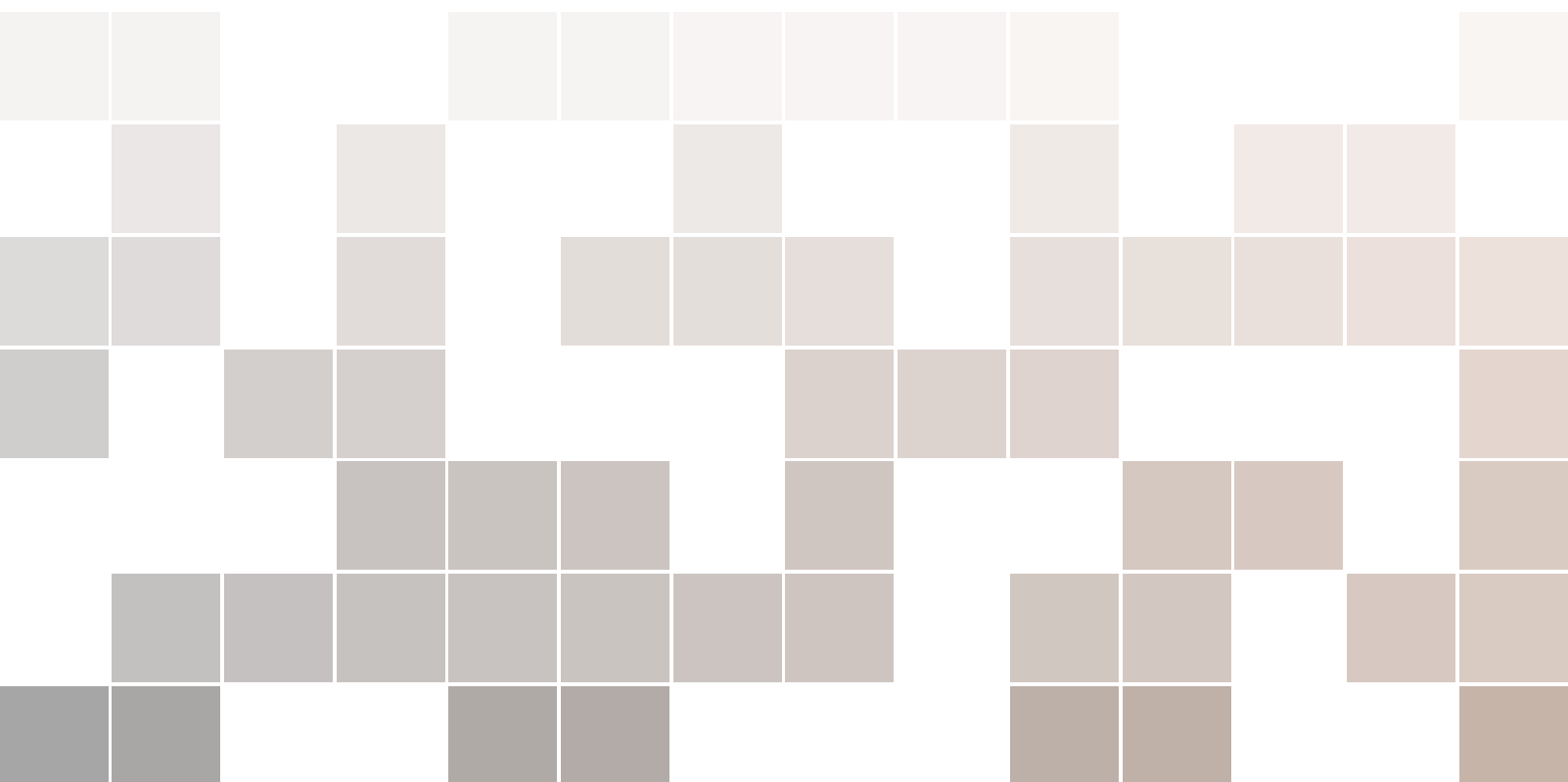


Sistemas Lineales

Apuntes para el curso de Sistemas Lineales

COLABORADOR 1



Copyright © 2026 Colaborador 1

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, 2026



Contents

1	Introducción	4
1.1	Señales y sistemas	4
1.2	Problemas de procesamiento de señales	5
1.3	Clases de señales	6
1.4	Ejemplos de señales y sistemas	7

I

Introducción a los sistemas lineales

2	Señales continuas y discretas	11
2.1	Introducción	11
2.2	Clases de señales	12
2.3	Señales periódicas	16
2.4	Parámetros de interés	17
2.5	Señales de energía y de potencia	20

1. Introducción

1.1 Señales y sistemas

Los conceptos de señales y sistemas surgen en gran variedad de campos. Tienen gran importancia en áreas tan diversas como: comunicaciones, aeronáutica, diseño de circuitos, acústica, ingeniería biomédica, ...

