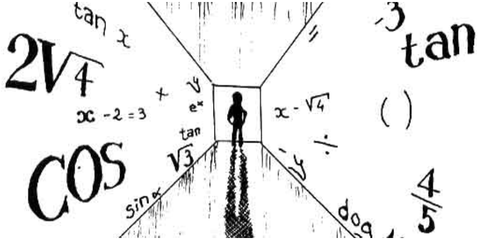
Fonctions de plusieurs variables

AA5: Méthode de substitution



Mathématiques de Base 3 - $2^{\text{ème}}$ année - **A.U.** 2021/2022

Obtimisation sous contrainte

Définition:

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble sur lequel la fonction f est définie.

- On dit que f admet un maximum local en (x_0, y_0) sous la contrainte $(x, y) \in \mathcal{A}$ s'il esiste un disque $\mathcal{D}$ de centre (x_0, y_0) et de rayon r tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Obtimisation sous contrainte

Définition:

- On dit que f admet un minimum local en (x_0, y_0) sous la contrainte $(x, y) \in \mathcal{A}$ s'il esiste un disque $\mathcal{D}$ de centre (x_0, y_0) et de rayon r tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$:

$$☛ \; f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Obtimisation sous contrainte

On considère les deux fonctions

$$f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui admettent des dérivées partielles secondes continues sur $\mathbb{R}^2$.

Obtimisation sous contrainte

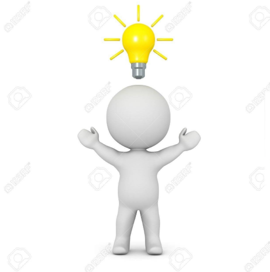
On considère les deux fonctions

$$f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui admettent des dérivées partielles secondes continues sur $\mathbb{R}^2$.
Le problème à étudier consiste à trouver le minimum (ou maximum) de f sous la contrainte $g(x,y) = \alpha$.

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \text{minimiser ou maximiser}\, f(x,y) : & \text{Optimisation} \\ \color{red}{g(x,y) = \alpha :} & \color{red}{\text{Contrainte}} \end{cases}$$

Méthode de substitution



Méthode de substitution

Démarche:

1. Dans la contrainte $g(x,y)=\alpha$, on exprime y en fonction de x (on obtient ainsi $y=h(x)$) ou x en fonction de y (on obtient ainsi $x=h(y)$). Dans les deux cas, h est une fonction d'une seule variable.

Démarche:

1. Dans la contrainte $g(x, y) = \alpha$, on exprime y en fonction de x (on obtient ainsi $y = h(x)$) ou x en fonction de y (on obtient ainsi $x = h(y)$). Dans les deux cas, h est une fonction d'une seule variable.
2. On considère la fonction $\mathbf{F}$ définie par $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(x, h(x))$ dans le premier cas et $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = f(h(y), y)$ dans le deuxième cas.

Démarche:

1. Dans la contrainte $g(x,y)=\alpha$, on exprime y en fonction de x (on obtient ainsi $y=h(x)$) ou x en fonction de y (on obtient ainsi $x=h(y)$). Dans les deux cas, h est une fonction d'une seule variable.
2. On considère la fonction $\mathbf{F}$ définie par $\mathbf{F}(\mathbf{x})=f(x,h(x))$ dans le premier cas et $\mathbf{F}(\mathbf{y})=f(h(y),y)$ dans le deuxième cas.
3. On cherche les extremums, s'ils existent, de la fonction $\mathbf{F}$ qui est une fonction d'une seule variable.

Exercice

Exercice: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = 2xy.$$

En utilisant la méthode de substitution, chercher les extremums de la fonction f sous la contrainte $g(x,y) = 2x + 3y = 6$.

Exercice

Exercice: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = 2xy.$$

En utilisant la méthode de substitution, chercher les extremums de la fonction f sous la contrainte $g(x,y) = 2x + 3y = 6$.

Solution:

- **Dans la contrainte $g(x,y) = \alpha$, on exprime y en fonction de x (on obtient ainsi $y = h(x)$). h est une fonction d'une seule variable.**

Exercice

Exercice: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x, y) = 2xy.$$

En utilisant la méthode de substitution, chercher les extremums de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 2x + 3y = 6$.

Solution:

- **Dans la contrainte $g(x, y) = \alpha$, on exprime y en fonction de x (on obtient ainsi $y = h(x)$). h est une fonction d'une seule variable.**
  D'après la contrainte, on a

$$2x + 3y = 6 \iff y = \underbrace{2 - \frac{2}{3}x}_{h(x)}.$$

.

Exercice

Exercice: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x, y) = 2xy.$$

En utilisant la méthode de substitution, chercher les extremums de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 2x + 3y = 6$.

Solution:

- **Dans la contrainte $g(x, y) = \alpha$, on exprime y en fonction de x (on obtient ainsi $y = h(x)$). h est une fonction d'une seule variable.**
  D'après la contrainte, on a

$$2x + 3y = 6 \iff y = \underbrace{2 - \frac{2}{3}x}_{h(x)}.$$

.

- **On considère la fonction F définie par $\mathrm{F(x)} = f(x, h(x))$**

Exercice

Exercice: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x, y) = 2xy.$$

En utilisant la méthode de substitution, chercher les extremums de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 2x + 3y = 6$.

Solution:

- **Dans la contrainte $g(x, y) = \alpha$, on exprime y en fonction de x (on obtient ainsi $y = h(x)$). h est une fonction d'une seule variable.**
  D'après la contrainte, on a

$$2x + 3y = 6 \iff y = \underbrace{2 - \frac{2}{3}x}_{h(x)}.$$

.

- **On considère la fonction F définie par $\mathrm{F(x)} = f(x, h(x))$**
  Considérons alors la fonction

$$F(x) = f\left(x, 2 - \frac{2}{3}x\right) = 4x - \frac{4}{3}x^2.$$

Exercice

Exercice: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = 2xy.$$

En utilisant la méthode de substitution, chercher les extremums de la fonction f sous la contrainte $g(x,y) = 2x + 3y = 6$.

Solution:

- **Dans la contrainte $g(x,y) = \alpha$, on exprime y en fonction de x (on obtient ainsi $y = h(x)$). h est une fonction d'une seule variable.**
  D'après la contrainte, on a
  $$2x + 3y = 6 \Longleftrightarrow y = \underbrace{2 - \frac{2}{3}x}_{h(x)}.$$
  .
- **On considère la fonction F définie par $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = f(x, h(x))$**
  Considérons alors la fonction
  $$F(x) = f\Big(x, 2 - \frac{2}{3}x\Big) = 4x - \frac{4}{3}x^2.$$

4. **On cherche les extremums, s'ils existent, de la fonction F qui est une fonction d'une seule variable.**

4. **On cherche les extremums, s'ils existent, de la fonction F qui est une fonction d'une seule variable.**
On a $F'(x) = 4 - \frac{8}{3}x$ alors

$$\mathbf{F'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}}$$

d'où $\left(\frac{3}{2}, h(\frac{3}{2})\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ est un extremum de f.
Comme

$$F''(x) = -\frac{8}{3} < 0,$$

alors $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ est un maximum de f.

Remarque:

L'optimisation d'une fonction sous une contrainte n'est pas toujours réalisable en utilisant la méthode de substitution **puisqu'on ne peut pas toujours exprimer y en fonction de x ou inversement.**

Remarque:

L'optimisation d'une fonction sous une contrainte n'est pas toujours réalisable en utilisant la méthode de substitution **puisqu'on ne peut pas toujours exprimer y en fonction de x ou inversement.**

Méthode de Lagrange !