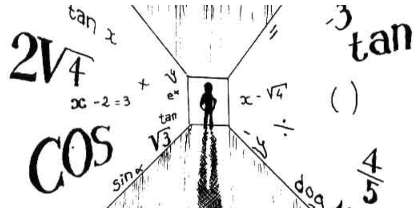
esprit
Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 2



Mathématiques de Base 3 - 2$^{\text{ème}}$ année - **A.U.** 2021/2022

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\exp(-x)$$

On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
1. Trouver les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et quelle ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

1. **Trouver les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.**

1. Trouver les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

- **Détermination des points critiques :**

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\exp(-x) - (x^2+y^2)\exp(-x) = (2x - x^2 - y^2)\exp(-x) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\exp(-x)
\end{aligned}$$

1. Trouver les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

- **Détermination des points critiques :**

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\exp(-x) - (x^2+y^2)\exp(-x) = (2x - x^2 - y^2)\exp(-x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\exp(-x) \end{aligned}$$

Pour déterminer les points critiques il faut résoudre le système:

$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ceci implique que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (2x - x^2 - y^2)\exp(-x) & = & 0 \\ 2y\exp(-x) & = & 0 \end{array} \right.$$

Ceci implique que:

$$\left\{\begin{array}{rcl}(2x - x^2 - y^2)\exp(-x) & = & 0\\ 2y\exp(-x) & = & 0\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl}2x - x^2 - y^2 & = & 0\\ y & = & 0\end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl}x(2-x) - y^2 & = & 0\\ y & = & 0\end{array}\right.$$

Ceci implique que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (2x - x^2 - y^2)\exp(-x) & = & 0 \\ 2y\exp(-x) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x - x^2 - y^2 & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x(2-x) - y^2 & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \quad \textbf{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

Ceci implique que:

$$\left\{\begin{array}{rcl}(2x - x^2 - y^2)\exp(-x) & = & 0\\ 2y\exp(-x) & = & 0\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl}2x - x^2 - y^2 & = & 0\\ y & = & 0\end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl}x(2-x) - y^2 & = & 0\\ y & = & 0\end{array}\right.$$

Donc,

$$\left\{\begin{array}{rcl}x & = & 0\\ y & = & 0\end{array}\right. \quad \textbf{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl}x & = & 2\\ y & = & 0\end{array}\right.$$

Les points critiques sont donc $A = (0, 0)$ et $B = (2, 0)$.

- **Détermination de la nature des points critiques à l'aide de la matrice Hessienne :**

- **Détermination de la nature des points critiques à l'aide de la matrice Hessienne :**

On définit la matrice hessienne par la matrice $H_f \in M_2(\mathbb{R})$ telle que:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

- **Détermination de la nature des points critiques à l'aide de la matrice Hessienne :**

On définit la matrice hessienne par la matrice $H_f \in M_2(\mathbb{R})$ telle que:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (2-2x)\exp(-x) - (2x - x^2 - y^2)\exp(-x) \\ &= (x^2 + y^2 - 4x + 2)\exp(-x) \end{aligned}$$

On définit la matrice Hessienne par la matrice $H_f \in M_2(\mathbb{R})$ telle que:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (2-2x)\exp(-x) - (2x - x^2 - y^2)\exp(-x) \\ &= (x^2 + y^2 - 4x + 2)\exp(-x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -2y\exp(-x) \end{aligned}$$

On définit la matrice Hessienne par la matrice $H_f \in M_2(\mathbb{R})$ telle que:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (2-2x)\exp(-x) - (2x - x^2 - y^2)\exp(-x) \\ &= (x^2 + y^2 - 4x + 2)\exp(-x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -2y\exp(-x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2\exp(-x) \end{aligned}$$

Par suite;

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2+y^2-4x+2)\exp(-x) & -2y\exp(-x) \\ -2y\exp(-x) & 2\exp(-x) \end{pmatrix}$$

• **En** $(0, 0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(H_f(0,0)) = 4 > 0 \quad \textbf{et} \quad tr(H_f(0,0)) = 2 + 2 = 4 > 0$$

• **En** $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(H_f(0,0)) = 4 > 0 \quad \textbf{et} \quad tr(H_f(0,0)) = 2+2 = 4 > 0$$

$\Longrightarrow$ f **possède donc un minimum local en** $(0,0)$.

• En $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(H_f(0,0)) = 4 > 0 \quad \text{et} \quad tr(H_f(0,0)) = 2 + 2 = 4 > 0$$

$\Longrightarrow$ f **possède donc un minimum local en** $(0,0)$.

• En $(2,0)$:

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} -2\exp(-2) & 0 \\ 0 & 2\exp(-2) \end{pmatrix}$$

$det(H_f(2,0)) = -4(\exp(-2))^2 < 0$

• En $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(H_f(0,0)) = 4 > 0 \quad \textbf{et} \quad tr(H_f(0,0)) = 2+2 = 4 > 0$$

$\Longrightarrow$ f **possède donc un minimum local en** $(0,0)$.

• En $(2,0)$:

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} -2\exp(-2) & 0 \\ 0 & 2\exp(-2) \end{pmatrix}$$

$det(H_f(2,0)) = -4(\exp(-2))^2 < 0$

$\Longrightarrow$ f **a un point selle en** $(2,0)$.

2. **Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et quelle ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.**

2. **Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et quelle ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.**

- **On a** $f(0,0) = 0$,

2. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et quelle ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

- **On a $f(0,0) = 0$, et on a clairement $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.**

2. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et quelle ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

- **On a $f(0,0) = 0$, et on a clairement $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.**

$$\Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq f(0,0)$$

2. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et quelle ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

- On a $f(0,0) = 0$, et on a clairement $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq f(0,0)$$

f admet donc un minimum global en $(0,0)$.

2. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et quelle ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

- On a $f(0,0) = 0$, et on a clairement $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq f(0,0)$$

f admet donc un minimum global en $(0,0)$.

- f n'admet pas de maximum global.

2. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et quelle ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

• On a $f(0,0) = 0$, et on a clairement $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Longrightarrow \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq f(0,0)$$

f admet donc un minimum global en $(0,0)$.
• f n'admet pas de maximum global.
En effet, si f admet un maximum global, celui-ci serait atteint en un point critique, or aucun des deux points critiques ne donne de maximum local pour f, donc f n'admet pas de maximum global.