Aunque la naturaleza física de estas señales y sistemas pueda ser muy distinta, hay dos elementos comunes que permiten estudiarlas de forma conjunta:

- **Señales:** cualquier función de una o más variables independientes que porta o contiene alguna información sobre el comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno y que puede ser almacenada, presentada o manipulada.

Se caracterizan por:

- Pueden ser medidas.
- Transportan alguna información.

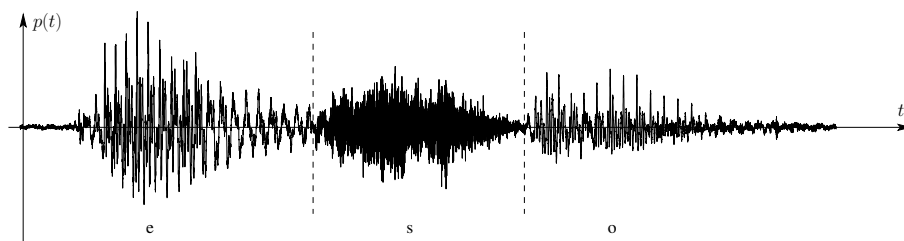


Figure 1.1: Ejemplo de señal

- **Sistemas:** cualquier proceso a través del cual unas señales se transforman en otras. Responden a la señal de entrada produciendo otra señal de salida o un cierto comportamiento. También se llama sistema al medio físico que soporta las señales. Las vamos a ver como “cajas negras”.

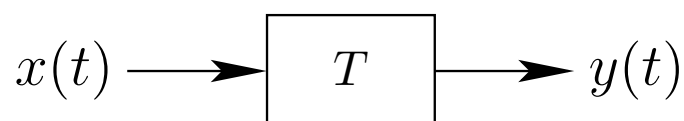
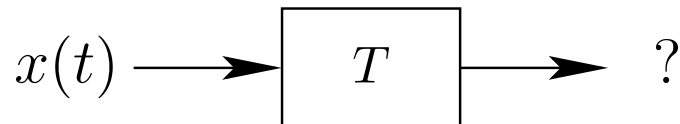


Figure 1.2: Ejemplo de sistema

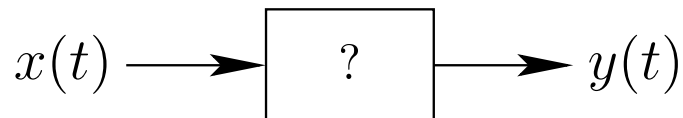
Ejemplo: Sistema: circuito eléctrico. Señales: voltajes y corrientes en el circuito, en función del tiempo.

1.2 Problemas de procesamiento de señales

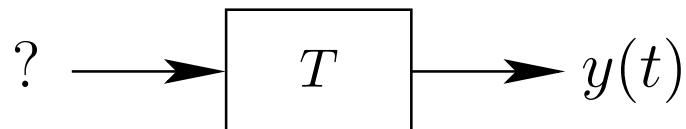
- **Análisis:** estudiar la respuesta de un sistema específico a diversas entradas. (Convolución).
Ejemplo: análisis de circuitos.



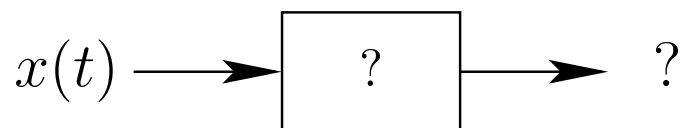
- **Diseño o identificación:** diseñar sistemas para procesar señales de determinada forma.
Ejemplos: restauración (voz, imagen, ...), realce, extracción de características.



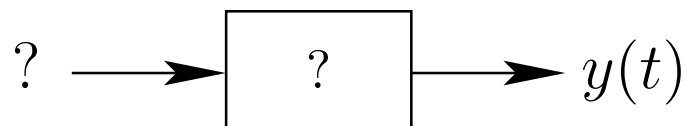
- **Deconvolución:** obtener entrada para un sistema dado a partir de su salida. Ejemplos: eliminar aberraciones en lentes de cámaras fotográficas o movimiento.



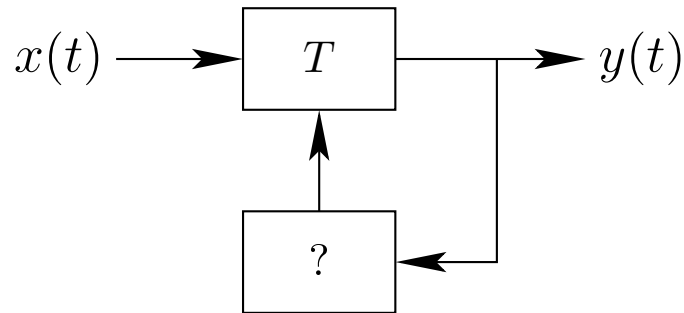
- **Filtrado:** obtener el sistema y la señal de salida que permite modificar una señal de entrada de determinada forma. Ejemplo: eliminar altas frecuencias de señal musical.



