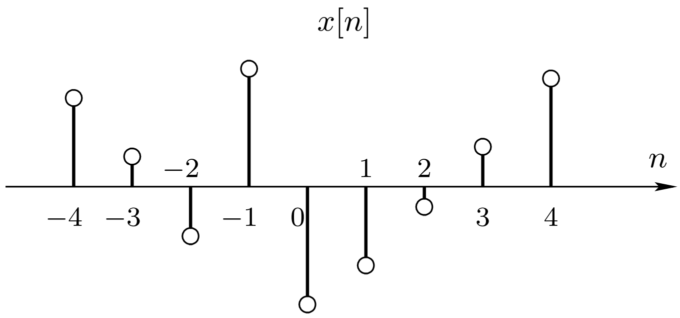
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \tag{4.80}$$



La última expresión es equivalente a la suma de impulsos retardados (usado en el tema 3):

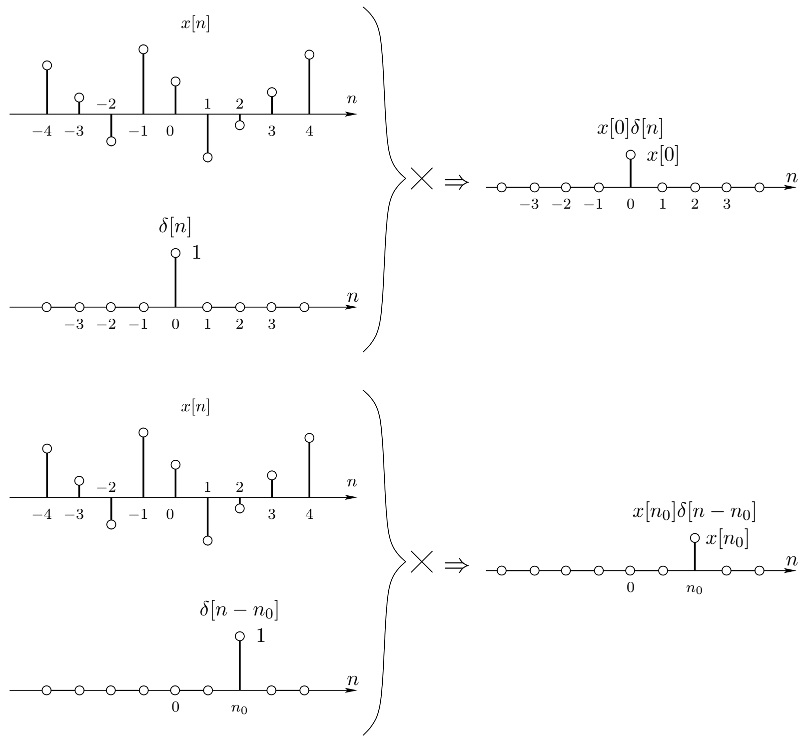
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = ... + \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + ... \tag{4.81}$$

El impulso unitario discreto se puede usar para obtener muestras de una señal discreta:



Por ejemplo, en $n = 0$: \label{eq:prop_muestro_delta_discreta}

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]. \tag{4.82}$$



Para otro $n \neq 0$, desplazando la delta a n_0:

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]. \tag{4.83}$$

A la ecuación \eqref{eq:prop_muestro_delta_discreta} se la denomina **propiedad de muestreo del impulso unitario discreto**.

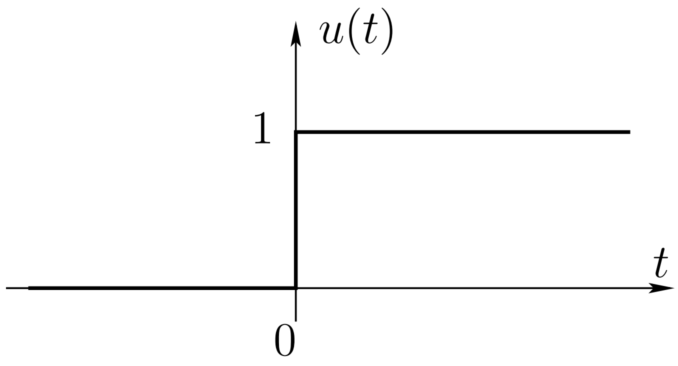
4.2.2 Continuas

Empezamos en este caso definiendo el escalón unitario.

