

# Sistemas Lineales

Apuntes para el curso de Sistemas Lineales

COLABORADOR 1

Copyright © 2026 Colaborador 1

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*First printing, 2026*



# Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>6</b>
1.1	Señales y sistemas	6
1.1.1	•Qué es una señal?	6
1.1.2	•Qué es un sistema?	7
1.1.3	Ejemplo	7
1.2	Problemas de procesado de señales	7
1.3	Clases de señales	8
1.4	Ejemplos de señales y sistemas	9

I

## Introducción a los sistemas lineales

1.5	Objetivo de este bloque	12
-----	-------------------------	----

<b>2</b>	<b>Señales continuas y discretas</b>	<b>13</b>
----------	--------------------------------------	-----------

2.1	Introducción	13
2.2	Clases de señales	14
2.3	Señales periódicas	18
2.4	Parámetros de interés	19
2.5	Señales de energía y de potencia	22

<b>3</b>	<b>Sistemas continuos y discretos</b>	<b>24</b>
----------	---------------------------------------	-----------

3.1	Ejemplos sencillos de sistemas	24
-----	--------------------------------	----

3.2	<b>Sistemas elementales (transformación de la variable independiente)</b>	. 26
<b>4</b>	<b>Señales elementales</b>	. 32
4.1	<b>Señales exponenciales y senoidales</b>	. 32
4.1.1	Continuas	. 32
4.1.2	Discretas	. 38
4.1.3	Propiedades de periodicidad de las exponenciales discretas	. 40
4.2	<b>Señales impulso unitario y escalón unitario</b>	. 45
4.2.1	Discretas	. 45
4.2.2	Continuas	. 48
<b>5</b>	<b>Propiedades básicas de los sistemas</b>	. 53
5.1	<b>Sistemas con y sin memoria</b>	. 53
5.2	<b>Causalidad</b>	. 54
5.3	<b>Invertibilidad: sistemas inversos</b>	. 55
5.4	<b>Estabilidad</b>	. 55
5.5	<b>Invarianza en el tiempo</b>	. 55
5.6	<b>Linealidad</b>	. 56
5.7	<b>Ejemplos de propiedades</b>	. 57
5.7.1	Ejemplo 1: $y(t) = e^{x(t)}$	. 57
5.7.2	Ejemplo 2: $y[n] = x[n]x[n - 1]$	. 57
<b>6</b>	<b>Interconexión de sistemas</b>	. 58
6.1	<b>Serie o cascada</b>	. 58
6.2	<b>Paralelo</b>	. 58
6.3	<b>Realimentación</b>	. 59

II

## Bloque 2. Análisis espectral

<b>7</b>	<b>Bloque 2. Análisis espectral</b>	. 61
7.1	<b>Objetivo de este bloque</b>	. 61

**III****Tema 3. Análisis de Fourier para señales en tiempo continuo**

<b>8</b>	<b>Tema 3. Análisis de Fourier para señales en tiempo continuo</b>	<b>64</b>
8.1	Introducción .....	64
8.1.1	Ejemplo 1: El tono de las notas musicales .....	65
8.1.2	Ejemplo 2: el timbre de los instrumentos musicales .....	65
8.1.3	Ejemplo 3: Receptor de radio .....	65
8.1.4	Ejemplo 4: Modelo fuente-filtro del habla .....	65
<b>9</b>	<b>Representación de señales periódicas: la serie de Fourier en tiempo continuo</b>	<b>67</b>
<b>10</b>	<b>Exponenciales complejas, autofunciones de los sistemas LTI continuos</b>	<b>68</b>
<b>11</b>	<b>Fórmulas de análisis y síntesis</b>	<b>71</b>
<b>12</b>	<b>Tema 7. La transformada Z</b>	<b>72</b>
<b>13</b>	<b>Definición de la transformada Z</b>	<b>73</b>
13.1	Polos y ceros .....	75
<b>14</b>	<b>Convergencia de la transformada Z</b>	<b>76</b>
14.1	Propiedades de la región de convergencia .....	83
<b>15</b>	<b>La transformada Z inversa</b>	<b>91</b>
<b>16</b>	<b>Propiedades de la transformada Z</b>	<b>92</b>
<b>17</b>	<b>Análisis y caracterización de sistemas LTI mediante la transformada Z</b>	<b>95</b>
17.1	Propiedades de los sistemas LTI .....	95
17.1.1	Causalidad .....	95
17.1.2	Estabilidad .....	99
17.1.3	Invertibilidad .....	100
17.2	Sistemas LTI descritos mediante ecuaciones en diferencias .....	104



# 1. Introducción

Gran parte de los problemas de la **ingeniería de telecomunicación** pueden formularse de una manera muy simple:

tenemos **información**, esa información se representa mediante **señales**, y esas señales son **procesadas por sistemas**.

Este punto de vista permite analizar y diseñar soluciones en ámbitos muy distintos:

- transmisión por radio y fibra óptica,
- audio y vídeo digital,
- radar, GPS y sistemas de navegación,
- procesado de imagen y señal biomédica,
- control automático y electrónica.

Aunque los dispositivos físicos sean muy diferentes, las **herramientas matemáticas** que permiten describirlos son, en gran medida, las mismas. Ese es precisamente el objetivo de esta asignatura: **proporcionar un marco común para estudiar señales y sistemas de forma rigurosa**.

## 1.1 Señales y sistemas

Los conceptos de señales y sistemas surgen en gran variedad de campos. Tienen gran importancia en áreas tan diversas como: comunicaciones, aeronáutica, diseño de circuitos, acústica, ingeniería biomédica, ...

Aunque la naturaleza física de estas señales y sistemas pueda ser muy distinta, hay dos elementos comunes que permiten estudiarlas de forma conjunta:

### 1.1.1 §Qué es una señal?

**Definition 1.1** Una **señal** es una función matemática que describe cómo varía una magnitud física (o informativa) respecto a una o varias variables independientes.

De forma intuitiva:

- una señal **representa información**,
- esa información puede **medirse, almacenarse, transmitirse o procesarse**.

### Ejemplos cotidianos

- La tensión eléctrica en un circuito en función del tiempo.
- La presión acústica de una señal de voz.
- La intensidad luminosa de cada píxel de una imagen.
- La temperatura medida por un sensor cada cierto intervalo de tiempo.

En todos los casos estamos describiendo un fenómeno mediante una **función**.

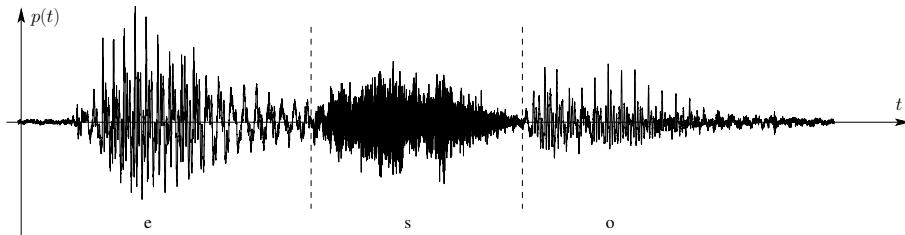


Figure 1.1: Ejemplo de señal

### 1.1.2 ¿Qué es un sistema?

**Definition 1.2** Un sistema es cualquier dispositivo, proceso o algoritmo que **transforma una señal de entrada en una señal de salida**.

Desde el punto de vista del análisis, un sistema se estudiará como una “**caja negra**”:

- conocemos qué señal entra,
- observamos qué señal sale,
- y nos interesa caracterizar la relación entre ambas.

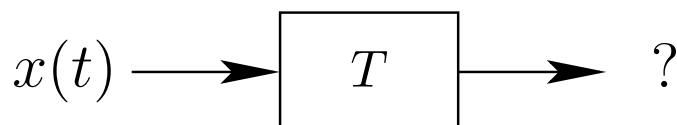
### 1.1.3 Ejemplo

- **Sistema:** un circuito eléctrico.
- **Señales:** tensiones y corrientes  $V(t)$ ,  $I(t)$ .

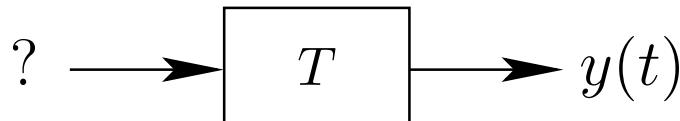
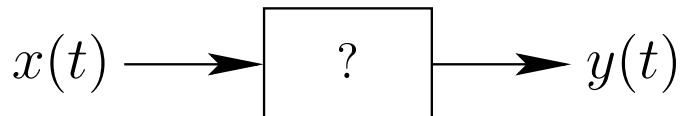
Este enfoque será clave cuando estudiemos los **sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI)**, que constituyen el núcleo de la asignatura.

## 1.2 Problemas de procesado de señales

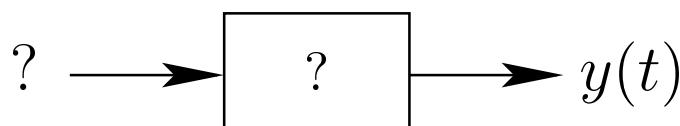
- **Análisis:** estudiar la respuesta de un sistema específico a diversas entradas. (Convolución).  
Ejemplo: análisis de circuitos.



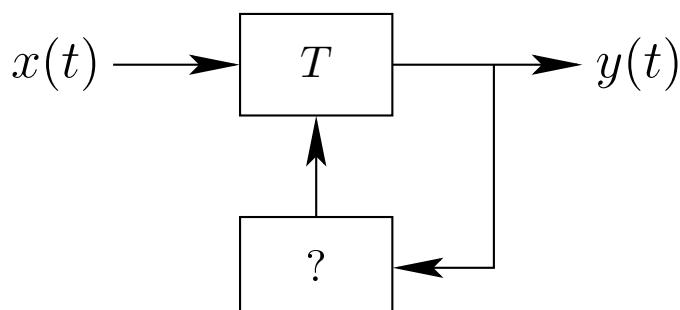
- **Diseño o identificación:** diseñar sistemas para procesar señales de determinada forma.  
Ejemplos: restauración (voz, imagen, ...), realce, extracción de características.
- **Deconvolución:** obtener entrada para un sistema dado a partir de su salida. Ejemplos: eliminar aberraciones en lentes de cámaras fotográficas o movimiento.
- **Filtrado:** obtener el sistema y la señal de salida que permite modificar una señal de entrada de determinada forma. Ejemplo: eliminar altas frecuencias de señal musical.



- **Modelado:** diseñar un sistema y la señal de entrada que nos permite obtener una salida determinada. Ejemplo: sintetizar voz.



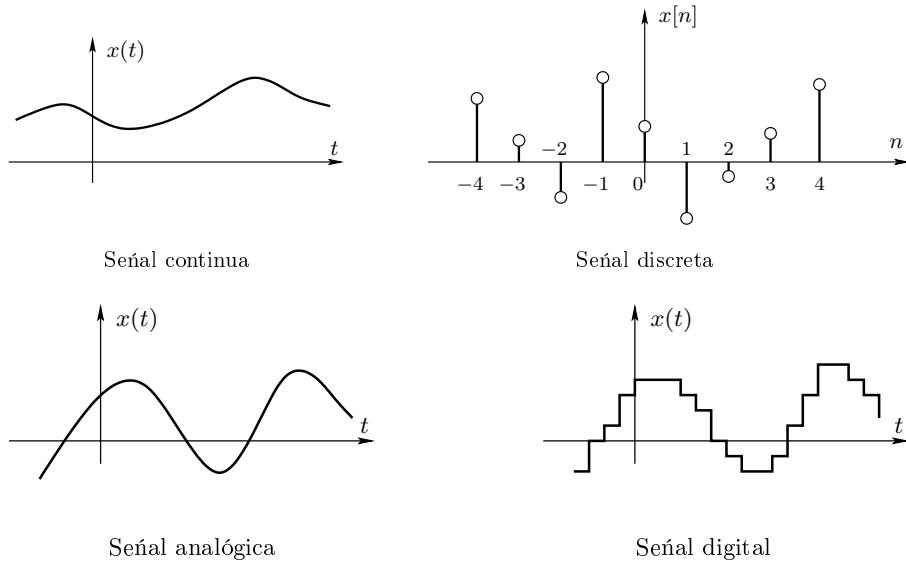
- **Control:** diseñar un sistema que controle a otro a partir de su salida. Ejemplos: sistema de control de planta química, piloto automático.



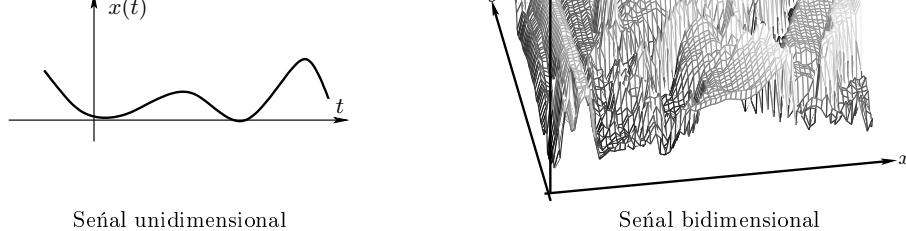
## 1.3 Clases de señales

### Tipos de señales:

- Según el rango de variabilidad de la variable independiente: continua vs. discreta.
  - **Continua:** valores para todos los puntos del eje de abscisas. Ejemplo: señales en circuitos eléctricos y mecánicos.
  - **Discreta:** valores en puntos discretos y equiespaciados del eje de abscisas. Ejemplo: promedio de la bolsa cada día.
- Según el rango de variabilidad de la variable dependiente: analógica vs. digital.
  - **Analógica:** puede tomar cualquier valor dentro de un rango. Ejemplo: temperatura.
  - **Digital:** puede tomar sólo valores cuantizados. Ejemplo: luz encendida o apagada.



- Según el número de variables independientes: unidimensional vs. multidimensional.



- Según la incertidumbre de la variable dependiente: señal determinista vs. aleatoria.
  - Determinista:** se conocen los valores que toma en todos y cada uno de sus instantes.
  - Aleatoria o estocástica:** hay incertidumbre sobre el valor que toma en alguno de sus instantes. Asociado al concepto de probabilidad.

$$\text{Señal} \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinista} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estacionaria} \left\{ \begin{array}{l} \text{Periódica} \\ \text{No periódica} \end{array} \right. \\ \text{No Estacionaria} \end{array} \right. \\ \text{Aleatoria o Estocástica} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estacionaria} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ergódica} \\ \text{No ergódica} \end{array} \right. \\ \text{No estacionaria} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

**Tipos de sistemas:** continuos, discretos, analógicos, digitales.

## 1.4 Ejemplos de señales y sistemas

Ejemplos de señales:

- Habla: telefonía, radio, ..., vida cotidiana.
- Señales biomédicas:
  - 1-D: encefalograma, electrocardiograma.
  - 2-D: radiografía, angiografía, ecografía.
  - 3-D: TAC, RM, ultrasonidos 3D, vídeo.
  - 4-D: secuencias temporales de volúmenes.
  - N-D: volúmenes con datos tensoriales para estudiar fibras nerviosas del cerebro.
- Sonido y música.
- Vídeo e imagen.
- Señales de radar, sonar, satélite.
- Comunicación de datos entre ordenadores.

Otros ejemplos:

- Circuitos eléctricos:
  - Señales:  $I(t), V(t)$ .
  - Sistema: propio circuito.
- Automóvil:
  - Señales: entrada: presión en pedales y giro del volante. Salida: aceleración y dirección del automóvil.
  - Sistema: automóvil.
- Compresión de imagen:
  - Señales: imagen comprimida y sin comprimir.
  - Sistemas: compresor y descompresor.
- Transmisión de señal de radio:
  - Señal: señal de audio modulada.
  - Sistema: medio de transmisión (atmósfera).

Ejemplos de procesado de señal:

- Eliminación de ruido en voz de piloto de avión (comunicaciones).
- Realce de fotografías.
- Extracción de parámetros de interés:
  - Formantes de la voz (identificación).
  - Reconocimiento de habla.
  - Identificación de formas (visión artificial).

# Introducción a los sistemas lineales

1.5	Objetivo de este bloque . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Señales continuas y discretas . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1	Introducción . . . . .	13
2.2	Clases de señales . . . . .	14
2.3	Señales periódicas . . . . .	18
2.4	Parámetros de interés . . . . .	19
2.5	Señales de energía y de potencia . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Sistemas continuos y discretos . . . . .</b>	<b>24</b>
3.1	Ejemplos sencillos de sistemas . . . . .	24
3.2	Sistemas elementales (transformación de la variable independiente) . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Señales elementales . . . . .</b>	<b>32</b>
4.1	Señales exponenciales y senoidales . . . . .	32
4.2	Señales impulso unitario y escalón unitario . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Propiedades básicas de los sistemas . . . . .</b>	<b>53</b>
5.1	Sistemas con y sin memoria . . . . .	53
5.2	Causalidad . . . . .	54
5.3	Invertibilidad: sistemas inversos . . . . .	55
5.4	Estabilidad . . . . .	55
5.5	Invarianza en el tiempo . . . . .	55
5.6	Linealidad . . . . .	56
5.7	Ejemplos de propiedades . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Interconexión de sistemas . . . . .</b>	<b>58</b>
6.1	Serie o cascada . . . . .	58
6.2	Paralelo . . . . .	58
6.3	Realimentación . . . . .	59

El estudio de señales y sistemas constituye el punto de partida fundamental de la asignatura Sistemas Lineales. En este bloque se introducen los conceptos y herramientas básicas que permitirán, a lo largo del curso, analizar, modelar y diseñar sistemas de procesado de señal con rigor matemático y con una clara orientación a aplicaciones de telecomunicación.

Desde un punto de vista ingenieril, muchos problemas pueden formularse de manera común: existe una señal que contiene información relevante y un sistema que actúa sobre dicha señal para transformarla, transmitirla, almacenarla o extraer de ella ciertas características. Este enfoque unificado permite abordar situaciones muy diversas —como la transmisión de voz, el filtrado de ruido, la compresión de imagen o la digitalización de señales físicas— utilizando un conjunto reducido de conceptos y técnicas.

En este bloque se establecerá la notación y el lenguaje básicos de la teoría de la señal, introduciendo las distintas clases de señales (continuas, discretas, analógicas, digitales, deterministas y aleatorias) y los tipos fundamentales de sistemas. Se prestará especial atención a las propiedades de los sistemas, tales como linealidad, invariancia en el tiempo, causalidad o estabilidad, ya que estas características serán clave para el desarrollo posterior de la asignatura.

Asimismo, se presentarán los principales problemas del procesado de señales, como el análisis, el filtrado o la modelización, y se introducirá la convolución como herramienta central para describir la relación entrada–salida en los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI). Estos conceptos servirán de base para el análisis espectral y el estudio de sistemas en dominios transformados que se abordarán en los bloques siguientes.

En definitiva, el Bloque 1 sienta las bases conceptuales y metodológicas necesarias para comprender el resto de la asignatura y proporciona el marco común desde el que se desarrollarán las herramientas avanzadas de análisis de señales y sistemas utilizadas en ingeniería de telecomunicación.

## 1.5 Objetivo de este bloque

Al finalizar el Bloque 1, el estudiante debe ser capaz de:

- entender qué se entiende por señal y sistema,
- distinguir entre señales continuas y discretas,
- clasificar señales y sistemas según sus propiedades,
- comprender el papel central de los sistemas LTI,
- realizar operaciones básicas de procesado de señal,
- sentar las bases para el análisis en dominios transformados.

Este bloque constituye la base conceptual sobre la que se apoyará todo el resto de la asignatura



## 2. Señales continuas y discretas

La información de una señal está contenida en un patrón de variaciones con una forma determinada.

### 2.1 Introducción

**Ejemplo 1:** señal de voz humana (variaciones de presión acústica).

Distintos patrones de variación producen distintos sonidos:

**Ejemplo 2:** fotografía (blanco y negro).

Señal bidimensional. Variaciones del nivel de gris.

---

**Representación matemática:** funciones de una o más variables independientes.

Aquí sólo nos ocuparemos de señales con una variable independiente.

En general consideramos que es el tiempo:  $x(t)$  (aunque no tiene por qué).

Vamos a considerar **dos tipos básicos de señales**:

- **Continuas:** la variable independiente es continua  $\Rightarrow$  se definen para una sucesión continua de valores de la variable independiente.

**Notación:**  $x(t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ .

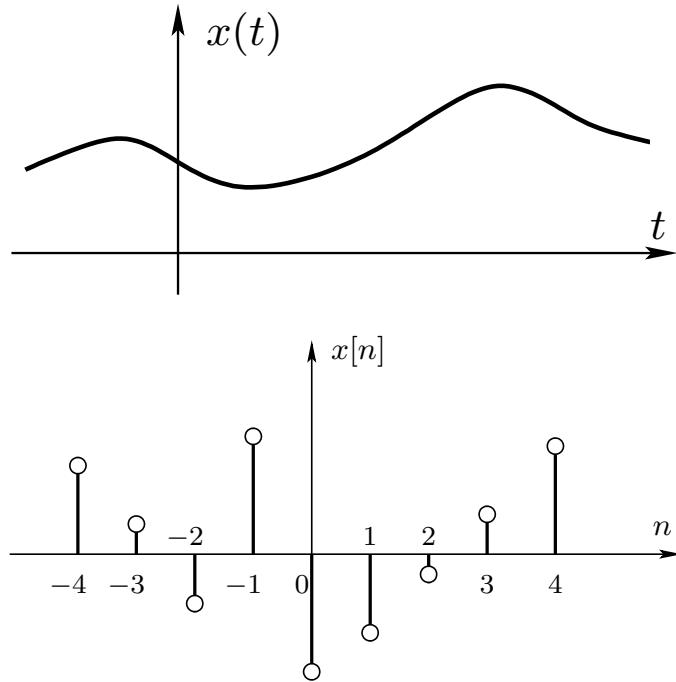
Ejemplos: señal de voz con el tiempo, presión atmosférica con altitud.

- **Discretas:** la variable independiente sólo toma un conjunto discreto de valores. También se las llama **secuencia discreta**.

**Notación:**  $x[n]$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ejemplos: valor del IBEX-35 al final de cada sesión, muestreo de señales continuas (muestras equiespaciadas).

Vamos a ir viendo las señales continuas y discretas de forma paralela, parairlas relacionando. En el capítulo de muestreo (7), veremos cómo se puede pasar de unas a otras, idealmente sin error.



## 2.2 Clases de señales

Veremos a continuación distintos tipos de señales que tendrán importancia a lo largo de toda la asignatura.

- **Real e imaginaria:** simetría respecto a la conjugación.
  - **Real pura:** simétrica respecto a la conjugación.

$$x^*(t) = x(t), \quad (2.1)$$

$$x^*[n] = x[n]. \quad (2.2)$$

- **Imaginaria pura:** antisimétrica respecto a la conjugación.

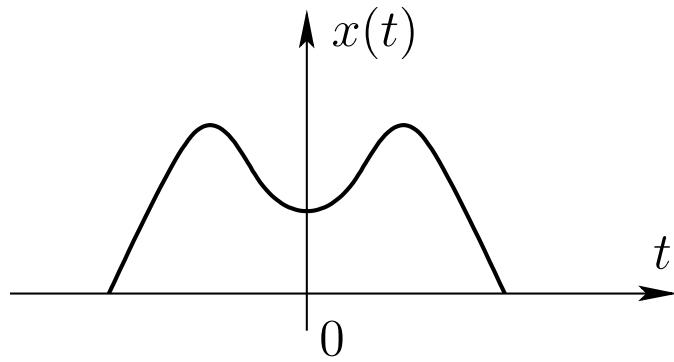
$$x^*(t) = -x(t), \quad (2.3)$$

$$x^*[n] = -x[n]. \quad (2.4)$$

- **Par e impar:** simetría respecto a la inversión en el tiempo. Se aplica a señales reales.
  - **Par:** simétrica respecto al eje de ordenadas.

$$x(-t) = x(t), \quad (2.5)$$

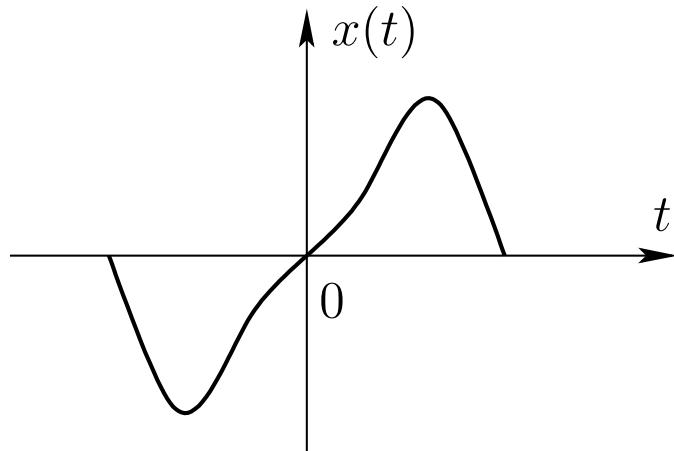
$$x[-n] = x[n]. \quad (2.6)$$



- **Impar:** antisimétrica respecto al eje de ordenadas.

$$x(-t) = -x(t), \quad (2.7)$$

$$x[-n] = -x[n]. \quad (2.8)$$



En el origen, como  $x(0) = -x(0)$ , se cumple:

$$x(0) = 0, \quad (2.9)$$

$$x[0] = 0, \quad (2.10)$$

- **Hermítica y antihermítica:** Equivalente para señales complejas.
  - **Hermítica:** simétrica respecto al eje de ordenadas y la conjugación.

$$x^*(-t) = x(t), \quad (2.11)$$

$$x^*[-n] = x[n]. \quad (2.12)$$

- **Antihermítica:** antisimétrica respecto al eje de ordenadas y la conjugación.

$$x^*(-t) = -x(t), \quad (2.13)$$

$$x^*[-n] = -x[n]. \quad (2.14)$$

Toda señal se puede poner como suma de sus partes real e imaginaria, par e impar, hermítica y antihermítica:

$$x(t) = x_r(t) + x_i(t) = \Re\{x(t)\} + \Im\{x(t)\}. \quad (2.15)$$

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = \mathcal{E}\{\{x(t)\}\} + \mathcal{O}\{\{x(t)\}\}, \quad x(t) \in . \quad (2.16)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_a(t). \quad (2.17)$$

Las expresiones para el caso discreto son equivalentes.