- **Modelado:** diseñar un sistema y la señal de entrada que nos permite obtener una salida determinada. Ejemplo: sintetizar voz.



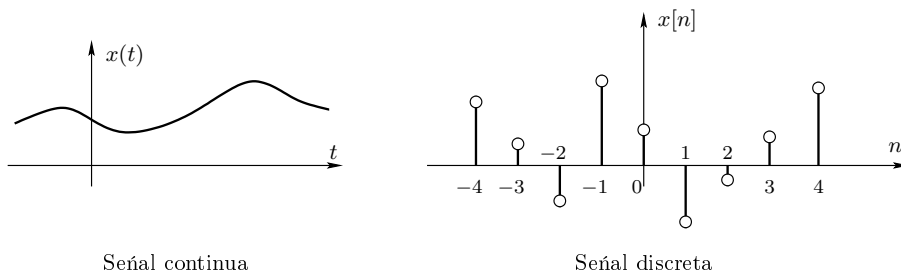
- **Control:** diseñar un sistema que controle a otro a partir de su salida. Ejemplos: sistema de control de planta química, piloto automático.
-



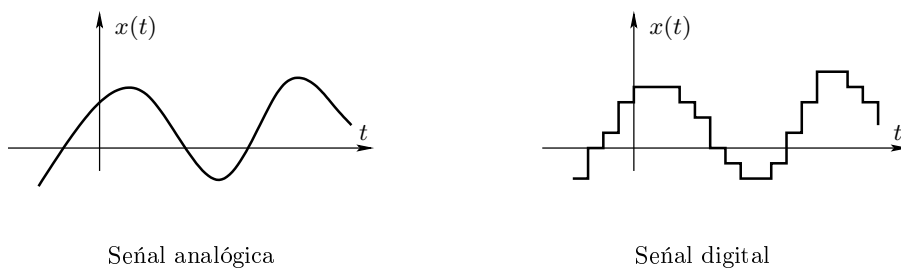
1.3 Clases de señales

Tipos de señales:

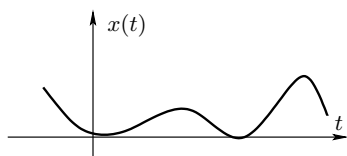
- Según el rango de variabilidad de la variable independiente: continua vs. discreta.



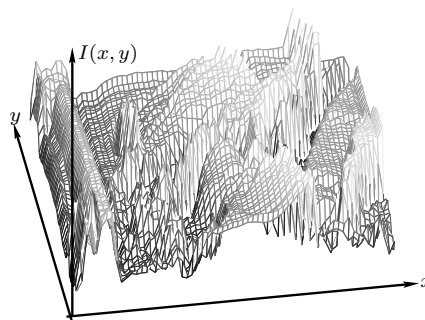
- **Continua:** valores para todos los puntos del eje de abscisas. Ejemplo: señales en circuitos eléctricos y mecánicos.
- **Discreta:** valores en puntos discretos y equiespaciados del eje de abscisas. Ejemplo: promedio de la bolsa cada día.
- Según el rango de variabilidad de la variable dependiente: analógica vs. digital.



- **Analógica:** puede tomar cualquier valor dentro de un rango. Ejemplo: temperatura.
- **Digital:** puede tomar sólo valores cuantizados. Ejemplo: luz encendida o apagada.
- Según el número de variables independientes: unidimensional vs. multidimensional.
- Según la incertidumbre de la variable dependiente: señal determinista vs. aleatoria.
 - **Determinista:** se conocen los valores que toma en todos y cada uno de sus instantes.
 - **Aleatoria o estocástica:** hay incertidumbre sobre el valor que toma en alguno de sus instantes. Asociado al concepto de probabilidad.



Señal unidimensional



Señal bidimensional

$$\text{Señal} \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinista} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estacionaria} \left\{ \begin{array}{l} \text{Periódica} \\ \text{No periódica} \end{array} \right. \\ \text{No Estacionaria} \end{array} \right. \\ \text{Aleatoria o Estocástica} \left\{ \begin{array}{l} \text{Estacionaria} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ergódica} \\ \text{No ergódica} \end{array} \right. \\ \text{No estacionaria} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Tipos de sistemas: continuos, discretos, analógicos, digitales.

1.4 Ejemplos de señales y sistemas

Ejemplos de señales:

- Habla: telefonía, radio, ..., vida cotidiana.
- Señales biomédicas:
 - 1-D: encefalograma, electrocardiograma.
 - 2-D: radiografía, angiografía, ecografía.
 - 3-D: TAC, RM, ultrasonidos 3D, vídeo.
 - 4-D: secuencias temporales de volúmenes.
 - N-D: volúmenes con datos tensoriales para estudiar fibras nerviosas del cerebro.
- Sonido y música.
- Vídeo e imagen.
- Señales de radar, sonar, satélite.
- Comunicación de datos entre ordenadores.