- **Escalón unitario**: $u(t)$.

Se define de forma similar al escalón unitario discreto:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \tag{4.84}$$



Se puede ver que es discontinuo en $t = 0$, por lo que la definición del impulso unitario no será tan sencilla como en el caso discreto, si bien su relación sí será su análoga, como veremos a continuación.

- **Impulso unitario**: $\delta(t)$.

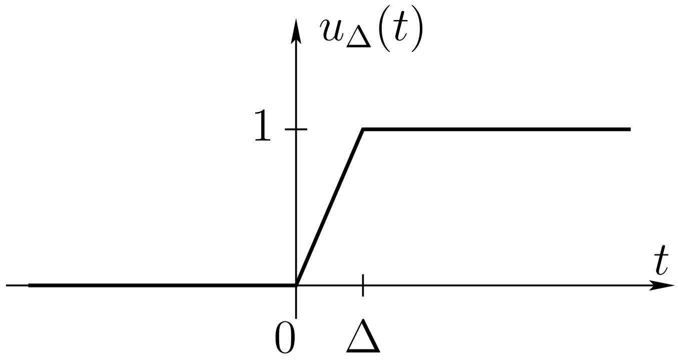
Partimos de relaciones con el escalón unitario equivalentes al caso discreto, es decir, en vez de sumación, integración, y en lugar de primera diferencia, derivación:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau, \tag{4.85}$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \tag{4.86}$$

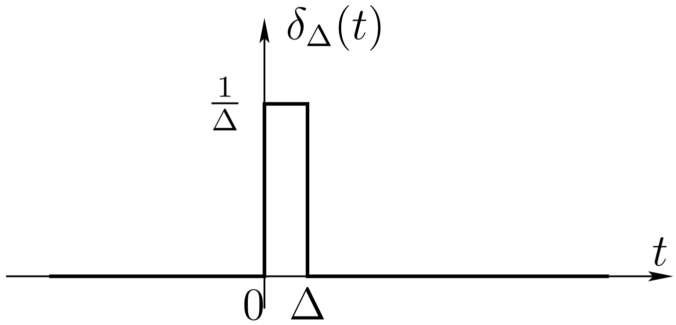
La última expresión presenta problemas formales, pues $u(t)$ no es continua en $t = 0$, por lo que formalmente no es derivable.

Consideramos una aproximación al escalón unitario que sí es derivable, $u_\Delta(t)$, ya que pasa de 0 a 1 con una pendiente alta, pero no infinita.



Su derivada, denotada como $\delta_\Delta(t)$, ya no presenta problemas formales:

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}. \tag{4.87}$$



Se observa que $\delta_\Delta(t)$ es un pulso corto de duración Δ y altura $1/\Delta$, y área 1, independientemente del valor de Δ.

En el límite:

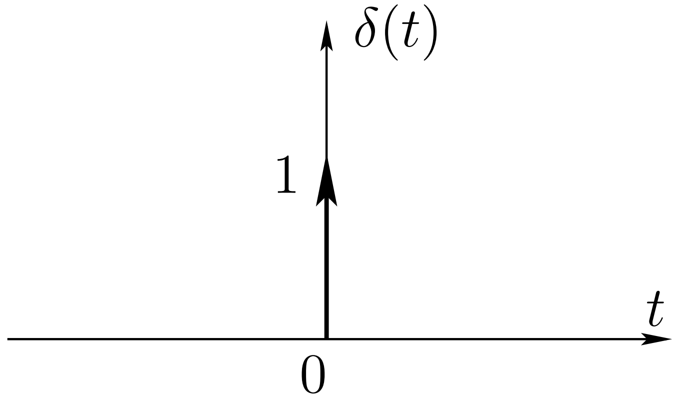
$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t), \tag{4.88}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t), \tag{4.89}$$

$\delta(t)$ es una idealización de $\delta_\Delta(t)$, cuando su anchura se hace insignificante y su altura se hace infinito, pero su área es siempre unitaria.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{4.90}$$

