Méthode de Lagrange: Détermination des points critiques

MB3 - $2^{\text{ème}}$ année - **A.U.** 2021/2022

Formulation du problème

Formulation du problème

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant des dérivées partielles secondes continues.
On considère le problème $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \text{minimiser ou maximiser} & f(x, y) \\ \text{sous la contrainte} & g(x, y) = \alpha \end{cases}$$

Formulation du problème

Formulation du problème

Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant des dérivées partielles secondes continues.
On considère le problème $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \text{minimiser ou maximiser} & f(x,y) \\ \text{sous la contrainte} & g(x,y) = \alpha \end{cases}$$

lagrangien

On appelle lagrangien du problème $\mathcal{P}$ la fonction L définie par:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\,(g(x,y) - \alpha)$$

avec λ est un réel dit multiplicateur de Lagrange.

Points critiques du lagrangien

Points critiques du Lagrangien L

On appelle point critique du Lagrangien L le triplet (x_0, y_0, λ) vérifiant:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda) & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda) & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) & = 0 \end{cases}$$

Le triplet (x_0, y_0, λ) est dit aussi point stationnaire.

Points critiques du lagrangien

Points critiques du Lagrangien L

On appelle point critique du Lagrangien L le triplet (x_0, y_0, λ) vérifiant:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda) & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda) & = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) & = 0 \end{cases}$$

Le triplet (x_0, y_0, λ) est dit aussi point stationnaire.

Contrainte qualifiée

On dit que la contrainte $g(x, y) = \alpha$ est qualifiée au point (x_0, y_0) si :

1. $g(x_0, y_0) = \alpha$
2. $(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$

Matrice hessienne bordée

Définition

On appelle matrice hessienne bordée du Lagrangien L en (x_0, y_0, λ) la matrice $\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda)$ définie par:

$$\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x_0, y_0, \lambda) \end{pmatrix}$$

Matrice hessienne bordée

Définition

On appelle matrice hessienne bordée du Lagrangien L en (x_0, y_0, λ) la matrice $\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda)$ définie par:

$$\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x_0, y_0, \lambda) \end{pmatrix}$$

Remarques

1. La matrice $\mathcal{H}_L$ est symétrique.

Matrice hessienne bordée

Définition

On appelle matrice hessienne bordée du Lagrangien L en (x_0, y_0, λ) la matrice $\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda)$ définie par:

$$\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x_0, y_0, \lambda) \end{pmatrix}$$

Remarques

1. La matrice $\mathcal{H}_L$ est symétrique.
2. $\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\,\partial x}(x_0, y_0, \lambda) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$

Matrice hessienne bordée

Définition

On appelle matrice hessienne bordée du Lagrangien L en (x_0, y_0, λ) la matrice $\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda)$ définie par:

$$\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x_0, y_0, \lambda) \end{pmatrix}$$

Remarques

1. La matrice $\mathcal{H}_L$ est symétrique.
2. $\frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial x}(x_0, y_0, \lambda) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$
3. $\frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$

Matrice hessienne bordée

Définition

On appelle matrice hessienne bordée du Lagrangien L en (x_0, y_0, λ) la matrice $\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda)$ définie par:

$$\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial x}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x_0, y_0, \lambda) \end{pmatrix}$$

Remarques

1. La matrice $\mathcal{H}_L$ est symétrique.
2. $\frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial x}(x_0, y_0, \lambda) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$
3. $\frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$
4. $\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x_0, y_0, \lambda) = 0$

On en déduit que la matrice la matrice Hessienne bordée du Lagrangien L en (x_0, y_0, λ) s'écrit aussi:

$$\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) & -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda) & -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) & 0 \end{pmatrix}$$

Nature du point critique

Soit (x_0, y_0, λ) un point critique du Lagrangien L tel que la contrainte $g(x, y) = \alpha$ est qualifiée en (x_0, y_0). La nature de ce point critique dépend de la signe de:

$$\Delta = \det(\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda))$$

Nature du point critique

Soit (x_0, y_0, λ) un point critique du Lagrangien L tel que la contrainte $g(x, y) = \alpha$ est qualifiée en (x_0, y_0). La nature de ce point critique dépend de la signe de:

$$\Delta = \det(\mathcal{H}_L(x_0, y_0, \lambda))$$

Proposition

Soit (x_0, y_0, λ) un point critique du Lagrangien L tel que la contrainte $g(x, y) = \alpha$ est qualifiée en (x_0, y_0). On distingue trois cas:

1. Si $\Delta > 0$, alors le point (x_0, y_0) est un maximum local de f sous la contrainte $g(x, y) = \alpha$.
2. Si $\Delta < 0$, alors le point (x_0, y_0) est un minimum local de f sous la contrainte $g(x, y) = \alpha$.
3. Si $\Delta = 0$, on ne peut pas conclure.

Application

Enoncé:

On considère les deux fonctions f et g:

$$f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy \qquad\qquad g(x,y) = x + 2y$$

Déterminer les extremas de f sous la contrainte $g(x,y) = 24$.

Application

Enoncé:

On considère les deux fonctions f et g:

$$f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy \qquad\qquad g(x, y) = x + 2y$$

Déterminer les extremas de f sous la contrainte $g(x, y) = 24$.

