TRAZADORES CÚBICOS

El objetivo en los trazadores cúbicos es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los nodos:

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

Así, para $n+1$ datos ($i = 0,1,2,\ldots,n$), existen n intervalos y, en consecuencia $4n$ incógnitas a evaluar. Como con los trazadores cuadráticos, se requieren $4n$ condiciones para evaluar las incógnitas. Éstas son:

1. Los valores de la función deben de ser iguales en los nodos interiores ($2n-2$ condiciones).
2. La primera y última función deben pasar a través de los puntos extremos (2 condiciones).
3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n-1$ condiciones).
4. Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n-1$ condiciones).
5. Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero (2 condiciones).

La interpretación visual de la condición 5 es que la función se vuelve una línea recta en los extremos. Los cinco tipos de condiciones anteriores proporcionan un total de $4n$ ecuaciones requeridas para encontrar los $4n$ coeficientes.

Como las segundas derivadas dentro de cada intervalo es una línea recta, esto lo podemos ver al derivar dos veces la ecuación $f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$. Con esta base, la segunda derivada se representa mediante el polinomio de interpolación de Lagrange de primer grado:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f_i''(x) = f''(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i''(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

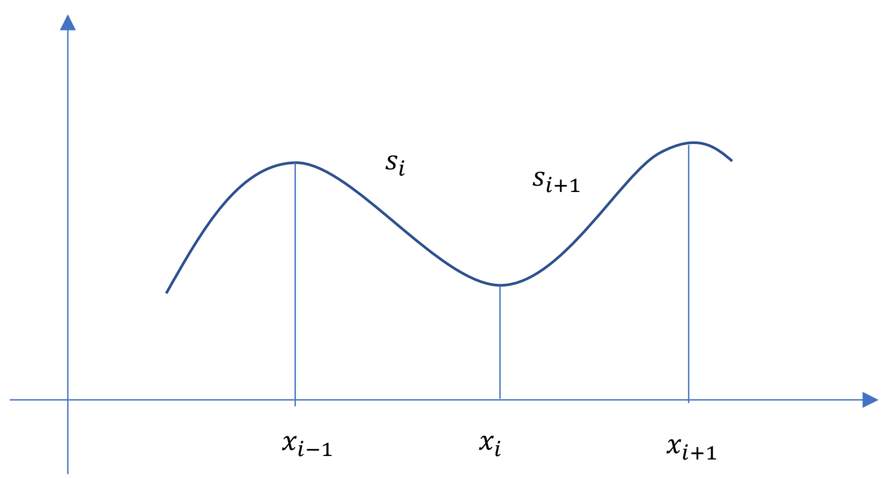
Donde $f_i''(x)$ es el valor de la segunda derivada en cualquier punto x dentro del *i*-ésimo intervalo. Así, esta ecuación es una línea recta, que une la segunda derivada en el primer nodo $f''(x_{i-1})$ con la segunda derivada en el segundo nodo $f''(x_i)$.

La ecuación anterior se integra dos veces para obtener una expresión para $f_i(x)$, para obtener las constantes de integración desconocidas utilizaremos la condición de que $f(x)$ debe de ser igual a $f(x_{i-1})$ en x_{i-1} y $f(x)$ debe de ser igual a $f(x_i)$ en x_i. De esta forma se obtiene la siguiente ecuación cúbica:

$$s_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_i)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1})$$

Esta ecuación sólo contiene dos “coeficientes” desconocidos; es decir las segundas derivadas al inicio y al final del intervalo: $f''(x_{i-1})$ y $f''(x_i)$. Las segundas derivadas se evalúan tomando la condición de que las primeras derivadas deben ser continuas en los nodos. Al derivar dos veces he igualar las ecuaciones se llega a la siguiente relación:

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i-1} - x_i)f''(x_{i+1}) = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$



Definimos unas nuevas variables:

$$h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$$
$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$h_i - h_{i-1} = x_{i+1} - x_{i-1}$$

En términos de estas variables rescribimos la ecuación para las segundas derivadas

$$\begin{aligned} h_{i-1}f''(x_{i-1}) + 2(h_i - h_{i-1})f''(x_i) + h_i f''(x_{i+1}) \\ = \frac{6}{h_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{h_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $f''(x_0)$ y $f''(x_{n+1})$ son iguales a cero, podemos formar una matriz tridiagonal de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_1 - h_0) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_2 - h_1) & h_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{i-1} & 2(h_i - h_{i-1}) & h_i & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''(x_0) \\ f''(x_2) \\ f''(x_3) \\ \vdots \\ \vdots \\ f''(x_i) \\ \vdots \\ f''(x_{n+1}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6}{h_1}[f(x_2) - f(x_1)] + \frac{6}{h_0}[f(x_0) - f(x_1)] \\ \frac{6}{h_2}[f(x_3) - f(x_2)] + \frac{6}{h_1}[f(x_1) - f(x_2)] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{6}{h_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{h_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con este sistema encontramos las segundas derivadas en los puntos interiores y sustituimos en la ecuación:

$$\begin{aligned} s_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(h_{i-1})}(x - x_i)^3 + \frac{f_i''(x)}{6(h_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{h_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})h_{i-1}}{6}\right](x_i - x) \\ + \left[\frac{f(x_i)}{h_{i-1}} - \frac{f''(x_i)h_{i-1}}{6}\right](x - x_{i-1}) \end{aligned}$$