Cálculo de la parte par e impar de una señal:

$$\left\{ x(t) = x_e(t) + x_o(t), \quad x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) = x_e(t) - x_o(t). \right. \quad (2.18)$$

$$\Downarrow \quad (2.19)$$

Parte par e impar de una señal:

$$\left\{ x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)], \quad x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]. \right. \quad (2.20)$$

Se cumple:

$$x_e(0) = x(0), \quad x_e[0] = x[0]. \quad (2.21)$$

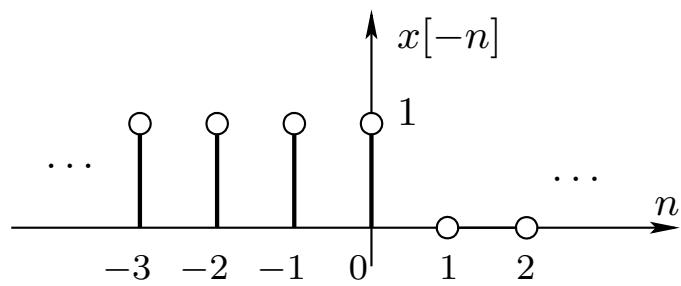
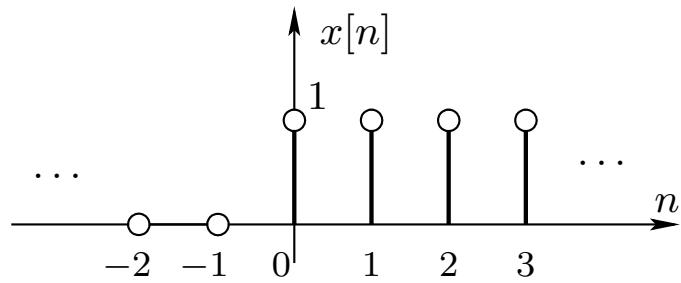
$$x_o(0) = 0, \quad x_o[0] = 0. \quad (2.22)$$

Parte real e imaginaria:

$$\left\{ x_r(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x^*(t)], \quad x_i(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x^*(t)]. \right. \quad (2.23)$$

Parte hermítica y antihermítica:

$$\left\{ x_h(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x^*(-t)], \quad x_a(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x^*(-t)]. \right. \quad (2.24)$$



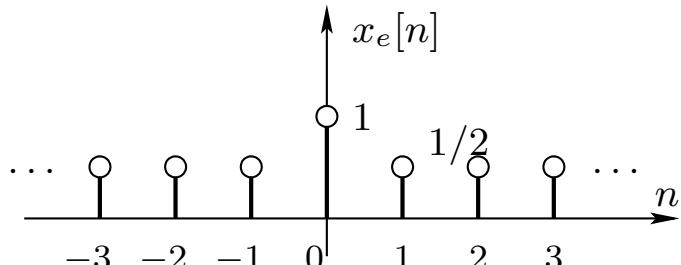
Para el caso discreto las expresiones son equivalentes.

**Ejemplo:** Cálculo de la parte par e impar de una señal:

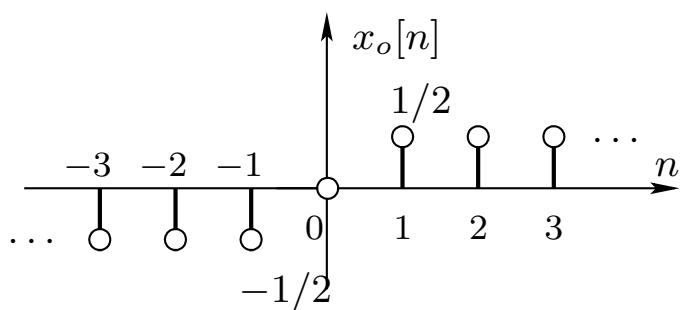
$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, 0, \\ n < 0. \end{cases}$$

$$x[-n] = \begin{cases} 1, & n \leq 0, 0, \\ n > 0. \end{cases}$$

$$x_e[n] = \begin{cases} 1/2, & n < 0, 1, \\ n = 0, 1/2, & n > 0. \end{cases}$$



$$x_o[n] = \begin{cases} -1/2, & n < 0, 0, \\ n = 0, 1/2, & n > 0. \end{cases}$$



A continuación veremos otros tipos de señales: periódicas y de energía y de potencia.

## 2.3 Señales periódicas

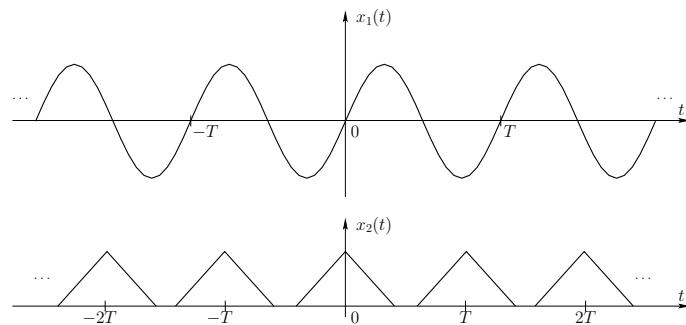
Dada su importancia las vemos aparte.

- Una señal **continua**,  $x(t)$ , es **periódica** si:

$$\exists T \in \mathbb{R}^+ / [x(t) = x(t + T)], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

$T$ : **periodo** de la señal.

**Ejemplos:**



Si  $x(t)$  es periódica con periodo  $T$ , también lo es con periodo  $mT$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

$T_0$ : **periodo fundamental** de la señal. Valor más pequeño de  $T$  para el que se satisface:

$$x(t) = x(t + T_0). \quad (2.26)$$

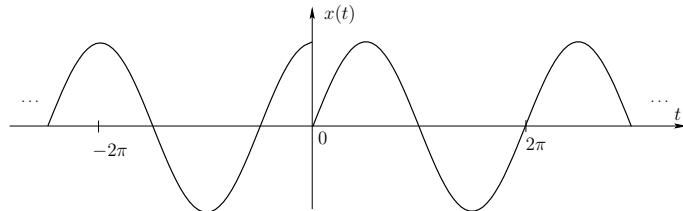
Si  $x(t)$  es constante, no está definido  $T_0$ , ya que es periódica para cualquier  $T$ .

**Señal aperiódica:** si no es periódica.

**Ejemplos:**

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), & t < 0, \sin(t), \\ t \geq 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Se cumple que  $\cos(t) = \cos(t + 2\pi)$  para  $t < -2\pi$  y  $\sin(t) = \sin(t + 2\pi)$ , para  $t \geq 0$ , pero no se cumple  $x(t) = x(t + 2\pi)$ ,  $\forall t$ .



Estudiar el caso:

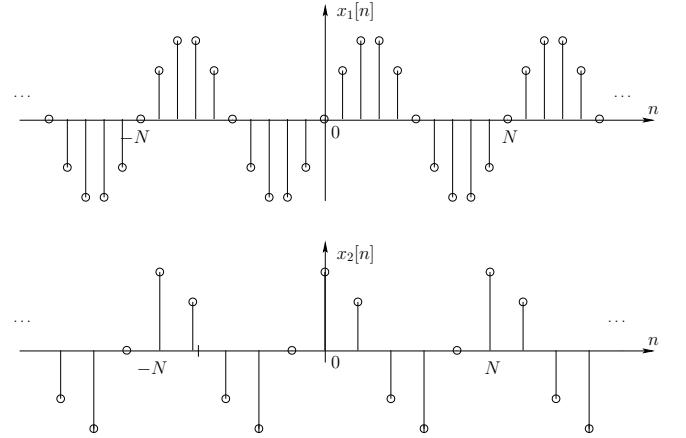
$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), & t < 0, \cos(-t), \\ t \geq 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

- Una señal **discreta**,  $x[n]$ , es **periódica** si:

$$\exists N \in \mathbb{Z} \quad x[n] = x[n+N], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.29)$$

**N:** periodo de la señal.

Ejemplos:



Si  $x[n]$  es periódica con periodo  $N$ , también lo es con periodo  $mN$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

$N_0$ : periodo fundamental de la secuencia discreta. Valor más pequeño de  $N$  para el que se satisface:

$$x[n] = x[n + N_0]. \quad (2.30)$$

Si  $x[n]$  es constante,  $N_0 = 1$ , que es el periodo mínimo que puede tener una señal discreta.

**Señal aperiódica:** si no es periódica.

## 2.4 Parámetros de interés

Vemos algunos parámetros de interés de las señales, tanto continuas como discretas.

- **Valor medio:**

- El **valor medio en un intervalo** viene dado por:
  - **Señales continuas:**

En el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt. \quad (2.31)$$

Para un intervalo simétrico,  $-T \leq t \leq T$ :

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (2.32)$$

- **Señales discretas:**

En el intervalo  $n_1 \leq n \leq n_2$ :

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]. \quad (2.33)$$

Para un intervalo simétrico,  $-N \leq n \leq N$ :

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N x[n]. \quad (2.34)$$

- El **valor medio** viene dado por:

- **Señales continuas:**

$$x_{AV} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (2.35)$$

- **Señales discretas:**

$$x_{AV} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]. \quad (2.36)$$

- El **valor medio** para **señales periódicas** también se puede calcular de la siguiente forma:

- **Señales continuas:**

$$x_{AV} \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) dt. \quad (2.37)$$

- **Señales discretas:**

$$x_{AV} \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n]. \quad (2.38)$$

- **Valor de pico:**

- **Señales continuas:**

$$x_p \stackrel{\Delta}{=} \max\{|x(t)|, t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.39)$$

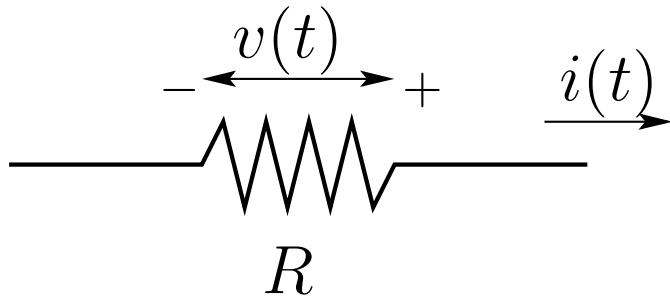
- **Señales discretas:**

$$x_p \stackrel{\Delta}{=} \max\{|x[n]|, n \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.40)$$

- **Potencia instantánea:**

Por analogía con las señales que representan magnitudes físicas, se puede hablar de potencia y energía.

Así por ejemplo, para una resistencia, la potencia instantánea:



$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t) = Ri^2(t). \quad (2.41)$$

Vemos que es proporcional a la señal al cuadrado. En otros ejemplos ocurre lo mismo.

- **Señales continuas:**

$$P_i(t) \stackrel{\Delta}{=} |x(t)|^2. \quad (2.42)$$

- **Señales discretas:**

$$P_i[n] \stackrel{\Delta}{=} |x[n]|^2. \quad (2.43)$$

- **Energía:** suma (integral) de la potencia instantánea.

- Energía total **en un intervalo** de tiempo:

- **Señales continuas:**

En el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

$$E \triangleq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt. \quad (2.44)$$

Para un intervalo simétrico,  $-T \leq t \leq T$ :

$$E_T \triangleq \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt. \quad (2.45)$$

- **Señales discretas:**

En el intervalo  $n_1 \leq n \leq n_2$ :

$$E \triangleq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2. \quad (2.46)$$

Para un intervalo simétrico,  $-N \leq n \leq N$ :

$$E_N \triangleq \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2. \quad (2.47)$$

– La **energía total** (en un intervalo infinito) viene dada por:

- **Señales continuas:**

$$E_\infty \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (2.48)$$

- **Señales discretas:**

$$E_\infty \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2. \quad (2.49)$$

Hay señales para las que esta integral (sumatorio) no converge, como por ejemplo:

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad x_2(t) = C. \quad (2.50)$$

$$x_1[n] = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad x_2[n] = C. \quad (2.51)$$

En estos casos,  $E_\infty = \infty$ .

Por ello, nos va a interesar otra medida relacionada, que es la potencia media.

- **Potencia media:** valor medio de la potencia instantánea.

– En general, la potencia media viene dada por:

- **Señales continuas:**

$$P_\infty \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt. \quad (2.52)$$

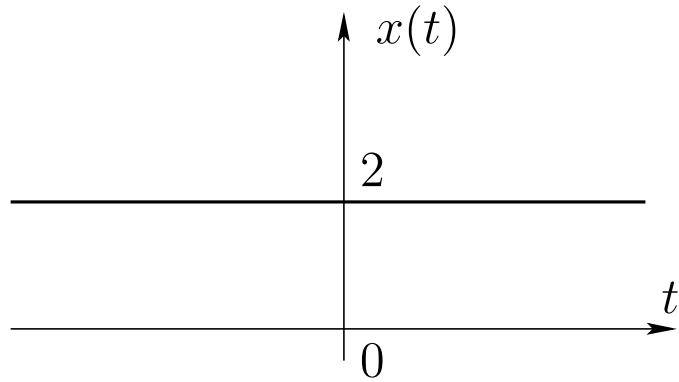
- **Señales discretas:**

$$P_\infty \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2. \quad (2.53)$$

– En el caso particular de **señales periódicas**, también son aplicables las siguientes expresiones:

- **Señales continuas:**

$$P_\infty \triangleq \frac{1}{T} \int_{<T>} |x(t)|^2 dt. \quad (2.54)$$



- **Señales discretas:**

$$P_{\infty} \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} |x[n]|^2. \quad (2.55)$$

**Ejemplo:**  $x(t) = 2$ .

$$P_i(t) = |x(t)|^2 = 4. \quad (2.56)$$

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 4 dt = \infty. \quad (2.57)$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_i(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4T}{T} = 4. \quad (2.58)$$

## 2.5 Señales de energía y de potencia

Según las definiciones de energía y de potencia de una señal, se puede hablar de tres clases de señales:

- **Señales de energía:** son señales con **energía total finita**.

$$0 < E_{\infty} < \infty. \quad (2.59)$$

Tienen  $P_{\infty} = 0$ :

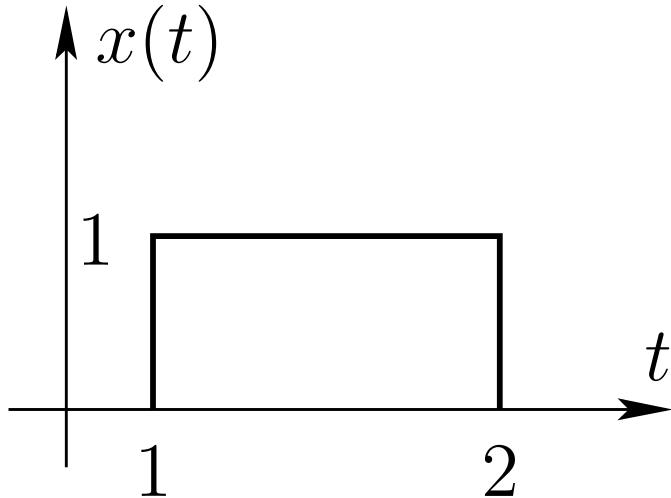
$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{2T} = 0. \quad (2.60)$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_N}{2N+1} = 0. \quad (2.61)$$

**Ejemplo:**

$$E_{\infty} = 1 \Rightarrow P_{\infty} = 0. \quad (2.62)$$

- **Señales de potencia:** son señales con **potencia media finita**.



$$0 < P_\infty < \infty \Rightarrow E_\infty = \infty. \quad (2.63)$$

Dado que tienen  $P_\infty > 0$ , integrando (sumando) en un intervalo infinito, se obtiene  $E_\infty = \infty$ .

**Ejemplos:**

$$x_1(t) = 2.$$

$x_2(t)$ : cualquier señal periódica con valor de pico,  $x_p$ , finito.

- **Señales con  $E_\infty$  y  $P_\infty$  infinitas.**

**Ejemplo:**  $x(t) = t$ .

$$E_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |t|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T t^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t^3|_{-T}^T}{3} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T^3}{3} = \infty. \quad (2.64)$$

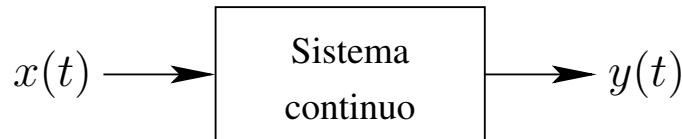
$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |t|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T^3}{6T} = \infty. \quad (2.65)$$

### 3. Sistemas continuos y discretos

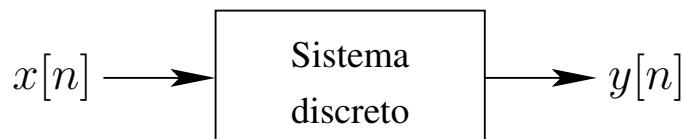
**Sistema:** proceso por el cual las señales de entrada son transformadas por el sistema, o provocan que éste responda de alguna forma, dando lugar a otras señales como salidas.

Según si las señales de entrada y salida son continuas o discretas, se habla de:

- **Sistemas continuos:** Señales continuas de entrada son transformadas en señales continuas de salida:  $x(t) \rightarrow y(t)$ .



- **Sistemas discretos:** Señales discretas de entrada son transformadas en señales discretas de salida:  $x[n] \rightarrow y[n]$ .



Además existen sistemas que tienen entrada continua y salida discreta (muestreadores) y viceversa (interpoladores), que veremos en el tema de muestreo (tema 7).

#### 3.1 Ejemplos sencillos de sistemas

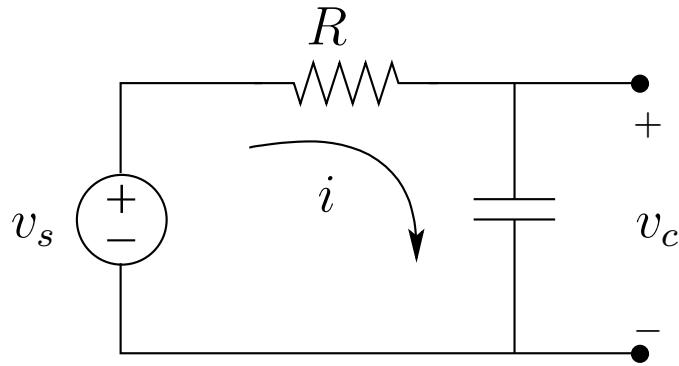
Una de las ventajas del estudio de sistemas es que sistemas muy distintos físicamente producen expresiones matemáticas similares.

Ejemplos de sistemas continuos:

- Circuito RC:

Considerando  $v_s(t)$  como la señal de entrada y  $v_c(t)$  como la señal de salida, obtenemos:

$$v_s(t) = Ri(t) + v_c(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}, \quad (3.1)$$

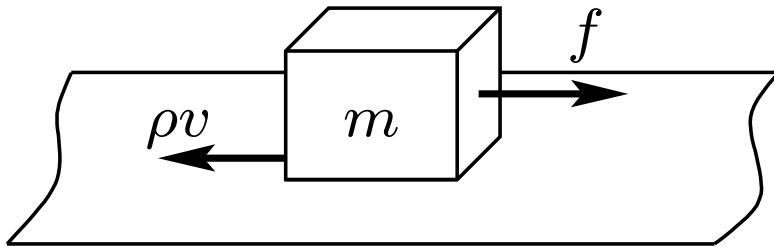


$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}. \quad (3.2)$$

Por tanto, se obtiene la siguiente ecuación diferencial que relaciona la salida con la entrada del sistema:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = \frac{1}{RC} v_s(t). \quad (3.3)$$

- Objeto móvil:



Si consideramos  $f(t)$  como la señal de entrada y  $v(t)$  como la señal de salida,  $m$  la masa del objeto y  $\rho v$  la resistencia por fricción:

$$f(t) = ma(t) + \rho v(t), \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt}. \quad (3.4)$$

$$f(t) = m \frac{dv(t)}{dt} + \rho v(t). \quad (3.5)$$

Se obtiene la siguiente ecuación diferencial para el sistema:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m} v(t) = \frac{1}{m} f(t). \quad (3.6)$$

Ambos ejemplos son matemáticamente equivalentes, pues tienen la misma ecuación diferencial, que podemos escribir:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t), \quad (3.7)$$

siendo  $x(t)$  la señal de entrada al sistema,  $y(t)$  la señal de salida y  $a$  y  $b$  constantes.

**Ejemplos** de sistemas discretos:

- Cuenta de ahorro en un banco al final de cada año:

Se obtiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n], \quad (3.8)$$

o de forma equivalente,

$$y[n] - 1.01y[n-1] = x[n]. \quad (3.9)$$

- Simulación digital del objeto móvil:

Tomamos el tiempo en intervalos de longitud  $\Delta$ :

$$t = n\Delta. \quad (3.10)$$

Aproximamos la derivada mediante la primera diferencia:

$$\frac{dv(t)}{dt} \simeq \frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta}. \quad (3.11)$$

Por tanto, la ecuación diferencial queda:

$$\frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta} + \frac{\rho}{m}v(n\Delta) = \frac{1}{m}f(n\Delta), \quad (3.12)$$

usando las siguientes definiciones de señales discretas a partir de las continuas muestreadas:

$$\begin{cases} v[n] = v(n\Delta), \\ f[n] = f(n\Delta), \end{cases} \quad (3.13)$$

obtenemos:

$$v[n] - v[n-1] + \frac{\rho\Delta}{m}v[n] = \frac{\Delta}{m}f[n], \quad (3.14)$$

y agrupando términos:

$$v[n]\frac{m+\rho\Delta}{m} - v[n-1] = \frac{\Delta}{m}f[n]. \quad (3.15)$$

Si finalmente dividimos la ecuación por el factor  $(m + \rho\Delta)/m$ :

$$v[n] - \frac{m}{m+\rho\Delta}v[n-1] = \frac{\Delta}{m+\rho\Delta}f[n]. \quad (3.16)$$

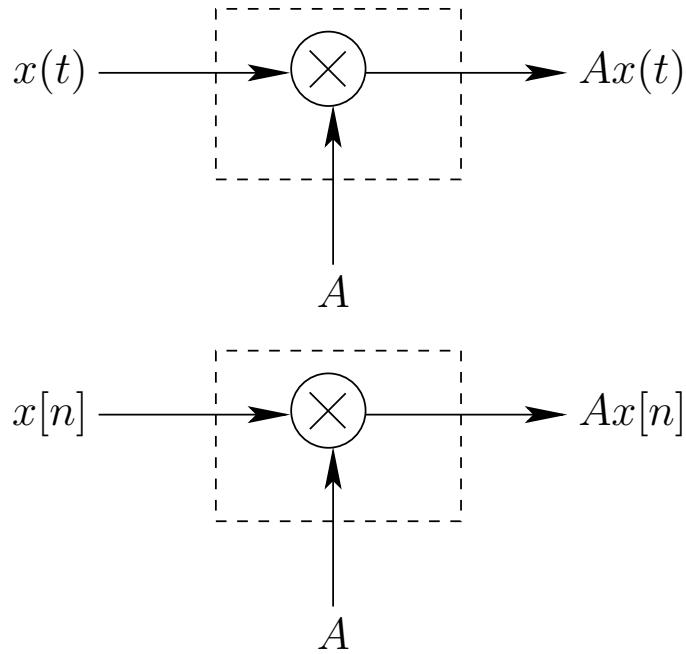
Se puede observar que ambos son ejemplos del mismo tipo de sistema, ya que tienen la misma ecuación en diferencias:

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n]. \quad (3.17)$$

## 3.2 Sistemas elementales (transformación de la variable independiente)

Un concepto fundamental en el análisis de señales y sistemas es el de la transformación de una señal mediante un cierto sistema. Vamos a ver algunas transformaciones elementales de señales, que serán muy importantes en el resto de la asignatura, y nos permitirán entender mejor algunas propiedades de las señales, ya vistas, como son las señales pares e impares, reales e imaginarias, hermíticas y antihermíticas (ver sección 2.\ref{clases\_senales}), señales periódicas (ver sección 2.\ref{periodicas}), y de sistemas, que veremos en la sección 2.\ref{propiedades\_sistemas}.

