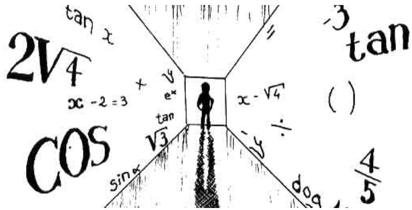
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 3



Mathématiques de Base 3 - $2^{\text{ème}}$ année - **A.U.** 2021/2022

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$$

1. Déterminer les points critiques de f et donner leurs natures locales.
2. Préciser si les extremums locaux trouvés dans la question précédante sont globaux ou non.
3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x^2 + y^2$. On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x,y) = 1$, en utilisant la méthode de Lagrange.

$a)$ Chercher les points critiques de f sous la contrainte $g(x,y) = 1$.
$b)$ Donner les extremums de f sous la contrainte $g(x,y) = 1$ et préciser leurs natures.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$$

1. Déterminer les points critiques de f et donner leurs natures locales.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$$

1. Déterminer les points critiques de f et donner leurs natures locales.

• *Déterminons les d*érivées partielles premières de f

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -x^2 + y + 1 \end{aligned}$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$$

1. Déterminer les points critiques de f et donner leurs natures locales.

• *Déterminons les d*érivées partielles premières de *f*

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & -2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & -x^2 + y + 1 \end{array}$$

• Déterminons le ou les points qui annulent les dérivées partielles premières de *f*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2xy & = & 0 \\ -x^2 + y + 1 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \quad \textbf{ou} \quad y = 0 \\ -x^2 + y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \qquad\qquad x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -1 \\ y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \quad \textbf{ou} \quad x = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} x = 0 \quad \textbf{ou} \quad y = 0 \\ -x^2 + y + 1 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} & x = 0 \quad \Longrightarrow & y = -1 \\ y = 0 \quad \Longrightarrow & x = 1 \quad \textbf{ou} & x = -1 \end{array} \right.$$

Les points critiques sont donc $(0, -1)$**,** $(-1, 0)$ **et** $(1, 0)$**.**

- Déterminons leurs natures à l'aide de la matrice Hessienne

- Déterminons leurs natures à l'aide de la matrice Hessienne

On définit la matrice Hessienne par la matrice $H_f \in M_2(\mathbb{R})$ telle que:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

- Déterminons leurs natures à l'aide de la matrice Hessienne

On définit la matrice Hessienne par la matrice $H_f \in M_2(\mathbb{R})$ telle que:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -2y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -2x \end{aligned}$$

Par suite;

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite;

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

- **En** $(0, -1)$:

$$H_f(0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite;

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

• **En** $(0,-1)$:

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(H_f(0,-1)) = 2 > 0$ et $tr(H_f(0,-1)) = 3 > 0$, alors f possède un minimum local en $(0,-1)$.

Par suite;

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

• **En** $(0,-1)$**:**

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(H_f(0,-1)) = 2 > 0$ **et** $tr(H_f(0,-1)) = 3 > 0$**, alors** f **possède un minimum local en** $(0,-1)$**.**

• **En** $(-1,0)$**:**

$$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(H_f(-1,0)) = -4 < 0$, alors f *possède un point selle en* $(-1,0)$.

• **En** $(1,0)$:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(H_f(1,0)) = -4 < 0$, alors f possède un point selle en $(1,0)$.

• En $(1,0)$:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(H_f(1,0)) = -4 < 0$, alors f possède un point selle en $(1,0)$.

2. En utilisant la définition, préciser si les extremums locaux trouvés dans la question précédante sont globaux ou non.

• **En** $(1,0)$:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(H_f(1,0)) = -4 < 0 \Longrightarrow (1,0)$ **est un point selle**.

2. **En utilisant la définition, préciser si les extremums locaux trouvés dans la question précédante sont globaux ou non.**

$$f(0,-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(2,1) = -\frac{5}{2}$$

• En $(1,0)$:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(H_f(1,0)) = -4 < 0 \Longrightarrow (1,0)$ est un point selle.

