ler 2.1 Primitivas - parte 1

1 Primitivas imediatas e quase imediatas

Se $f = F'$, sendo F (geralmente) uma *função elementar*, diz-se que a fórmula

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C, \ C \in \mathbb{R}$$

apresenta uma primitiva quase imediata (ou só imediata, quando $g(x) = x$)

De facto, $(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$, desde que g seja diferenciável

- A notação das seguintes tabelas obtém-se definindo $u = g(x)$ (e $u' = g'(x)$):

a derivada de $F(u)$ é $f(u)u'$ e uma primitiva de $f(u)u'$ é $F(u)$

Além disso, através da equivalência *formal* $u' = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow u'dx = du$ pode-se transformar

a primitiva quase imediata $\int f(u)u'dx$ na primitiva imediata $\int f(u)du$

Exemplo: se $f(x) = \cos x$, com $F(x) = \operatorname{sen}(x)$, e $u = x^2$, com $u' = 2x$, então

$$\int \cos(x^2)2x dx = \int \cos(u)u'dx = \left[\int \cos(u)du\right] = \operatorname{sen}(u) + C = \operatorname{sen}(x^2) + C, \ C \in \mathbb{R}$$

2 Tabela das derivadas de composições

Função	Derivada
u^r	$r\,u^{r-1}u'$
$\ln\|u\|$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'\,e^u$
a^u	$u'\,a^u\,\ln a \ (a > 0, a \neq 1)$
$\operatorname{sen} u$	$u'\cos u$
$\cos u$	$-u'\operatorname{sen} u$
$\operatorname{senh} u$	$u'\cosh u$
$\cosh u$	$u'\operatorname{senh} u$

Função	Derivada
$\operatorname{tg} u$	$u'\sec^2 u$
$\operatorname{cotg} u$	$-u'\operatorname{cosec}^2 u$
$\sec u$	$u'\sec u\,\operatorname{tg} u$
$\operatorname{cosec} u$	$-u'\operatorname{cosec} u\,\operatorname{cotg} u$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arccotg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$

3 Tabela das primitivas quase imediatas

Função	Primitiva
$u^r\,u'$	$\frac{u^{r+1}}{r+1} \ (r \neq -1)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$u'\,e^u$	e^u
$u'\,a^u$	$\frac{a^u}{\ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$
$u'\cos u$	$\operatorname{sen} u$
$u'\operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u'\cosh u$	$\operatorname{senh} u$
$u'\operatorname{senh} u$	$\cosh u$

Função	Primitiva
$u'\sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$
$u'\operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$
$u'\sec u\,\operatorname{tg} u$	$\sec u$
$u'\operatorname{cosec} u\,\operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cosec} u$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{arcsen} u$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$
$u'\sec u$	$\ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$
$u'\operatorname{cosec} u$	$-\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$

4 Primitivas quase imediatas: exercícios

a) $\int x(1+x^2)^9\,dx$ b) $\int \operatorname{sen} x \cos^5 x\,dx$ c) $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$ d) $\int \operatorname{tg} x\,dx$

e) $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$ f) $\int e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx$ g) $\int x7^{x^2}\,dx$ h) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

i) $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$ j) $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$ k) $\int \frac{1}{(x+9)^2}\,dx$ l) $\int \frac{x^2}{x^2+9}\,dx$

m) $\int x^3\sqrt{1-x^4}\,dx$ n) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ o) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ p) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

q) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ r) $\int \frac{5}{x\ln^3 x}\,dx$ s) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ t) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

u) $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^5 x\,dx$ v) $\int \frac{1}{\sec x-\cos x}\,dx$ w) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$ x) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

5 Umas fórmulas de trigonometria

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

(donde $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cos x$ e $\cos(2x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\operatorname{sen}^2 x$)

$$\text{(A)}\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\end{cases}\Rightarrow\quad\text{(B)}\begin{cases}\operatorname{sen}x\cos x=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\\ \cos^2 x=\frac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big)\\ \operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)\end{cases}$$

Primitivas

- para produtos de $\operatorname{sen}(nx)$ e $\cos(mx)$, $m,n\in\mathbb{N}$, basta usar (A)
- para $\operatorname{sen}^n x\cos^m x$, $m,n\in\mathbb{N}$, um deles ímpar, usar $\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=1$
- para $\operatorname{sen}^n x\cos^m x$, $m,n\in\mathbb{N}$, ambos pares, usar (B)

Calcular: (a) $\int \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)\,dx$ (b) $\int \cos^2 x\,dx$ (c) $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$

wiki dot em [2.1 Primitivas - parte 2] ver Primitivação do produto de duas funções

6 Integração por partes

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx}$$

(a) $\int x\operatorname{sen}x\,dx$ (b) $\int xe^{-x}\,dx$ (c) $\int \ln x\,dx$ (d) $\int \operatorname{arctg}x\,dx$

(e) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ (f) $\int e^x\cos x\,dx$ (g) $\int x^3e^{x^2}\,dx$ (h) $\int x\arcsin x^2\,dx$

Mais primitivas trigonométricas . . .