Otros ejemplos:

- Circuitos eléctricos:
 - Señales: $I(t), V(t)$.
 - Sistema: propio circuito.
- Automóvil:
 - Señales: entrada: presión en pedales y giro del volante. Salida: aceleración y dirección del automóvil.
 - Sistema: automóvil.
- Compresión de imagen:
 - Señales: imagen comprimida y sin comprimir.
 - Sistemas: compresor y descompresor.
- Transmisión de señal de radio:

- Señal: señal de audio modulada.
- Sistema: medio de transmisión (atmósfera).

Ejemplos de procesamiento de señal:

- Eliminación de ruido en voz de piloto de avión (comunicaciones).
- Realce de fotografías.
- Extracción de parámetros de interés:
 - Formantes de la voz (identificación).
 - Reconocimiento de habla.
 - Identificación de formas (visión artificial).

Introducción a los sistemas lineales

2	Señales continuas y discretas	11
2.1	Introducción	11
2.2	Clases de señales	12
2.3	Señales periódicas	16
2.4	Parámetros de interés	17
2.5	Señales de energía y de potencia	20

En este tema vamos a describir el lenguaje matemático que nos permitirá desarrollar herramientas muy poderosas para analizar señales y sistemas en muy diversos campos.

2. Señales continuas y discretas

La información de una señal está contenida en un patrón de variaciones con una forma determinada.

2.1 Introducción

Ejemplo 1: señal de voz humana (variaciones de presión acústica).

Distintos patrones de variación producen distintos sonidos:

Ejemplo 2: fotografía (blanco y negro).

Señal bidimensional. Variaciones del nivel de gris.

Representación matemática: funciones de una o más variables independientes.

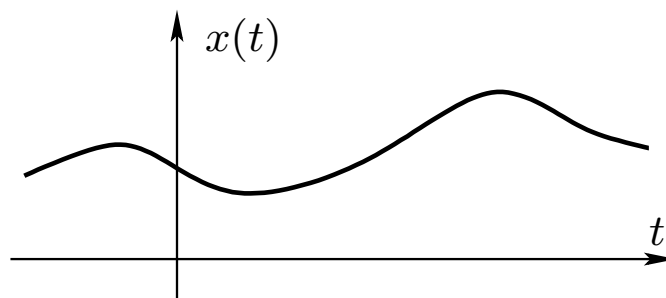
Aquí sólo nos ocuparemos de señales con una variable independiente.

En general consideramos que es el tiempo: $x(t)$ (aunque no tiene por qué).

Vamos a considerar **dos tipos básicos de señales**:

- **Continuas:** la variable independiente es continua \Rightarrow se definen para una sucesión continua de valores de la variable independiente.

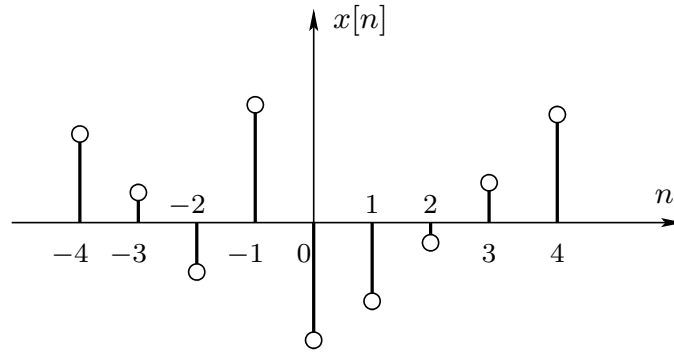
Notación: $x(t)$, con $t \in \mathbb{R}$.



Ejemplos: señal de voz con el tiempo, presión atmosférica con altitud.

- **Discretas:** la variable independiente sólo toma un conjunto discreto de valores. También se las llama **secuencia discreta**.

Notación: $x[n]$, con $n \in \mathbb{Z}$.



Ejemplos: valor del IBEX-35 al final de cada sesión, muestreo de señales continuas (muestras equiespaciadas).

Vamos a ir viendo las señales continuas y discretas de forma paralela, para ir las relacionando. En el capítulo de muestreo (7), veremos cómo se puede pasar de unas a otras, idealmente sin error.

2.2 Clases de señales

Veremos a continuación distintos tipos de señales que tendrán importancia a lo largo de toda la asignatura.

