

Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4

2021/22

Folha 4: *Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)*

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em \mathbb{R}) das equações diferenciais dadas:

(a) $y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$	$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x);$
(b) $z = \cos x$	$z'' + z = 0;$
(c) $y = \cos^2 x$	$y'' + y = 0;$
(d) $y = Cx - C^2 \quad (C \in \mathbb{R})$	$(y')^2 - xy' + y = 0.$

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

(a) $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);
(b) $y = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);
(c) $y = e^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A \sin(x + B) \quad \text{com} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \sin x = 0$.
(b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \sin x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$.
5. Determine a solução geral das seguintes EDOs:

(a) $y' - \frac{1}{(1+x^2) \arctg x} = 0;$
(b) $y' - \sqrt{1-x^2} = 0;$
(c) $y' - \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0.$

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

(a) $x + yy' = 0;$
(b) $xy' - y = 0;$
(c) $(t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2;$
(d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0.$

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

- (a) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2;$
- (b) $xy + x + y'\sqrt{4+x^2} = 0, \quad y(0) = 1;$
- (c) $(1+x^3)y' = x^2y, \quad y(1) = 2.$

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogêneas e determine um seu integral geral.

- (a) $(x^2 + y^2)y' = xy;$
- (b) $y' \left(1 - \ln \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}, \quad x > 0.$

9. Considere a equação diferencial $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x), \quad x > 0.$

- (a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogênea.
- (b) Determine um integral geral desta EDO.

10. Resolva as seguintes equações diferenciais:

- (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1};$
- (b) $y' = \frac{y-x}{y-x+2}.$
(Sugestão: Efetue a mudança de variável dada por $z = y - x$.)

11. Resolva as seguintes equações diferenciais exatas:

- (a) $(2x + \sin y) dx + x \cos y dy = 0;$
- (b) $(2xy - x - e^y) dx = (xe^y + y - x^2) dy;$
- (c) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2) dy = 0.$

12. Resolva a equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ sabendo que ela admite um fator integrante da forma $\mu(x, y) = e^{\beta x} \cos y$.

13. Resolva as seguintes equações diferenciais, usando em cada caso um fator integrante apropriado:

- (a) $y dx + (y^2 - x) dy = 0;$
- (b) $(2y - x^3) dx + x dy = 0.$

14. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

- (a) $y' + 2y = \cos x;$
- (b) $x^3 y' - y - 1 = 0;$
- (c) $\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2 + 1} y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}, \quad x \neq 0.$

15. Considere a EDO $x^2 y' + 2xy = 1$ em $]0, +\infty[$. Mostre que qualquer solução desta EDO tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

16. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

- (a) $xy' + y = y^2 \ln x, \quad x > 0;$
- (b) $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2 y^5, \quad x \neq 0.$

17. Usando o método da variação das constantes, determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

- (a) $y' - \frac{2y}{x} = x^3$;
- (b) $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x$;
- (c) $y' - \frac{x}{x^2 + 1} y = \sqrt{x^2 + 1}$, (rever EDO do Ex. 14(c)).

18. Encontre as trajetórias ortogonais de cada uma das famílias de curvas indicadas:

- (a) $x^2 + 2y^2 = C$ ($C > 0$);
- (b) $2x + y^2 = C$ ($C \in \mathbb{R}$);
- (c) $xy = C$ ($C \neq 0$).

19. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

- (a) $y' + y = \sin x$;
- (b) $y'' - y + 2 \cos x = 0$;
- (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;
- (d) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}$;
- (e) $y'' + y' = e^{-x}$;
- (f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x)$;
- (g) $y''' + y' = \sin x$;
- (h) $y'' + 9y = \sin x - e^{-x}$.

20. Considere o problema de valores iniciais

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x), \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 1.$$

Justifique que este problema possui uma única solução (em \mathbb{R}) e determine-a.

21. Resolva o seguinte problema de valor inicial $\begin{cases} y' + y \cos x = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

22. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

- (a) $(1 + x^2)y' + 4xy = 0$;
- (b) $y'' + y + 2 \sin x = 0$;
- (c) $(1 + x^2)y' - y = 0$;
- (d) $y''' + 4y' = \cos x$;
- (e) $y' - 3x^2y = x^2$;
- (f) $y''' - 3y' + 2y = 12e^x$.

23. Resolva a EDO $xy'' - y' = 3x^2$ (Sugestão: Efetue a mudança de variável $z = y'$).

24. Considere a EDO linear homogênea (de coeficientes não constantes)

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad x \in]1, \infty[.$$

- (a) Mostre que $\{x, e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.
- (b) Obtenha a solução geral da EDO.
- (c) Resolva agora a EDO

$$(1 - x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \quad x \in]1, \infty[.$$

começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y = \beta x^2$ para certo $\beta \in \mathbb{R}$.