Cálculo I – gr. 4 – 2016/17 – 1º teste-modelo

Resolução e comentários

1. $f(x) := 1 + \arcsin(-x^2+4x)$

(a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -x^2+4x \in [-1,1]\}$

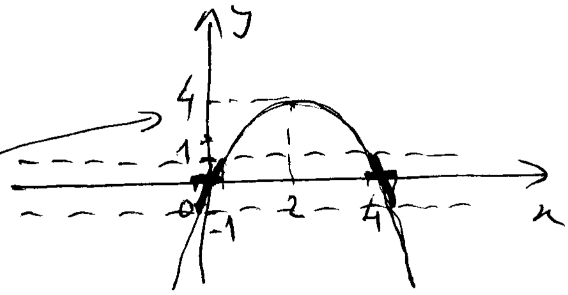
Temos que resolver $-1 \leq -x^2+4x \leq 1$

Uma maneira de resolver:

$-x^2+4x=0$

$\Leftrightarrow x(-x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=4$



$-(2^2)+4\times 2 = -4+8 = 4$

Precisamos de saber quando $-x^2+4x=1$ e quando $-x^2+4x=-1$.

$-x^2+4x=1 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$ $=12$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

$-x^2+4x=-1 \Leftrightarrow x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2}$ $=20$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$.

Com a ajuda do gráfico acima, vemos então que

$-1 \leq -x^2+4x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{5}]$.

$\therefore D_f = [2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{5}]$.

Outra maneira de resolver:

$$-1 \le -x^2+4x \le 1 \Leftrightarrow x^2-4x-1 \le 0 \wedge x^2-4x+1 \ge 0$$

$x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow$
... (ver resol. anterior) ...
$\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{5}$

	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		∞
x^2-4x-1		+	0	−	0	+	

$x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow$
... (ver resol. anterior) ...
$\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}$

	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		∞
x^2-4x+1		+	0	−	0	+	

Então a conjunção acima é equivalente a

$$x\in[2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}]\cap\left(]-\infty,2-\sqrt{3}]\cup[2+\sqrt{3},\infty[\right)$$

$$\Leftrightarrow x\in\left([2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}]\cap]-\infty,2-\sqrt{3}]\right)\cup$$

$$\cup\left([2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}]\cap[2+\sqrt{3},\infty[\right)$$

$$\Leftrightarrow x\in[2-\sqrt{5},2-\sqrt{3}]\cup[2+\sqrt{3},2+\sqrt{5}]$$

$$\therefore D_f=[2-\sqrt{5},2-\sqrt{3}]\cup[2+\sqrt{3},2+\sqrt{5}].$$

Observação à 1ª maneira de resolver (página anterior):

Em vez de se tomar partido do conhecimento do gráfico de uma quadrática, poder-se-ia ter obtido uma ideia do esboço do gráfico da pág. anterior fazendo-se um quadro de variação:

$(-x^2+4x)'=-2x+4$;

$-2x+4\le 0 \Leftrightarrow 2x\ge 4$

$\Leftrightarrow x\ge 2$

Etc.

	$-\infty$		2		∞
$(-x^2+4x)'$		+	0	−	
$-x^2+4x$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

$-2^2+4\times 2=$
$=-4+8=4$

$\lim_{x\to\pm\infty}(-x^2+4x)=-\infty.$

(b) <u>Uma maneira de resolver:</u>

Em $]2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{5}[$,

$$f'(x) = \frac{4-2x}{\sqrt{1-(4x-x^2)^2}}$$ ← isto é sempre positivo além

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4-2x=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2.$

Como $2 \notin]2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{5}[$, então a derivada de f nunca se anula no interior de D_f, embora exista aí sempre.

O teorema de Weierstrass é aplicável a $f|_{[2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{3}]}$ e a $f|_{[2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{5}]}$, já que as funções são contínuas aí, logo estas funções têm máximos e mínimos absolutos. Atendendo ao que disse acima sobre f', esses extremos absolutos terão que ser atingidos nos extremos dos dois intervalos exibidos.

$$f(2-\sqrt{5}) = f(2+\sqrt{5}) = 1+\arcsin(-1) = 1-\frac{\pi}{2}.$$

ver resolução da alínea (a)

$$f(2-\sqrt{3}) = f(2+\sqrt{3}) = 1+\arcsin 1 = 1+\frac{\pi}{2}$$

Em conclusão: o mínimo absoluto é $1-\frac{\pi}{2}$ e os minimizantes absolutos são $2-\sqrt{5}$ e $2+\sqrt{5}$; o máximo absoluto é $1+\frac{\pi}{2}$ e os maximizantes absolutos são $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$.

Outra maneira de resolver:

Em $\underbrace{]2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{3}[\,\cup\,]2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{5}[}$,

$$f'(x) = \frac{4-2x}{\sqrt{1-(4x-x^2)^2}}$$ ← isto é sempre positivo aqui

Como o denominador de f' é positivo, o sinal de f' é dado pelo sinal do numerador (no domínio de f')

	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$2+\sqrt{5}$	∞
$4-2x$	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−
f'	n.d.	n.d.	+	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	−	n.d.	n.d.
f	n.d.	$1-\frac{\pi}{2}$	↗	$1+\frac{\pi}{2}$	n.d.	n.d.	n.d.	$1+\frac{\pi}{2}$	↘	$1-\frac{\pi}{2}$	n.d.

$f(2-\sqrt{5}) = f(2+\sqrt{5}) = 1 + \arcsin(-1) = 1 - \frac{\pi}{2}$

ver resolução da alínea (a)

$f(2-\sqrt{3}) = f(2+\sqrt{3}) = 1 + \arcsin 1 = 1 + \frac{\pi}{2}$

Atendendo ao quadro de variação, o mínimo absoluto é $1-\frac{\pi}{2}$ e os minimizantes absolutos são $2-\sqrt{5}$ e $2+\sqrt{5}$; o máximo absoluto é $1+\frac{\pi}{2}$ e os maximizantes absolutos são $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$.

2., 3., 4. Ver as resoluções das questões 1, 2 e 3 do 2.º teste do ano letivo 2015/16

5., 6. As questões 5 e 6 têm a ver com resultados teóricos provados durante as aulas e com exercícios de aplicação da matéria dada que podem não ter sido exemplificados nas aulas. Há vários exemplos em testes dos anos anteriores.

Mais comentários:

Atendendo à alteração do programa de Cálculo I, não encontrarão em testes dos anos anteriores questões exatamente como a questão 1 deste teste modelo.

No entanto, a função da questão 1 foi inspirada na função da questão 1 do 1º teste de 2015/16 e as alíneas da questão 1 do teste modelo foram inspiradas em alíneas das questões 1 e 2 do 1º teste de 2015/16.

Nesse sentido, se procurarem pelo menos pelas questões 1 dos 1ºs testes dos anos anteriores poderão treinar a resolução de alíneas análogas às consideradas no presente teste.

Se procurarem pelo 1º tad (e, eventualmente, pelo 2º tad) de 2013/14, terão acesso pelo menos a muito mais funções que podem ser usadas/adaptadas para se construírem questões do tipo da questão 1 do teste modelo.

Quanto às questões 2, 3 e 4 deste teste modelo, encontrarão questões do mesmo género nos 2ºs testes dos anos letivos anteriores. E pelo menos relativamente às questões 2 e 3 do presente teste, poderão encontrar muito mais exercícios desse tipo nos 3º tad e 4º tad de 2013/14.

Nota final: Todos os exercícios dos anos anteriores acima referidos são disponibilizados com resoluções.

04-11-2016