

Universidade de Aveiro  
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4

2021/22

Folha 1: Séries de Potências — Fórmula de Taylor — Série de Taylor

---

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

|  |   |  |
|--|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ ;                    | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$ ;   | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ;     |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$ ;        | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ ;      | (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$ ;          |
| (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (x+2)^n$ ;      | (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3} x^n$ ;   | (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$ ;           |
| (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n} (3x-2)^n$ ; | (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (x-2)^n$ ; | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n$ . |

2. Mostre que:

- (a) se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo;
- (b) se o domínio de convergência de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é  $] -r, r]$ , então a série é simplesmente convergente em  $x = r$ .

3. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

- (a)  $T_0^3(x^3 + 2x + 1)$ ;  
(b)  $T_\pi^3(\cos x)$ ;  
(c)  $T_1^3(xe^x)$ ;  
(d)  $T_0^5(\sin x)$ ;  
(e)  $T_0^6(\sin x)$ ;  
(f)  $T_1^n(\ln x)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

4. Considere  $f(x) = e^x$ .

- (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem  $n$  da função  $f$ .  
(b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem  $n$  permite aproximar  $e^x$  no intervalo  $] -1, 0[$ , com erro inferior a  $\frac{1}{(n+1)!}$ .  
(c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de  $f$  e use-o para obter uma aproximação de  $\frac{1}{\sqrt{e}}$ , indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de  $\sin(3)$  quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto  $a = \pi$ .

6. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo  $[-1, 1]$ , com erro inferior a  $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ .
7. (a) Obtenha o polinómio de Taylor de ordem  $n \in \mathbb{N}$  da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  no ponto  $c = 1$ .  
 (b) Determine um valor de  $n$  para o qual se garanta que o polinómio  $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$ , obtido na alínea anterior, aproxime  $\frac{1}{x}$  no intervalo  $[0.9, 1.1]$ , com erro inferior a  $10^{-3}$ .
8. Determine o menor valor de  $n$  tal que o polinómio de MacLaurin de ordem  $n$  da função  $f(x) = e^x$  aproxime  $f(1)$  com erro inferior a  $10^{-3}$ .
9. Mostre, usando a fórmula de Taylor, que  $\ln(1+x) \leq x$ , para todo  $x > -1$ .
10. Partindo da representação

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

determine uma representação em série de potências para cada uma das seguintes funções, indicando o intervalo onde tal representação é válida:

$$(a) \frac{1}{1-3x}; \quad (b) \frac{2}{2+x}; \quad (c) \frac{1}{x}.$$

11. Desenvolva a função  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  em série de potências de  $x-3$ , indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.