- **Real e imaginaria:** simetría respecto a la conjugación.
 - **Real pura:** simétrica respecto a la conjugación.

$$x^*(t) = x(t), \quad (2.1)$$

$$x^*[n] = x[n]. \quad (2.2)$$

- **Imaginaria pura:** antisimétrica respecto a la conjugación.

$$x^*(t) = -x(t), \quad (2.3)$$

$$x^*[n] = -x[n]. \quad (2.4)$$

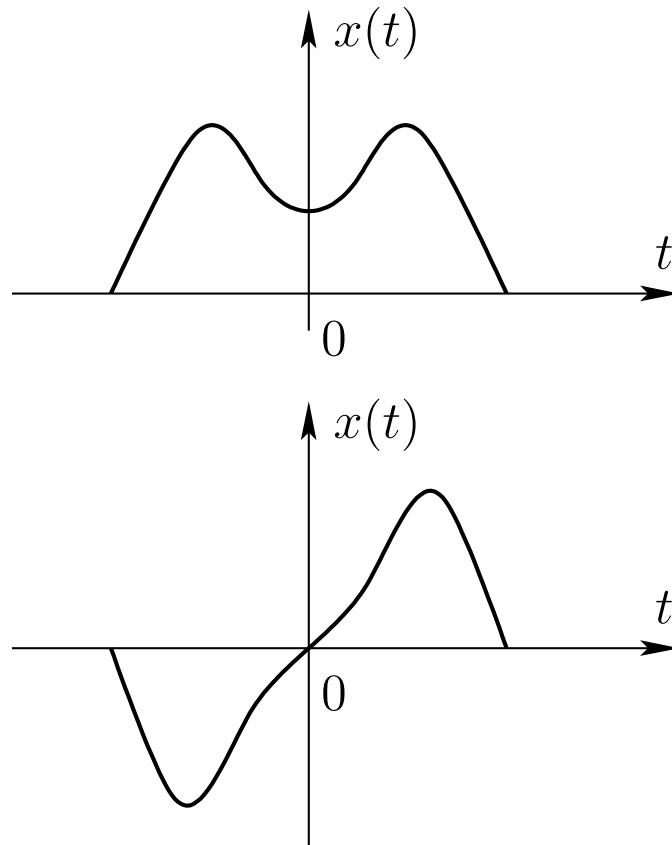
- **Par e impar:** simetría respecto a la inversión en el tiempo. Se aplica a señales reales.
 - **Par:** simétrica respecto al eje de ordenadas.

$$x(-t) = x(t), \quad (2.5)$$

$$x[-n] = x[n]. \quad (2.6)$$

- **Impar:** antisimétrica respecto al eje de ordenadas.

$$x(-t) = -x(t), \quad (2.7)$$



$$x[-n] = -x[n]. \quad (2.8)$$

En el origen, como $x(0) = -x(0)$, se cumple:

$$x(0) = 0, \quad (2.9)$$

$$x[0] = 0, \quad (2.10)$$

- **Hermítica y antihermítica:** Equivalente para señales complejas.
 - **Hermítica:** simétrica respecto al eje de ordenadas y la conjugación.

$$x^*(-t) = x(t), \quad (2.11)$$

$$x^*[-n] = x[n]. \quad (2.12)$$

- **Antihermítica:** antisimétrica respecto al eje de ordenadas y la conjugación.

$$x^*(-t) = -x(t), \quad (2.13)$$

$$x^*[-n] = -x[n]. \quad (2.14)$$

Toda señal se puede poner como suma de sus partes real e imaginaria, par e impar, hermítica y antihermítica:

$$x(t) = x_r(t) + x_i(t) = \Re\{x(t)\} + \Im\{x(t)\}. \quad (2.15)$$

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = \mathcal{E}\{x(t)\} + \mathcal{O}\{x(t)\}, \quad x(t) \in \mathbb{C}. \quad (2.16)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_a(t). \quad (2.17)$$

Las expresiones para el caso discreto son equivalentes.

Cálculo de la parte par e impar de una señal:

$$\begin{cases} x(t) = x_e(t) + x_o(t), & x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) = x_e(t) - x_o(t). \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\Downarrow \quad (2.19)$$

Parte par e impar de una señal:

$$\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)], & x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]. \end{cases} \quad (2.20)$$

Se cumple:

$$x_e(0) = x(0), \quad x_o[0] = x[0]. \quad (2.21)$$

$$x_o(0) = 0, \quad x_o[0] = 0. \quad (2.22)$$

Parte real e imaginaria:

$$\begin{cases} x_r(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x^*(t)], & x_i(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x^*(t)]. \end{cases} \quad (2.23)$$

Parte hermítica y antihermítica:

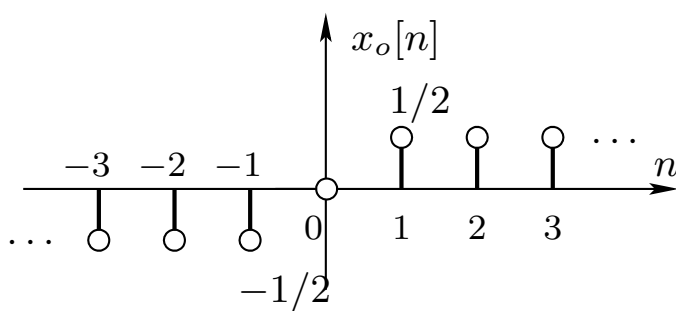
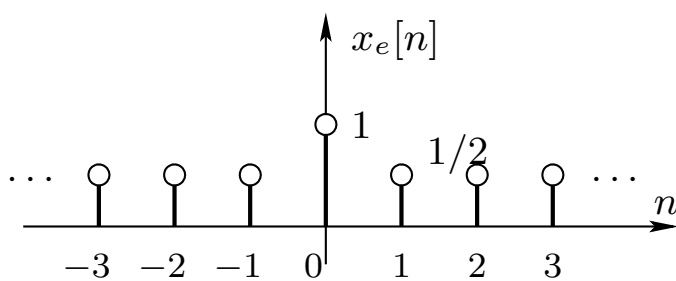
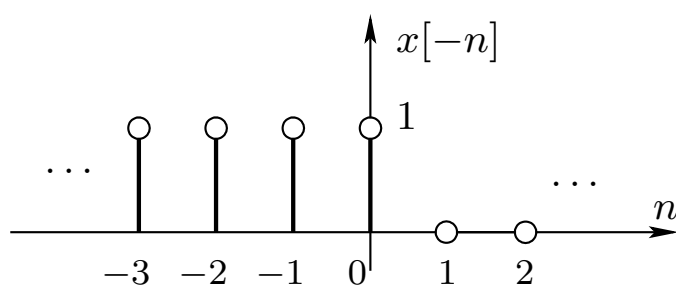
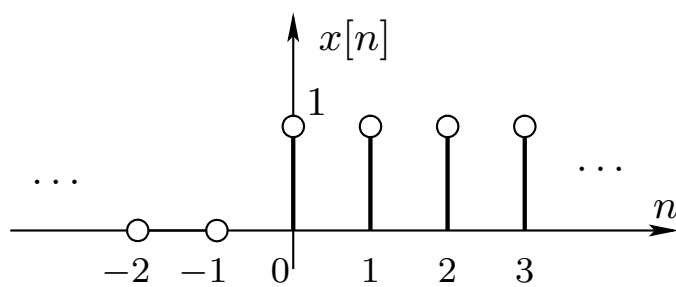
$$\begin{cases} x_h(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x^*(-t)], & x_a(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x^*(-t)]. \end{cases} \quad (2.24)$$

Para el caso discreto las expresiones son equivalentes.

Ejemplo: Cálculo de la parte par e impar de una señal:

$$\begin{aligned} x[n] &= \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \\ x[-n] &= \begin{cases} 1, & n \leq 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases} \\ x_e[n] &= \begin{cases} 1/2, & n < 0, \\ 1, & n = 0, \\ 1/2, & n > 0. \end{cases} \\ x_o[n] &= \begin{cases} -1/2, & n < 0, \\ 0, & n = 0, \\ 1/2, & n > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

A continuación veremos otros tipos de señales: periódicas y de energía y de potencia.



2.3 Señales periódicas

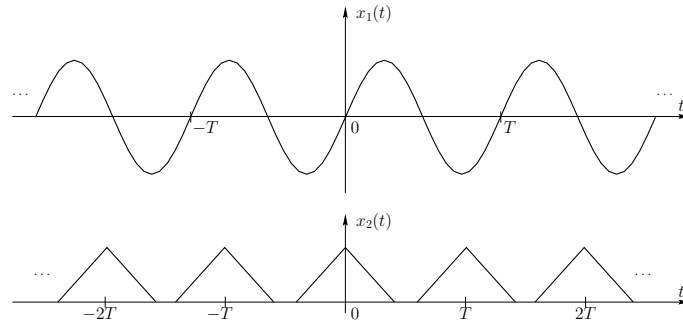
Dada su importancia las vemos aparte.

- Una señal **continua**, $x(t)$, es **periódica** si:

$$\exists T \in \mathbb{R}^+ / \boxed{x(t) = x(t + T)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

T : **periodo** de la señal.

Ejemplos:



Si $x(t)$ es periódica con periodo T , también lo es con periodo mT , $m \in \mathbb{Z}$.

T_0 : **periodo fundamental** de la señal. Valor más pequeño de T para el que se satisface:

$$x(t) = x(t + T_0). \quad (2.26)$$

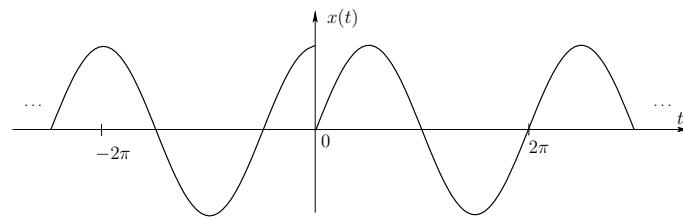
Si $x(t)$ es constante, no está definido T_0 , ya que es periódica para cualquier T .

Señal aperiódica: si no es periódica.