- (co)$\operatorname{tg}^n x$, $n\in\mathbb{N}$: destaca-se, substituindo, (co)$\operatorname{tg}^2 x=$ (co)$\sec^2 x-1$
- (co)$\sec^n$, n par: destaca-se (co)$\sec^2 x$ e, noutro fator, (co)$\sec^2 x=$ (co)$\operatorname{tg}^2 x+1$
- (co)$\sec^n$, n ímpar: por partes, *primitivando* o fator (co)$\sec^2 x$

Calcular: (i) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$ (j) $\int \operatorname{cosec}^4 x\,dx$ (k) $\int \sec^3 x\,dx$

wiki dot em [2.1 Primitivas - parte 2] ver Primitivação de funções racionais

7 Decomposição e primitivação de funções racionais

- Pode-se escrever uma função racional $f(x)=\frac{n(x)}{d(x)}$ na forma $f(x)=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$, onde q é o quociente e r o resto da divisão de n por d, ou seja, $\frac{r(x)}{d(x)}$ é própria
- Se d_1 e d_2 não têm fatores em comum, a função racional própria $f(x)=\frac{n(x)}{d_1(x)d_2(x)}$ tem uma única decomposição em funções racionais próprias $f(x)=\frac{n_1(x)}{d_1(x)}+\frac{n_2(x)}{d_2(x)}$
- A função racional própria $f(x)=\frac{n(x)}{d^m(x)}$, $m\in\mathbb{N}$, admite uma única decomposição $f(x)=\frac{n_1(x)}{d(x)}+\frac{n_2(x)}{d^2(x)}+\cdots+\frac{n_m(x)}{d^m(x)}$ com grau n_i < grau d para $i=1,\ldots,m$

Primitivas elementares, com $a,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$ e $C\in\mathbb{R}$ (verificar!)

$$\int\frac{1}{(x+a)^n}\,dx=\begin{cases}\ln|x+a|+C & n=1\\ \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}}+C & n>1\end{cases}$$

$$\int\frac{x+\gamma}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left((x+\alpha)^2+\beta^2\right)+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x+\alpha}{\beta}+C$$

Exercício: calcula (a) $\displaystyle\int\frac{x^4-6}{x^3-2x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int\frac{3x}{x^3-3x^2+4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{2x^3+6x^2+5x}\,dx$

8 Método de Hermite-Ostrogradski (facultativo)

O caso de potências de fatores irredutíveis de grau 2 no denominador é complicado: resolve-se com *substituições trigonométricas* ou com uma *fórmula de recorrência*

O método de Hermite-Ostrogradski elimina essa dificuldade:

seja $f(x)=\frac{n(x)}{d(x)}$ uma função racional própria; então, se

- $d_s(x)$ é o produto dos fatores de $d(x)$ *sem considerar as multiplicidades* e
- $d_r(x)=d(x)/d_s(x)$ é o produto dos restantes fatores,

existem, e são únicas, as frações próprias $\frac{n_s(x)}{d_s(x)}$ e $\frac{n_r(x)}{d_r(x)}$ tais que $f(x)=\frac{n_s(x)}{d_s(x)}+\left(\frac{n_r(x)}{d_r(x)}\right)'$

Observação: repare-se que $\int f(x)dx=\int\frac{n_s(x)}{d_s(x)}dx+\frac{n_r(x)}{d_r(x)}$

Para simplificar as contas, convém misturar os dois métodos apresentados:

- aplicar o método das frações simples a todos os fatores de grau 1
- aplicar o método de Hermite-Ostrogradski a cada fator de grau 2

9 Comparação de decomposições

Exemplo: são apresentadas três decomposições da mesma função racional própria

$$\begin{aligned}\frac{4(1-x)}{x^3(x^2+2)^2}&=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+2)^2} && \left(\text{frações simples}\right)\\ &=\frac{ax^2+bx+c}{x(x^2+2)}+\left(\frac{dx^3+ex^2+fx+g}{x^2(x^2+2)}\right)' && \left(\text{Hermite Ostrogradski}\right)\\ &=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\left(\frac{\phi x+\gamma}{x^2+2}\right)' && \left(\text{f.s. \& H.O.}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\int\frac{4(1-x)}{x^3(x^2+2)^2}\,dx=\int\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+2}\,dx+\frac{\phi x+\gamma}{x^2+2}$$

Exercícios:

1. Calcula os coeficientes das diferentes decomposições e a primitiva do exemplo
2. Calcula (a) $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(x^2-2x+2)^2}\,dx$