] Proposition[section] Defin

Sistemas Lineales

Apuntes para el curso de Sistemas Lineales

Colaborador 1

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, 2026

Contents

Señales y Sistemas

El estudio de señales y sistemas constituye el punto de partida fundamental de la asignatura Sistemas Lineales. En este bloque se introducen los conceptos y herramientas básicas que permitirán, a lo largo del curso, analizar, modelar y diseñar sistemas de procesado de señal con rigor matemático y con una clara orientación a aplicaciones de telecomunicación.

Desde un punto de vista ingenieril, muchos problemas pueden formularse de manera común: existe una señal que contiene información relevante y un sistema que actúa sobre dicha señal para transformarla, transmitirla, almacenarla o extraer de ella ciertas características. Este enfoque unificado permite abordar situaciones muy diversas —como la transmisión de voz, el filtrado de ruido, la compresión de imagen o la digitalización de señales físicas— utilizando un conjunto reducido de conceptos y técnicas.

En este bloque se establecerá la notación y el lenguaje básicos de la teoría de la señal, introduciendo las distintas clases de señales (continuas, discretas, analógicas, digitales, deterministas y aleatorias) y los tipos fundamentales de sistemas. Se prestará especial atención a las propiedades de los sistemas, tales como linealidad, invariancia en el tiempo, causalidad o estabilidad, ya que estas características serán clave para el desarrollo posterior de la asignatura.

Asimismo, se presentarán los principales problemas del procesado de señales, como el análisis, el filtrado o la modelización, y se introducirá la convolución como herramienta central para describir la relación entrada–salida en los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI). Estos conceptos servirán de base para el análisis espectral y el estudio de sistemas en dominios transformados que se abordarán en los bloques siguientes.

En definitiva, el Bloque 1 sienta las bases conceptuales y metodológicas necesarias para comprender el resto de la asignatura y proporciona el marco común desde el que se desarrollarán las herramientas avanzadas de análisis de señales y sistemas utilizadas en ingeniería de telecomunicación.

Objetivo de este bloque

Al finalizar el Bloque 1, el estudiante debe ser capaz de:

- entender qué se entiende por señal y sistema,
- distinguir entre señales continuas y discretas,
- clasificar señales y sistemas según sus propiedades,
- comprender el papel central de los sistemas LTI,
- realizar operaciones básicas de procesado de señal,
- sentar las bases para el análisis en dominios transformados.

Este bloque constituye la base conceptual sobre la que se apoyará todo el resto de la asignatura

1. Introducción a los sistemas lineales

Gran parte de los problemas de la **ingeniería de telecomunicación** pueden formularse de una manera muy simple:

> tenemos **información**, esa información se representa mediante **señales**, y esas señales son **procesadas por sistemas**.

Este punto de vista permite analizar y diseñar soluciones en ámbitos muy distintos:

- transmisión por radio y fibra óptica,
- audio y vídeo digital,
- radar, GPS y sistemas de navegación,
- procesado de imagen y señal biomédica,
- control automático y electrónica.

Aunque los dispositivos físicos sean muy diferentes, las **herramientas matemáticas** que permiten describirlos son, en gran medida, las mismas. Ese es precisamente el objetivo de esta asignatura: **proporcionar un marco común para estudiar señales y sistemas de forma rigurosa**.

1.0.1 Señales y sistemas

Los conceptos de señales y sistemas surgen en gran variedad de campos. Tienen gran importancia en áreas tan diversas como: comunicaciones, aeronáutica, diseño de circuitos, acústica, ingeniería biomédica, ...

Aunque la naturaleza física de estas señales y sistemas pueda ser muy distinta, hay dos elementos comunes que permiten estudiarlas de forma conjunta:

1.0.1.1 £Qué es una señal?

Definition 1.1 Una **señal** es una función matemática que describe cómo varía una magnitud física (o informativa) respecto a una o varias variables independientes.

De forma intuitiva:

- una señal **representa información**,
- esa información puede **medirse**, **almacenarse**, **transmitirse** o **procesarse**.

Ejemplos cotidianos

- La tensión eléctrica en un circuito en función del tiempo.
- La presión acústica de una señal de voz.
- La intensidad luminosa de cada píxel de una imagen.
- La temperatura medida por un sensor cada cierto intervalo de tiempo.

En todos los casos estamos describiendo un fenómeno mediante una **función**.

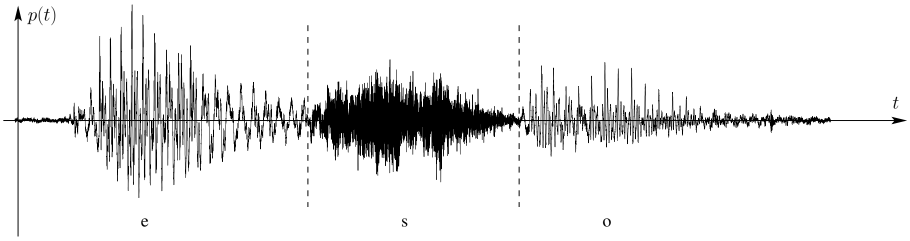


Figure 1.1: Ejemplo de señal

1.0.1.2 £Qué es un sistema?

Definition 1.2 Un **sistema** es cualquier dispositivo, proceso o algoritmo que **transforma una señal de entrada en una señal de salida**.

Desde el punto de vista del análisis, un sistema se estudiará como una **"caja negra"**:

- conocemos qué señal entra,
- observamos qué señal sale,
- y nos interesa caracterizar la relación entre ambas.

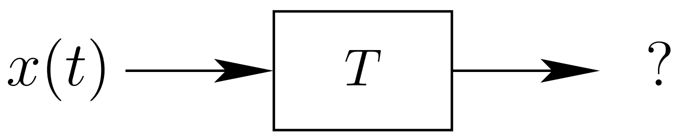
1.0.1.3 Ejemplo

- **Sistema**: un circuito eléctrico.
- **Señales**: tensiones y corrientes $V(t), I(t)$.

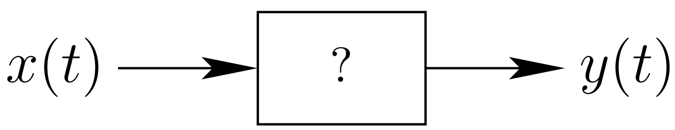
Este enfoque será clave cuando estudiemos los **sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI)**, que constituyen el núcleo de la asignatura.

1.0.2 Problemas de procesado de señales

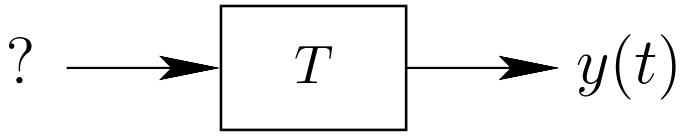
- **Análisis**: estudiar la respuesta de un sistema específico a diversas entradas. (Convolución). Ejemplo: análisis de circuitos.