Ejemplos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), & t < 0, \\ \sin(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Se cumple que $\cos(t) = \cos(t + 2\pi)$ para $t < -2\pi$ y $\sin(t) = \sin(t + 2\pi)$, para $t \geq 0$, pero no se cumple $x(t) = x(t + 2\pi)$, $\forall t$.



Estudiar el caso:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), & t < 0, \\ \cos(-t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

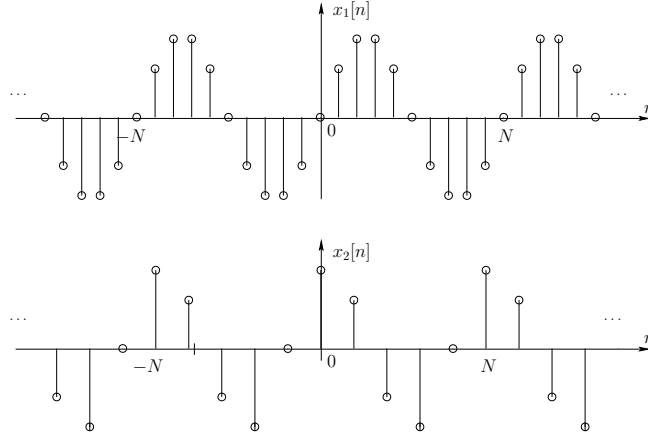
- Una señal **discreta**, $x[n]$, es **periódica** si:

$$\exists N \in \mathbb{Z} / \boxed{x[n] = x[n + N]}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.29)$$

N : **periodo** de la señal.

Ejemplos:

Si $x[n]$ es periódica con periodo N , también lo es con periodo mN , $m \in \mathbb{Z}$.



N_0 : **periodo fundamental** de la secuencia discreta. Valor más pequeño de N para el que se satisface:

$$x[n] = x[n + N_0]. \quad (2.30)$$

Si $x[n]$ es constante, $N_0 = 1$, que es el periodo mínimo que puede tener una señal discreta.

Señal aperiódica: si no es periódica.

2.4 Parámetros de interés

Vemos algunos parámetros de interés de las señales, tanto continuas como discretas.

- **Valor medio:**

- El **valor medio en un intervalo** viene dado por:

- **Señales continuas:**

En el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt. \quad (2.31)$$

Para un intervalo simétrico, $-T \leq t \leq T$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (2.32)$$

- **Señales discretas:**

En el intervalo $n_1 \leq n \leq n_2$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]. \quad (2.33)$$

Para un intervalo simétrico, $-N \leq n \leq N$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N x[n]. \quad (2.34)$$

- El **valor medio** viene dado por:

- **Señales continuas:**

$$x_{AV} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (2.35)$$

- **Señales discretas:**

$$x_{AV} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]. \quad (2.36)$$

- El **valor medio** para **señales periódicas** también se puede calcular de la siguiente forma:

- **Señales continuas:**

$$x_{AV} \triangleq \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) dt. \quad (2.37)$$

- **Señales discretas:**

$$x_{AV} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n]. \quad (2.38)$$

- **Valor de pico:**

- **Señales continuas:**

$$x_p \triangleq \max\{|x(t)|, t \in \}. \quad (2.39)$$

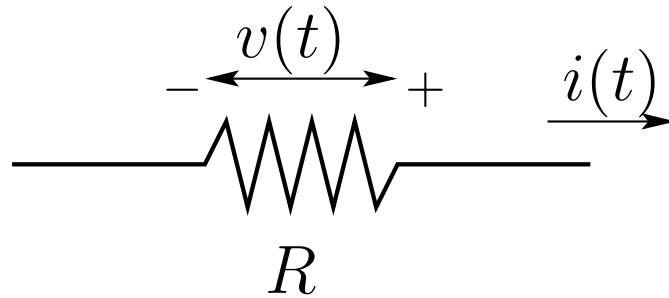
- **Señales discretas:**

$$x_p \triangleq \max\{|x[n]|, n \in \}. \quad (2.40)$$

- **Potencia instantánea:**

Por analogía con las señales que representan magnitudes físicas, se puede hablar de potencia y energía.

Así por ejemplo, para una resistencia, la potencia instantánea:



$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t) = Ri^2(t). \quad (2.41)$$

Vemos que es proporcional a la señal al cuadrado. En otros ejemplos ocurre lo mismo.

- **Señales continuas:**

$$P_i(t) \triangleq |x(t)|^2. \quad (2.42)$$

- **Señales discretas:**

$$P_i[n] \triangleq |x[n]|^2. \quad (2.43)$$

- **Energía:** suma (integral) de la potencia instantánea.