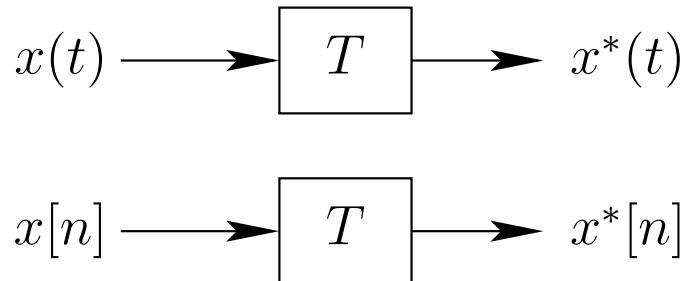
En primer lugar veremos algunas transformaciones elementales sobre la amplitud de la señal, o sumas y diferencias sobre la señal:



- **Cambio de nivel:** multiplicación de la señal por una constante.

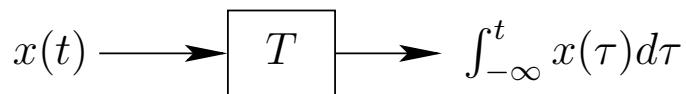
Amplificación:  $A > 1$ . Atenuación:  $A < 1$ .

- **Conjugación:**

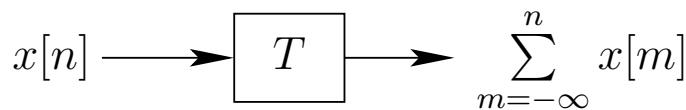


Se ha usado en señales reales e imaginarias y hermíticas y antihermíticas.

- **Integración:**



- **Sumación o acumulación:** equivalente a la integración para señales discretas.

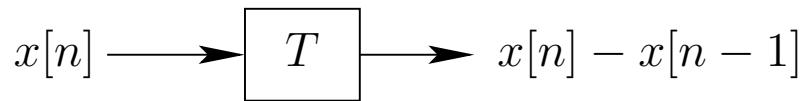
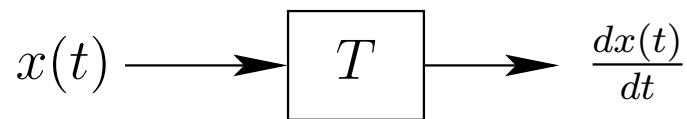


- **Derivación:** operación inversa a la integración.

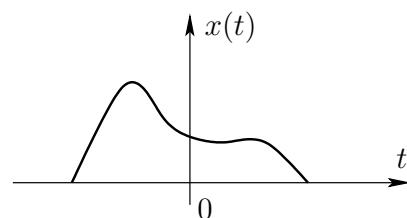
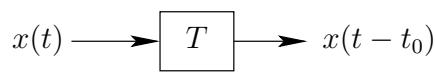
- **Diferenciación o primera diferencia:** operación inversa a la sumación.

A continuación veremos operaciones elementales realizadas sobre la variable independiente.

- **Desplazamiento o corrimiento en el tiempo:**

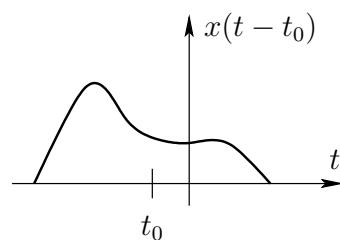
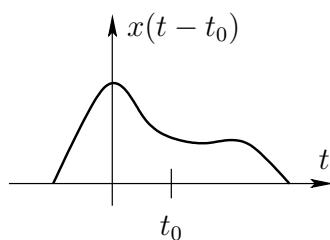


– Continuo:

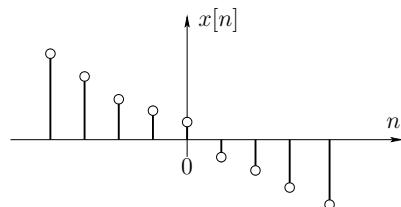
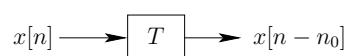


\* Retardo:  $t_0 > 0$ .

\* Adelanto:  $t_0 < 0$ .

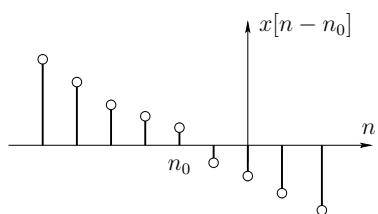
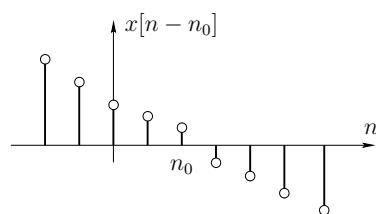


• Discreto:



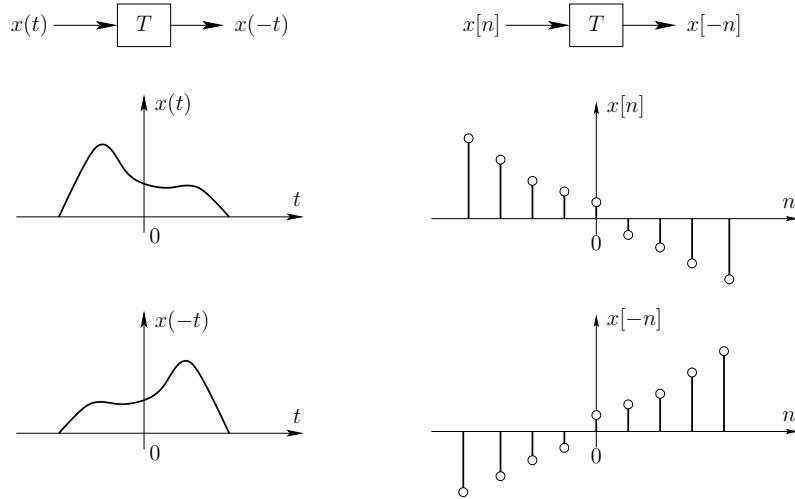
\* Retardo:  $n_0 > 0$ .

\* Adelanto:  $n_0 < 0$ .



Se ha usado para definir las señales periódicas.

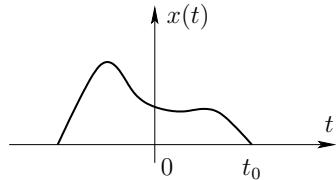
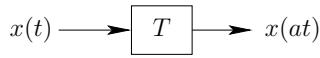
- **Inversión en el tiempo o abatimiento:** reflexión respecto al origen de tiempos.



Se ha usado para definir señales pares e impares y hermíticas y antihermíticas. **Ejemplo:** cinta escuchada al revés.

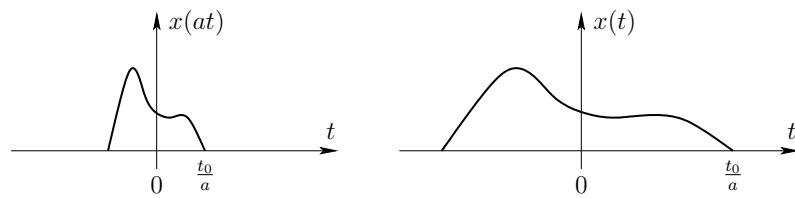
- **Cambio de escala:**

- Continuo:



\* Compresión:  $a > 1$ .

\* Expansión:  $a < 1$ .



Si  $x(t_0) = 0$ ,  $at = t_0 \Rightarrow t = t_0/a$ .

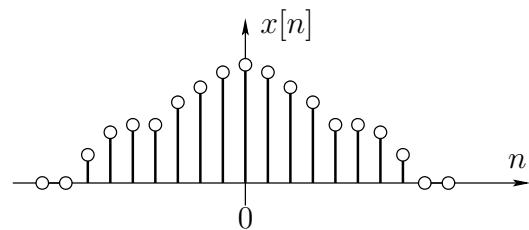
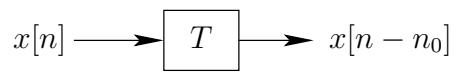
- Discreto:

La expansión discreta o inserción de ceros se define de la siguiente forma:

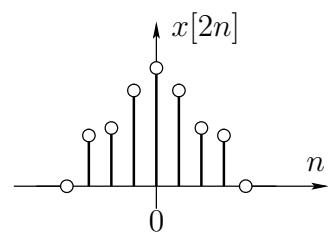
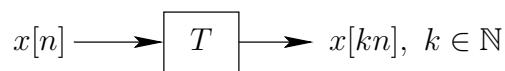
$$x[n/k] \triangleq \begin{cases} x[n/k], & n = Mk, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}, \quad M \in . \quad (3.18)$$

**Ejemplo:** cambio de velocidad en disco de vinilo.

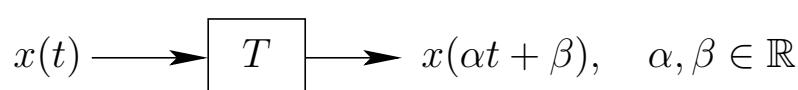
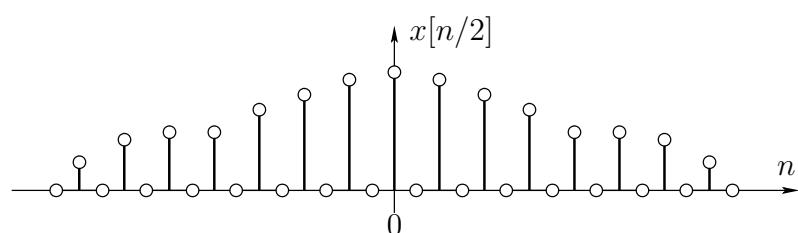
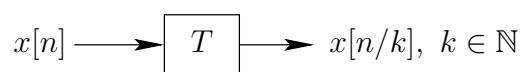
- **Transformación lineal del eje de tiempos:**



\* Compresión o diezmado:



\* Expansión o inserción de ceros:



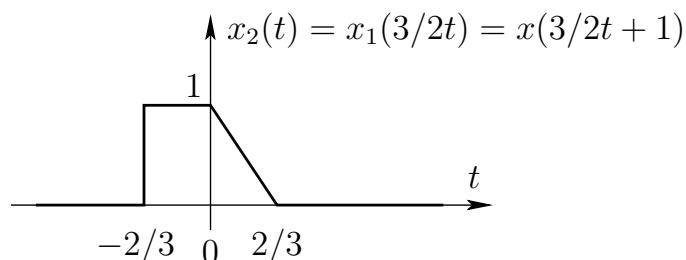
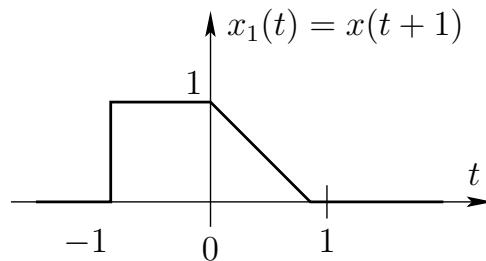
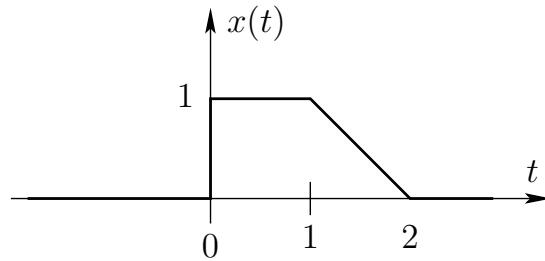
Conserva la forma de la señal, pero:

- $|\alpha| < 1$ : alarga linealmente la señal.
- $|\alpha| < 1$ : comprime linealmente la señal.
- $\alpha < 0$ : invierte en el tiempo la señal.
- $\beta \neq 0$ : desplaza en el tiempo la señal.

Forma de hacerlo gráficamente de forma sistemática\footnote{Se puede hacer en el orden inverso pero hay que tener cuidado.}:

- Desplazamiento:  $x(t) \rightarrow x(t + \beta)$ .
- Escalamiento y/o inversión:  $x(t + \beta) \rightarrow x(\alpha t + \beta)$ .

**Ejemplo:**  $x(t) \rightarrow x\left(\frac{3}{2}t + 1\right)$ .



Podemos comprobar que en ciertos instantes temporales de interés el resultado es correcto:

- $t = -\frac{2}{3} \Rightarrow x\left(\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1\right) = x(-1 + 1) = x(0);$
- $t = 0 \Rightarrow x\left(\frac{3}{2} \cdot 0 + 1\right) = x(1);$
- $t = \frac{2}{3} \Rightarrow x\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1\right) = x(1 + 1) = x(2).$



## 4. Señales elementales

Vamos a ver algunos tipos de señales que no sólo aparecen con frecuencia, sino que además sirven como bloques fundamentales (bases) mediante los que formar muchas otras señales más complejas.

### 4.1 Señales exponenciales y senoidales

#### 4.1.1 Continuas

Señal exponencial compleja continua:

$$x(t) = Ce^{st}, \quad C, s \in \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

$$C = |C|e^{j\theta}, \quad (4.2)$$

$$s = \sigma + j\omega_0. \quad (4.3)$$

Dependiendo de las constantes  $C$  y  $s$ , podemos tener señales con distintas características:

- **Señales exponenciales reales:**  $C, s \in \mathbb{R}$ , ( $s = \sigma$ ).

$$x(t) = Ce^{\sigma t}, \quad C, \sigma \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Hay tres posibilidades, según el signo de  $\sigma$ :

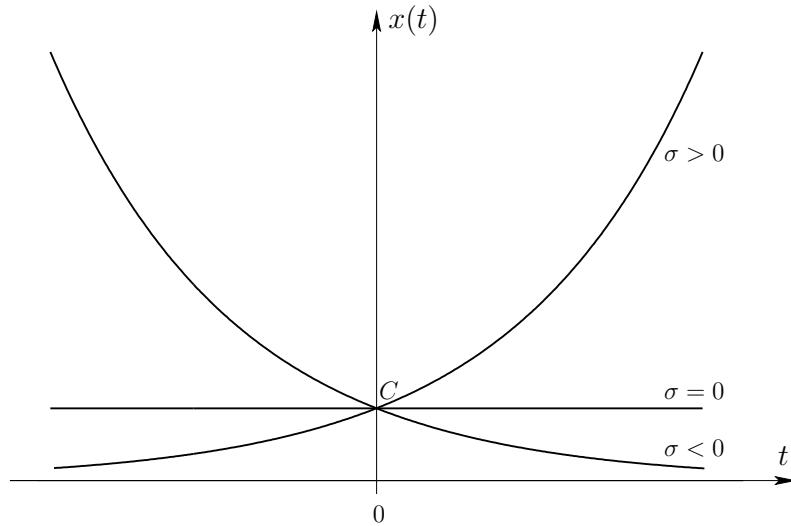
- **Creciente:**  $\sigma > 0$ .

Ejemplos: reacciones en cadena, población con nacimiento y sin muerte.

- **Decreciente:**  $\sigma < 0$ .

Ejemplos: circuitos RC, sistemas mecánicos amortiguados.

- **Constante:**  $\sigma = 0$ .



- **Señales periódicas exponencial compleja y senoidal:**

$$s = j\omega_0, \quad (4.5)$$

puramente imaginaria.

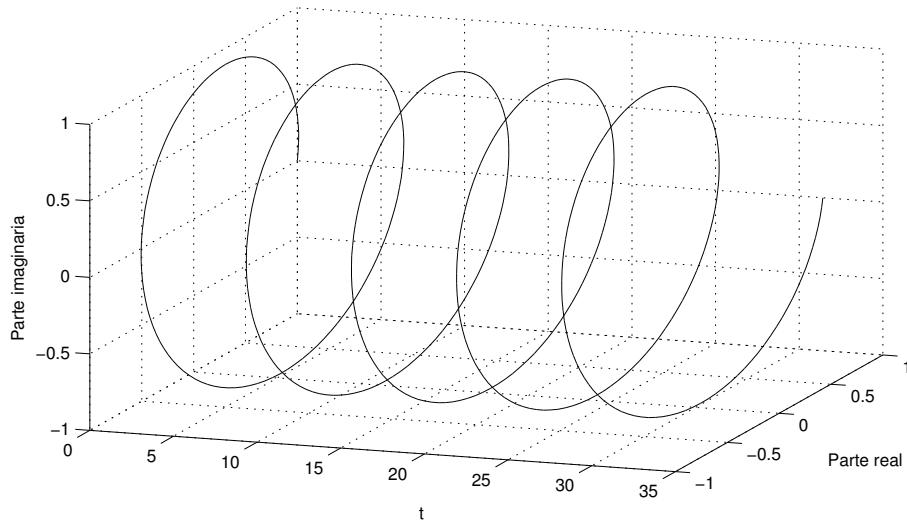
$$x(t) = Ce^{j\omega_0 t}, \quad C \in \mathbb{C}, \omega_0 \in . \quad (4.6)$$

Podemos expresarlas de la siguiente forma:

$$x(t) = |C|e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} = |C|e^{j(\omega_0 t + \theta)}. \quad (4.7)$$

El caso más sencillo de exponencial compleja es para la constante  $C = 1$ :

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}. \quad (4.8)$$



Son **señales periódicas**, ya que cumplen la ecuación \eqref{eq:periodica\_continua}:

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t, \quad (4.9)$$

$$|C|e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} = |C|e^{j\theta} e^{j\omega_0(t+T)} = |C|e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} \quad (4.10)$$

$$\Downarrow \quad (4.11)$$

$$e^{j\omega_0 T} = 1. \quad (4.12)$$

Si  $\omega_0 = 0$ , la señal es constante,  $x(t) = C$ , y es periódica, para cualquier periodo,  $T$ .

Si  $\omega_0 \neq 0$ , para que se cumpla la condición dada por la ecuación \eqref{eq:condicion\_exp\_periodica},  $\omega_0 T$  debe ser múltiplo de  $2\pi$ , es decir:

$$\omega_0 T = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

Según la definición vista de periodo fundamental (valor mínimo del periodo), éste debe cumplir:

$$\omega_0 T = \pm 2\pi, \quad (4.14)$$

por lo que el periodo fundamental de una exponencial compleja continua es:

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}. \quad (4.15)$$

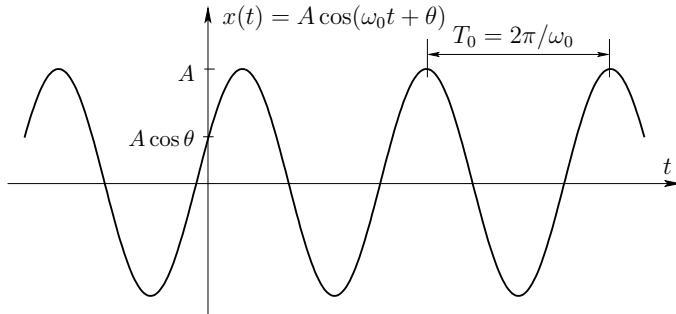
$\omega_0$  es la frecuencia fundamental, en rad/s, de la exponencial compleja periódica, y está relacionada con la frecuencia fundamental en Hertzios:

$$\omega_0 = 2\pi f_0. \quad (4.16)$$

Las exponenciales  $e^{j\omega_0 t}$  y  $e^{-j\omega_0 t}$  tienen el mismo periodo fundamental,  $T_0$ .

Una señal muy relacionada con la exponencial compleja periódica son las señales senoidales (seno y coseno):

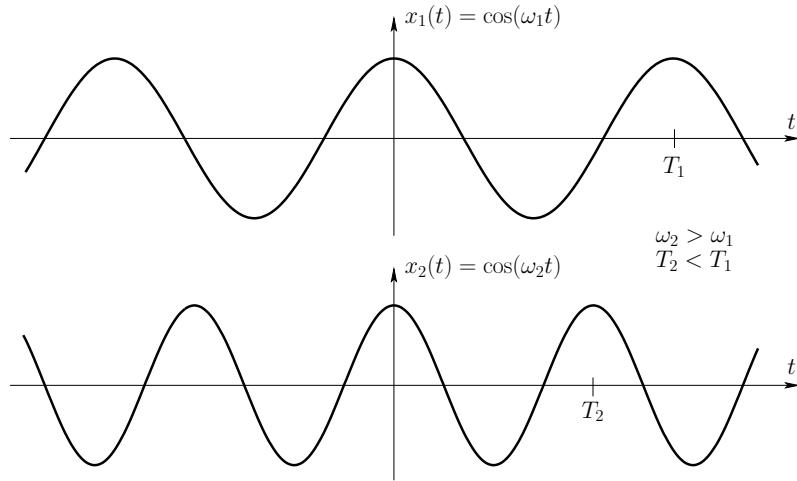
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (4.17)$$



En la ecuación \eqref{eq:periodo\_frecuencia} se observa que el periodo fundamental y la frecuencia fundamental son inversamente proporcionales. Como se ve en la siguiente gráfica, si se aumenta la frecuencia fundamental, aumenta la velocidad de oscilación y disminuye el periodo fundamental, y viceversa. Además este incremento en la velocidad de oscilación con la frecuencia fundamental es monótono, es decir, siempre que se aumente la frecuencia fundamental de la señal exponencial compleja, aumenta la velocidad de oscilación.

A partir de la relación de Euler:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t), \quad (4.18)$$



las señales senoidales también pueden ponerse en forma de exponencial compleja periódica:

$$A \cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t} = A \Re\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\}, \quad (4.19)$$

$$A \sin(\omega_0 t + \theta) = \frac{A}{2j} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} - \frac{A}{2j} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t} = A \Im\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\}. \quad (4.20)$$

Este tipo de señales aparecen en los sistemas físicos con conservación de energía, como por ejemplo, en la respuesta natural de un circuito LC, en el movimiento armónico simple o en la presión acústica de una nota musical.

\vspace\*{1em} Las señales periódicas en general y éstas en particular, son ejemplos de señales de potencia (hacemos el cálculo para  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ ):

$$E_0 = \int_0^{T_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \int_0^{T_0} 1 dt = T_0. \quad (4.21)$$

Como hay un número infinito de períodos, al integral a todo el tiempo, obtenemos una energía total:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \infty. \quad (4.22)$$

La potencia media la podemos obtener con la expresión para señales periódicas:

$$P_\infty = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \frac{E_{T_0}}{T_0} = 1, \quad (4.23)$$

o bien con la expresión general:

$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T}{2T} = 1. \quad (4.24)$$

\vspace\*{1em} Las señales periódicas exponenciales complejas son fundamentales para el análisis de señales y sistemas, pues se pueden emplear como base para muchas otras señales, como veremos en el tema 4.

Para ello es útil considerar **conjuntos de exponenciales complejas relacionadas armónicamente**:

$$\phi_k(t) = e^{j\omega_k t}. \quad (4.25)$$

Todas las exponenciales complejas relacionadas armónicamente tienen la propiedad de ser periódicas con un periodo común  $T_0$ <sup>1</sup>:

$$x(t) = x(t + T_0) \Rightarrow e^{j\omega_k T_0} = 1. \quad (4.26)$$

$$\omega_k T_0 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.27)$$

Si definimos  $\omega_0$  como<sup>2</sup>:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (4.28)$$

la frecuencia fundamental de cada una de las exponenciales complejas relacionadas armónicamente es:

$$\omega_k = k\omega_0. \quad (4.29)$$

Sus frecuencias fundamentales,  $\omega_k$ , son múltiplos enteros de una sola frecuencia,  $\omega_0 > 0$ .

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T_0} t}. \quad (4.30)$$

El periodo fundamental de cada exponencial compleja relacionada armónicamente será:

$$\frac{2\pi}{|\omega_k|} = \frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.31)$$

por lo que, como ya hemos dicho,  $\phi_k(t)$  es también periódica con periodo  $T_0$  (múltiplo del periodo fundamental).

Además dado que  $k \in \mathbb{Z}$ , hay infinitas exponenciales complejas relacionadas armónicamente con un cierto periodo  $T_0$ .

- **Señales exponenciales complejas generales:**

Tienen la forma más general:

$$x(t) = Ce^{st}, \quad C, s \in \mathbb{C}, \quad (4.32)$$

donde  $s$  está dado en forma rectangular y  $C$  en forma polar:

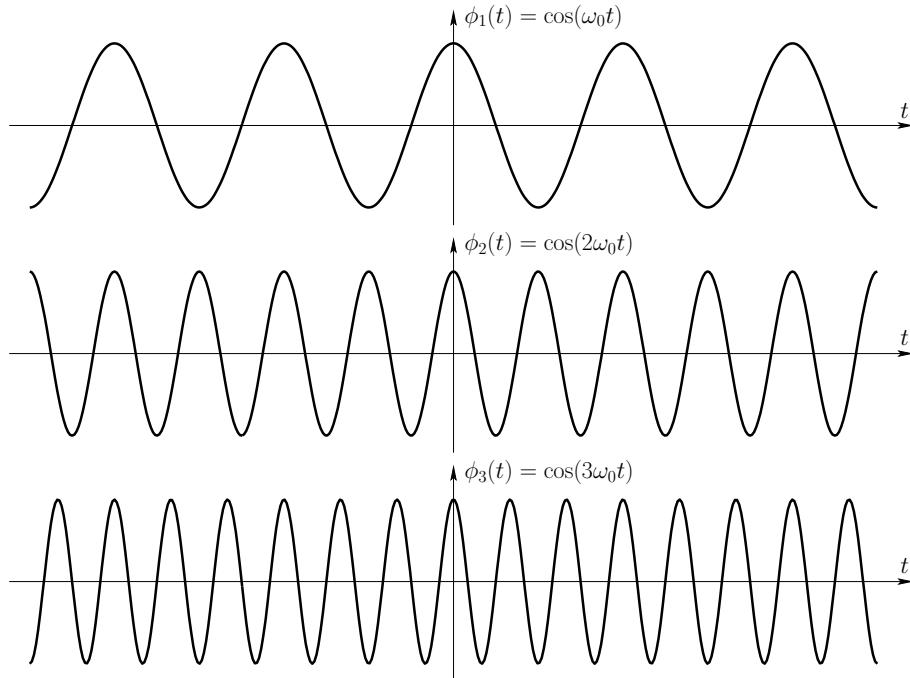
$$C = |C|e^{j\theta}, \quad (4.33)$$

$$s = \sigma + j\omega_0. \quad (4.34)$$

---

<sup>1</sup> $T_0$  no es ahora el periodo fundamental de cada una, sino el periodo común de todas ellas.