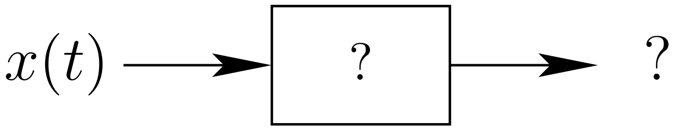
- **Diseño o identificación**: diseñar sistemas para procesar señales de determinada forma. Ejemplos: restauración (voz, imagen, ...), realce, extracción de características.



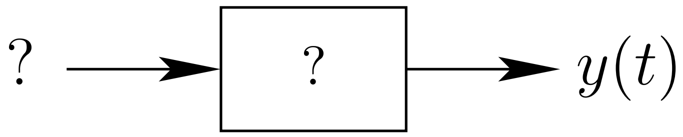
- **Deconvolución**: obtener entrada para un sistema dado a partir de su salida. Ejemplos: eliminar aberraciones en lentes de cámaras fotográficas o movimiento.



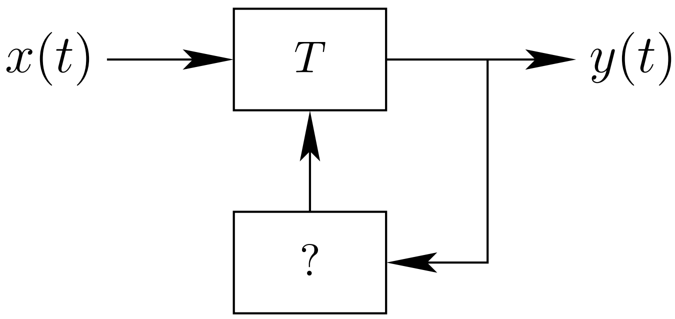
- **Filtrado**: obtener el sistema y la señal de salida que permite modificar una señal de entrada de determinada forma. Ejemplo: eliminar altas frecuencias de señal musical.



- **Modelado**: diseñar un sistema y la señal de entrada que nos permite obtener una salida determinada. Ejemplo: sintetizar voz.



- **Control**: diseñar un sistema que controle a otro a partir de su salida. Ejemplos: sistema de control de planta química, piloto automático.



1.1 Señales continuas y discretas

La información de una señal está contenida en un patrón de variaciones con una forma determinada.

1.1.1 Introducción

Ejemplo 1: señal de voz humana (variaciones de presión acústica).

Distintos patrones de variación producen distintos sonidos:

Ejemplo 2: fotografía (blanco y negro).

Señal bidimensional. Variaciones del nivel de gris.

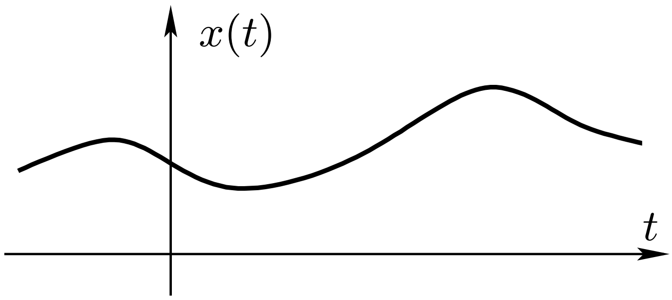
Representación matemática: funciones de una o más variables independientes.

Aquí sólo nos ocuparemos de señales con una variable independiente.

En general consideramos que es el tiempo: $x(t)$ (aunque no tiene por qué).

Vamos a considerar **dos tipos básicos de señales**:

- **Continuas**: la variable independiente es continua $\Rightarrow$ se definen para una sucesión continua de valores de la variable independiente.
  Notación: $\boxed{x(t)}$, con $t \in$.



Ejemplos: señal de voz con el tiempo, presión atmosférica con altitud.

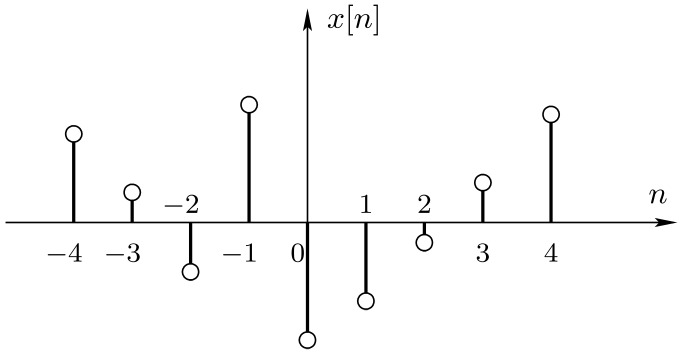
- **Discretas**: la variable independiente sólo toma un conjunto discreto de valores. También se las llama **secuencia discreta**.
  Notación: $\boxed{x[n]}$, con $n \in$.

Ejemplos: valor del IBEX-35 al final de cada sesión, muestreo de señales continuas (muestras equiespaciadas).

Vamos a ir viendo las señales continuas y discretas de forma paralela, para irlas relacionando. En el capítulo de muestreo (7), veremos cómo se puede pasar de unas a otras, idealmente sin error.

1.1.2 Clases de señales

Veremos a continuación distintos tipos de señales que tendrán importancia a lo largo de toda la asignatura.



- **Real e imaginaria**: simetría respecto a la conjugación.
  - **Real pura**: simétrica respecto a la conjugación.

$$x^*(t) = x(t), \tag{1.1}$$

$$x^*[n] = x[n]. \tag{1.2}$$

  - **Imaginaria pura**: antisimétrica respecto a la conjugación.

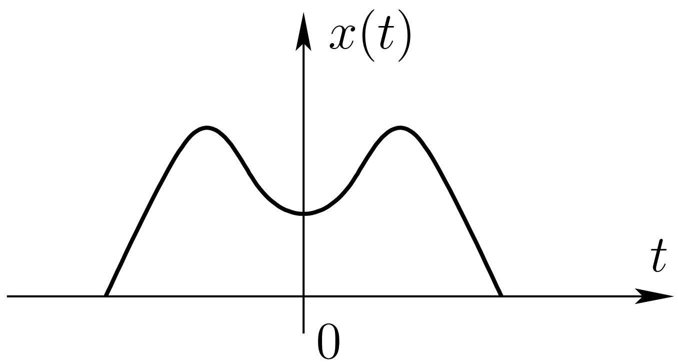
$$x^*(t) = -x(t), \tag{1.3}$$

$$x^*[n] = -x[n]. \tag{1.4}$$

- **Par e impar**: simetría respecto a la inversión en el tiempo. Se aplica a señales reales.
  - **Par**: simétrica respecto al eje de ordenadas.