2. En utilisant la définition, préciser si les extremums locaux trouvés dans la question précédante sont globaux ou non.

$$f(0,-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(2,1) = -\frac{5}{2}$$

$\Longrightarrow \quad \exists (x,y) = (2,1)$ **tel que** $\quad f(2,1) = -\frac{5}{2} < -\frac{1}{2}$.

Donc le minimum local atteint en $(0,1)$ n'est pas global.

3. **Soit la fonction** g **définie sur** $\mathbb{R}^2$ **par** $g(x, y) = x^2 + y^2$**.**
On cherche maintenant à optimiser f **sous la contrainte** $g(x, y) = 1$**, en utilisant la méthode de Lagrange.**

3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x^2 + y^2$.
On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x,y) = 1$, en utilisant la méthode de Lagrange.

a. Chercher les points critiques de f sous la contrainte $g(x,y) = 1$.

On appelle $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\big(g(x,y) - 1\big) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ le Lagrangien associé au problème.
Résolvons le système:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x^2 + y^2$.
On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x,y) = 1$, en utilisant la méthode de Lagrange.

a. Chercher les points critiques de f sous la contrainte $g(x,y) = 1$.

Soit, $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\big(g(x,y) - 1\big) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ le Lagrangien associé au problème.
Résolvons le système:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2xy - 2\lambda x & = & 0 \\ -x^2 + y + 1 - 2\lambda y & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x(y+\lambda) & = & 0 \\ -x^2+y+1-2\lambda y & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad x=0 \quad \textbf{ou} \quad y=-\lambda$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x(y+\lambda) & = & 0 \\ -x^2+y+1-2\lambda y & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad x=0 \quad \textbf{ou} \quad y=-\lambda$$

• Si $x = 0 \Longrightarrow y = 1$ ou $y = -1$.
D'après la deuxième relation, on a alors $\lambda = \frac{y+1}{2y}$.

$$\iff \begin{cases} 2x(y+\lambda) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x=0 \quad \textbf{ou} \quad y=-\lambda \\ -x^2+y+1-2\lambda y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

• Si $x=0 \Longrightarrow y=1$ ou $y=-1$.
D'après la deuxième relation, on a alors $\lambda = \frac{y+1}{2y}$.
• si $y=1 \Longrightarrow \lambda=1$ et si $y=-1 \Longrightarrow \lambda=0$.
• Si $y=-\lambda$, la deuxième relation se réecrit $-x^2-\lambda+1+2\lambda^2$ et la troisième $x^2+\lambda^2=1$.
En additionnant ces deux relations, on trouve

$$3\lambda^2-\lambda+1=1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(3\lambda-1)=0$$

Cela donne $\lambda=0$ ou $\lambda=\frac{1}{3}$.

Si $\lambda = 0$**,**

Si $\lambda = 0$, la troisième relation donne $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -1$,

$$\Longrightarrow \quad y = -\lambda = 0$$

Si $\lambda = 0$, la troisième relation donne $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -1$,

$$\Longrightarrow \quad y = -\lambda = 0$$

Si $\lambda = \frac{1}{3}$,

Si $\lambda = 0$, la troisième relation donne $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -1$,

$$\Longrightarrow \quad y = -\lambda = 0$$

Si $\lambda = \frac{1}{3}$, la troisième relation donne $x^2 + \frac{1}{9} = 1 \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{8}{9}$,
et donc $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

$$\Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}$$

Si $\lambda = 0$, la troisième relation donne $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -1$,

$$\Longrightarrow \quad y = -\lambda = 0$$

Si $\lambda = \frac{1}{3}$, la troisième relation donne $x^2 + \frac{1}{9} = 1 \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{8}{9}$,
et donc $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

$$\Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}$$

les points critiques du Lagrangien L *sont les* suivants:
$A = (0, -1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 0)$, $D = (1, 0, 0)$, $E = (-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $F = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

b. Donner les extremums de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$ et préciser leurs natures.