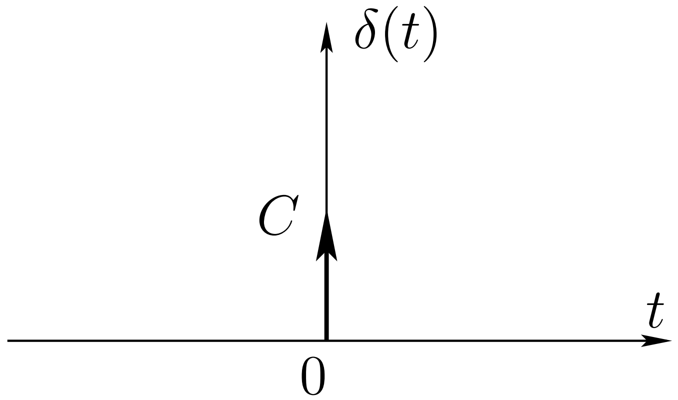
Se representa como una flecha colocada en $t = 0$, para indicar que su área está concentrada en torno a este instante. **La altura de la flecha, así como la etiqueta colocada junto a la misma indican su área y no su altura**, ya que $\delta(t)$ **es una señal de área**.



Un impulso escalado, $C\delta(t)$, tendrá área C:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C\delta(t)dt = C, \tag{4.91}$$

$$\int_{-\infty}^{t} C\delta(\tau)d\tau = Cu(t). \tag{4.92}$$

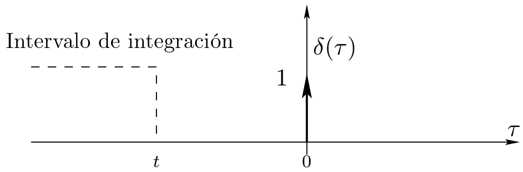


Podemos realizar las mismas interpretaciones gráficas que en el caso discreto, haciendo los cambios oportunos del mundo discreto al continuo. Así la ecuación \eqref{eq:escalon_continuo}:

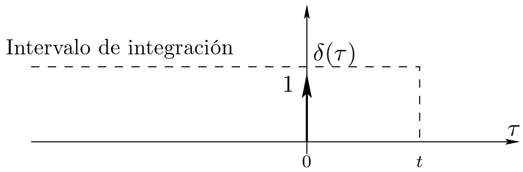
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau, \tag{4.93}$$

Haciendo el cambio de variable $\sigma = t - \tau \ to \ \tau = t - \sigma$:

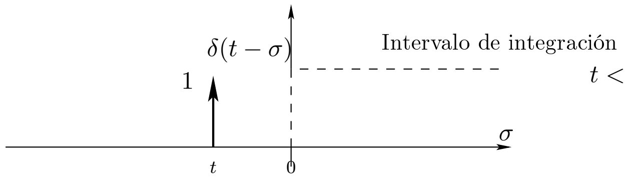
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t-\sigma)(-d\sigma) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)d\sigma. \tag{4.94}$$



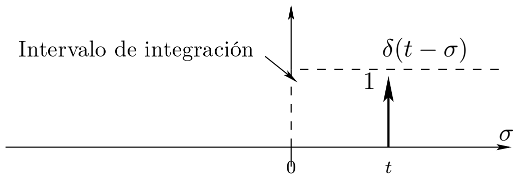
$t < 0 \ \rightarrow \ u(t) = 0,$



$t > 0 \ \rightarrow \ u(t) = 1.$



$t < 0 \ \rightarrow \ u(t) = 0,$



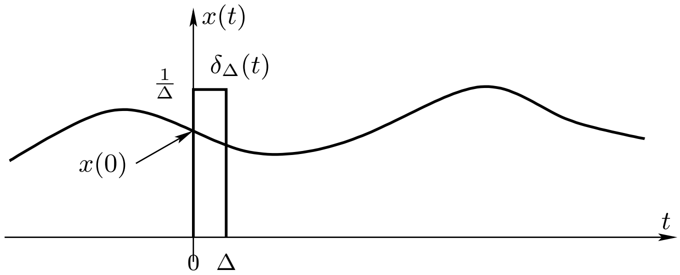
$t > 0 \ \rightarrow \ u(t) = 1.$

Teniendo en cuenta que el impulso unitario es una señal par:

$$\delta(t-\sigma) = \delta(\sigma - t), \tag{4.95}$$

Al igual que ocurría en el caso discreto, el impulso unitario continuo se puede emplear para obtener muestras de una señal continua (esto será muy importante en los temas 3 y 7).