<sup>2</sup> $\omega_0$  tampoco es ahora la frecuencia fundamental de cada una, que será  $\omega_k$ .



Podemos interpretarlas a partir de los dos casos anteriores:

$$x(t) = C e^{\sigma t} = |C| e^{j\theta} e^{(\sigma+j\omega_0)t} = |C| e^{\sigma t} e^{j(\omega_0 t + \theta)}, \quad (4.35)$$

y a partir de la ecuación de Euler:

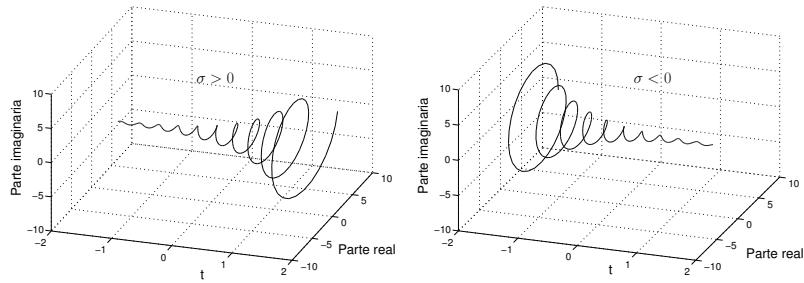
$$x(t) = |C| e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta) + j |C| e^{\sigma t} \sin(\omega_0 t + \theta). \quad (4.36)$$

Corresponden a señales oscilantes crecientes o decrecientes, con envolvente:

$$\pm |C| e^{\sigma t}. \quad (4.37)$$

Según sea el signo de  $\sigma$ , tendremos:

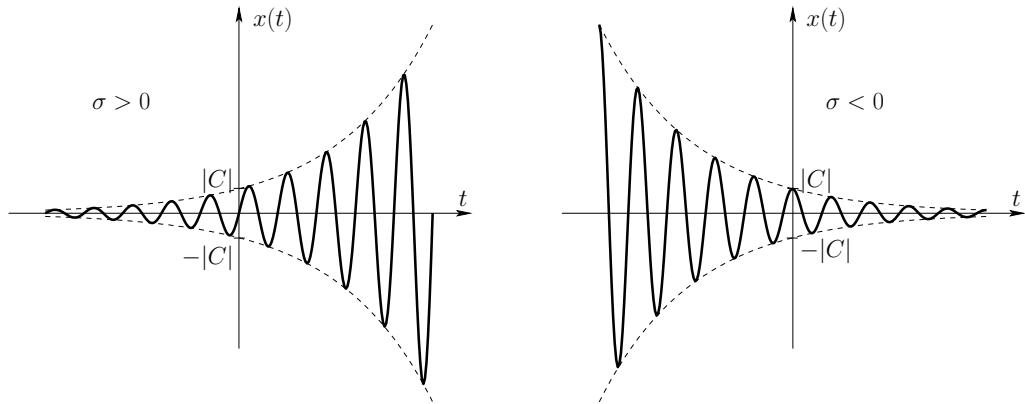
- $\sigma = 0$ : exponencial compleja periódica (partes real e imaginaria senoidales periódicas).
- $\sigma > 0$ : exponencial compleja periódica por exponencial creciente<sup>3</sup> (partes real e imaginaria senoidal por exponencial creciente).
- $\sigma < 0$ : exponencial compleja periódica por exponencial decreciente (partes real e imaginaria senoidal por exponencial decreciente).



En el caso real:

Ejemplos de este tipo de señales para el caso amortiguado ( $\sigma < 0$ ) aparecen por ejemplo en circuitos RLC o en sistemas mecánicos con fuerzas de amortiguamiento y restauración.

<sup>3</sup>El resultado ya no es periódico



### 4.1.2 Discretas

Señal exponencial compleja discreta:

$$x[n] = Cz^n, \quad C, z \in \mathbb{C}. \quad (4.38)$$

$$C = |C|e^{j\theta}, \quad (4.39)$$

$$z = |z|e^{j\Omega_0}. \quad (4.40)$$

Para que sea una expresión más análoga al caso continuo también se puede poner de la siguiente forma, aunque es menos habitual:

$$x[n] = Ce^{\beta n}, \quad C, \beta \in \mathbb{C}, \quad (4.41)$$

donde

$$z = e^{\beta}. \quad (4.42)$$

Dependiendo de las constantes  $C$  y  $z$ , podemos tener señales con distintas características:

- **Señales exponenciales reales:**  $C, z = r \in \mathbb{R}$ .

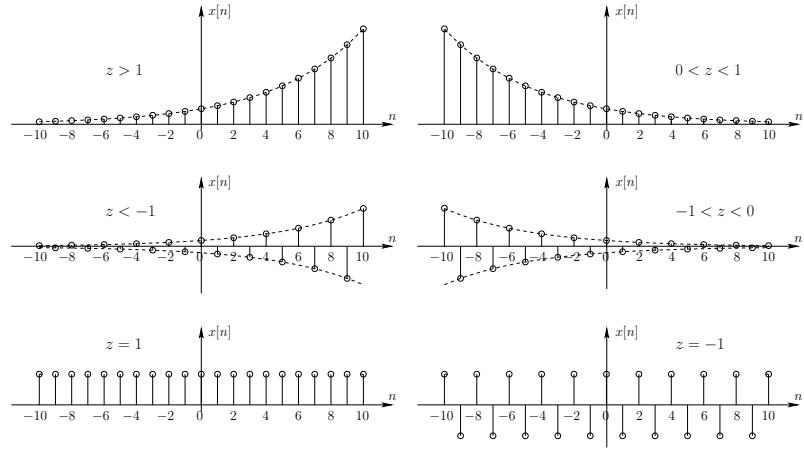
Según el valor de  $r$ :

- $|r| > 1$ : crece exponencialmente.
- $|r| < 1$ : decrece exponencialmente.
- $r > 0$ : valores del mismo signo.
- $r < 0$ : valores con signo alterno.
- $r = 1$ : valor constante.
- $r = -1$ : valor alterno  $\pm C$ .
- **Señales senoidales:**  $|z| = 1$ .

$$x[n] = Ce^{j\Omega_0 n}, \quad C \in \mathbb{C}, \Omega_0 \in \mathbb{R}. \quad (4.43)$$

Podemos expresarla de la siguiente forma:

$$x[n] = |C|e^{j\theta}e^{j\Omega_0 n} = |C|e^{j(\Omega_0 n + \theta)}. \quad (4.44)$$



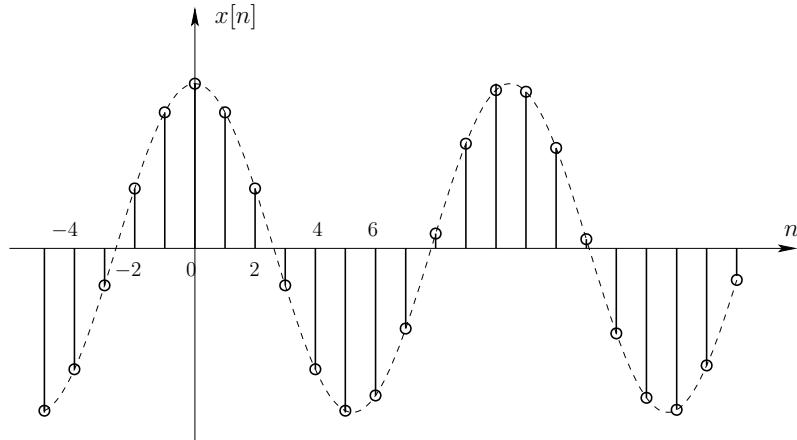
El caso más sencillo corresponde a  $C = 1$  (ecuación de Euler):

$$e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + j \sin(\Omega_0 n). \quad (4.45)$$

al igual que en el caso continuo, está muy relacionada con las señales senoidales:

$$x[n] = A \cos(\Omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j\Omega_0 n}. \quad (4.46)$$

Al igual que en el caso continuo, son **señales de potencia** ( $E_\infty$  infinita,  $P_\infty$  finita), pero en este caso no son necesariamente periódicas, como veremos en la sección \ref{periodicidad\_exp\_discretas}.



- **Señales exponenciales complejas generales:**

Tienen la forma más general:

$$x[n] = Cz^n, \quad C, z \in \mathbb{C}, \quad (4.47)$$

donde  $C$  y  $z$  están dados en forma polar:

$$C = |C|e^{j\theta}, \quad (4.48)$$

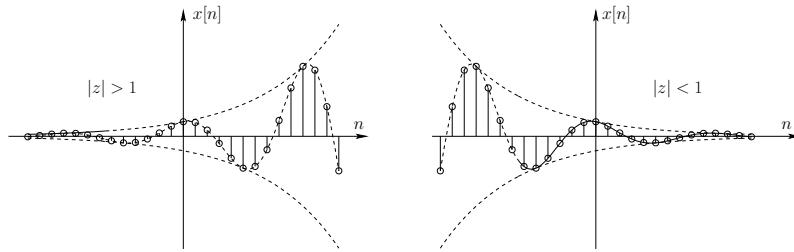
$$z = |z|e^{j\Omega_0}. \quad (4.49)$$

Podemos interpretarlas a partir de los dos casos anteriores, expresando:

$$x[n] = Cz^n = |C||z|^n e^{j(\Omega_0 n + \theta)} = |C||z|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j|C||z|^n \sin(\Omega_0 n + \theta). \quad (4.50)$$

Según sea  $|z|$  tenemos distintos casos:

- $|z| = 1$ : señal senoidal (partes real e imaginaria senoidales).
- $|z| > 1$ : señal senoidal por exponencial creciente.
- $|z| < 1$ : señal senoidal por exponencial decreciente.



#### 4.1.3 Propiedades de periodicidad de las exponenciales discretas

\label{periodicidad\_exp\_discretas} Para la señal periódica exponencial compleja continua hemos visto que tiene las siguientes propiedades:

- $e^{j\omega_0 t}$  es periódica,  $\forall \omega_0$ .
- Exponentiales complejas distintas para distintos valores de  $\omega_0$ . Cuanto mayor sea  $\omega_0$ , mayor será la velocidad de oscilación de la señal.
- Existen infinitas exponentiales complejas relacionadas armónicamente con un cierto período dado  $T_0$ .

Vamos a ver que estas propiedades son distintas para el caso de las exponentiales complejas senoidales discretas, lo que hará que haya que tener cierto cuidado al manejarlas.

Estudiaremos, sin pérdida de generalidad, las propiedades de  $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ .

- **Periodicidad:**

Aunque una senoidal discreta oscile, y tenga envolvente periódica, no tiene por qué ser necesariamente periódica, pues dependerá de donde estén colocadas las muestras. Sabemos que para que sea periódica se debe cumplir:

$$x[n] = x[n+N], \quad (4.51)$$

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0(n+N)} \Rightarrow e^{j\Omega_0 N} = 1, \quad (4.52)$$

que se cumple sólo en el caso de que se cumpla la siguiente relación:

$$\Omega_0 N = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.53)$$

Por lo tanto, **para que una señal senoidal discreta sea periódica**, debe cumplirse la siguiente condición:

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}, \quad (4.54)$$

o lo que es lo mismo, que esta expresión sea racional.

En este caso, podemos obtener el **periodo fundamental**,  $N_0$ , que será el mínimo valor del periodo:

$$N_0 = \min \left\{ \frac{2\pi}{\Omega_0} m \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.55)$$

La **frecuencia fundamental** ahora no será  $\Omega_0$ , como en el caso continuo, sino:

$$\frac{\Omega_0}{m} = \frac{2\pi}{N_0}. \quad (4.56)$$

Veamos algunos ejemplos:\

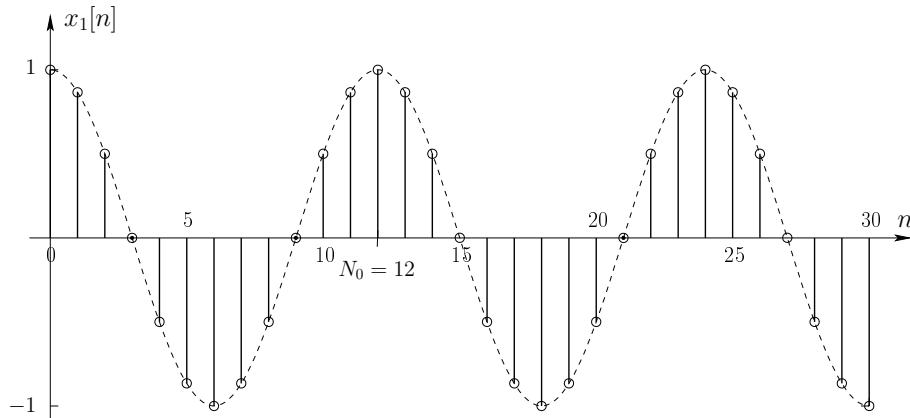
**Ejemplo 1:**  $x_1[n] = \cos(2\pi n/12)$ ,  $\Omega_0 = 2\pi/12 = \pi/6$ .

$x_1[n]$  se puede ver como muestras de  $x_1(t) = \cos(2\pi t/12)$  cada  $t = 1s$ . Esta señal tiene frecuencia fundamental  $\omega_0 = \pi/6$  rad/s y periodo fundamental  $T_0 = 12s$ .

El periodo fundamental será:

$$N_0 = \min \left\{ \frac{2\pi}{\Omega_0} m \right\} = \min \left\{ \frac{2\pi}{\pi/6} m \right\} = \min \{12m\}, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow N_0 = 12. \quad (4.57)$$

La señal  $x_1[n]$  se repite cada 12 puntos, o lo que es lo mismo, cada periodo de la envolvente.



**Ejemplo 2:**  $x_2[n] = \cos(8\pi n/31)$ ,  $\Omega_0 = 8\pi/31$ .

$x_2[n]$  se puede ver como muestras de  $x_2(t) = \cos(8\pi t/31)$  cada  $t = 1s$ . Esta señal tiene frecuencia fundamental  $\omega_0 = 8\pi/31$  rad/s y periodo fundamental  $T_0 = 31/4s$ .

El periodo fundamental será:

$$N_0 = \min \left\{ \frac{2\pi}{\Omega_0} m \right\} = \min \left\{ \frac{2\pi}{8\pi/31} m \right\} = \min \left\{ \frac{31}{4} m \right\}, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow N_0 = 31. \quad (4.58)$$

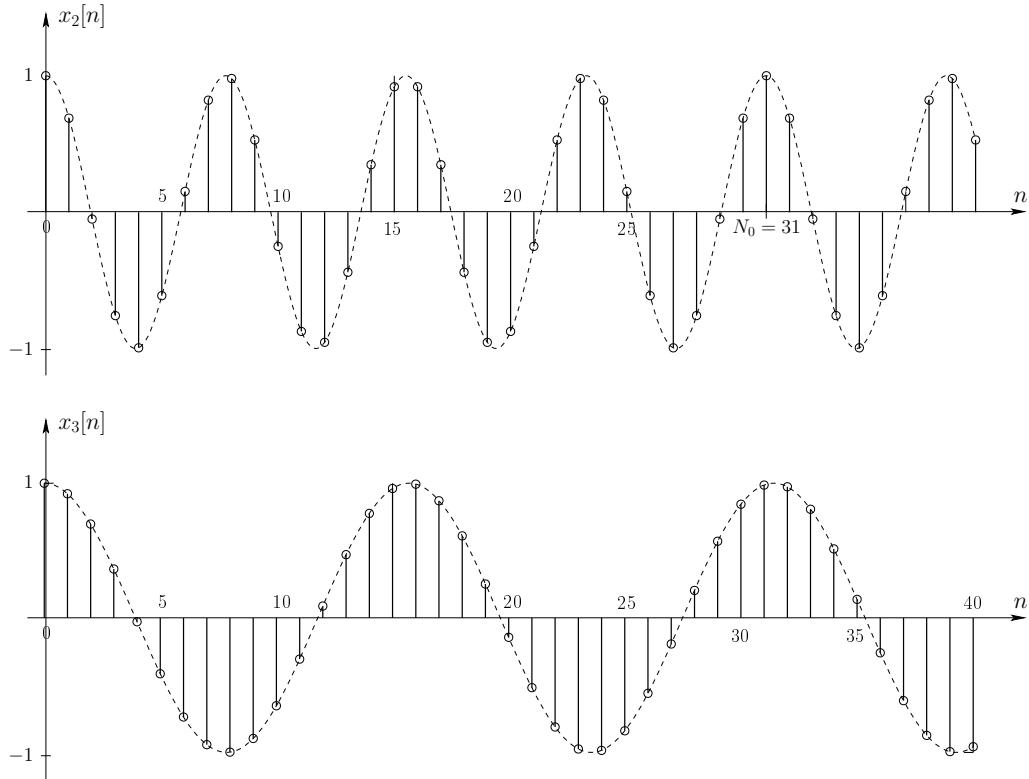
La señal  $x_1[n]$  se repite cada 31 puntos, o lo que es lo mismo, cada cuatro periodos de la envolvente.

**Ejemplo 3:**  $x_3[n] = \cos(2n/5)$ ,  $\Omega_0 = 2/5$ .

$x_3[n]$  se puede ver como muestras de  $x_3(t) = \cos(2t/5)$  cada  $t = 1s$ . Esta señal tiene frecuencia fundamental  $\omega_0 = 2/5$  rad/s y periodo fundamental  $T_0 = 5\pi s$ .

Tratamos de calcular el periodo fundamental de la señal discreta:

$$N_0 = \min \left\{ \frac{2\pi}{\Omega_0} m \right\} = \min \left\{ \frac{2\pi}{2/5} m \right\} = \min \{5\pi m\}, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{No periódica.} \quad (4.59)$$



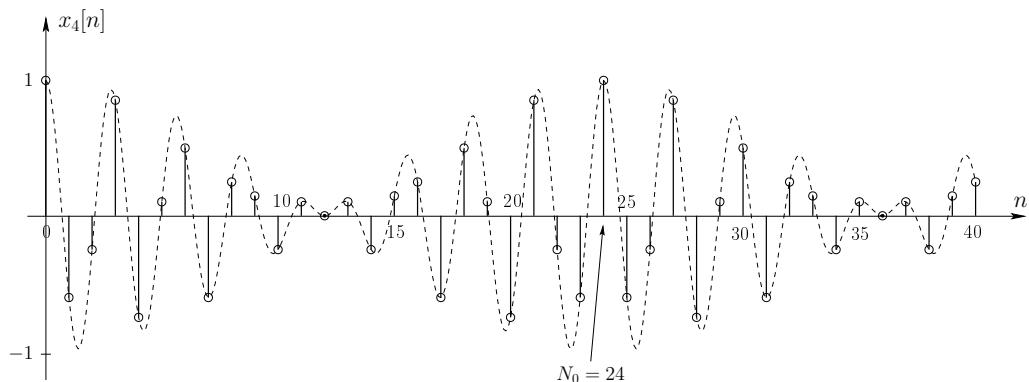
Aunque la envolvente,  $x_3(t)$ , es una señal periódica, la señal discreta,  $x_3[n]$ , no lo es.

**Ejemplo 4:** Consideremos ahora la suma de dos exponentiales complejas periódicas:

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}.$$

El primer término tiene periodo fundamental  $N_1 = 3$ , mientras que para el segundo  $N_2 = 8$ . La suma de ambos términos es periódica y tendrá como **periodo el mínimo común múltiplo de ambos**.

$$N_0 = \text{mcm}\{N_1, N_2\} = 24. \quad (4.60)$$



Se puede comprobar que **para señales continuas, una combinación lineal de señales periódicas no tiene por qué ser periódica**, ya que no siempre existe el mínimo común múltiplo de números reales. Para el caso discreto la **combinación lineal de señales periódicas siempre es periódica**, ya que para números naturales siempre existe su mínimo común múltiplo.

- **Ambigüedad:**

$$e^{j(\Omega_0+2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} \underbrace{e^{j2\pi n}}_1 = e^{j\Omega_0 n}. \quad (4.61)$$

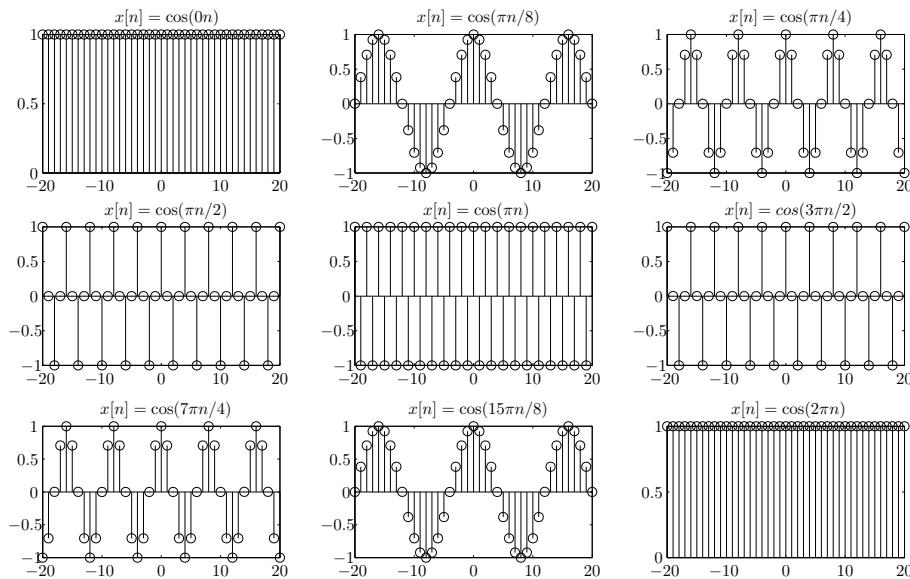
Una exponencial compleja discreta de frecuencia  $\Omega_0$  es la misma que una de frecuencia  $\Omega_0 + 2\pi$ , ...,  $\Omega_0 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Al contrario del caso continuo, en el cual todas las exponentiales complejas son distintas para distintos valores de  $\omega_0$ , en el caso discreto **no son todas distintas**. Sólo es necesario considerar un intervalo para la frecuencia fundamental de longitud  $2\pi$ . Por conveniencia se usa:

$$0 \leq \Omega_0 < 2\pi, \text{ ó } -\pi \leq \Omega_0 < \pi. \quad (4.62)$$

Debido a esta periodicidad en la frecuencia fundamental, no hay un incremento continuo de la velocidad de oscilación con la frecuencia fundamental:

$$\begin{cases} 0 < \Omega_0 < \pi & \Rightarrow \text{Incremento de velocidad de oscilación,} \\ \pi < \Omega_0 < 2\pi & \Rightarrow \text{Disminución de velocidad de oscilación.} \end{cases} \quad (4.63)$$



Las exponentiales de baja frecuencia son las que tienen frecuencias cercanas a 0 ( $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ). Las exponentiales de alta frecuencia son las que tienen frecuencias cercanas a  $\pi$  ( $\pi(2k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ).

En particular:

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n, \quad (4.64)$$

cambia de signo en cada punto. Es la señal discreta de mayor frecuencia posible.

- **Compleitud:** está relacionado con las exponentiales complejas relacionadas armónicamente.

Al igual que para el caso de señales continuas tiene interés considerar **exponentiales complejas discretas periódicas relacionadas armónicamente** (con periodo común  $N$ ):

$$\phi_k[n] = e^{j\Omega_k n}. \quad (4.65)$$

Todas las exponentiales complejas relacionadas armónicamente tienen la propiedad de que son periódicas con un periodo común  $N^4$ :

$$x[n] = x[n+N] \Rightarrow e^{j\Omega_k N} = 1. \quad (4.66)$$

<sup>4</sup>Siguiente la notación del Oppenheim, ahora usamos para el periodo común la notación  $N$  y no  $N_0$ .

$$\Omega_k N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.67)$$

Si definimos  $\Omega_0$  como<sup>5</sup>:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}, \quad (4.68)$$

la frecuencia fundamental de cada una de las exponenciales complejas relacionadas armónicamente será:

$$\Omega_k = k\Omega_0 = k \frac{2\pi}{N}. \quad (4.69)$$

Sus frecuencias fundamentales,  $\Omega_k$ , son múltiplos enteros de una sola frecuencia,  $\Omega_0 > 0$ .

$$\phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}. \quad (4.70)$$

Pues bien, en el caso continuo todas las exponenciales complejas relacionadas armónicamente con un cierto periodo  $T_0$  son distintas, y hay infinitas:

$$\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.71)$$

Para el caso discreto esto no es así, ya que:

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \underbrace{e^{j2\pi n}}_1 = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \phi_k[n]. \quad (4.72)$$

Por lo tanto, **sólo existen  $N$  exponenciales complejas discretas relacionadas armónicamente de periodo  $N$** .