- Vérifier que la contrainte est qualifiée en point (x_0, y_0):

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= x^2 + y^2 = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
g(0,-1) &= 1 \\
g(0,1) &= 1 \\
g(-1,0) &= 1 \\
g(1,0) &= 1 \\
g(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}) &= 1 \\
g(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\Big) &= (2x, 2y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(0,-1), \frac{\partial g}{\partial x}(0,-1)\Big) &= (0,-2) \neq (0,0) \\
\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(0,1), \frac{\partial g}{\partial y}(0,1)\Big) &= (0,2) \neq (0,0) \\
\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(-1,0), \frac{\partial g}{\partial y}(-1,0)\Big) &= (-2,0) \neq (0,0) \\
\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(1,0), \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)\Big) &= (2,0) \neq (0,0) \\
\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}), \frac{\partial g}{\partial y}(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})\Big) &= (-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3}) \neq (0,0) \\
\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}), \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})\Big) &= (\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3}) \neq (0,0)
\end{aligned}
$$

- *M*atrice Hessienne bordée ;

$$H_L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{-\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x, y) \\ \frac{-\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x, y) & 0 \end{pmatrix}$$

• *M*atrice Hessienne bordée;

$$H_L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{-\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x,y) & 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$H_L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} -2y-2\lambda & -2x & -2x \\ -2x & 1-2\lambda & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

- *M*atrice Hessienne bordée;

$$H_L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{-\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x,y) & 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$H_L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} -2y-2\lambda & -2x & -2x \\ -2x & 1-2\lambda & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(H_L(0,-1,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

• *Matrice Hessienne bordée;*

$$H_L(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x,y)\\ \frac{-\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x,y) & 0\end{pmatrix}$$

Donc,

$$H_L(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}-2y-2\lambda & -2x & -2x\\ -2x & 1-2\lambda & -2y\\ -2x & -2y & 0\end{pmatrix}$$

$$det(H_L(0,-1,0))=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&0\end{vmatrix}=-4<0$$

Donc f *admet un minimum local en (0;−1)* sous la contrainte $x^2+y^2=1$.

$$det(H_L(0,1,1))=\begin{vmatrix}-4&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&0\end{vmatrix}=16>0$$

• *Matrice Hessienne bordée;*

$$H_L(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x,y)\\ \frac{-\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{-\partial g}{\partial y}(x,y) & 0\end{pmatrix}$$

Donc,

$$H_L(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}-2y-2\lambda & -2x & -2x\\ -2x & 1-2\lambda & -2y\\ -2x & -2y & 0\end{pmatrix}$$

$$det(H_L(0,-1,0))=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=-4<0$$

Donc f *admet un minimum local en (0;−1)* sous la contrainte $x^2+y^2=1$.

$$det(H_L(0,1,1))=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=16>0$$

Donc f *admet un maximum local en (0;1)* sous la contrainte $x^2+y^2=1$.

$$\det(H_L(-1,0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

$$\det(H_L(-1,0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

Donc f admet un minimum local en $(-1,0)$ sous la contrainte $x^2+y^2=1$.

$$\det(H_L(-1,0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

Donc f admet un minimum local en $(-1,0)$ sous la contrainte $x^2+y^2=1$.

$$\det(H_L(1,0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$$\det(H_L(-1,0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

Donc f admet un minimum local en $(-1,0)$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

$$\det(H_L(1,0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

Donc f admet un minimum local en $(1,0)$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

$$\det(H_L(\frac{-2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{32}{9} > 0$$

$$\det(H_L(\frac{-2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{32}{9} > 0$$

Donc f admet un maximum local en $(\frac{-2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

$$\det(H_L(\frac{-2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{32}{9} > 0$$

Donc f admet un maximum local en $(\frac{-2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

$$\det(H_L(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-4\sqrt{2}}{3} & -\frac{4\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{32}{9} > 0$$

$$\det(H_L(\tfrac{-2\sqrt{2}}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{32}{9} > 0$$

Donc f admet un maximum local en $(\frac{-2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

$$\det(H_L(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-4\sqrt{2}}{3} & -\frac{4\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{32}{9} > 0$$

Donc f admet un maximum local en $(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.