Lo vemos mediante la aproximación $\delta_\Delta(t)$:



$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t). \tag{4.96}$$

Si $\Delta \ll \Rightarrow \ x(t)$ es aproximadamente constante en $0 \leq t \leq \Delta$:

$$x(t)\delta_\Delta(t) \simeq x(0)\delta_\Delta(t). \tag{4.97}$$

En el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$: \label{eq:prop_muestro_delta_continua}

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t). \tag{4.98}$$

De forma similar, para un impulso unitario desplazado:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0). \tag{4.99}$$

A la ecuación \eqref{eq:prop_muestro_delta_continua} se la denomina **propiedad de muestreo del impulso unitario continuo**.

5. Propiedades básicas de los sistemas

Analizamos las propiedades más importantes que pueden tener los sistemas, tanto continuos como discretos[1].

Antes de empezar a ver las propiedades de los sistemas, es conveniente indicar la **forma de proceder** para demostrar que un sistema tiene o no una propiedad[2]:

- Si queremos **demostrar que un sistema posee una cierta propiedad**, debemos hacerlo **a partir de la definición** y debe cumplirse para todos los elementos que aparezcan en la definición (señales, instantes de tiempo, desplazamientos, constantes, ...).
- Si queremos **demostrar que un sistema no posee una cierta propiedad**, es suficiente con que no se cumpla la definición para una determinada señal de entrada, o en un determinado instante de tiempo, o valor de las constantes involucradas, ... Por tanto, en este caso la demostración se puede realizar de dos formas alternativas:
  1. **A partir de la definición** como en el caso afirmativo, pero llegando a la conclusión de que en general no se cumple la definición.
  2. **Mediante un contraejemplo** concreto que demuestre que se incumple la definición.

5.1 Sistemas con y sin memoria

Sistema sin memoria
La **salida** en cada instante de tiempo (t_0, n_0) depende sólo de la **entrada** en ese mismo instante de tiempo (t_0, n_0).

Sistema con memoria
La **salida** en cada instante de tiempo depende de la **entrada** en un cierto instante de tiempo distinto (también puede depender del instante actual).

El concepto de memoria corresponde a cualquier mecanismo que permite almacenar (recordar) información de entradas pasadas (o futuras).

[1] Sería fácil encontrar un contraejemplo, como $x_1(t) = u(t)$, y $t_0 = 1$.

[2] Para **demostrar** que un sistema posee o no una propiedad no es suficiente con enunciar la definición y sin demostrar cosa alguna, llegar a una determinada conclusión.

Por ejemplo, en el acumulador:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]. \tag{5.1}$$

En los sistemas físicos: memoria $\Rightarrow$ almacenamiento de energía.

- Condensador: almacenamiento de carga eléctrica.
- Automóvil: almacenamiento de energía cinética.

En los sistemas digitales: memoria $\Rightarrow$ almacenamiento de valores en registros.

Nota
Aunque el concepto de **memoria** sugiere recordar el pasado, no es necesario; también se puede referir al futuro. Esto puede no parecer real, pero puede ocurrir, por ejemplo, si la variable independiente es espacial (en imagen). En este caso el valor de salida en un pixel puede estar relacionado con el valor de entrada en los vecinos **pasados** y **futuros**.

$$y[n1, n2] = \sum_{p=-N}^{N} \sum_{q=-N}^{N} x[n1-p, n2-q]. \tag{5.2}$$

5.2 Causalidad

Sistema causal
Hay varias definiciones equivalentes:

1. la **salida** en cualquier instante de tiempo depende sólo de valores de la **entrada** en el momento presente y en el pasado.

   $$y(t_0) \xrightarrow{\text{depende de}} x(t),\ t \leq t_0,\ \forall t_0. \tag{5.3}$$