$$x(-t) = x(t), \tag{1.5}$$

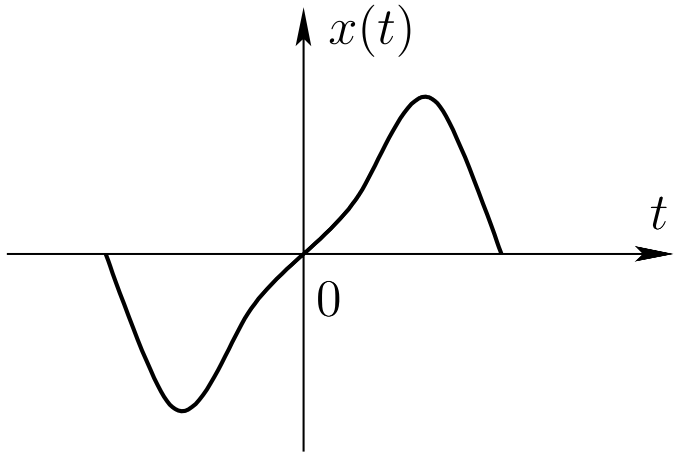
$$x[-n] = x[n]. \tag{1.6}$$



– **Impar**: antisimétrica respecto al eje de ordenadas.

$$x(-t) = -x(t), \tag{1.7}$$

$$x[-n] = -x[n]. \tag{1.8}$$



En el origen, como $x(0) = -x(0)$, se cumple:

$$x(0) = 0, \tag{1.9}$$

$$x[0] = 0, \tag{1.10}$$

- **Hermítica y antihermítica**: Equivalente para señales complejas.
  – **Hermítica**: simétrica respecto al eje de ordenadas y la conjugación.

$$x^*(-t) = x(t), \tag{1.11}$$

$$x^*[-n] = x[n]. \tag{1.12}$$

  – **Antihermítica**: antisimétrica respecto al eje de ordenadas y la conjugación.

$$x^*(-t) = -x(t), \tag{1.13}$$

$$x^*[-n] = -x[n]. \tag{1.14}$$

Toda señal se puede poner como suma de sus partes real e imaginaria, par e impar, hermítica y antihermítica:

$$x(t) = x_r(t) + x_i(t) = \Re\{x(t)\} + \Im\{x(t)\}. \tag{1.15}$$

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) = \mathscr{E}\sqsubseteq\{x(t)\} + \mathscr{O}\lceil\{x(t)\}, \quad x(t) \in . \tag{1.16}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_a(t). \tag{1.17}$$

Las expresiones para el caso discreto son equivalentes.

Cálculo de la parte par e impar de una señal:

$$\begin{cases} x(t) = x_e(t) + x_o(t),\ x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) = x_e(t) - x_o(t). \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\Downarrow \tag{1.19}$$

Parte par e impar de una señal:

$$\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right],\ x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]. \end{cases} \tag{1.20}$$

Se cumple:

$$x_e(0) = x(0), \qquad x_e[0] = x[0]. \tag{1.21}$$

$$x_o(0) = 0, \qquad x_o[0] = 0. \tag{1.22}$$

Parte real e imaginaria:

$$\begin{cases} x_r(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x^*(t)\right],\ x_i(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x^*(t)\right]. \end{cases} \tag{1.23}$$

Parte hermítica y antihermítica:

$$\begin{cases} x_h(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x^*(-t)\right],\ x_a(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x^*(-t)\right]. \end{cases} \tag{1.24}$$

Para el caso discreto las expresiones son equivalentes.

Ejemplo: Cálculo de la parte par e impar de una señal:

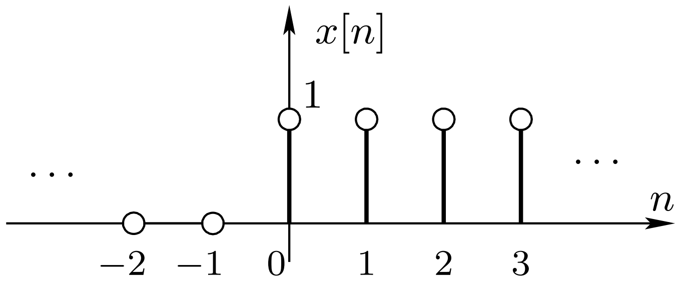
$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0,\ 0, \\ n < 0. \end{cases}$$

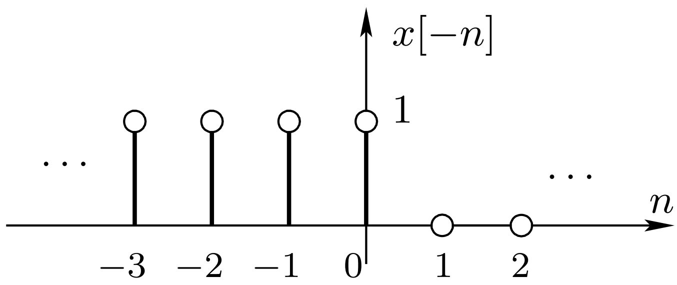
$$x[-n] = \begin{cases} 1, & n \leq 0,\ 0, \\ n > 0. \end{cases}$$

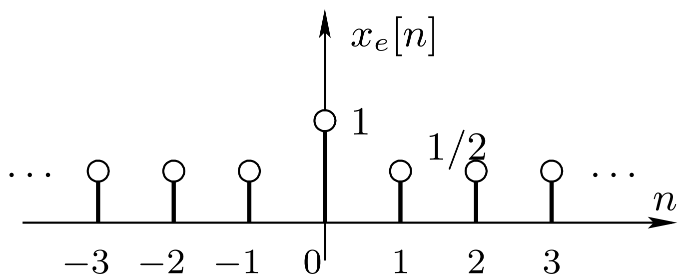
$$x_e[n] = \begin{cases} 1/2, & n < 0,\ 1, \\ n = 0,\ 1/2, & n > 0. \end{cases}$$

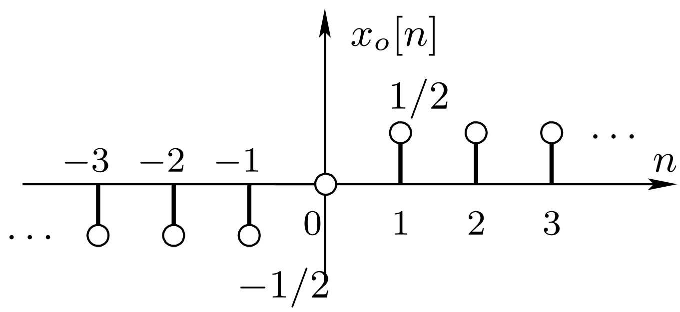
$$x_o[n] = \begin{cases} -1/2, & n < 0,\ 0, \\ n = 0,\ 1/2, & n > 0. \end{cases}$$