Correction:

Application

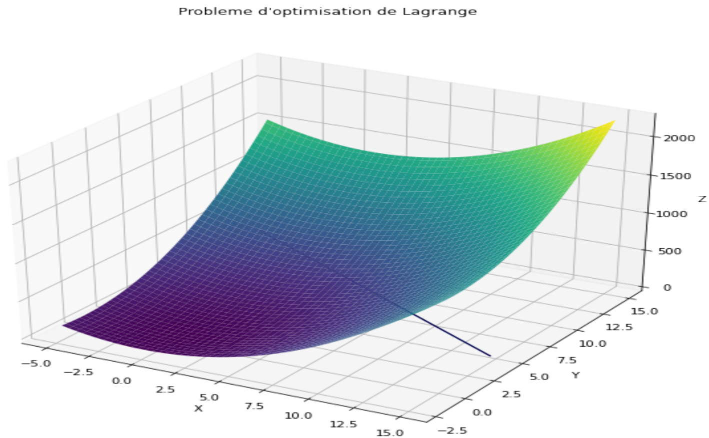
Enoncé:

On considère les deux fonctions f et g:

$$f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy \qquad\qquad g(x,y) = x + 2y$$

Déterminer les extremas de f sous la contrainte $g(x,y) = 24$.

Correction:



Application

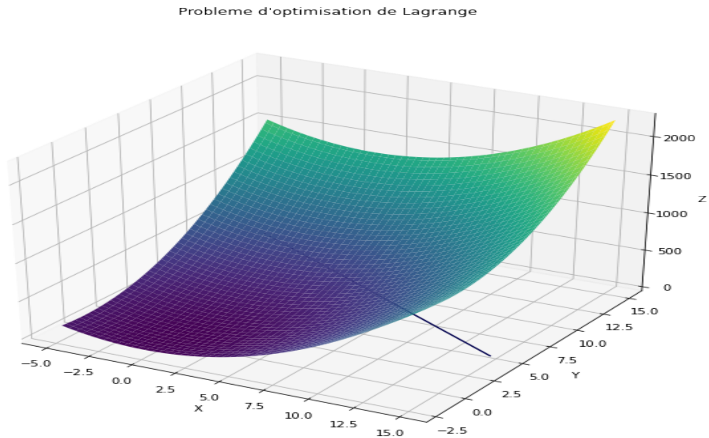
Enoncé:

On considère les deux fonctions f et g:

$$f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy \qquad\qquad g(x,y) = x + 2y$$

Déterminer les extremas de f sous la contrainte $g(x,y) = 24$.

Correction:



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - y - \lambda & = 0 \\ 12y - x - 2\lambda & = 0 \\ 24 - x - 2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21x + 14y & = 0 \\ \lambda & = 10x - y \\ x + 2y & = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - y - \lambda & = 0 \\ 12y - x - 2\lambda & = 0 \\ 24 - x - 2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21x + 14y & = 0 \\ \lambda & = 10x - y \\ x + 2y & = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ \lambda & = 10x - y \\ x + 2y & = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x & = 24 \\ \lambda & = 10x - y \\ y & = \frac{1}{2}(24 - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - y - \lambda & = 0 \\ 12y - x - 2\lambda & = 0 \\ 24 - x - 2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21x + 14y & = 0 \\ \lambda & = 10x - y \\ x + 2y & = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ \lambda & = 10x - y \\ x + 2y & = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x & = 24 \\ \lambda & = 10x - y \\ y & = \frac{1}{2}(24 - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y & = 9 \\ \lambda & = 51 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - y - \lambda & = 0 \\ 12y - x - 2\lambda & = 0 \\ 24 - x - 2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21x + 14y & = 0 \\ \lambda & = 10x - y \\ x + 2y & = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ \lambda & = 10x - y \\ x + 2y & = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x & = 24 \\ \lambda & = 10x - y \\ y & = \frac{1}{2}(24 - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y & = 9 \\ \lambda & = 51 \end{cases}$$

Donc le seul point critique du Lagrangien L est:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - y - \lambda & = 0 \\ 12y - x - 2\lambda & = 0 \\ 24 - x - 2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21x + 14y & = 0 \\ \lambda & = 10x - y \\ x + 2y & = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y & = 0 \\ \lambda & = 10x - y \\ x + 2y & = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x & = 24 \\ \lambda & = 10x - y \\ y & = \frac{1}{2}(24 - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y & = 9 \\ \lambda & = 51 \end{cases}$$

Donc le seul point critique du Lagrangien L est: $(6, 9, 51)$.

Etape3: Vérifier que la contrainte est qualifiée en point (x_0, y_0):

- $g(x_0, y_0) = x_0 + 2y_0 = 6 + 2 \times 9 = 24$
- $(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)) = (1, 2) \neq (0, 0)$

Etape3: Vérifier que la contrainte est qualifiée en point (x_0, y_0):

- $g(x_0, y_0) = x_0 + 2y_0 = 6 + 2 \times 9 = 24$
- $(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)) = (1, 2) \neq (0, 0)$

Etape4: calculer la matrice hessienne bordée en point stationnaire (x_0, y_0, λ):

$$\mathcal{H}_L(6, 9, 51) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(6, 9, 51) & \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y}(6, 9, 51) & -\frac{\partial g}{\partial x}(6, 9) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial x}(6, 9, 51) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(6, 9, 51) & -\frac{\partial g}{\partial y}(6, 9) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(6, 9) & -\frac{\partial g}{\partial y}(6, 9) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -56 < 0$$

On en déduit que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -1 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -56 < 0$$

Donc le point $(6,9)$ est un minimum local de f sous la contrainte $x + 2y = 24$.