

Série d'exercices 5 : MATHÉMATIQUES DE BASE 3

Niveau : 2^{ème} année

Année universitaire : 2021-2022

Exercice 1 1) *Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :*

$$a) \quad f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad b) \quad g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad c) \quad h(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$2) \text{ Soit } f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f .

Exercice 2 *On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :*

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(-x)$$

On admet que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

1. *Trouver les extremums locaux de f sur \mathbb{R}^2 .*
2. *Montrer que f possède un minimum global sur \mathbb{R}^2 et qu'elle ne possède pas de maximum global sur \mathbb{R}^2 .*

Exercice 3 *On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :*

$$f(x, y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$$

1. *Calculer les points critiques de f et donner leurs natures locales.*
2. *Préciser si les extremums locaux trouvés dans la question précédente sont globaux ou non.*
3. *Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = x^2 + y^2$. On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 1$, en utilisant la méthode de Lagrange.*
 - a) *Chercher les points critiques de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.*
 - b) *Donner les extremums de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$ et préciser leurs natures.*

Exercice 4 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

1. *Chercher les points critiques de f sous la contrainte $g(x, y) = 9$ en utilisant la méthode de substitution.*
 2. *Chercher les points critiques de f sous la contrainte $g(x, y) = 9$ en utilisant la méthode de Lagrange.*
- avec,*

$$g(x, y) = xy$$

Exercice 5 On considère la fonction f définie par :

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Calculer les dérivées partielles de f .
3. Déterminer les points critiques de f sur

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{tel que } x^2 + y^2 = 2\}$$

et préciser leurs natures.