

- Este teste termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.

1. Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a)  $\frac{\arctan(x)}{x^2}$ ;      (b)  $\frac{1}{x^2(1-x^2)}$ ;      (c)  $\frac{\sqrt[4]{x} + x}{\sqrt{x}}$ .

Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) faz uma mudança de variável.

2. Seja  $\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 - x^4}\}$ .

- (a) Determina os valores de  $x$  para os quais  $\sqrt{x^2 - x^4}$  faz sentido.  
 (b) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de  $y = 0$  e de  $y = \sqrt{x^2 - x^4}$ .

Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que as soluções são  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ , mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

- (c) Representa geometricamente a região  $\mathcal{A}$ .  
 (d) Calcula a área da região  $\mathcal{A}$ .

3. Dados uma qualquer função  $f$  contínua em  $\mathbb{R}$  e  $a$  um número real, designaremos por  $I_a f$  o integral indefinido de  $f$  com origem no ponto  $a$ . Ou seja,  $(I_a f)(x) := \int_a^x f(t) dt$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- (a) Determina  $(I_a(I_a f))''(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ .  
 (b) Utilizando o método da integração por partes, mostra que

$$(I_a(I_a f))(x) = \int_a^x (x - u)f(u) du, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**FIM**

**Cotação:**

1. 10;    2. 7;    3. 3.