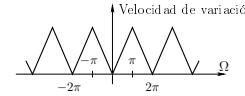
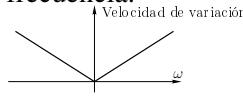
$$\phi_0[n] = \phi_N[n], \quad \phi_1[n] = \phi_{N+1}[n], \quad \phi_{-1}[n] = \phi_{N-1}[n], \quad \dots \quad (4.73)$$

En la tabla 1 se muestra un resumen comparativo de las propiedades de las exponenciales complejas senoidales continuas y discretas.

---

<sup>5</sup> $\Omega_0$  no es la frecuencia fundamental de cada una, que será  $\Omega_k$ .

	Continua $t \in \mathbb{R}$ , $\omega_0(\text{rad/s})$	Discreta $n \in \mathbb{Z}, \Omega_0(\text{rad/muestra})$
<b>Periodicidad</b> $(T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0})$ .	Siempre son periódicas.	No todas las exponenciales complejas son periódicas. <b>Debe cumplirse:</b> $\Omega_0 N = 2\pi m$ , $m \in \mathbb{Z}$ . $N_0$ es el mínimo $N$ que cumple esa relación.
<b>Ambigüedad</b>	Son todas distintas. $e^{j(\omega_0+2\pi k)t} = e^{j\omega_0 t}, e^{j2\pi kt} \neq e^{j\omega_0 t}$ .	Dos exponentiales son iguales si $\Omega_0$ varía en un múltiplo entero de $2\pi$ . $e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n}, e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n}$ .
<b>Combinación lineal de señales periódicas</b>	No siempre periódica. Ej.: $T_1 = 1$ , $T_2 = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ no existe $T_0$ con $n_1 T_1 = n_2 T_2$ .	Siempre periódica. Si $N_1, N_2$ son períodos $\Rightarrow N_0 = \text{lcm}(N_1, N_2)$ y $N_0 = n_1 N_1 = n_2 N_2$ .
<b>Compleitud</b>	Infinitas exponentiales complejas armónicas de periodo $T_0$ . $\phi_k(t) = e^{j\omega_k t} = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$ .	Sólo hay $N$ exponentiales complejas armónicas de periodo $N$ . $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ . $\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \phi_k[n]$ .
<b>Velocidad de variación</b>	Aumenta linealmente con la frecuencia.	Frecuencias bajas: cercanas a $2\pi k$ . <b>Frecuencias altas: cercanas a <math>\pi(2k + 1)</math></b> .



## 4.2 Señales impulso unitario y escalón unitario

Veremos a continuación otras señales básicas como son el impulso unitario u el escalón unitario, tanto continuo como discreto. Estas señales serán fundamentales para la caracterización de señales y sistemas que veremos en el tema 3. Comenzaremos por las señales discretas, que son más sencillas en este caso que las continuas.

### 4.2.1 Discretas

- **Impulso unitario**<sup>6</sup>:  $\delta[n]$

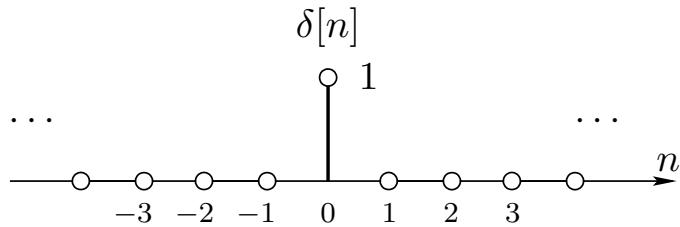
Se define como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (4.74)$$

Es una señal que vale 1 exclusivamente cuando su argumento es cero y cero en caso contrario.

**Cuestión:** ¿Cómo serán las señales  $\delta[n-3]$ ,  $\delta[n+1]$  y  $\delta[n-n_0]$ ?

<sup>6</sup>También llamado delta de Kronecker, especialmente en matemáticas.

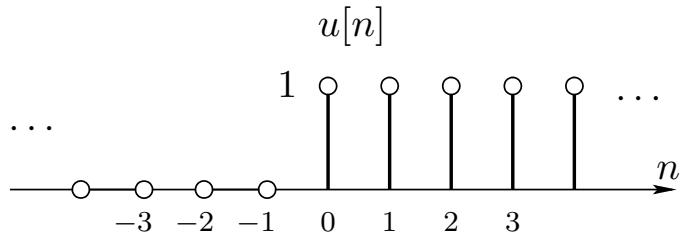


- **Escalón unitario:**  $u[n]$ .

Se define:

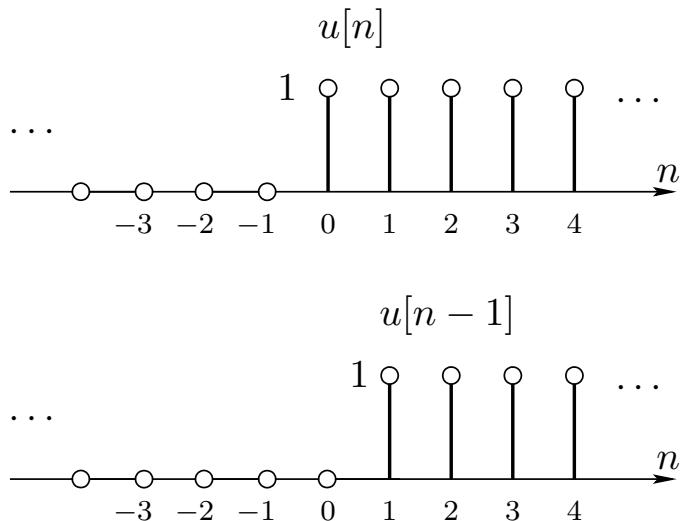
$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases} \quad (4.75)$$

Es una señal que vale 1 cuando su argumento es mayor o igual que cero y cero en caso contrario.



Se puede ver que ambas señales están relacionadas. El impulso unitario discreto es la primera diferencia del escalón unitario discreto:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]. \quad (4.76)$$

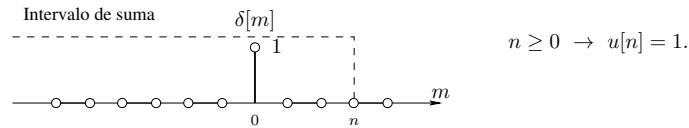
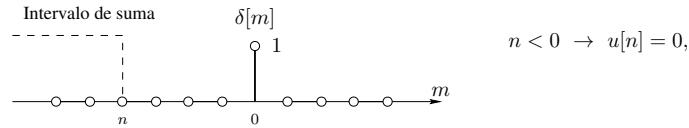


Por su parte, el escalón unitario es la sumación del impulso unitario:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]. \quad (4.77)$$

Haciendo un cambio de variable, esta expresión se transforma en otra equivalente que será útil en el tema 3:

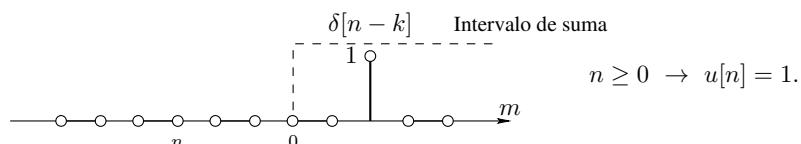
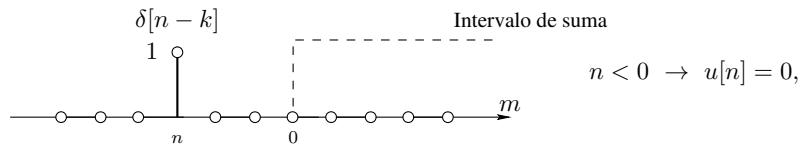
$$\text{c.v.: } k = n - m \Rightarrow m = n - k, \quad (4.78)$$



$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^0 \delta[n-k], \quad (4.79)$$

y colocando el extremo menor del sumatorio abajo, como es norma habitual:

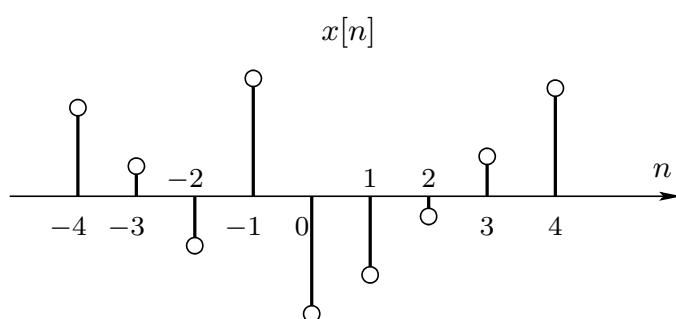
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \quad (4.80)$$



La última expresión es equivalente a la suma de impulsos retardados (usado en el tema 3):

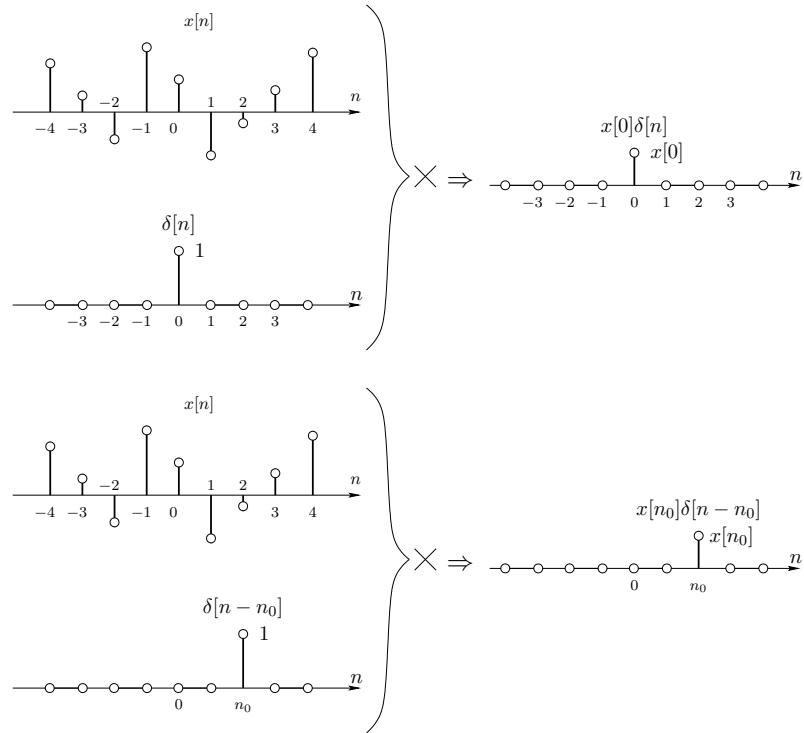
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \dots + \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots \quad (4.81)$$

El impulso unitario discreto se puede usar para obtener muestras de una señal discreta:



Por ejemplo, en  $n = 0$ : \label{eq:prop\_muestro\_delta\_discreta}

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]. \quad (4.82)$$



Para otro  $n \neq 0$ , desplazando la delta a  $n_0$ :

$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]. \quad (4.83)$$

A la ecuación \eqref{eq:prop\_muestro\_delta\_discreta} se la denomina **propiedad de muestreo del impulso unitario discreto**.

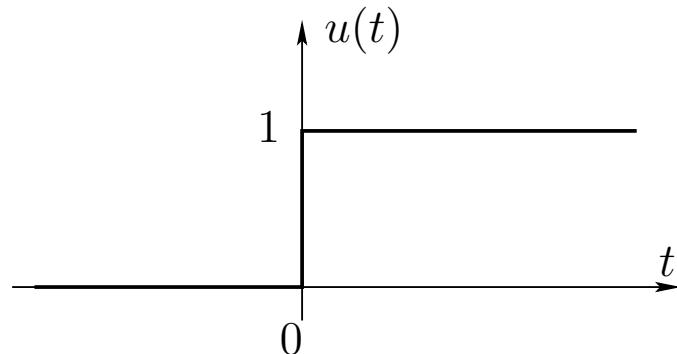
### 4.2.2 Continuas

Empezamos en este caso definiendo el escalón unitario.

- **Escalón unitario:**  $u(t)$ .

Se define de forma similar al escalón unitario discreto:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.84)$$



Se puede ver que es discontinuo en  $t = 0$ , por lo que la definición del impulso unitario no será

tan sencilla como en el caso discreto, si bien su relación sí será su análoga, como veremos a continuación.

- **Impulso unitario:**  $\delta(t)$ .

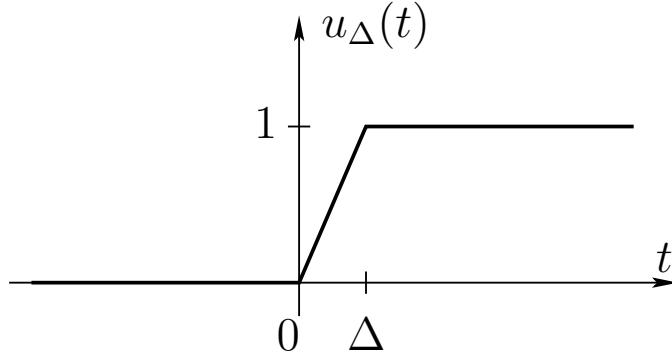
Partimos de relaciones con el escalón unitario equivalentes al caso discreto, es decir, en vez de sumación, integración, y en lugar de primera diferencia, derivación:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau, \quad (4.85)$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \quad (4.86)$$

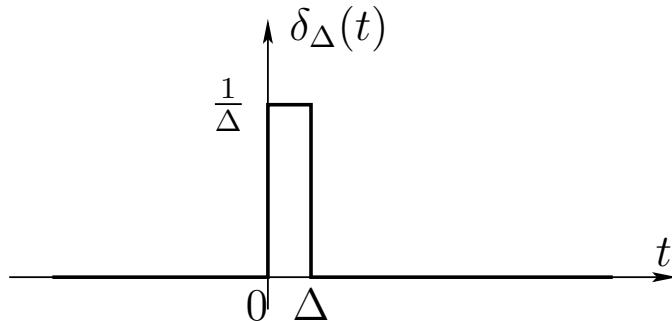
La última expresión presenta problemas formales, pues  $u(t)$  no es continua en  $t = 0$ , por lo que formalmente no es derivable.

Consideramos una aproximación al escalón unitario que sí es derivable,  $u_\Delta(t)$ , ya que pasa de 0 a 1 con una pendiente alta, pero no infinita.



Su derivada, denotada como  $\delta_\Delta(t)$ , ya no presenta problemas formales:

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}. \quad (4.87)$$



Se observa que  $\delta_\Delta(t)$  es un pulso corto de duración  $\Delta$  y altura  $1/\Delta$ , y área 1, independientemente del valor de  $\Delta$ .

En el límite:

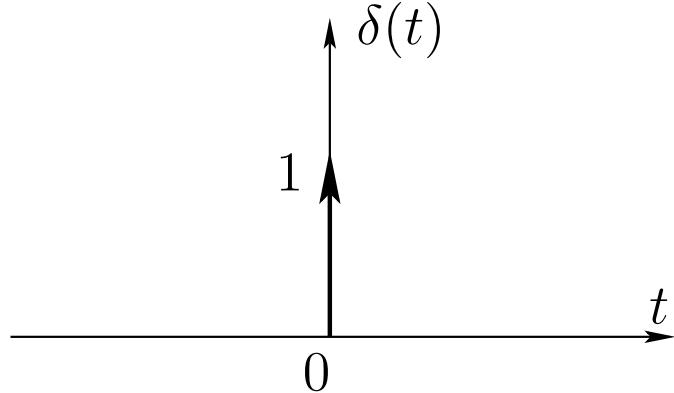
$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_\Delta(t), \quad (4.88)$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t), \quad (4.89)$$

$\delta(t)$  es una idealización de  $\delta_\Delta(t)$ , cuando su anchura se hace insignificante y su altura se hace infinito, pero su área es siempre unitaria.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (4.90)$$

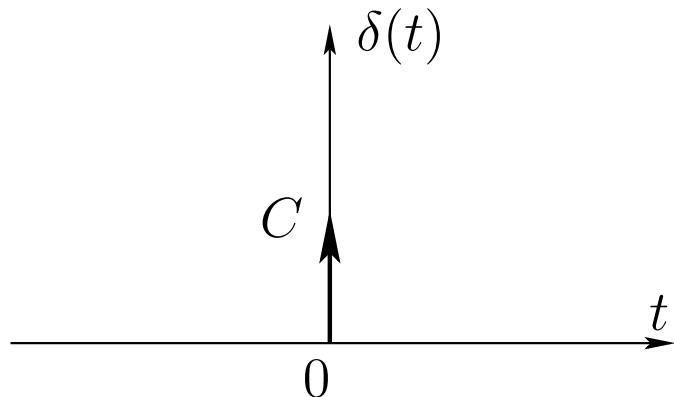
Se representa como una flecha colocada en  $t = 0$ , para indicar que su área está concentrada en torno a este instante. **La altura de la flecha, así como la etiqueta colocada junto a la misma indican su área y no su altura**, ya que  $\delta(t)$  es una señal de área.



Un impulso escalado,  $C\delta(t)$ , tendrá área  $C$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} C\delta(t) dt = C, \quad (4.91)$$

$$\int_{-\infty}^t C\delta(\tau) d\tau = Cu(t). \quad (4.92)$$

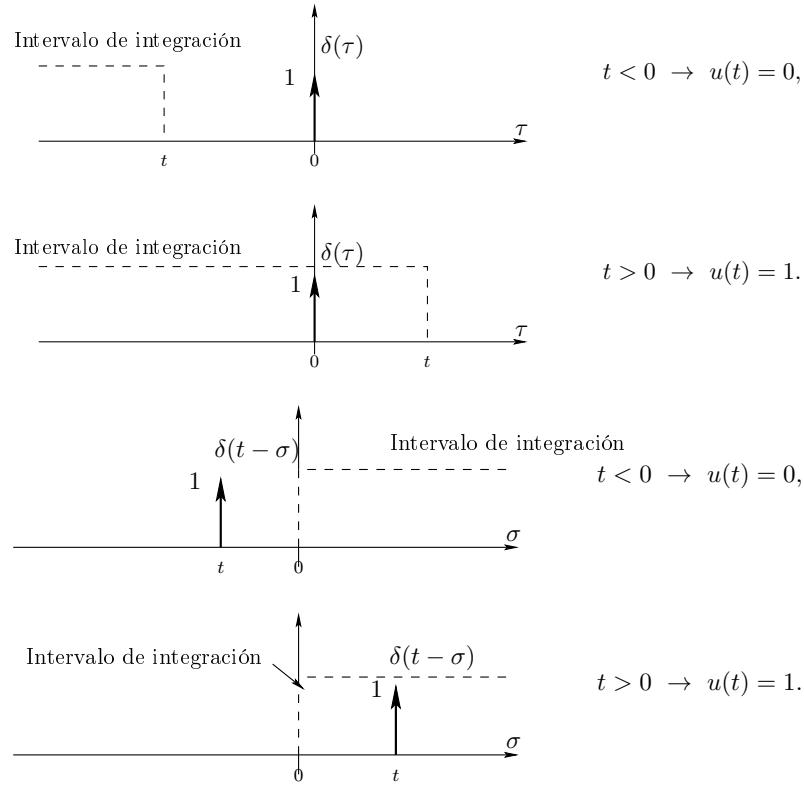


Podemos realizar las mismas interpretaciones gráficas que en el caso discreto, haciendo los cambios oportunos del mundo discreto al continuo. Así la ecuación \eqref{eq:escalon\_continuo}:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau, \quad (4.93)$$

Haciendo el cambio de variable  $\sigma = t - \tau$  to  $\tau = t - \sigma$ :

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{\infty}^0 \delta(t - \sigma) (-d\sigma) = \int_0^{\infty} \delta(t - \sigma) d\sigma. \quad (4.94)$$

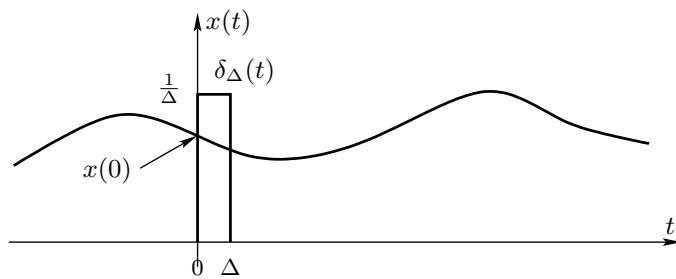


Teniendo en cuenta que el impulso unitario es una señal par:

$$\delta(t - \sigma) = \delta(\sigma - t), \quad (4.95)$$

Al igual que ocurría en el caso discreto, el impulso unitario continuo se puede emplear para obtener muestras de una señal continua (esto será muy importante en los temas 3 y 7).

Lo vemos mediante la aproximación  $\delta_\Delta(t)$ :



$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t). \quad (4.96)$$

Si  $\Delta \ll \Rightarrow x(t)$  es aproximadamente constante en  $0 \leq t \leq \Delta$ :

$$x(t)\delta_\Delta(t) \simeq x(0)\delta_\Delta(t). \quad (4.97)$$

En el límite cuando  $\Delta \rightarrow 0$ : \label{eq:prop\_muestro\_delta\_continua}

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t). \quad (4.98)$$

De forma similar, para un impulso unitario desplazado:

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0). \quad (4.99)$$

A la ecuación \eqref{eq:prop\_muestro\_delta\_continua} se la denomina **propiedad de muestreo del impulso unitario continuo**.



## 5. Propiedades básicas de los sistemas

Analizamos las propiedades más importantes que pueden tener los sistemas, tanto continuos como discretos<sup>1</sup>.

Antes de empezar a ver las propiedades de los sistemas, es conveniente indicar la **forma de proceder** para demostrar que un sistema tiene o no una propiedad<sup>2</sup>:

- Si queremos **demostrar que un sistema posee una cierta propiedad**, debemos hacerlo **a partir de la definición** y debe cumplirse para todos los elementos que aparezcan en la definición (señales, instantes de tiempo, desplazamientos, constantes, ...).
- Si queremos **demostrar que un sistema no posee una cierta propiedad**, es suficiente con que no se cumpla la definición para una determinada señal de entrada, o en un determinado instante de tiempo, o valor de las constantes involucradas, .... Por tanto, en este caso la demostración se puede realizar de dos formas alternativas:
  1. **A partir de la definición** como en el caso afirmativo, pero llegando a la conclusión de que en general no se cumple la definición.
  2. **Mediante un contraejemplo** concreto que demuestre que se incumple la definición.

### 5.1 Sistemas con y sin memoria

#### Sistema sin memoria

La **salida** en cada instante de tiempo ( $t_0, n_0$ ) depende sólo de la **entrada** en ese mismo instante de tiempo ( $t_0, n_0$ ).

#### Sistema con memoria

La **salida** en cada instante de tiempo depende de la **entrada** en un cierto instante de tiempo distinto (también puede depender del instante actual).

El concepto de memoria corresponde a cualquier mecanismo que permite almacenar (recordar) información de entradas pasadas (o futuras).

<sup>1</sup>Aunque sólo se pongan las definiciones para sistemas continuos, para el caso discreto son totalmente equivalentes.

<sup>2</sup>Para **demostrar** que un sistema posee o no una propiedad no es suficiente con enunciar la definición y sin demostrar cosa alguna, llegar a una determinada conclusión.

Por ejemplo, en el acumulador:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]. \quad (5.1)$$

En los sistemas físicos: memoria  $\Rightarrow$  almacenamiento de energía.

- Condensador: almacenamiento de carga eléctrica.
- Automóvil: almacenamiento de energía cinética.

En los sistemas digitales: memoria  $\Rightarrow$  almacenamiento de valores en registros.

#### Nota

Aunque el concepto de **memoria** sugiere recordar el pasado, no es necesario; también se puede referir al futuro. Esto puede no parecer real, pero puede ocurrir, por ejemplo, si la variable independiente es espacial (en imagen). En este caso el valor de salida en un pixel puede estar relacionado con el valor de entrada en los vecinos **pasados y futuros**.

$$y[n_1, n_2] = \sum_{p=-N}^N \sum_{q=-N}^N x[n_1 - p, n_2 - q]. \quad (5.2)$$

## 5.2 Causalidad

### Sistema causal

Hay varias definiciones equivalentes:

1. la **salida** en cualquier instante de tiempo depende sólo de valores de la **entrada** en el momento presente y en el pasado.

$$y(t_0) \xrightarrow{\text{depende de}} x(t), t \leq t_0, \forall t_0. \quad (5.3)$$

2. Son sistemas **no anticipativos**: si dos entradas son idénticas hasta cierto instante, las salidas correspondientes deben ser también iguales hasta ese instante.

$$\text{Si } x_1(t) = x_2(t), \forall t \leq t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t), \forall t \leq t_0, \forall t_0. \quad (5.4)$$

### Sistema anticausal

1. la **salida** en cualquier instante de tiempo depende sólo de valores de la **entrada** en momentos futuros.

$$y(t_0) \xrightarrow{\text{depende de}} x(t), t > t_0, \forall t_0. \quad (5.5)$$

2. Son sistemas estrictamente anticipativos: si dos entradas son idénticas para tiempos posteriores a un cierto instante, las salidas correspondientes deben ser también iguales para tiempos posteriores a ese mismo instante.

$$\text{Si } x_1(t) = x_2(t), \forall t > t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t), \forall t > t_0, \forall t_0. \quad (5.6)$$

**Sistema no causal**

Un sistema que no es causal ni anticausal.

