## Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 2020/21

exame final -  $1.\frac{a}{}$  parte

- Esta 1.ª parte termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.

Duração: 1h15

- 1. Seja  $\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \le y \le -x^2 + 5x\}.$ 
  - (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de y = 2x e de  $y = -x^2 + 5x$ . Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é (0,0) e (3,6), mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.
  - (b) Representa geometricamente a região A.
  - (c) Calcula a área da região A.
- 2. Considera o seguinte integral impróprio de 1.ª espécie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \text{onde } f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} & \text{se } x \le -2\\ e^{-x} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

Determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula o seu valor.

- 3. (a) Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta. (i)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+(-1)^n}{n^3+3n^2+4}$ ; (ii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ .
  - (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-3)^{n-1}}{2^{2n}} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right].$$

4. Seja  $\alpha > 0$ . Embora a função  $\frac{1}{x^{\alpha}}$  não seja integrável em [0,1], define-se a quantidade  $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx$  como  $\lim_{y\to 0^+} \int_y^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ , caso este limite exista. Com esta definição, mostra que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \ge 1 \end{cases}.$$

FIM

Cotação:

1. 2; 2. 1; 3. 4; 4. 3.