A continuación veremos otros tipos de señales: periódicas y de energía y de potencia.


x[n]
1
n
−2 −1 0 1 2 3


x[−n]
1
n
−3 −2 −1 0 1 2


x_e[n]
1
1/2
n
−3 −2 −1 0 1 2 3


x_o[n]
1/2
n
−3 −2 −1
0 1 2 3
−1/2

1.1.3 Señales periódicas

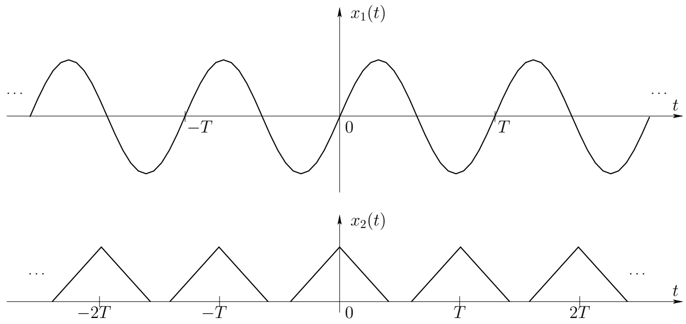
Dada su importancia las vemos aparte.

- Una señal **continua**, $x(t)$, es **periódica** si:

$$\exists\, T \in^{+} \ / \quad \boxed{x(t) = x(t+T)}, \quad \forall t \in . \tag{1.25}$$

T: **periodo** de la señal.

Ejemplos:



Si $x(t)$ es periódica con periodo T, también lo es con periodo mT, $m \in$.

T_0: **periodo fundamental** de la señal. Valor más pequeño de T para el que se satisface:

$$x(t) = x(t+T_0). \tag{1.26}$$

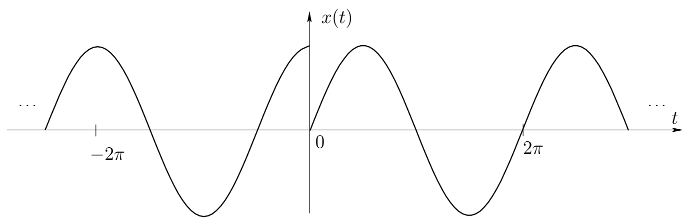
Si $x(t)$ es constante, no está definido T_0, ya que es periódica para cualquier T.

Señal aperiódica: si no es periódica.

Ejemplos:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), \quad t < 0, \ \sin(t), \\ t \geq 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Se cumple que $\cos(t) = \cos(t+2\pi)$ para $t < -2\pi$ y $\sin(t) = \sin(t+2\pi)$, para $t \geq 0$, pero no se cumple $x(t) = x(t+2\pi)$, $\forall t$.



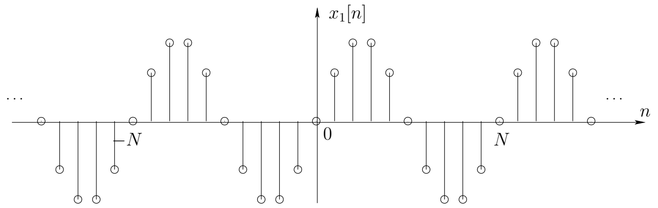
Estudiar el caso:

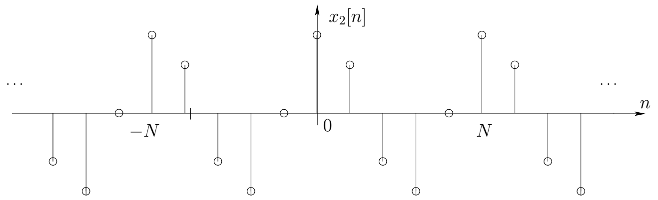
$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), \quad t < 0, \ \cos(-t), \\ t \geq 0. \end{cases} \tag{1.28}$$

- Una señal **discreta**, $x[n]$, es **periódica** si:

$$\exists\, N \in / \quad \boxed{x[n] = x[n+N]}, \quad \forall n \in . \tag{1.29}$$

N: **periodo** de la señal.





Ejemplos:

Si $x[n]$ es periódica con periodo N, también lo es con periodo mN, $m \in$.

N_0: **periodo fundamental** de la secuencia discreta. Valor más pequeño de N para el que se satisface:

$$x[n] = x[n+N_0]. \tag{1.30}$$

Si $x[n]$ es constante, $N_0 = 1$, que es el periodo mínimo que puede tener una señal discreta.

Señal aperiódica: si no es periódica.

1.1.4 Parámetros de interés

Vemos algunos parámetros de interés de las señales, tanto continuas como discretas.

- **Valor medio**:
  - El **valor medio en un intervalo** viene dado por:
    - **Señales continuas**:\

  En el intervalo $t1 \leq t \leq t_2$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt. \tag{1.31}$$

  Para un intervalo simétrico, $-T \leq t \leq T$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt. \tag{1.32}$$

  - **Señales discretas**:

  En el intervalo $n_1 \leq n \leq n_2$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]. \tag{1.33}$$

  Para un intervalo simétrico, $-N \leq n \leq N$:

$$\bar{x} \triangleq \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]. \tag{1.34}$$

  - El **valor medio** viene dado por:

◦ **Señales continuas**:

$$x_{\text{AV}} \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt. \tag{1.35}$$

◦ **Señales discretas**:

$$x_{\text{AV}} \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x[n]. \tag{1.36}$$

– El **valor medio** para **señales periódicas** también se puede calcular de la siguiente forma:

◦ **Señales continuas**:

$$x_{\text{AV}} \triangleq \frac{1}{T} \int_{<T>} x(t)dt. \tag{1.37}$$

◦ **Señales discretas**:

$$x_{\text{AV}} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n\in<N>} x[n]. \tag{1.38}$$

- **Valor de pico**:
  - **Señales continuas**:

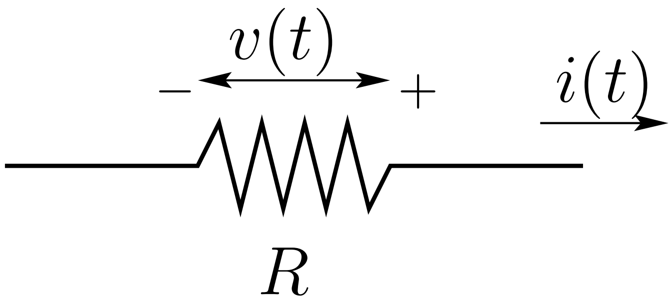
$$x_p \triangleq \max\{|x(t)|,\ t \in\}. \tag{1.39}$$

  - **Señales discretas**:

$$x_p \triangleq \max\{|x[n]|,\ n \in\}. \tag{1.40}$$

- **Potencia instantánea**:
  Por analogía con las señales que representan magnitudes físicas, se puede hablar de potencia y energía.