**Ejemplos:**

- Circuito RC  $\Rightarrow$  Causal.

La salida,  $v_c(t)$ , depende sólo de valores presentes y pasados de  $v_s(t)$ .

- Automóvil  $\Rightarrow$  Causal.

No anticipa acciones futuras del conductor.

## 5.3 Invertibilidad: sistemas inversos

**Sistema invertible**

Hay varias definiciones equivalentes:

1. Un sistema es invertible si distintas entradas producen distintas salidas.

$$\text{Si } x_1(t) \neq x_2(t) \Rightarrow y_1(t) \neq y_2(t), \forall x_1(t), x_2(t); \forall t. \quad (5.7)$$

2. Un sistema es invertible cuando existe un sistema inverso,  $T^{-1}$  tal que cuando la entrada al mismo es  $y(t)$ , su salida es  $x(t)$ .

$$\exists T^{-1} / \text{si } y(t) = T\{x(t)\} \Rightarrow x(t) = T^{-1}\{y(t)\}, \forall t. \quad (5.8)$$

3. Un sistema es invertible cuando colocado en cascada con el sistema original, produce una salida  $w(t)$  igual a la entrada  $x(t)$  del primer sistema.

El sistema completo (en línea punteada en el dibujo) es el **sistema identidad**.

## 5.4 Estabilidad

**Sistema Estable**

Un **sistema** es **estable** si entradas acotadas producen salidas acotadas.

$$\text{Si } |x(t)| < B_x, \forall t \Rightarrow |y(t)| < B_y, \forall t; B_x, B_y \in^+. \quad (5.9)$$

Las dos últimas propiedades son fundamentales y las usaremos a lo largo de toda la asignatura: **Invarianza en el tiempo** y **linealidad**.

## 5.5 Invarianza en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si sus propiedades se mantienen constantes con el tiempo.

**Sistemas invariantes en el tiempo**

En el lenguaje de las señales y sistemas, un **sistema** es **invariante en el tiempo** si un desplazamiento cualquiera en el tiempo de la señal de entrada produce ese mismo desplazamiento en

la señal de salida.

$$\text{Si } y(t) = T\{x(t)\} \Rightarrow y(t - t_0) = T\{x(t - t_0)\}, \forall t_0. \quad (5.10)$$

Para que cumpla la propiedad debe verificarse para cualquier desplazamiento y cualquier señal de entrada.

Forma de demostrar que un sistema es invariante en el tiempo:

- Sea  $x_1(t)$  una entrada arbitraria  $\Rightarrow y_1(t) = T\{x_1(t)\}$ .
- Sea  $x_2(t) = x_1(t - t_0)$  para un  $t_0$  arbitrario  $\Rightarrow y_2(t) = T\{x_2(t)\} = T\{x_1(t - t_0)\}$ .
- El sistema es invariante en el tiempo si se cumple:  $y_2(t) \stackrel{?}{=} y_1(t - t_0)$ .

## 5.6 Linealidad

### Sistemas lineales

Un **sistema es lineal** si posee la propiedad de superposición: si la señal de entrada al sistema es combinación lineal (superposición) de varias señales, la salida es la misma combinación lineal de las respuestas del sistema a cada una de las señales.

$$\text{Si } x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad (5.11)$$

$$\Downarrow \quad (5.12)$$

$$y_3(t) = \alpha T\{x_1(t)\} + \beta T\{x_2(t)\} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t), \forall x_1(t), x_2(t); \alpha, \beta \in \mathcal{C}. \quad (5.13)$$

Esta propiedad se puede dividir en dos:

- **Aditividad:** Si  $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$ .
- **Homogeneidad o escalamiento:** Si  $x_2(t) = \alpha x_1(t) \Rightarrow y_2(t) = \alpha y_1(t)$ .

La propiedad de homogeneidad implica que en un **sistema lineal**, si la **entrada es nula**, la **salida** debe ser asimismo **nula**.

$$\text{Si } \alpha = 0 : x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0. \quad (5.14)$$

Forma de demostrar que un sistema es lineal:

- Sean  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  entradas arbitrarias.  $y_1(t) = T\{x_1(t)\}$ ,  $y_2(t) = T\{x_2(t)\}$ .
- Sea  $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ , con constantes  $\alpha$  y  $\beta$  arbitrarias.
- $y_3(t) = T\{x_3(t)\} = T\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\}$ .
- El sistema es lineal si se cumple:  $y_3(t) \stackrel{?}{=} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ .

## 5.7 Ejemplos de propiedades

### 5.7.1 Ejemplo 1: $y(t) = e^{x(t)}$ .

**Memoria** La salida en cada instante de tiempo  $t_0$  depende únicamente de la entrada en ese mismo instante:  $y(t_0) = e^{x(t_0)}$ ,  $\forall t_0$ . → Sin memoria

**Causalidad** Todo sistema sin memoria es causal. → Causal.

**Invertibilidad**  $w(t) = \ln(y(t)) = x(t)$ . Se obtiene una señal idéntica a la entrada para cualquier instante de tiempo. → Invertible.

**Estabilidad** Si  $|x(t)| < B_x$ ,  $\forall t \Rightarrow |y(t)| < e^{B_x} = B_y$ ,  $\forall t$ . → Estable.

**Invarianza en el tiempo** Sea  $x_1(t)$  una entrada arbitraria  $\Rightarrow y_1(t) = e^{x_1(t)}$ . Sea  $x_2(t) = x_1(t - t_0)$  para un  $t_0$  arbitrario  $\Rightarrow y_2(t) = e^{x_2(t)} = e^{x_1(t-t_0)}$ . Por otro lado:  $y_1(t - t_0) = e^{x_1(t-t_0)}$ . Por tanto, se cumple que:  $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ . → Invariante en el tiempo.

**Linealidad** Sean  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  entradas arbitrarias.  $y_1(t) = e^{x_1(t)}$ ,  $y_2(t) = e^{x_2(t)}$ . Sea  $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  una combinación lineal cualquiera de las entradas anteriores.  $y_3(t) = e^{x_3(t)} = e^{\alpha x_1(t)} e^{\beta x_2(t)}$ . Como  $y_3(t) \neq \alpha e^{x_1(t)} + \beta e^{x_2(t)}$ . → No lineal.

Por tanto el sistema es  $\{-M, +C, +I, +E, +IT, -L\}$ .

### 5.7.2 Ejemplo 2: $y[n] = x[n]x[n - 1]$ .

**Memoria** La salida en cada instante de tiempo,  $n_0$ , depende de otro instante de tiempo distinto,  $n_0 - 1$ . → Con memoria

**Causalidad** La salida en cada instante de tiempo,  $n_0$ , depende de la entrada en ese mismo instante (presente) y en el anterior,  $n_0 - 1$ , (pasado). → Causal.

**Invertibilidad** Contraejemplo: Sean dos entradas distintas,  $x_1[n]$  nula para las muestras pares y  $x_2[n]$  nula para las muestras impares, pero  $y_1[n] = y_2[n] = 0$ . → No invertible\footnote{Otro contraejemplo sencillo es:  $x_2[n] = -x_1[n] \Rightarrow y_2[n] = y_1[n]$ .}.

**Estabilidad** Si  $|x[n]| < B_x$ ,  $\forall n \Rightarrow |y[n]| < B_x^2 = B_y$ ,  $\forall n$ . → Estable.

**Invarianza en el tiempo** Sea  $x_1[n]$  una entrada arbitraria  $\Rightarrow y_1[n] = x_1[n]x_1[n - 1]$ . Sea  $x_2[n] = x_1[n - n_0]$  para un  $n_0$  arbitrario  $\Rightarrow y_2[n] = x_2[n]x_2[n - 1] = x_1[n - n_0]x_1[n - n_0 - 1]$ . Por otro lado:  $y_1[n - n_0] = x_1[n - n_0]x_1[n - n_0 - 1]$ . Por tanto, se cumple que:  $y_2[n] = y_1[n - n_0]$ . → Invariante en el tiempo.

**Linealidad** Sean  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  entradas arbitrarias.  $y_1[n] = x_1[n]x_1[n - 1]$ ,  $y_2[n] = x_2[n]x_2[n - 1]$ . Sea  $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$  una combinación lineal cualquiera de las entradas anteriores.  $y_3[n] = x_3[n]x_3[n - 1] = (\alpha x_1[n] + \beta x_2[n])(\alpha x_1[n - 1] + \beta x_2[n - 1])$ .  $y_3[n] = \alpha^2 x_1[n]x_1[n - 1] + \alpha\beta x_1[n]x_2[n - 1] + \alpha\beta x_1[n - 1]x_2[n] + \beta^2 x_2[n]x_2[n - 1]$ . Como  $y_3[n] \neq \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = \alpha x_1[n]x_1[n - 1] + \beta x_2[n]x_2[n - 1]$ . → No lineal.

Por tanto el sistema es  $\{+M, +C, -I, +E, +IT, -L\}$ .

## 6. Interconexión de sistemas

Muchos sistemas complicados están construidos mediante interconexión de sistemas elementales.

### ■ Example 6.1 Cadena musical

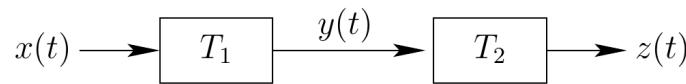
Interconexión de: sintonizador de radio, reproductor de CD, pletinas, amplificador, altavoces.

■

### 6.1 Serie o cascada

La entrada del segundo sistema es la salida del primero.

Diagrama de bloques:



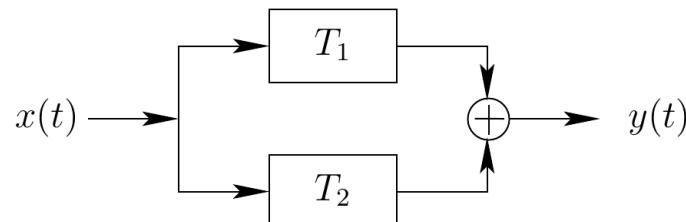
### ■ Example 6.2 Receptor de radio seguido de amplificador.

■

### 6.2 Paralelo

Se suma la salida de cada sistema correspondiente a la misma señal de entrada.

Diagrama de bloques:



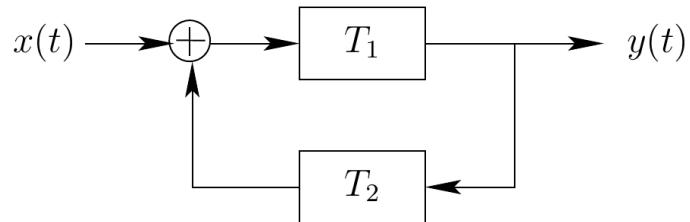
### ■ Example 6.3 Dos micrófonos conectados a un amplificador.

■

## 6.3 Realimentación

Un sistema controla a otro a partir de su salida.

Diagrama de bloques:



- **Example 6.4** Regulador de velocidad del automóvil: ajusta el flujo de combustible para mantener la velocidad constante.

# Bloque 2. Análisis espectral

<b>7</b>	<b>Bloque 2. Análisis espectral .....</b>	<b>61</b>
7.1	Objetivo de este bloque .....	61



## 7. Bloque 2. Análisis espectral

Hasta ahora hemos estudiado las señales y los sistemas desde una perspectiva directa, en el dominio del tiempo.

En el presente bloque de la asignatura se introduce una caracterización alternativa en el dominio espectral, o dominio de la frecuencia. La ventaja de esta representación es doble:

- Por un lado, la descripción de las señales y los sistemas en términos de su contenido frecuencial conecta de forma natural con fenómenos físicos cotidianos.
- Por otro lado, el efecto de un sistema LTI sobre una señal de entrada se describe en términos de una operación mucho más sencilla que la convolución con la respuesta al impulso  $h(t)$ .

En el tema 3 vamos a describir el análisis de Fourier para señales en tiempo continuo, mientras que en el tema 4, estudiaremos las señales en tiempo discreto.

### 7.1 Objetivo de este bloque

Al finalizar el Bloque 2, el estudiante debe ser capaz de:

- Entender la utilidad del análisis de Fourier para la descripción de señales y de sistemas LTI.
- Comprender y aplicar el concepto de autovalor y autofunción de un operador, y entender que las exponenciales complejas son autofunciones de cualquier sistema LTI.
- Conocer las diferentes variantes de análisis de Fourier en tiempo continuo o discreto y para señales de energía o de potencia, así como sus ecuaciones de análisis y síntesis.
- Comprender la representación de señales en el dominio transformado de Fourier y la dualidad tiempo-frecuencia.
- Conocer las propiedades, y entender la dualidad existente entre ellas, para el desarrollo en serie de Fourier y transformada de Fourier, tanto de tiempo continuo, como de tiempo discreto.
- Comprender las similitudes y diferencias que presenta la variable frecuencial para el caso de tiempo continuo y el caso de tiempo discreto. Entender cuál es su origen y ser capaz de inferir sus consecuencias.
- Trabajar con señales y sistemas de manera complementaria en los dominios temporal y transformado.
- Saber caracterizar sistemas LTI a partir de su respuesta en frecuencia.
- Aprender a resolver problemas relacionados con la caracterización de sistemas LTI mediante

análisis de Fourier.

# Análisis de Fourier para señales en tiempo continuo

<b>8</b>	<b>Tema 3. Análisis de Fourier para señales en tiempo continuo .....</b>	<b>64</b>
8.1	Introducción .....	64
<b>9</b>	<b>Representación de señales periódicas: la serie de Fourier en tiempo continuo ..</b>	<b>67</b>
<b>10</b>	<b>Exponenciales complejas, autofunciones de los sistemas LTI continuos .....</b>	<b>68</b>
<b>11</b>	<b>Fórmulas de análisis y síntesis .....</b>	<b>71</b>
<b>12</b>	<b>Tema 7. La transformada Z .....</b>	<b>72</b>
<b>13</b>	<b>Definición de la transformada Z .....</b>	<b>73</b>
13.1	Polos y ceros .....	75
<b>14</b>	<b>Convergencia de la transformada Z ..</b>	<b>76</b>
14.1	Propiedades de la región de convergencia ..	83
<b>15</b>	<b>La transformada Z inversa .....</b>	<b>91</b>
<b>16</b>	<b>Propiedades de la transformada Z .....</b>	<b>92</b>
<b>17</b>	<b>Análisis y caracterización de sistemas LTI mediante la transformada Z .....</b>	<b>95</b>
17.1	Propiedades de los sistemas LTI .....	95
17.2	Sistemas LTI descritos mediante ecuaciones en diferencias .....	104

## 8. Tema 3. Análisis de Fourier para señales en tiempo continuo

### 8.1 Introducción

En el Tema 1 de la asignatura se han caracterizado las señales como distribuciones de una determinada magnitud con respecto a una variable independiente, típicamente el tiempo. Posteriormente, en el Tema 2, se ha abordado la caracterización de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) en el dominio de esta misma variable, es decir, en el dominio temporal.

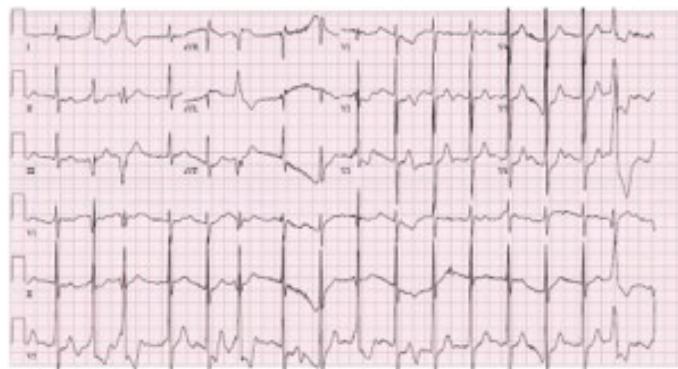


Figure 8.1: Señal de electrocardiograma.

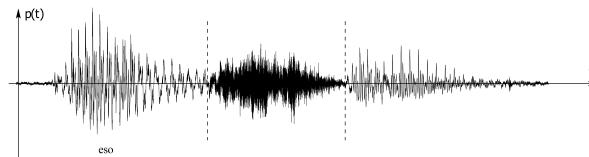


Figure 8.2: Señal de audio.

La formalización de la respuesta al impulso de los sistemas LTI ha proporcionado una herramienta de gran utilidad, ya que una única señal, la respuesta al impulso del sistema, permite predecir su comportamiento ante cualquier señal de entrada y, en último término, caracterizar propiedades fundamentales como la estabilidad, la causalidad o la presencia de memoria.

No obstante, la caracterización de señales y sistemas en el dominio temporal se basa en una operación relativamente compleja como es la convolución, lo que dificulta tanto la interpretación cualitativa de la transformación que lleva a cabo un sistema LTI como la predicción directa de la forma de la señal de salida ante una entrada dada.

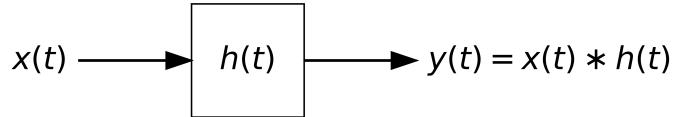


Figure 8.3: Diagrama de bloques de un sistema:  $y(t) = T\{x(t)\}$ .

En el presente tema se introduce una caracterización alternativa en el dominio espectral, o dominio de la frecuencia para señales en tiempo continuo. La ventaja de esta representación es doble:

- Por un lado, la descripción de las señales y los sistemas en términos de su contenido frecuencial conecta de forma natural con fenómenos físicos cotidianos.
- Por otro lado, el efecto de un sistema LTI sobre una señal de entrada se describe en términos de una operación mucho más sencilla que la convolución con la respuesta al impulso  $h(t)$ : la relación entrada-salida se reduce al producto por una respuesta en frecuencia  $H(\omega)$ .

### 8.1.1 Ejemplo 1: El tono de las notas musicales

La diferencia entre dos notas musicales de una misma octava está asociada a su frecuencia o armónico fundamental.

### 8.1.2 Ejemplo 2: el timbre de los instrumentos musicales

El timbre de un instrumento viene determinado por la distinta combinación de armónicos que lo componen.

El instrumento o su caja de resonancia son un sistema LTI que modifica la señal de entrada, que es el sonido (fundamental con armónicos de frecuencias múltiplos de la fundamental) generado al pulsar una cuerda o generar una onda dentro del tubo.

Por tanto, tendrá su respuesta al impulso, que en frecuencia (su respuesta en frecuencia) modifica la contribución de cada uno de los armónicos generados dentro del instrumento.

### 8.1.3 Ejemplo 3: Receptor de radio

La coexistencia de múltiples emisoras de radio en un mismo medio físico es posible gracias a la modulación de cada señal en torno a una frecuencia portadora distinta.

### 8.1.4 Ejemplo 4: Modelo fuente-filtro del habla

El habla se puede modelar como la salida de un sistema lineal. La entrada es la vibración de las cuerdas vocales (periódica) o el aire turbulento (ruido), y el sistema es el tracto vocal (boca y garganta), que modifica esta señal. Dado que movemos la boca al hablar, la respuesta al impulso del sistema es variante en el tiempo; sin embargo, para cada fonema individual, podemos analizarlo como un sistema LTI fijo (mientras no cambiemos la articulación).

En el dominio de la frecuencia, este sistema introduce picos de resonancia llamados formantes: el primero ( $F_1$ ) depende de la apertura de la boca (frecuencias inferiores a 1000 Hz) y el segundo ( $F_2$ ) de la posición de la lengua.

En la gráfica interactiva inferior se descompone la palabra ‘Eso’. Se puede ver claramente la diferencia entre la entrada periódica de las vocales —cuyos armónicos se ven amplificados por los formantes— y la naturaleza ruidosa y aperiódica de la ‘s’, generada por la fricción del aire contra los dientes.

Loading BokehJS ...

## 9. Representación de señales periódicas: la serie de Fourier en tiempo continuo

El análisis de Fourier se introduce de manera natural a partir del estudio de señales periódicas en tiempo continuo. Denotaremos por  $\tilde{x}(t)$  una señal periódica de período fundamental  $T_0$ . Recordemos que una señal se dice que es periódica de período  $T_0$  si satisface

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + T_0), \quad \forall t, \quad (9.1)$$

siendo  $T_0$  el menor valor real positivo que cumple dicha propiedad.

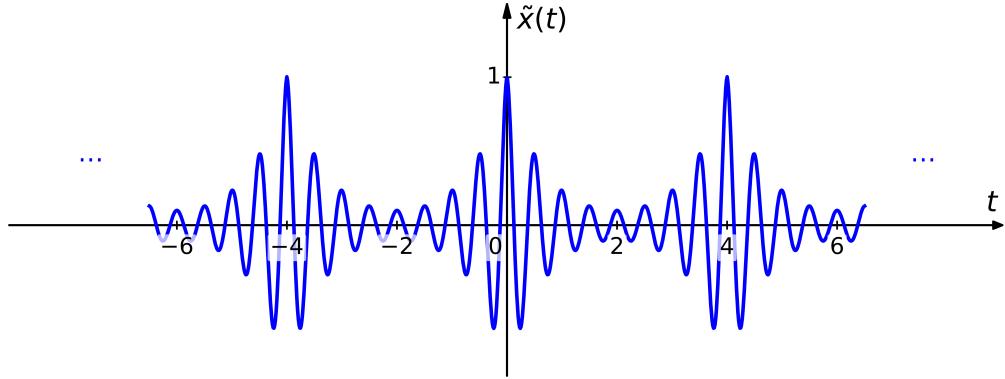


Figure 9.1: Ejemplo de señal periódica.

Recordemos que las señales periódicas son señales de potencia:

$$\infty = \frac{1}{T_0} \int_{\langle 0 \rangle} |\tilde{x}(t)|^2 dt < \infty. \quad (9.2)$$

Este tipo de señales constituye un conjunto de especial interés tanto desde el punto de vista teórico como práctico, ya que aparece de forma recurrente en sistemas físicos, eléctricos y de comunicaciones.

El **objetivo** del desarrollo en serie de Fourier es representar una señal periódica como una superposición de funciones elementales de frecuencia bien definida, permitiendo así caracterizar su contenido espectral y simplificar el análisis de sistemas LTI en el dominio de la frecuencia.

## 10. Exponenciales complejas, autofunciones de los sistemas LTI continuos

Un aspecto fundamental que motiva el uso de exponenciales complejas en el análisis de Fourier es que estas funciones constituyen autofunciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo.

Una **autofunción** es una señal que al atravesar un sistema LTI, la salida es la misma autofunción multiplicada por un **autovalor** (constante en el tiempo):

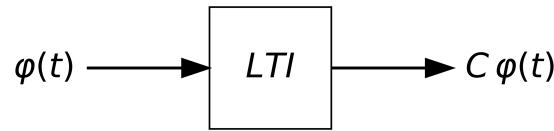


Figure 10.1: Autofunciones y sistemas LTI.

La ventaja de usar autofunciones es que si se representa una señal como combinación lineal de autofunciones, la salida del sistema LTI será también una combinación lineal de autofunciones:

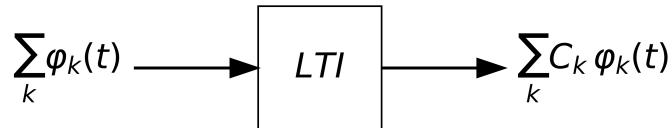


Figure 10.2: Combinación lineal de autofunciones y sistemas LTI.

En efecto, si un sistema LTI está caracterizado por su respuesta al impulso  $h(t)$  y la señal de entrada es una exponencial compleja de la forma

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}, \quad (10.1)$$

la salida del sistema viene dada por la convolución de la señal de entrada con la respuesta al impulso del sistema:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

donde  $H(\omega_0)$  es la respuesta en frecuencia del sistema a la frecuencia  $\omega_0$ . La salida es, por tanto, la misma exponencial compleja multiplicada por un factor complejo dependiente de la frecuencia, pero no del tiempo, es decir, constante en tiempo.

Esta propiedad implica que las exponenciales complejas no se deforman al atravesar un sistema LTI, sino que únicamente se ven escaladas en módulo y fase.

Como consecuencia, si una señal puede expresarse como una combinación lineal de exponenciales complejas, la respuesta del sistema se obtiene de forma inmediata modificando los coeficientes asociados a cada componente frecuencial. Esta observación justifica el uso de exponenciales complejas como funciones base en el desarrollo en serie de Fourier.