2. Son sistemas **no anticipativos**: si dos entradas son idénticas hasta cierto instante, las salidas correspondientes deben ser también iguales hasta ese instante.

   $$\text{Si } x_1(t) = x_2(t),\ \forall t \leq t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t),\ \forall t \leq t_0, \forall t_0. \tag{5.4}$$

Sistema anticausal

1. la **salida** en cualquier instante de tiempo depende sólo de valores de la **entrada** en momentos futuros.

   $$y(t_0) \xrightarrow{\text{depende de}} x(t),\ t > t_0,\ \forall t_0. \tag{5.5}$$

2. Son sistemas estrictamente anticipativos: si dos entradas son idénticas para tiempos posteriores a un cierto instante, las salidas correspondientes deben ser también iguales para tiempos posteriores a ese mismo instante.

   $$\text{Si } x_1(t) = x_2(t),\ \forall t > t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t),\ \forall t > t_0, \forall t_0. \tag{5.6}$$

Sistema no causal
Un sistema que no es causal ni anticausal.

Ejemplos:

- Circuito RC $\Rightarrow$ Causal.

La salida, $v_c(t)$, depende sólo de valores presentes y pasados de $v_s(t)$.

- Automóvil $\Rightarrow$ Causal.

No anticipa acciones futuras del conductor.

5.3 Invertibilidad: sistemas inversos

Sistema invertible
Hay varias definiciones equivalentes:

1. Un sistema es invertible si distintas entradas producen distintas salidas.

   $$\text{Si } x_1(t) \neq x_2(t) \Rightarrow y_1(t) \neq y_2(t),\ \forall x_1(t), x_2(t); \forall t. \tag{5.7}$$

2. Un sistema es invertible cuando existe un sistema inverso, T^{-1} tal que cuando la entrada al mismo es $y(t)$, su salida es $x(t)$.

   $$\exists\, T^{-1} \ /\ \text{si } y(t) = T\{x(t)\} \Rightarrow x(t) = T^{-1}\{y(t)\},\ \forall t. \tag{5.8}$$

3. Un sistema es invertible cuando colocado en cascada con el sistema original, produce una salida $w(t)$ igual a la entrada $x(t)$ del primer sistema.
   El sistema completo (en línea punteada en el dibujo) es el **sistema identidad**.

5.4 Estabilidad

Un **sistema** es **estable** si entradas acotadas producen salidas acotadas.

$$\text{Si } |x(t)| < B_x,\ \forall t \ \Rightarrow\ |y(t)| < B_y,\ \forall t;\ B_x, B_y \in^{+}\ . \tag{5.9}$$

Ejemplos:

- Sistemas físicos con disipación de energía: péndulo, circuito RC, automóvil con rozamiento. Estables.
- Ecuación de cuenta bancaria, Inestable.

Salida crece indefinidamente aunque entrada esté acotada.

- Acumulador: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$, Inestable.

Si, por ejemplo, $x[n] = u[n],\ |x[n]| \leq 1, \forall t \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{n} u[k] = (n+1)u[n]$. Crece sin límite.

- $y(t) = tx(t)$, Inestable.

Si, por ejemplo, $x(t) = 1,\ |x(t)| = 1, \forall t \Rightarrow y(t) = t$. Salida no acotada para entrada acotada.

- $y(t) = e^{x(t)}$, Estable.

Si $|x(t)| < B_x,\ \forall t \ \Rightarrow\ |y(t)| < e^{B_x} = B_y,\ \forall t.$

Las dos últimas propiedades son fundamentales y las usaremos a lo largo de toda la asignatura: Invarianza en el tiempo y linealidad.

5.5 Invarianza en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si sus propiedades se mantienen constantes con el tiempo.

En el lenguaje de las señales y sistemas, un **sistema** es **invariante en el tiempo** si un desplazamiento cualquiera en el tiempo de la señal de entrada produce ese mismo desplazamiento en la señal de salida.

$$\text{Si } y(t) = T\{x(t)\} \ \Rightarrow\ y(t-t_0) = T\{x(t-t_0)\},\ \forall t_0. \tag{5.10}$$

Para que cumpla la propiedad debe verificarse para cualquier desplazamiento y cualquier señal de entrada.