Así por ejemplo, para una resistencia, la potencia instantánea:



$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t) = Ri^2(t). \tag{1.41}$$

Vemos que es proporcional a la señal al cuadrado. En otros ejemplos ocurre lo mismo.

- **Señales continuas**:

$$P_i(t) \triangleq |x(t)|^2. \tag{1.42}$$

- **Señales discretas**:

$$P_i[n] \triangleq |x[n]|^2. \tag{1.43}$$

- **Energía**: suma (integral) de la potencia instantánea.
  - Energía total **en un intervalo** de tiempo:

- **Señales continuas**:
  En el intervalo $t1 \leq t \leq t_2$:

$$E \triangleq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt. \tag{1.44}$$

  Para un intervalo simétrico, $-T \leq t \leq T$:

$$E_T \triangleq \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt. \tag{1.45}$$

- **Señales discretas**:
  En el intervalo $n_1 \leq n \leq n_2$:

$$E \triangleq \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2. \tag{1.46}$$

  Para un intervalo simétrico, $-N \leq n \leq N$:

$$E_N \triangleq \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2. \tag{1.47}$$

– La **energía total** (en un intervalo infinito) viene dada por:
- **Señales continuas**:

$$E_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \tag{1.48}$$

- **Señales discretas**:

$$E_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2. \tag{1.49}$$

Hay señales para las que esta integral (sumatorio) no converge, como por ejemplo:

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad x_2(t) = C. \tag{1.50}$$

$$x_1[n] = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad x_2[n] = C. \tag{1.51}$$

En estos casos, $E_\infty = \infty$.
Por ello, nos va a interesar otra medida relacionada, que es la potencia media.

- **Potencia media**: valor medio de la potencia instantánea.
  – En general, la potencia media viene dada por:
  - **Señales continuas**:

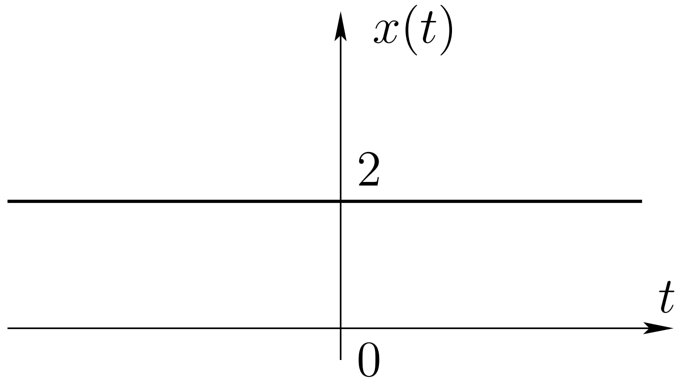
$$P_\infty \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt. \tag{1.52}$$

  - **Señales discretas**:

$$P_\infty \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2. \tag{1.53}$$

  – En el caso particular de **señales periódicas**, también son aplicables las siguientes expresiones:
  - **Señales continuas**:

$$P_\infty \triangleq \frac{1}{T} \int_{<T>} |x(t)|^2 dt. \tag{1.54}$$



- **Señales discretas**:

$$P_\infty \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n \in <N>} |x[n]|^2. \quad (1.55)$$

Ejemplo: $x(t) = 2$.

$$P_i(t) = |x(t)|^2 = 4. \quad (1.56)$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 4dt = \infty. \quad (1.57)$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_i(t) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{4T}{T} = 4. \quad (1.58)$$

1.1.5 Señales de energía y de potencia

Según las definiciones de energía y de potencia de una señal, se puede hablar de tres clases de señales:

- **Señales de energía**: son señales con **energía total finita**.

$$0 < E_\infty < \infty. \quad (1.59)$$

Tienen $P_\infty = 0$:

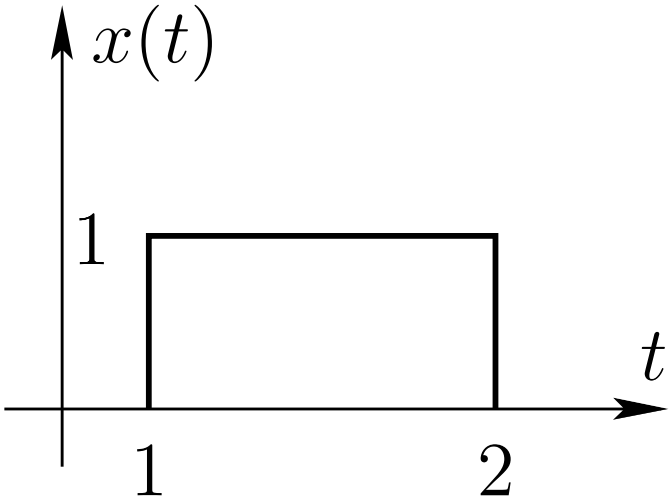
$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_T}{2T} = 0. \quad (1.60)$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{E_N}{2N+1} = 0. \quad (1.61)$$

Ejemplo:

$$E_\infty = 1 \Rightarrow P_\infty = 0. \quad (1.62)$$

- **Señales de potencia**: son señales con **potencia media finita**.



$$0 < P_\infty < \infty \quad \Rightarrow \quad E_\infty = \infty. \tag{1.63}$$

Dado que tienen $P_\infty > 0$, integrando (sumando) en un intervalo infinito, se obtiene $E_\infty = \infty$.

Ejemplos:

$x_1(t) = 2$.
$x_2(t)$: cualquier señal periódica con valor de pico, x_p, finito.

- **Señales con E_∞ y P_∞ infinitas**.

Ejemplo: $x(t) = t$.

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |t|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} t^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{t^3\big|_{-T}^{T}}{3} = \lim_{T\to\infty} \frac{2T^3}{3} = \infty. \tag{1.64}$$

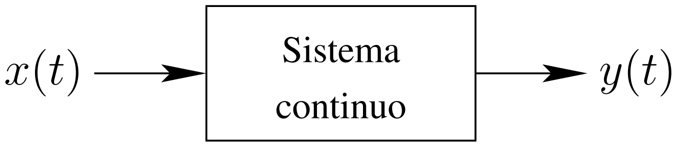
$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |t|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_T}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{2T^3}{6T} = \infty. \tag{1.65}$$

1.2 Sistemas continuos y discretos

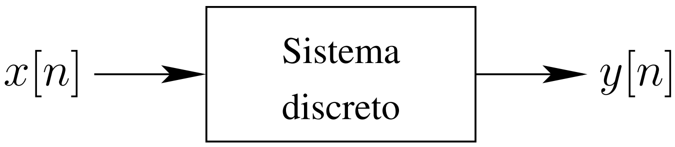
Sistema: proceso por el cual las señales de entrada son transformadas por el sistema, o provocan que éste responda de alguna forma, dando lugar a otras señales como salidas.