Consideramos el conjunto de las exponenciales complejas relacionadas armónicamente, con frecuencias múltiplos de una frecuencia fundamental,  $\omega_k = k \omega_0$ :

$$\phi_k(t) = \{e^{jk\omega_0 t}\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (10.3)$$

En la figura Figure 10.3 se muestra el conjunto de las exponenciales complejas de tiempo continuo relacionadas armónicamente:

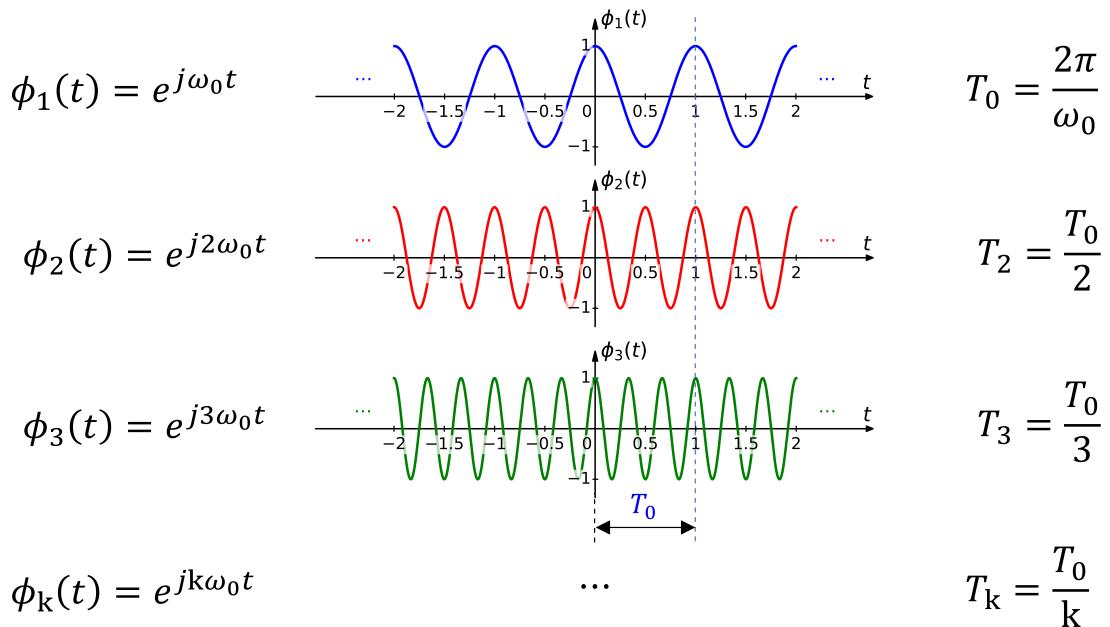


Figure 10.3: Conjunto de exponenciales complejas de tiempo continuo relacionadas armónicamente. Se representa su parte real.

Se puede observar que en el caso continuo **existen infinitas exponenciales complejas relacionadas armónicamente** con periodo común  $T_0$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>El periodo fundamental de cada señal armónica será submúltiplo de  $T_0$  y su frecuencia fundamental, múltiplo de  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ .

El conjunto de las exponenciales complejas relacionadas armónicamente constituye una base ortogonal del espacio de las señales periódicas de potencia finita. Por ello, podremos representar cualquier señal periódica de potencia finita como una superposición infinita de dichas funciones<sup>2</sup>.

**Nota: Base ortogonal del espacio vectorial de señales periódicas de potencia finita.**

En el contexto de señales periódicas de período fundamental  $T_0$  y potencia finita, se considera el espacio vectorial de funciones complejas definido sobre un intervalo de longitud  $T_0$ , dotado del producto escalar

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \tilde{x}(t) \tilde{y}^*(t) dt. \quad (10.4)$$

Con respecto a este producto escalar, el conjunto de exponenciales complejas  $\phi_k(t) = \{e^{jk\omega_0 t}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es ortogonal y completo, es decir,

$$\langle \phi_k(t), \phi_l(t) \rangle = 0, \quad k \neq l \in \mathbb{Z}, \quad (10.5)$$

$$||\phi_k(t)||^2 = \langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle = P_\infty = 1, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (10.6)$$

lo que permite representar cualquier señal del espacio vectorial como una superposición infinita de dichas funciones, con convergencia en el sentido de la norma inducida por el producto escalar, esto es, convergencia en potencia media.

---

<sup>2</sup>Esta suma infinita corresponderá al desarrollo en Serie de Fourier de la señal, como se verá en el apartado Fórmulas de análisis y síntesis.



## **11. Fórmulas de análisis y síntesis**



## 12. Tema 7. La transformada Z

En este tema vamos a describir la transformada Z, una herramienta similar pero alternativa a la transformada de Fourier en tiempo discreto. Respecto a la transformada de Fourier, existen dos ventajas principales de la transformada Z:

1. Mayor facilidad para estudiar las propiedades de los sistemas.
2. Hay señales que no tienen transformada de Fourier, pero sí transformada Z, lo que permite estudiar más situaciones como los sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencias en sistemas inestables.

## 13. Definición de la transformada Z

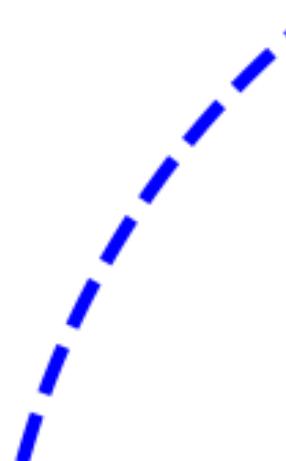
Las exponenciales complejas discretas de la forma  $z^n$  siendo  $z = r \cdot e^{j\Omega}$  (expresada mediante módulo y fase) son autofunciones de los sistemas LTI, como se mostró en el Tema 4.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k h[k] z_0^{n-k} = z^n \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z_0^{-k} \right) = z_0^n H(z_0), \quad (13.1)$$

siendo  $H(z_0)$  la transformada Z de  $h[n]$  evaluada en el punto  $z_0 = |z_0|e^{j\Omega_0}$ .

Entonces, definimos la **ecuación de análisis de la transformada Z**:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}. \quad (13.2)$$

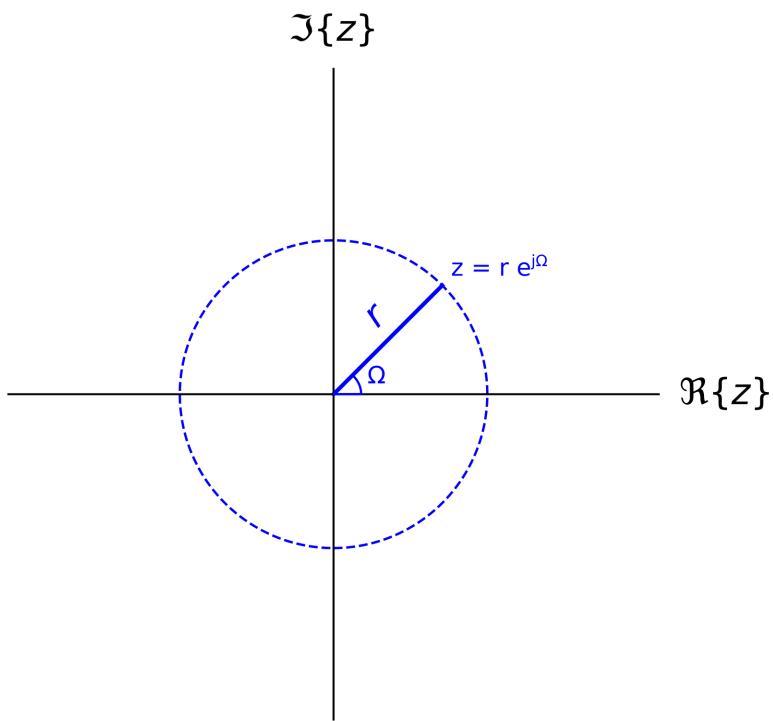


La transformada Z se puede relacionar con la transformada de Fourier en tiempo discreto cuando el módulo de  $z$  es 1 ( $z = e^{j\Omega}$ ):

$$X(z) \rightarrow \{z = e^{j\Omega}\} \rightarrow X(\Omega) = X(z). \quad (13.3)$$

La transformada Z puede expresarse también como un caso específico de la transformada de Fourier:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\Omega n} = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}. \quad (13.4)$$



## 13.1 Polos y ceros

Debido a la importancia que tienen en este tema, se muestran las fórmulas para obtener polos y ceros (usadas más adelante):

$z_0$  es un **polo** de  $X(z)$  si:

$$\boxed{\lim_{z \rightarrow z_0} |X(z)| = \infty.} \quad (13.5)$$

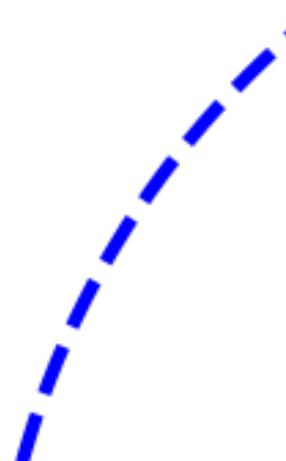
$z_0$  es un **cero** de  $X(z)$  si:

$$\boxed{\lim_{z \rightarrow z_0} X(z) = 0.} \quad (13.6)$$



## 14. Convergencia de la transformada Z

En el tema 4, vimos que la transformada de Fourier converge o no converge. En cambio, con la transformada Z, la convergencia se da por regiones al ser  $z$  un número complejo con módulo y fase. Estas regiones se representan en el plano complejo Z y para cada caso la denominamos **región de convergencia (ROC)** por sus siglas en inglés).



**Idea: importar toolbox de migmar para dibujar el circulo y que el alumno pueda seleccionar los valores de radio y ángulo para hacer el dibujo**

Teniendo en cuenta que en el plano complejo Z se representan todos los posibles valores de  $z$ , con módulo generalmente con valor distinto a 1, la **convergencia de la transformada Z se da por regiones** que se representan en el plano Z, a diferencia de la transformada de Fourier.

A continuación, se muestran varios ejemplos de transformada Z para ilustrar dos situaciones y comprender la extracción de las regiones de convergencia a partir de la ecuación de análisis:

1. Representación de la región de convergencia a partir del módulo de  $|z|$ .
2. Diferenciación de señales distintas pero con igual transformada Z, diferenciadas por la región de convergencia.

**Ejemplo 1:**  $x[n] = a^n u[n]$ .

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n. \quad (14.1)$$

Para que este sumatorio (suma infinita de una serie geométrica) converja, la razón debe tener módulo inferior a 1:

$$r = \left| \frac{a}{z} \right| < 1 \rightarrow |z| > |a|. \quad (14.2)$$

Siendo  $|z| > |a|$  la región de convergencia de la transformada Z de la señal  $x[n]$ . Entonces, si hay convergencia, la transformada Z de la señal  $x[n]$  se obtiene resolviendo la serie geométrica:

$$X(z) = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad (14.3)$$

siendo esta expresión final la que se puede hallar en los pares de transformadas Z de la tabla, donde para cada señal en tiempo discreto mostrada se definen tanto su transformada Z como su región de convergencia. Ilustramos la región de convergencia en el plano Z:



**Ejemplo 2:**  $x[n] = -a^n u[-n-1]$ .

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a}{z}\right)^n. \quad (14.4)$$

Resolvemos este sumatorio con un cambio de variable, siendo  $l = -n$ , por lo que el sumatorio pasará a estar definido entre 1 e infinito, y se invierte la razón para mantener el exponente positivo:

$$X(z) = - \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^l. \quad (14.5)$$

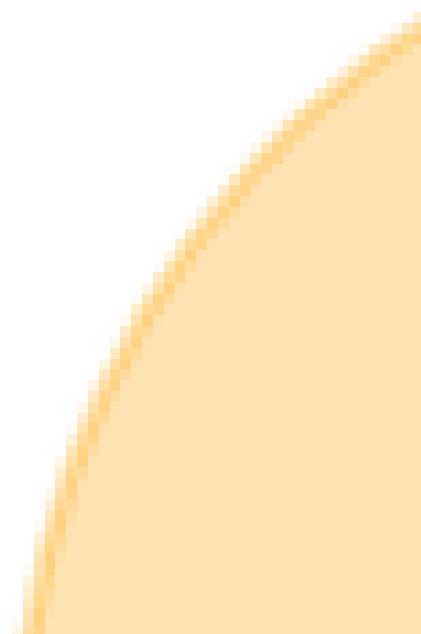
Conviene fijarse en que, al igual que en el ejemplo anterior, para que el sumatorio converja, la razón debe tener módulo inferior a 1. Sin embargo, ahora tenemos la expresión inversa, por lo que:

$$r = \left| \frac{z}{a} \right| < 1 \rightarrow |z| < |a|. \quad (14.6)$$

Siendo  $|z| < |a|$  la región de convergencia de la transformada Z de la señal  $x[n]$  en este ejemplo. Entonces, si hay convergencia, la transformada Z de la señal  $x[n]$  se obtiene resolviendo la serie:

$$X(z) = - \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^l = -\frac{r}{1-r} = -\frac{\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}} = \frac{\frac{a}{z} \cdot \frac{z}{a}}{\frac{a}{z} \cdot \left(\frac{z}{a} - 1\right)} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad (14.7)$$

siendo esta expresión final la que se puede hallar en los pares de transformadas Z de la tabla. Ilustramos la región de convergencia en el plano Z:



Respecto al resultado de los dos ejemplos, es importante fijarse en que, aunque las señales sean distintas, tienen la misma transformada Z, que se diferencia por la región de convergencia. Por lo tanto, **para caracterizar una señal, es necesario tanto la expresión de su transformada como de la región de convergencia**. Resumimos los resultados obtenidos en estos dos ejemplos:

$$x[n] = a^n u[n] \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \text{ROC : } |z| > |a|. \quad (14.8)$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \text{ROC : } |z| < |a|. \quad (14.9)$$

Además, es importante describir el caso de  $r = 1$ , que se corresponde con la **circunferencia unidad**. Si la circunferencia unidad se encuentra dentro de la ROC, la transformada de Fourier converge (convergencia sin deltas).

Partiendo de los dos ejemplos anteriores, asumiendo que  $|a| > 1$ , en la señal definida para tiempos negativos (ejemplo 2, izquierda en la figura de abajo), la transformada de Fourier converge, mientras que en la señal definida para tiempos 0 y positivos (ejemplo 1, derecha en la figura de abajo), la transformada de Fourier no converge, como se ilustra a continuación:

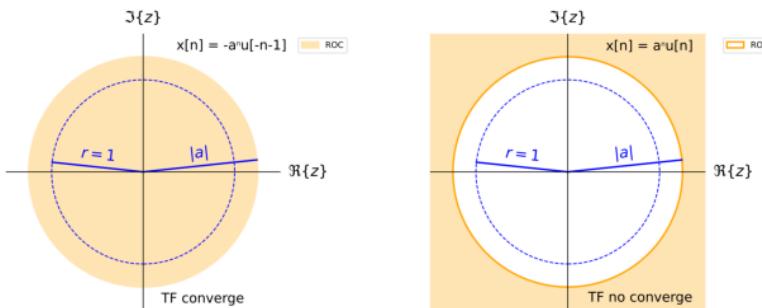
```
import matplotlib.image as mpimg
import matplotlib.pyplot as plt

# read images
img_1 = mpimg.imread('figures/T7/example2_ROC_r1.png')
img_2 = mpimg.imread('figures/T7/example1_ROC_r1.png')

# create subplot axis
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1,2,figsize=(11,8))

# plot the images
ax1.imshow(img_1)
ax2.imshow(img_2)

# turn off the axis
ax1.axis('off')
_ = ax2.axis('off')
```



**Propuesta:** Adaptar el código de arriba con el toolbox de Miguel para que, para un valor concreto de  $|a|$  (permitiendo solamente valores reales positivos) para cada uno de los dos casos, se indique

si la TF converge o no a partir de un mensaje por pantalla que se encuentre junto con las figuras (o debajo) representadas arriba.

## 14.1 Propiedades de la región de convergencia

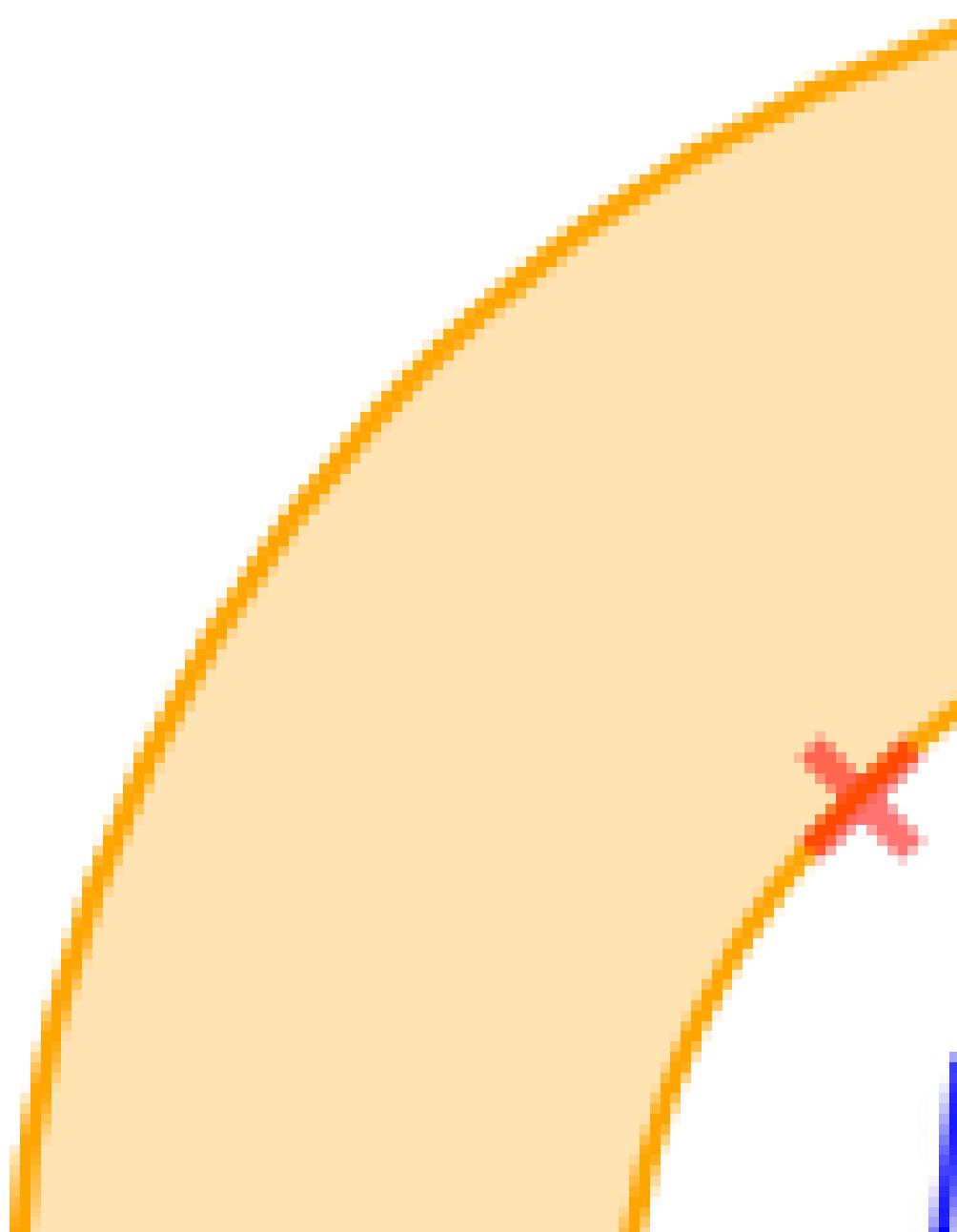
A continuación, se definen diversas propiedades de interés de la transformada Z:

1. La ROC **no contiene ningún polo** por definición. Recordando la definición de polo:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |X(z)| = \infty. \quad (14.10)$$

En este caso,  $|z| = |z_0|$  no está incluida en la ROC.

2. La ROC de  $X(z)$  son **anillos** en el plano Z **centrados en el origen de coordenadas**. Ejemplo gráfico:



En este caso, cabe remarcar que tanto  $|z| = |a|$  como  $|z| = |b|$  no están dentro de la ROC debido a que hay polos para ambos valores (primera propiedad). Expresando la transformada Z como la transformada de Fourier de la señal  $x[n]r^{-n}$ , hay convergencia si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty, \quad (14.11)$$

lo que implica que la convergencia depende del valor de  $r$  y no del valor de  $\Omega$ , dando lugar a regiones de convergencia circulares centradas en el origen.

3. Si la ROC **contiene a la circunferencia unidad**,  $|z| = 1$ , la **transformada de Fourier converge** (convergencia sin deltas de Dirac en la transformada de Fourier), como se mostró anteriormente.
4. Si la **señal es de duración finita**, la ROC será **todo el plano Z, con posibles excepciones en el origen y el infinito**.

$$x[n] = 0 \text{ en } n < n_0 \text{ y } n > n_1 \rightarrow \text{ROC: } Z \pm \{0\} \pm \{\infty\}. \quad (14.12)$$

- $n_0 < 0 \wedge n_1 > 0$ :  $\text{ROC} = Z - \{0\} - \{\infty\}$ . Ejemplo:  $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1] \Rightarrow X(z) = z^{-1} + z$ .  $\text{ROC} = Z - \{0\} - \{\infty\}$ .
  - $n_0 \geq 0$ :  $\text{ROC} = Z - \{0\} + \{\infty\}$ . Ejemplo:  $x[n] = \delta[n-1] \Rightarrow X(z) = z^{-1}$ .  $\text{ROC} = Z - \{0\}$ .
  - $n_1 \leq 0$ :  $\text{ROC} = Z + \{0\} - \{\infty\}$ . Ejemplo:  $x[n] = \delta[n+1] \Rightarrow X(z) = z$ .  $\text{ROC} = Z - \{\infty\}$ .
  - $n_0 = n_1 = 0$ :  $\text{ROC} = Z + \{0\} + \{\infty\}$ .  $x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(z) = 1$ .  $\text{ROC} = \text{todo el plano}$ .
5. Si la **señal es una secuencia derecha** ( $x[n] = 0$  para  $n < n_0$ ), y la ROC contiene  $r = r_0$ , la ROC contiene todos los valores finitos de  $z$  tales que  $r > r_0$ . La **convergencia se da desde el polo de mayor módulo hacia el exterior**.

Demostramos matemáticamente la convergencia:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x[n]|r_0^{-n} < \infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} |x[n]|r^{-n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} |x[n]|r_0^{-n} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n < \infty, \quad (14.13)$$

la convergencia se da si  $\left(\frac{r_0}{r}\right) < 1$ , esto es,  $r > r_0$ . Lo mostramos gráficamente:



Hay que tener cuidado con lo que ocurre en infinito:

- Si  $n_0 < 0$ :  $\text{ROC} \not\subset \{\infty\}$ .
- Si  $n_0 \geq 0$ :  $\text{ROC} \subset \{\infty\}$ .

6. Si la señal es una secuencia izquierda ( $x[n] = 0$  para  $n > n_0$ ), y la ROC contiene  $r = r_0$ , la ROC contiene todos los valores finitos de  $z$  tales que  $r < r_0$ . La **convergencia se da desde el polo de menor módulo hacia el interior.**

Demostramos matemáticamente la convergencia:

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0} |x[n]|r_0^{-n} < \infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{n_0} |x[n]|r^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n_0} |x[n]|r_0^{-n} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n < \infty, \quad (14.14)$$

la convergencia se da si  $\left(\frac{r_0}{r}\right) > 1$ , esto es,  $r < r_0$ . Lo mostramos gráficamente:



Hay que tener cuidado con lo que ocurre en el origen:

- Si  $n_0 > 0$ :  $\text{ROC} \not\subset \{0\}$ .
- Si  $n_0 \leq 0$ :  $\text{ROC} \subset \{0\}$ .

7. Si la señal es una secuencia bilateral, esto es, la suma de una secuencia derecha con otra izquierda ( $x[n] = x_d[n] + x_i[n]$ ), y la circunferencia  $r = r_0$  está en la ROC, la **ROC será un anillo que contenga  $r_0$** .