Forma de demostrar que un sistema es invariante en el tiempo:

- Sea $x_1(t)$ una entrada arbitraria $\Rightarrow y_1(t) = T\{x_1(t)\}$.
- Sea $x_2(t) = x_1(t-t_0)$ para un t_0 arbitrario $\Rightarrow y_2(t) = T\{x_2(t)\} = T\{x_1(t-t_0)\}$.
- El sistema es invariante en el tiempo si se cumple: $y_2(t) \stackrel{?}{=} y_1(t-t_0)$.

Ejemplos:

- $y(t) = \sin[x(t)]$, Invariante en el tiempo.

Sea $x_1(t)$ una entrada arbitraria $\Rightarrow y_1(t) = \sin[x_1(t)]$. Sea $x_2(t) = x_1(t-t_0)$ para un t_0 arbitrario $\Rightarrow$ $y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t-t_0)]$. Por otro lado: $y_1(t-t_0) = \sin[x_1(t-t_0)]$. Por tanto, se cumple que: $y_2(t) = y_1(t-t_0)$.

- $y[n] = nx[n]$, Variante en el tiempo.

Se puede usar la demostración general, pero se puede comprobar fácilmente con un contraejemplo: $x_1[n] = \delta[n] \ \Rightarrow\ y_1[n] = nx_1[n] = n\delta[n] = 0$. $x_2[n] = x_1[n-1] = \delta[n-1] \ \Rightarrow\ y_2[n] = nx_2[n] = n\delta[n-1] = \delta[n-1]$. Como $y_2[n] \neq y_1[n-1]$, el sistema no es invariante en el tiempo.

- $y(t) = x(2t)$, Variante en el tiempo.

Usamos la demostración general[3]: Sea $x_1(t)$ una entrada arbitraria $\Rightarrow y_1(t) = x_1(2t)$. Sea $x_2(t) = x_1(t-t_0)$ para un t_0 arbitrario $\Rightarrow y_2(t) = x_2(2t) = x_1(2t-t_0)$. Por otro lado: $y_1(t-t_0) = x_1(2(t-t_0)) = x_1(2t-2t_0)$. Por tanto: $y_2(t) \neq y_1(t-t_0)$.

5.6 Linealidad

Un **sistema** es **lineal** si posee la propiedad de superposición: si la señal de entrada al sistema es combinación lineal (superposición) de varias señales, la salida es la misma combinación lineal de las respuestas del sistema a cada una de las señales.

$$\text{Si } x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \tag{5.11}$$

$$\Downarrow \tag{5.12}$$

[3] Sería fácil encontrar un contraejemplo, como $x_1(t) = u(t)$, y $t_0 = 1$.

$$y_3(t) = \alpha T\{x_1(t)\} + \beta T\{x_2(t)\} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t),\ \forall x_1(t), x_2(t); \alpha, \beta \in \mathscr{C}. \tag{5.13}$$

Esta propiedad se puede dividir en dos:

- **Aditividad**: Si $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$.
- **Homogeneidad o escalamiento**: Si $x_2(t) = \alpha x_1(t) \Rightarrow y_2(t) = \alpha y_1(t)$.

La propiedad de homogeneidad implica que en un **sistema lineal**, si la **entrada es nula**, la **salida** debe ser asimismo **nula**.

$$\text{Si } \alpha = 0: \ x(t) = 0 \ \Rightarrow \ y(t) = 0. \tag{5.14}$$

Forma de demostrar que un sistema es lineal:

- Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ entradas arbitrarias. $y_1(t) = T\{x_1(t)\}$, $y_2(t) = T\{x_2(t)\}$.
- Sea $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, con constantes α y β arbitrarias.
- $y_3(t) = T\{x_3(t)\} = T\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\}$.
- El sistema es lineal si se cumple: $y_3(t) \stackrel{?}{=} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

Ejemplos:

- $y(t) = tx(t)$, Lineal.

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ entradas arbitrarias. $y_1(t) = tx_1(t)$, $y_2(t) = tx_2(t)$. Sea $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ una combinación lineal cualquiera de las entradas anteriores. $y_3(t) = tx_3(t) = t[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha t x_1(t) + \beta t x_2(t)$. Se cumple que $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

- $y(t) = x^2(t)$, No lineal.