Según si las señales de entrada y salida son continuas o discretas, se habla de:

- **Sistemas continuos**: Señales continuas de entrada son transformadas en señales continuas de salida: $x(t) \rightarrow y(t)$.



- **Sistemas discretos**: Señales discretas de entrada son transformadas en señales discretas de salida: $x[n] \rightarrow y[n]$.



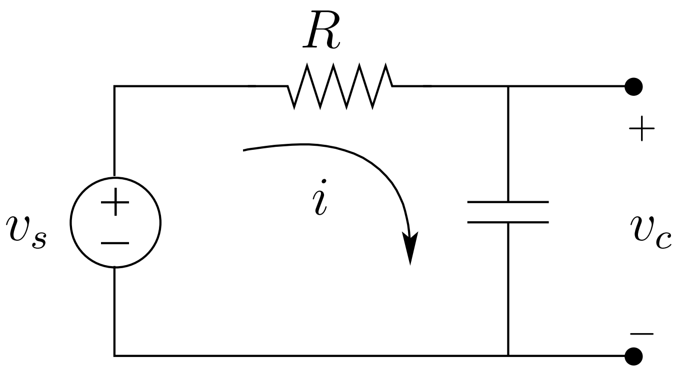
Además existen sistemas que tienen entrada continua y salida discreta (muestreadores) y viceversa (interpoladores), que veremos en el tema de muestreo (tema 7).

1.2.1 Ejemplos sencillos de sistemas

Una de las ventajas del estudio de sistemas es que sistemas muy distintos físicamente producen expresiones matemáticas similares.

Ejemplos de sistemas continuos:

- Circuito RC:



Considerando $v_s(t)$ como la señal de entrada y $v_c(t)$ como la señal de salida, obtenemos:

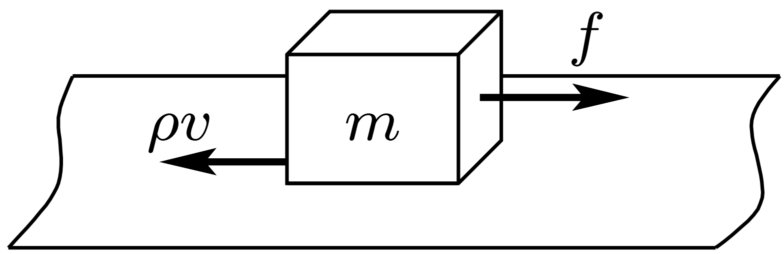
$$v_s(t) = Ri(t) + v_c(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}, \tag{1.66}$$

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}. \tag{1.67}$$

Por tanto, se obtiene la siguiente ecuación diferencial que relaciona la salida con la entrada del sistema:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t). \tag{1.68}$$

- Objeto móvil:



Si consideramos $f(t)$ como la señal de entrada y $v(t)$ como la señal de salida, m la masa del objeto y ρv la resistencia por fricción:

$$f(t) = ma(t) + \rho v(t), \qquad a(t) = \frac{dv(t)}{dt}. \tag{1.69}$$

$$f(t) = m\frac{dv(t)}{dt} + \rho v(t). \tag{1.70}$$

Se obtiene la siguiente ecuación diferencial para el sistema:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t). \tag{1.71}$$

Ambos ejemplos son matemáticamente equivalentes, pues tienen la misma ecuación diferencial, que podemos escribir:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t), \tag{1.72}$$

siento $x(t)$ la señal de entrada al sistema, $y(t)$ la señal de salida y a y b constantes.

Ejemplos de sistemas discretos:

- Cuenta de ahorro en un banco al final de cada año:

Se obtiene la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n], \tag{1.73}$$

o de forma equivalente,

$$y[n] - 1.01y[n-1] = x[n]. \tag{1.74}$$

- Simulación digital del objeto móvil:

Tomamos el tiempo en intervalos de longitud Δ:

$$t = n\Delta. \tag{1.75}$$

Aproximamos la derivada mediante la primera diferencia:

$$\frac{dv(t)}{dt} \simeq \frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta}. \tag{1.76}$$

Por tanto, la ecuación diferencial queda:

$$\frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta} + \frac{\rho}{m} v(n\Delta) = \frac{1}{m} f(n\Delta), \tag{1.77}$$

usando las siguientes definiciones de señales discretas a partir de las continuas muestreadas:

$$\begin{cases} v[n] = v(n\Delta), \\ f[n] = f(n\Delta), \end{cases} \tag{1.78}$$

obtenemos:

$$v[n] - v[n-1] + \frac{\rho\Delta}{m} v[n] = \frac{\Delta}{m} f[n], \tag{1.79}$$

y agrupando términos:

$$v[n] \frac{m+\rho\Delta}{m} - v[n-1] = \frac{\Delta}{m} f[n]. \tag{1.80}$$

Si finalmente dividimos la ecuación por el factor $(m+\rho\Delta)/m$:

$$v[n] - \frac{m}{m+\rho\Delta} v[n-1] = \frac{\Delta}{m+\rho\Delta} f[n]. \tag{1.81}$$

Se puede observar que ambos son ejemplos del mismo tipo de sistema, ya que tienen la misma ecuación en diferencias:

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n]. \tag{1.82}$$

1.2.2 Sistemas elementales (transformación de la variable independiente)

Un concepto fundamental en el análisis de señales y sistemas es el de la transformación de una señal mediante un cierto sistema. Vamos a ver algunas transformaciones elementales de señales, que serán muy importantes en el resto de la asignatura, y nos permitirán entender mejor algunas propiedades de las señales, ya vistas, como son las señales pares e impares, reales e imaginarias, hermíticas y antihermíticas (ver seccción 2.\ref{clases_senales}), señales periódicas (ver sección 2.\ref{periodicas}), y de sistemas, que veremos en la sección 2.\ref{propiedades_sistemas}.

En primer lugar veremos algunas transformaciones elementales sobre la amplitud de la señal, o sumas y diferencias sobre la señal:

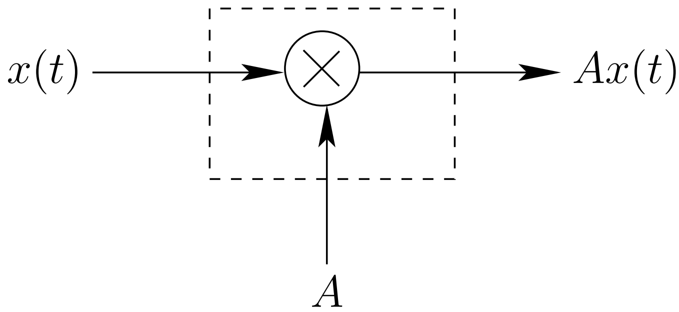
- **Cambio de nivel**: multiplicación de la señal por una constante.