La transformada Z será:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_d[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x_i[n]z^{-n}. \quad (14.15)$$

La ROC, en caso de existir, será (por lo menos) la intersección de las ROC de las secuencias derecha e izquierda:

$$\text{ROC} \subset \text{ROC}_d \cap \text{ROC}_i. \quad (14.16)$$

Ilustramos esta propiedad con un ejemplo:

**Ejemplo 3:**  $x[n] = a^{|n|}, a \in \mathbb{R}^+$ .

Expresamos la señal como una suma de secuencias derecha e izquierda:

$$x[n] = x_d[n] + x_i[n] = a^n \cdot u[n] + a^{-n} \cdot u[-n-1]. \quad (14.17)$$

La transformada Z es la suma de las transformadas Z de las secuencias derecha e izquierda, que son casos similares mostrados a los ejemplos 1 y 2:

$$X_d(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > a; \quad X_i(z) = \frac{-1}{1 - (az)^{-1}} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{a}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{a}. \quad (14.18)$$

$$X(z) = \begin{cases} \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}z^{-1}}, & \text{ROC} = a < |z| < \frac{1}{a}, \\ \text{si } a < 1, & \\ \text{No existe,} & \text{ROC} = \emptyset, \\ \text{si } a \geq 1. & \end{cases} \quad (14.19)$$

Ilustramos las regiones de convergencia de  $X_d(z)$ ,  $X_i(z)$  y  $X(z)$  si  $a < 1$  (de izquierda a derecha en la figura de abajo).

```
import matplotlib.image as mpimg
import matplotlib.pyplot as plt

# read images
img_1 = mpimg.imread('figures/T7/example3_ROC_right.png')
```

```

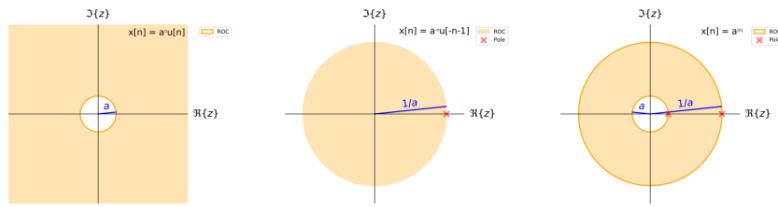
img_2 = mpimg.imread('figures/T7/example3_ROC_left.png')
img_3 = mpimg.imread('figures/T7/example3_ring.png')

# create subplot axis
fig, axs = plt.subplots(1,3,figsize=(15,11))

# plot the images
axs[0].imshow(img_1)
axs[1].imshow(img_2)
axs[2].imshow(img_3)

# turn off the axis
axs[0].axis('off')
_ = axs[1].axis('off')
_ = axs[2].axis('off')

```



## 15. La transformada Z inversa

La transformada Z se puede expresar en función de la transformada de Fourier:

$$X(z) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}. \quad (15.1)$$

Por lo tanto:

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(z)\}. \quad (15.2)$$

Se obtiene la transformada Z inversa a partir de la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier en tiempo discreto:

$$x[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega}) r^n e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega}) (re^{j\Omega})^n d\Omega. \quad (15.3)$$

Para expresar este resultado en función de  $z$ , realizamos un cambio de variable:

$$z = re^{j\Omega}, dz = jre^{j\Omega} d\Omega = jz d\Omega \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(z) z^{n-1} dz, \quad (15.4)$$

siendo  $\oint_r$  la integral en un contorno circular cerrado en sentido antihorario, centrado en el origen y con radio  $r$  perteneciente a la región de convergencia.

En el contexto de la asignatura, recurriremos a otras técnicas como la descomposición en fracciones simples, las propiedades de la transformada Z, y los pares conocidos de transformadas Z disponibles en las tablas.



## 16. Propiedades de la transformada Z

A continuación, se muestran tanto pares básicos de la transformada Z como propiedades de la transformada Z.

Respecto a los pares básicos, cabe destacar que cada par viene acompañado de su región de convergencia.

En cuanto a las propiedades, se puede apreciar que son similares a las de la transformada de Fourier en tiempo discreto. Sin embargo, aparte de las diferencias relacionadas con la región de convergencia, hay alguna propiedad que presenta diferencias sustanciales. Ilustramos un ejemplo de ello con la propiedad de inversión en el tiempo.

Si la transformada de Fourier de una señal en tiempo discreto  $x[n]$  es  $X(\Omega)$ , y su transformada Z es  $X(z)$ :

$$\mathcal{F}\{x[-n]\} = X(-\Omega) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1}), \quad (16.1)$$

siendo la región de convergencia el conjunto de puntos  $z^{-1}$  en los que  $z$  está en la región de convergencia de convergencia de  $X(z)$  (se invierte la región de convergencia).

---

# Señal

---

 $\delta[n]$  $u[n]$  $-u[-n]$  $\delta_{\infty}$

---

# Propiedad

---

---

## Linealidad

## Desplazamiento

## Escalado en $\mathbb{Z}$



## 17. Análisis y caracterización de sistemas LTI mediante la transformada Z

### 17.1 Propiedades de los sistemas LTI

Aplicando la propiedad de convolución, en un sistema LTI discreto podemos escribir:

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z), \quad (17.1)$$

donde  $H(z)$  es la transformada Z de la respuesta al impulso, conocida como la **función de transferencia del sistema**. Esta función proporciona mucha información acerca del sistema LTI, incluyendo el estudio directo de la causalidad y estabilidad del sistema.

#### 17.1.1 Causalidad

Recordamos que, respecto a la causalidad, definimos tres situaciones posibles para un sistema: causal, anticausal y no causal.

- Un sistema es **causal** si  $h[n] = 0, n < 0$ . Esto implica que la respuesta al impulso es una secuencia derecha cuya transformada Z converge hacia el exterior de un círculo. Por lo tanto, un **sistema es causal** si la ROC de  $H(z)$  es de la forma  $|z| > a$  y **no hay polos en  $\infty$** . Ilustramos esta situación con el ejemplo 1 utilizado para analizar la convergencia de la transformada Z ( $x[n] = a^n u[n] \rightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{1-az^{-1}}$ ), asumiendo  $a$  como valor real positivo:



- Un sistema es **anticausal** si  $h[n] = 0, n \geq 0$ . Esto implica que la respuesta al impulso es una secuencia izquierda cuya transformada Z converge hacia el interior de un círculo. Por lo tanto, un **sistema es anticausal** si la ROC de  $H(z)$  es de la forma  $|z| < a$  y **tiene un cero en el origen**. Ilustramos esta situación con el ejemplo 2 utilizado para analizar la convergencia de la transformada Z ( $x[n] = -a^n u[-n-1] \rightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ ), asumiendo  $a$  como valor real positivo:



- Un sistema es **no causal en cualquier otro caso**. Se incluyen tanto el caso definido para los sistemas causales pero con polo en  $\infty$ , como el de los sistemas anticausales sin cero en el origen.

### 17.1.2 Estabilidad

Recordamos que un sistema LTI discreto es estable si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty. \quad (17.2)$$

Si se cumple esta condición, existe la transformada de Fourier de  $h[n]$ , es decir,  $H(\Omega)$ . Ya vimos al estudiar la convergencia de la transformada Z que la transformada de Fourier converge (sin deltas) si la circunferencia unidad se encuentra dentro de la ROC.

Por lo tanto, un sistema es **estable si la ROC de la función de transferencia contiene la circunferencia unidad ( $|z| = 1$ )**.

A continuación, se ilustran algunos ejemplos:

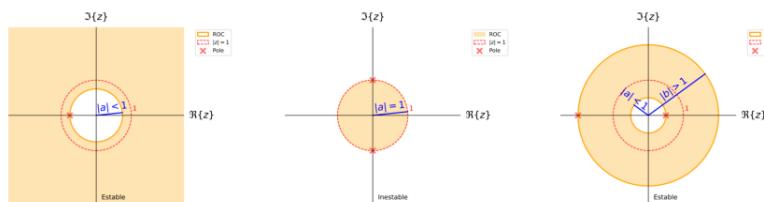
```
import matplotlib.image as mpimg
import matplotlib.pyplot as plt

# read images
img_1 = mpimg.imread('figures/T7/stable_causal.png')
img_2 = mpimg.imread('figures/T7/nonstable_anticausal.png')
img_3 = mpimg.imread('figures/T7/stable_ring.png')

# create subplot axis
fig, axs = plt.subplots(1,3,figsize=(15,11))

# plot the images
axs[0].imshow(img_1)
axs[1].imshow(img_2)
axs[2].imshow(img_3)

# turn off the axis
axs[0].axis('off')
_ = axs[1].axis('off')
_ = axs[2].axis('off')
```



### 17.1.3 Invertibilidad

Dos sistemas LTI discretos son invertibles entre sí, si para sus respuestas al impulso se cumple (aplicando la propiedad de convolución):

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n] \Rightarrow H(z) \cdot H_i(z) = 1 \rightarrow H_i(z) = \frac{1}{H(z)}, \quad (17.3)$$

siendo  $H(z)$  la función de transferencia de un sistema LTI, y  $H_i(z)$  la función de transferencia de su correspondiente sistema inverso.

**Los polos y ceros de  $H(z)$  pasan a ser ceros y polos, respectivamente, de  $H_i(z)$ .**

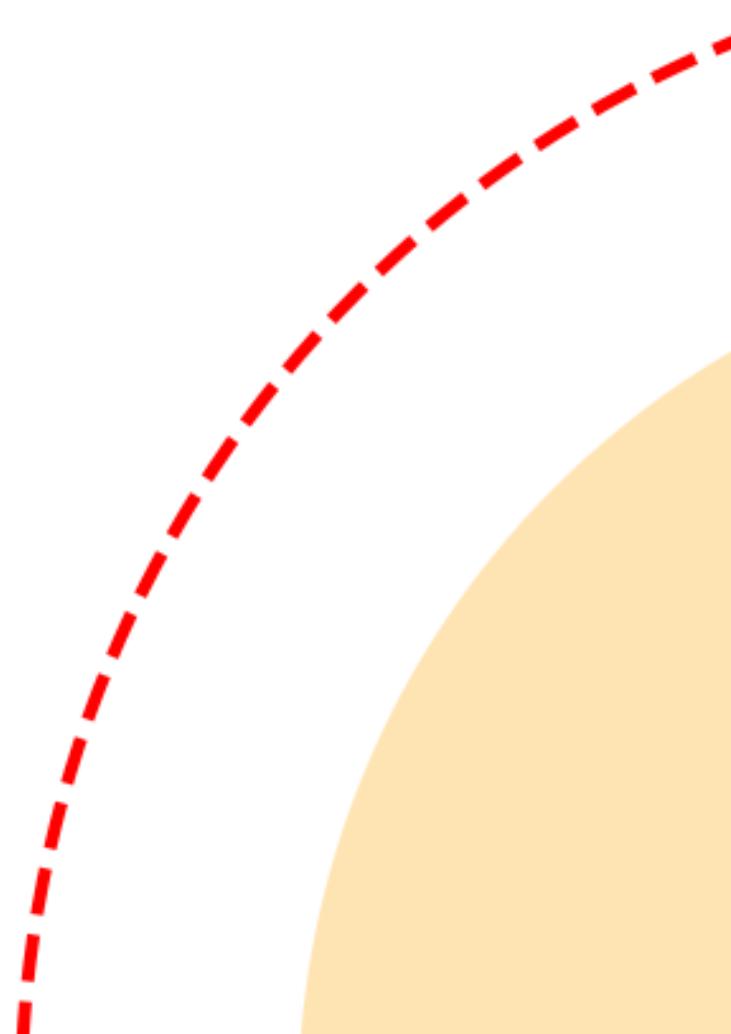
Un sistema LTI puede tener varios sistemas inversos (o ninguno) con distintas propiedades de causalidad y estabilidad de acuerdo con su ROC. Ilustramos este hecho con un ejemplo:

**Ejemplo:**  $h[n] = \delta[n] + a\delta[n-1]$ ,  $|a| < 1$ .

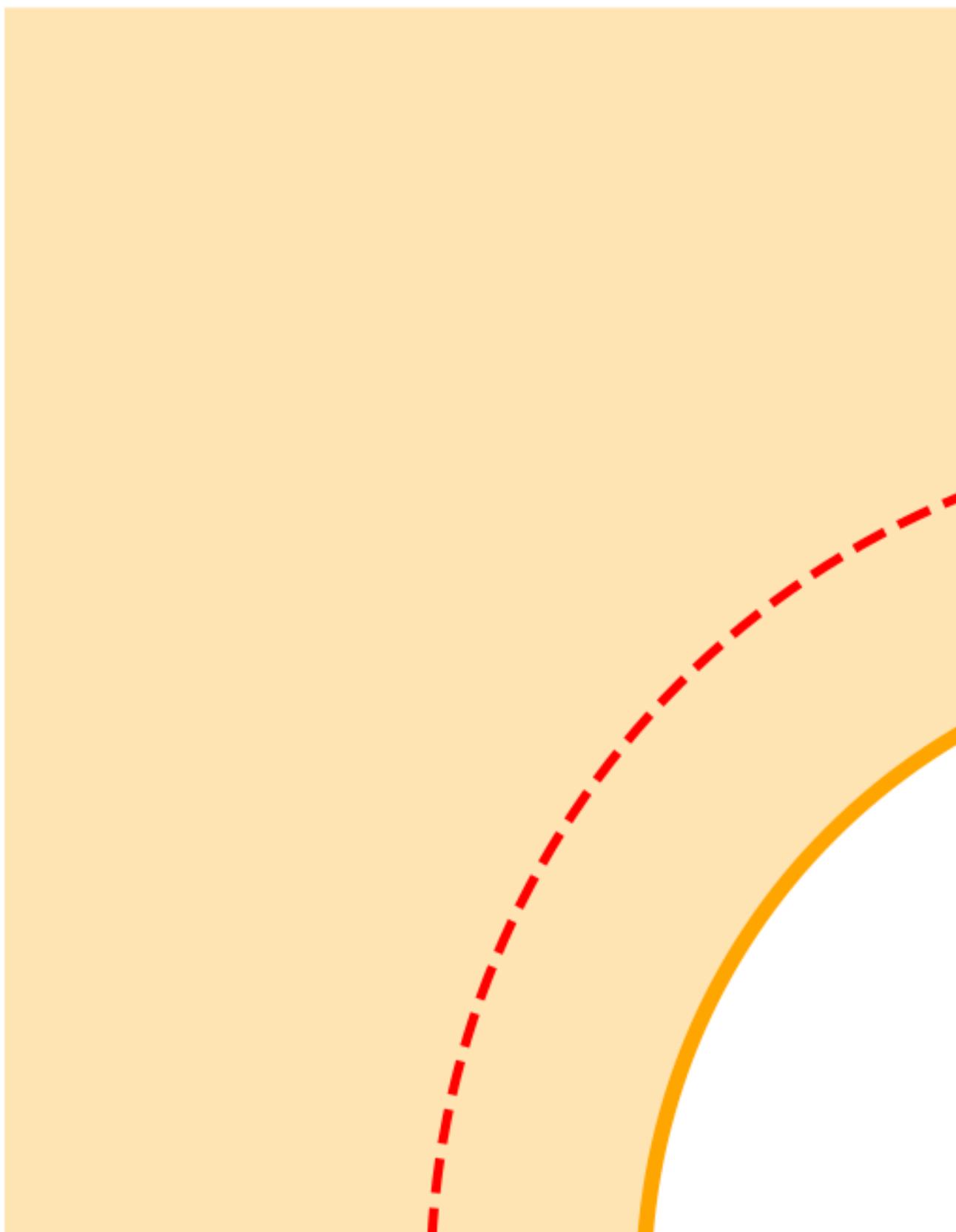
$$H(z) = 1 + az^{-1} = \frac{z+a}{z} \Rightarrow H_i(z) = \frac{1}{1+az^{-1}} = \frac{z}{z+a}. \quad (17.4)$$

El sistema del ejemplo propuesto tiene un polo en  $z = 0$  y un cero en  $z = -a$ , mientras que cualquier sistema inverso tiene un cero en  $z = 0$  y un polo en  $z = -a$ . De acuerdo con la ROC, hay dos posibles sistemas inversos con distinta respuesta al impulso, pero igual función de transferencia:

- ROC:  $|z| < a$ . Sistema anticausal e inestable.  $h[n] = -(-a)^n u[-n-1]$ .



- ROC:  $|z| < a$ . Sistema causal y estable.  $h[n] = (-a)^n u[n]$ .



## 17.2 Sistemas LTI descritos mediante ecuaciones en diferencias

De manera análoga a lo realizado en el dominio de Fourier, la transformada Z se puede usar para obtener la respuesta al impulso de un sistema LTI en tiempo discreto a partir de una ecuación en diferencias con coeficientes constantes. Aplicando la propiedad de desplazamiento temporal:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \leftrightarrow \left( \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) Y(z) = \left( \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) X(z). \quad (17.5)$$

Aplicando la propiedad de convolución:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (17.6)$$

A diferencia de lo que ocurre en el dominio de Fourier, con la transformada Z se pueden analizar ecuaciones en diferencias que caractericen **sistemas no estables y con distintas situaciones de causalidad**, esto es, diversas ROCs para la función de transferencia  $H(z)$ .

$H(z)$  tiene  $N$  polos (diferencia de mayor orden de la salida) y hasta  $N+1$  ROCs (sistemas distintos). Ilustramos este suceso con un ejemplo:

**Ejemplo:**  $y[n] - \frac{7}{3}y[n-1] + \frac{2}{3}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$ .

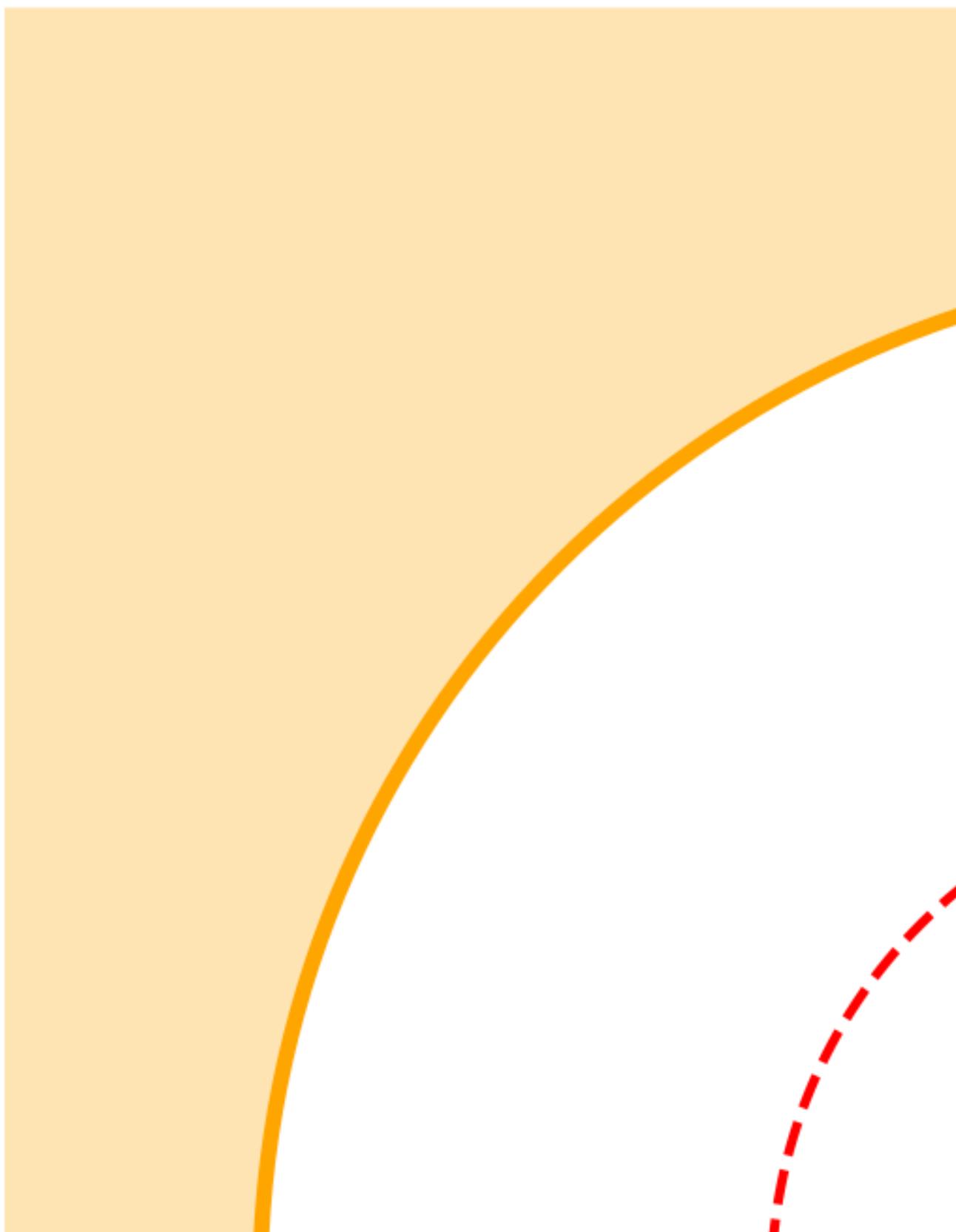
$$Y(z) \left[ 1 - \frac{7}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2} \right] = X(z) \left[ 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right] \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{7}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}} = \frac{z(z - \frac{1}{2})}{(z - 2)(z - \frac{1}{3})}. \quad (17.7)$$

De la función de transferencia se pueden extraer los ceros y los polos. Concretamente, hay dos ceros en  $z = 0$  y en  $z = 1/2$ , y dos polos en  $z = 2$  y  $z = 1/3$ , coincidiendo el número de polos con la diferencia de mayor orden de la salida ( $N = 2$ ). De acuerdo con las posibles ROCs de la función de transferencia, tenemos tres sistemas ( $N+1$ ) distintos. Ponemos el resultado de la descomposición en fracciones simples y estudiamos los tres sistemas:

$$H(z) = \frac{z(z - \frac{1}{2})}{(z - 2)(z - \frac{1}{3})} = \frac{9/10}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1/10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}. \quad (17.8)$$

- **Sistema 1: causal e inestable.** ROC:  $|z| > 2 \cap |z| > \frac{1}{3} \rightarrow |z| > 2$ . Causal al no haber polos en  $\infty$ .

$$h[n] = \frac{9}{10} 2^n u[n] + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \quad (17.9)$$



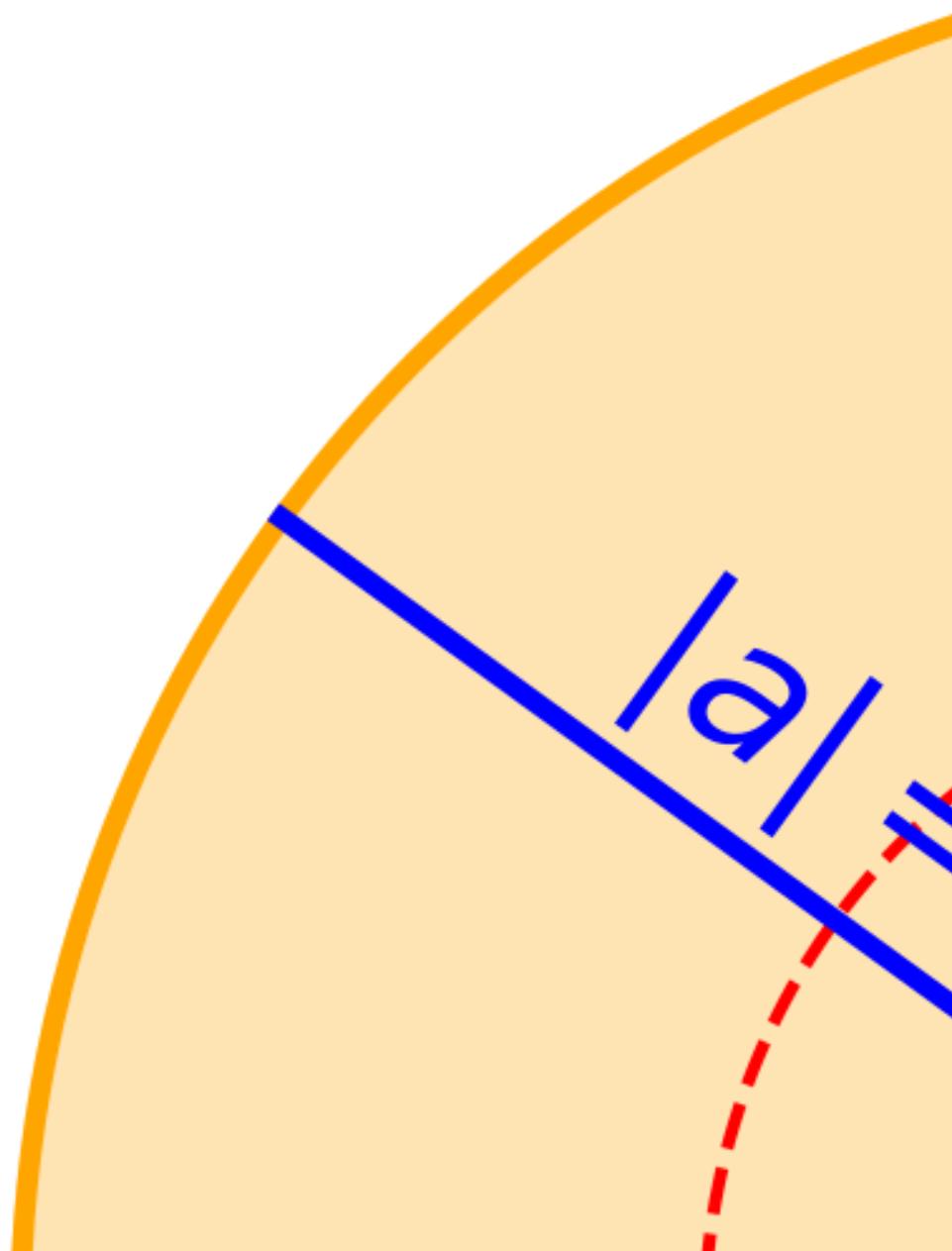
- **Sistema 2: anticausal e inestable.** ROC:  $|z| < 2 \cap |z| < \frac{1}{3} \rightarrow |z| < \frac{1}{3}$ . Anticausal al haber un cero en el origen.

$$h[n] = -\frac{9}{10}2^n u[-n-1] - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]. \quad (17.10)$$



- **Sistema 3: no causal y estable.** ROC:  $|z| < 2 \cap |z| > \frac{1}{3} \rightarrow 2 > |z| > \frac{1}{3}$ .

$$h[n] = -\frac{9}{10}2^n u[-n-1] + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \quad (17.11)$$



Cabe fijarse en que con la ROC  $|z| > 2 \cap |z| < \frac{1}{3}$  el resultado es el conjunto vacío, esto es, que no existe la transformada Z.