- Energía total **en un intervalo** de tiempo:

- **Señales continuas:**

En el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$E \triangleq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt. \quad (2.44)$$

Para un intervalo simétrico, $-T \leq t \leq T$:

$$E_T \triangleq \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt. \quad (2.45)$$

- **Señales discretas:**

En el intervalo $n_1 \leq n \leq n_2$:

$$E \triangleq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2. \quad (2.46)$$

Para un intervalo simétrico, $-N \leq n \leq N$:

$$E_N \triangleq \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2. \quad (2.47)$$

– La **energía total** (en un intervalo infinito) viene dada por:

- **Señales continuas:**

$$E_\infty \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (2.48)$$

- **Señales discretas:**

$$E_\infty \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2. \quad (2.49)$$

Hay señales para las que esta integral (sumatorio) no converge, como por ejemplo:

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad x_2(t) = C. \quad (2.50)$$

$$x_1[n] = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad x_2[n] = C. \quad (2.51)$$

En estos casos, $E_\infty = \infty$.

Por ello, nos va a interesar otra medida relacionada, que es la potencia media.

- **Potencia media:** valor medio de la potencia instantánea.

– En general, la potencia media viene dada por:

- **Señales continuas:**

$$P_\infty \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt. \quad (2.52)$$

- **Señales discretas:**

$$P_\infty \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2. \quad (2.53)$$

– En el caso particular de **señales periódicas**, también son aplicables las siguientes expresiones:

- **Señales continuas:**

$$P_\infty \triangleq \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt. \quad (2.54)$$

- **Señales discretas:**

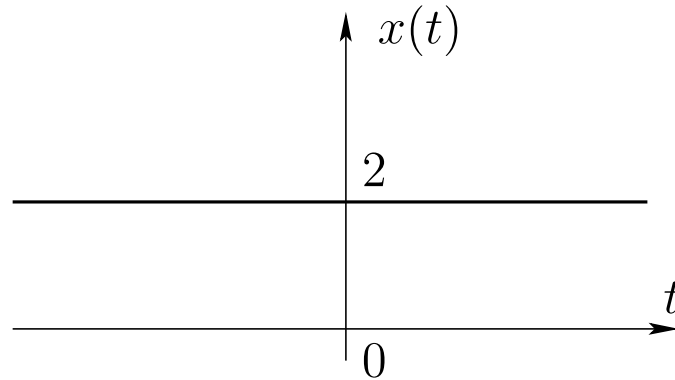
$$P_\infty \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} |x[n]|^2. \quad (2.55)$$

Ejemplo: $x(t) = 2$.

$$P_i(t) = |x(t)|^2 = 4. \quad (2.56)$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 4 dt = \infty. \quad (2.57)$$

$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_i(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4T}{T} = 4. \quad (2.58)$$



2.5 Señales de energía y de potencia

Según las definiciones de energía y de potencia de una señal, se puede hablar de tres clases de señales:

- **Señales de energía:** son señales con **energía total finita**.

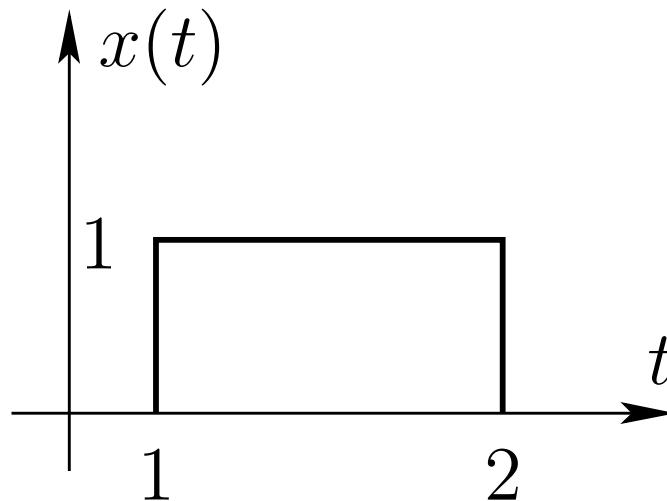
$$0 < E_{\infty} < \infty. \quad (2.59)$$

Tienen $P_{\infty} = 0$:

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{2T} = 0. \quad (2.60)$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_N}{2N+1} = 0. \quad (2.61)$$

Ejemplo:



$$E_{\infty} = 1 \Rightarrow P_{\infty} = 0. \quad (2.62)$$

- **Señales de potencia:** son señales con **potencia media finita**.

$$0 < P_{\infty} < \infty \Rightarrow E_{\infty} = \infty. \quad (2.63)$$

Dado que tienen $P_{\infty} > 0$, integrando (sumando) en un intervalo infinito, se obtiene $E_{\infty} = \infty$.

Ejemplos:

$$x_1(t) = 2.$$

$x_2(t)$: cualquier señal periódica con valor de pico, x_p , finito.

- Señales con E_∞ y P_∞ infinitas.

Ejemplo: $x(t) = t$.

$$E_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |t|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T t^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t^3}{3} \Big|_{-T}^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T^3}{3} = \infty. \quad (2.64)$$

$$P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |t|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_T}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T^3}{6T} = \infty. \quad (2.65)$$