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ entradas arbitrarias. $y_1(t) = x_1^2(t)$, $y_2(t) = x_2^2(t)$. Sea $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ una combinación lineal cualquiera de las entradas anteriores. $y_3(t) = x_3^2(t) = (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))^2 = \alpha^2 x_1^2(t) + \beta^2 x_2^2(t) + 2\alpha\beta x_1(t) x_2(t)$. Se ve claramente que $y_3(t) \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.\footnote{Se puede demostrar también mediante un contraejemplo, como por ejemplo: $x_1(t) = x_2(t) = \alpha = \beta = 1$.}

- $y[n] = \Re\{x[n]\}$, No lineal.

No cumple propiedad de homogeneidad\footnote{Las señales y constantes pueden ser complejas.}: Poniendo una señal compleja cualquiera en forma cartesiana:\ $x_1[n] = r[n] + js[n] \ \Rightarrow \ y_1[n] = r[n]$. $x_2[n] = \alpha x_1[n] \ \Rightarrow \ y_2[n] = \Re\{\alpha r[n] + j\alpha s[n]\}$. Por ejemplo, para $\alpha = j \ \Rightarrow \ y_2[n] = \Re\{jr[n] - s[n]\} = -s[n]$. Se ve que $y_2[n] \neq \alpha y_1[n] = jr[n]$.

5.7 Ejemplos de propiedades

Ejemplo 1: $y(t) = e^{x(t)}$.

- Memoria: La salida en cada instante de tiempo t_0 depende únicamente de la entrada en ese mismo instante: $y(t_0) = e^{x(t_0)}$, $\forall t_0$.\quad $\rightarrow$\quad Sin memoria
- Causalidad: Todo sistema sin memoria es causal.\quad $\rightarrow$\quad Causal.
- Invertibilidad: $w(t) = \ln(y(t)) = x(t)$. Se obtiene una señal idéntica a la entrada para cualquier instante de tiempo.\quad $\rightarrow$\quad Invertible.
- Estabilidad: Si $|x(t)| < B_x$, $\forall t \ \Rightarrow \ |y(t)| < e^{B_x} = B_y$, $\forall t$. \quad $\rightarrow$\quad Estable.
- Invarianza en el tiempo: Sea $x_1(t)$ una entrada arbitraria $\Rightarrow y_1(t) = e^{x_1(t)}$. Sea $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ para un t_0 arbitrario $\Rightarrow y_2(t) = e^{x_2(t)} = e^{x_1(t-t_0)}$. Por otro lado: $y_1(t - t_0) = e^{x_1(t-t_0)}$. Por tanto, se cumple que: $y_2(t) = y_1(t - t_0)$.\quad $\rightarrow$\quad Invariante en el tiempo.

- Linealidad: Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ entradas arbitrarias. $y_1(t) = e^{x_1(t)}$, $y_2(t) = e^{x_2(t)}$. Sea $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ una combinación lineal cualquiera de las entradas anteriores. $y_3(t) = e^{x_3(t)} = e^{\alpha x_1(t)} e^{\beta x_2(t)}$. Como $y_3(t) \neq \alpha e^{x_1(t)} + \beta e^{x_2(t)}$.\quad $\rightarrow$\quad No lineal.

Por tanto el sistema es {-M,+C,+I,+E,+IT,-L}.

Ejemplo 2: $y[n] = x[n]x[n-1]$.