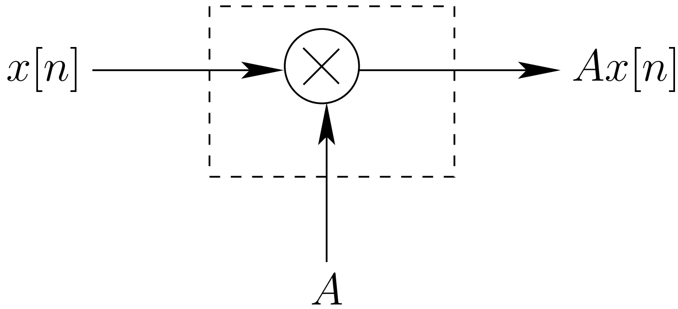
Amplificación: $A > 1$.\ Atenuación: $A < 1$.

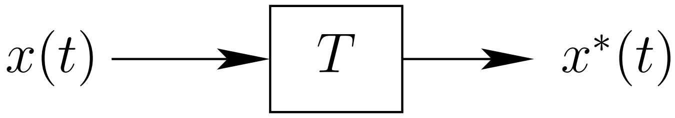
- **Conjugación**:

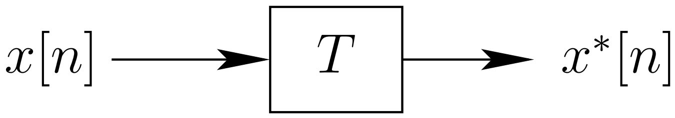
Se ha usado en señales reales e imaginarias y hermíticas y antihermíticas.

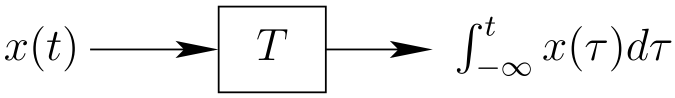
- **Integración**:
- **Sumación o acumulación**: equivalente a la integración para señales discretas.
- **Derivación**: operación inversa a la integración.

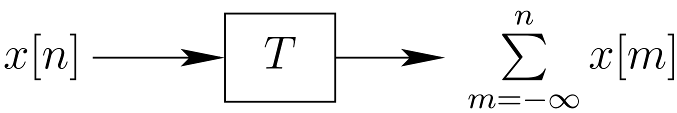

$x(t)$
$Ax(t)$
A

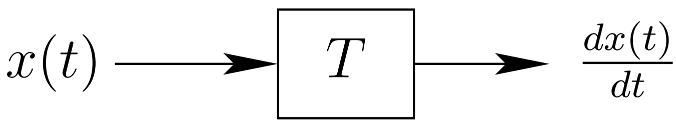

$x[n]$
$Ax[n]$
A

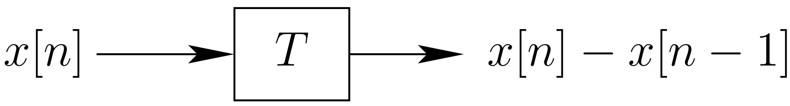

$x(t)$
T
$x^*(t)$

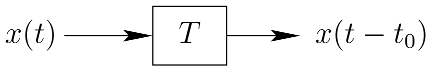

$x[n]$
T
$x^*[n]$

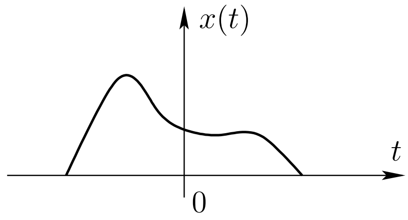

$x(t)$
T
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$


$x[n]$
T
$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

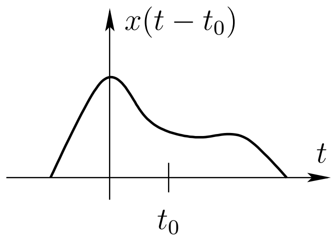

$x(t)$
T
$\frac{dx(t)}{dt}$


$x[n]$
T
$x[n] - x[n-1]$

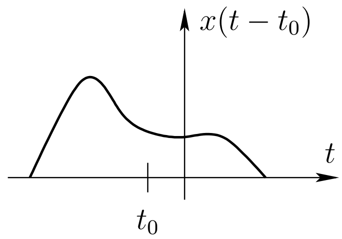




$*$ **Retardo**: $t_0 > 0$.



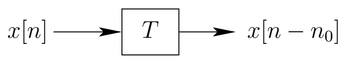
$*$ **Adelanto**: $t_0 < 0$.

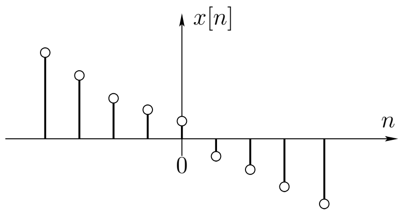


- **Diferenciación o primera diferencia**: operación inversa a la sumación.

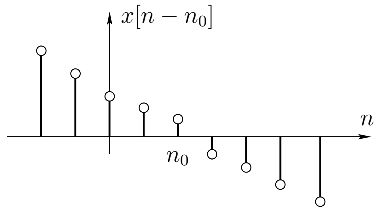
A continuación veremos operaciones elementales realizadas sobre la variable independiente.

- **Desplazamiento o corrimiento en el tiempo**:
  – Continuo:
- Discreto:

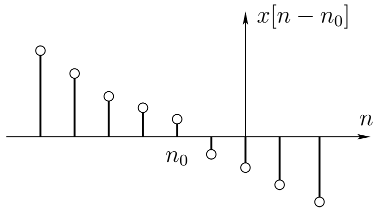




$*$ **Retardo**: $n_0 > 0$.



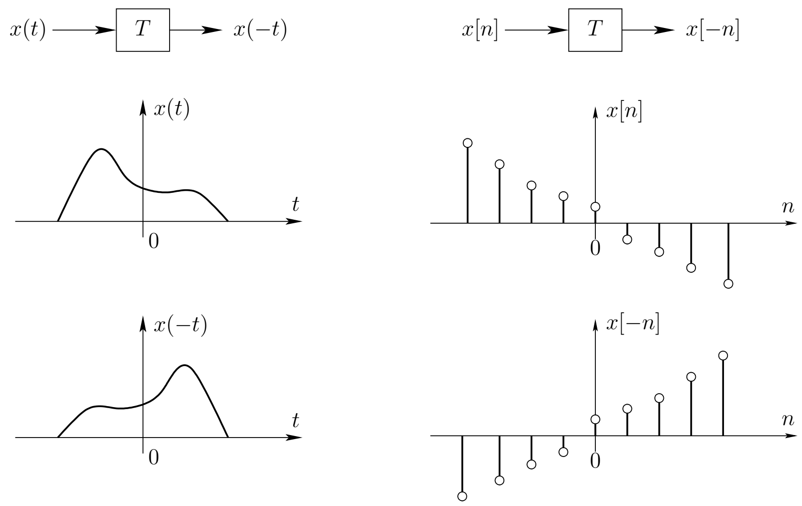
$*$ **Adelanto**: $n_0 < 0$.



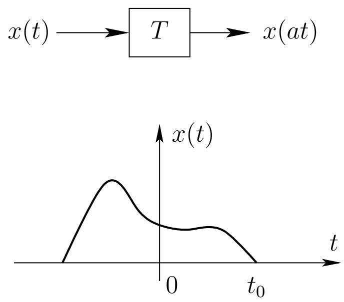
Se ha usado para definir las señales periódicas.

- **Inversión en el tiempo o abatimiento**: reflexión respecto al origen de tiempos.

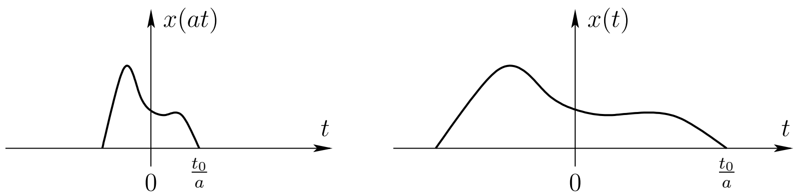
Se ha usado para definir señales pares e impares y hermíticas y antihermíticas. **Ejemplo**: cinta escuchada al revés.



- **Cambio de escala**:
  - Continuo:



$*$ **Compresión**: $a > 1$. $*$ **Expansión**: $a < 1$.



Si $x(t_0) = 0, \quad at = t_0 \Rightarrow t = t_0/a$.

- Discreto:

La expansión discreta o inserción de ceros se define de la siguiente forma:

$$x[n/k] \triangleq \begin{cases} x[n/k], & n = Mk, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}, \qquad M \in . \tag{1.83}$$

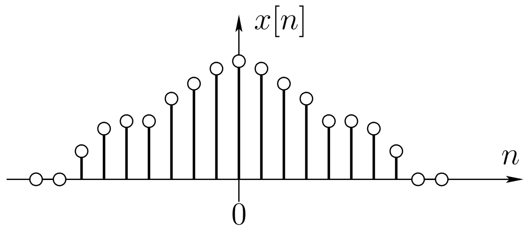
Ejemplo: cambio de velocidad en disco de vinilo.

- **Transformación lineal del eje de tiempos**:

Conserva la forma de la señal, pero:

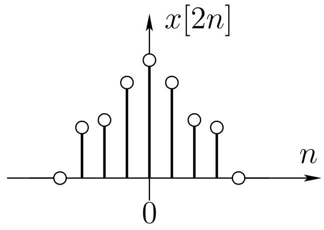
- $|\alpha| < 1$: alarga linealmente la señal.
- $|\alpha| < 1$: comprime linealmente la señal.
- $\alpha < 0$: invierte en el tiempo la señal.
- $\beta \neq 0$: desplaza en el tiempo la señal.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x[n-n_0]$$



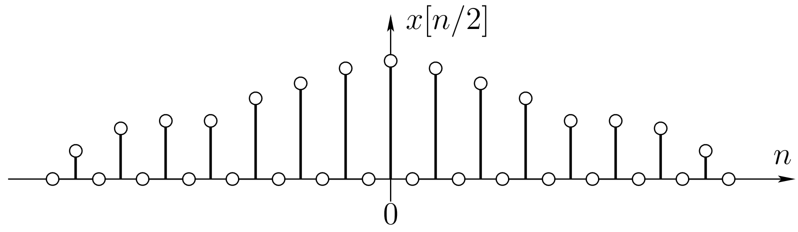
$*$ **Compresión o diezmado**:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x[kn],\ k \in \mathbb{N}$$



$*$ **Expansión o inserción de ceros**:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x[n/k],\ k \in \mathbb{N}$$

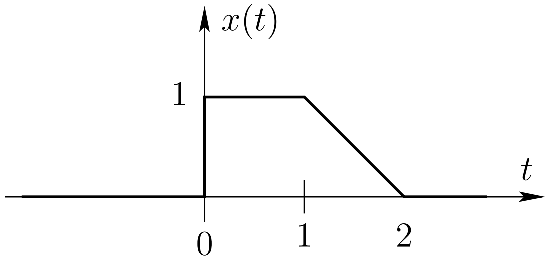


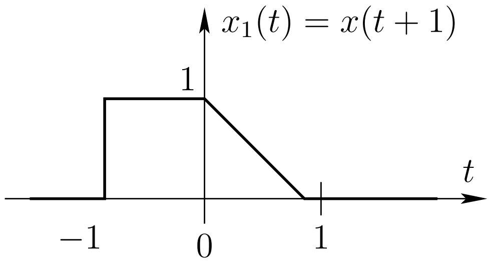
$$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow x(\alpha t+\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

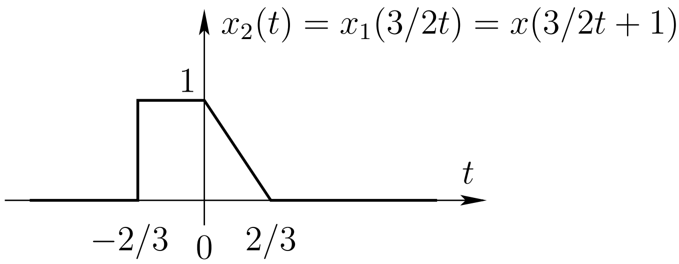
Forma de hacerlo gráficamente de forma sistemática\footnote{Se puede hacer en el orden inverso pero hay que tener cuidado.}:

- Desplazamiento: $x(t) \;\rightarrow\; x(t+\beta)$.
- Escalamiento y/o inversión: $x(t+\beta) \;\rightarrow\; x(\alpha t+\beta)$.

Ejemplo: $x(t) \;\rightarrow\; x\left(\frac{3}{2}t+1\right)$.







Podemos comprobar que en ciertos instantes temporales de interés el resultado es correcto:

- $t=-\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; x\left(\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\right) = x(-1+1) = x(0)$;
- $t=0 \;\Rightarrow\; x\left(\frac{3}{2}\cdot 0+1\right) = x(1)$;
- $t=\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; x\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+1\right) = x(1+1) = x(2)$.