- Memoria: La salida en cada instante de tiempo, n_0, depende de otro instante de tiempo distinto, $n_0 - 1$.\quad $\rightarrow$\quad Con memoria
- Causalidad: La salida en cada instante de tiempo, n_0, depende de la entrada en ese mismo instante (presente) y en el anterior, $n_0 - 1$, (pasado).\quad $\rightarrow$\quad Causal.
- Invertibilidad: Contraejemplo: Sean dos entradas distintas, $x_1[n]$ nula para las muestras pares y $x_2[n]$ nula para las muestras impares, pero $y_1[n] = y_2[n] = 0$.\quad $\rightarrow$\quad No invertible\footnote{Otro contraejemplo sencillo es: $x_2[n] = -x_1[n] \;\Rightarrow\; y_2[n] = y_1[n]$.}.
- Estabilidad: Si $|x[n]| < B_x$, $\forall n \;\Rightarrow\; |y[n]| < B_x^2 = B_y$, $\forall n$. \quad $\rightarrow$\quad Estable.
- Invarianza en el tiempo: Sea $x_1[n]$ una entrada arbitraria $\Rightarrow y_1[n] = x_1[n]x_1[n-1]$. Sea $x_2[n] = x_1[n-n_0]$ para un n_0 arbitrario $\Rightarrow y_2[n] = x_2[n]x_2[n-1] = x_1[n-n_0]x_1[n-n_0-1]$. Por otro lado: $y_1[n-n_0] = x_1[n-n_0]x_1[n-n_0-1]$. Por tanto, se cumple que: $y_2[n] = y_1[n-n_0]$.\quad $\rightarrow$\quad Invariante en el tiempo.
- Linealidad: Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ entradas arbitrarias. $y_1[n] = x_1[n]x_1[n-1]$, $y_2[n] = x_2[n]x_2[n-1]$. Sea $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ una combinación lineal cualquiera de las entradas anteriores. $y_3[n] = x_3[n]x_3[n-1] = (\alpha x_1[n] + \beta x_2[n])(\alpha x_1[n-1] + \beta x_2[n-1])$ $y_3[n] = \alpha^2 x_1[n]x_1[n-1] + \alpha\beta x_1[n]x_2[n-1] + \alpha\beta x_1[n-1]x_2[n] + \beta^2 x_2[n]x_2[n-1]$. Como $y_3[n] \neq \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = \alpha x_1[n]x_1[n-1] + \beta x_2[n]x_2[n-1]$.\quad $\rightarrow$\quad No lineal.

Por tanto el sistema es {+M,+C,-I,+E,+IT,-L}.

6. Interconexión de sistemas

Muchos sistemas complicados están construidos mediante interconexión de sistemas elementales.

■ **Example 6.1** **Cadena musical**

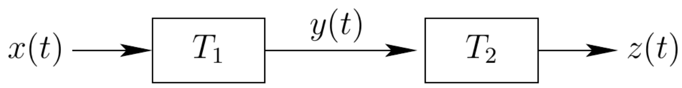
Interconexión de: sintonizador de radio, reproductor de CD, pletinas, amplificador, altavoces.

■

6.1 Serie o cascada

La entrada del segundo sistema es la salida del primero.

Diagrama de bloques:



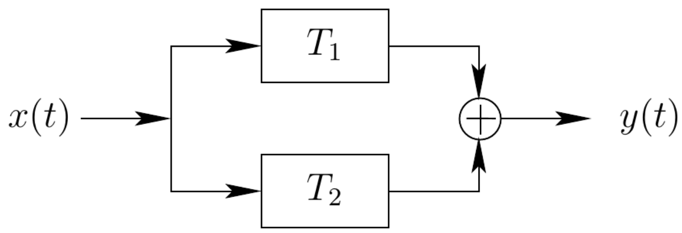
■ **Example 6.2** Receptor de radio seguido de amplificador.

■

6.2 Paralelo

Se suma la salida de cada sistema correspondiente a la misma señal de entrada.

Diagrama de bloques:



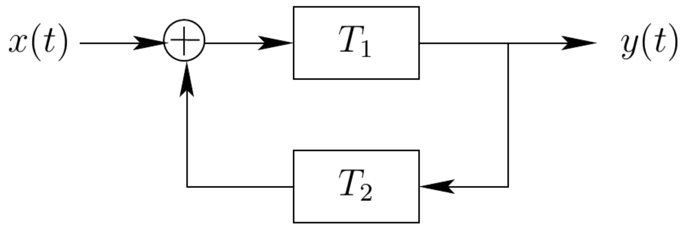
■ **Example 6.3** Dos micrófonos conectados a un amplificador.

■

6.3 Realimentación

Un sistema controla a otro a partir de su salida.

Diagrama de bloques:



■ **Example 6.4** Regulador de velocidad del automóvil: ajusta el flujo de combustible para mantener la velocidad constante.

■