Temas: Limites e continuidade de f.R.V.V.R

A primeira noção de limite que conheceram foi a noção de limite segundo Heine.

↓

Usamos sucessões para nos aproximarmos dos pontos de acumulação.

Relembrar

Limite segundo Heine (f.R.V.R)

Seja f uma f.R.V.R e $a, b \in \mathbb{R}$, o limite de f quando x tende para a é b, se a é ponto de acumulação do domínio de f e se:

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ x_n \to a \Rightarrow \lim f(x_n) = b$$

Se este limite existir, ele é único

Em C2, não vamos aprofundar muito o estudo de limites. Vamos abordar essencialmente trabalhar com limites de funções de duas variáveis.

Sucessões em $\mathbb{R}^n$...

Definição (limite de uma sucessão)

Diz-se que uma sucessão $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^2$ converge para $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se para cada $r > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_k, y_k) \in B_r((a, b))$ para todo o $k > k_0$. Escrevemos $\lim_{k \to \infty} (x_k, y_k) = (a, b)$ (ou $(x_k, y_k) \to (a, b)$ quando $k \to \infty$).

Exemplo 1

Seja

$x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{n}{n+1}$, então $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to+\infty} (0, 1)$

$x_n \longrightarrow 0 \qquad y_n \longrightarrow 1$

A Bola centrada em (a,b) interseta sempre D em pontos diferentes de (a,b).

Definição (limite de uma f.r.v.v.r.)

Sejam $\ell \in \mathbb{R}$, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto de acumulação de D. Diz-se que ℓ é **limite** de $f(x, y)$ quando (x, y) tende para (a, b), e escreve-se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell$, se para qualquer sucessão de pontos $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $D \setminus \{(a, b)\}$ convergente para (a, b), a correspondente sucessão das imagens $(f(x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ convergir para ℓ (em $\mathbb{R}$).

Tem de verificar a condição qualquer que seja a escolha das sucessões. Por isso, basta que encontremos um contra-exemplo para mostrarmos que falha!

Exemplo 2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$$

$x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

$y_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

$(x_n, y_n) \longrightarrow (0,0)$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

$$x_n = -\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad (x_n, y_n) \longrightarrow (0,0)$$

$$y_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+n}{n^2}}{\frac{1-n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+n)}{\cancel{n^2}(1-n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n}{1-n} = -1 \neq 1$$

$\therefore$ Como os limites são diferentes, ñ existe limite.

Exemplo 3

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x+y}{x}$$

① $x_n = \frac{1}{n} \qquad y_n = 1+\frac{1}{n}$

② $x_n = -\frac{1}{n} \qquad y_n = 1+\frac{1}{n}$

①

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\left(\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n}+1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

②

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\left(-\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{n}+1}{-1/n} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$\therefore$ Como os limites são diferentes, ñ existe limite.

Exemplo 4

Mostremos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$.

Seja (x_k, y_k) uma sucessão arbitrária de pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ convergente para $(0,0)$. Designando a função em causa por f, temos

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} \overbrace{x_k}^{\text{infinitésimo}} \underbrace{\frac{y_k^2}{x_k^2+y_k^2}}_{\leq 1} = 0.$$

Limite de uma função usando curvas

Podemos calcular o limite de uma função utilizando curvas para aproximar o ponto (a,b), em lugar de usar uma sucessão.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 5

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Curvas: (Passam em $(0,0)$)

$x=0$

$y=0$

$y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$x=0$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{0y}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Exemplo 6

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+4y}{x-y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{2x+4y}{x-y} = \lim_{y\to 0} \frac{4y}{-y} = -4 \\ \\ \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{2x+4y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2 \end{array}\right\} \neq$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2x+4y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+4mx}{x-mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2+4m)}{x(1-m)}$$

$$= \frac{2+4m}{1-m}$$

valores diferentes

Limites usando mudança de variáveis

Proposição (mudança de variável)

Considere-se a composição $f(x,y) = g(h(x,y))$ com domínio D e seja (a,b) um ponto de acumulação de D. Suponha-se que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = c$ e $\lim_{u\to c} g(u) = \ell$. Se g é contínua$^{(*)}$ em c (ou g não está definida em c), então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell.$$

Exemplo 7

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$$

$u = x^2+y^2$

$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow u\to 0$

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$$

Continuidade de uma f.R.V.V.R

Definição (função contínua (a 2 variáveis))

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se **contínua** num ponto de acumulação $(a, b) \in D$ se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

f é contínua num subconjunto $S \subseteq D$ se é contínua em todos os pontos de S.

nota: Assume-se que f é contínua em pontos isolados.

A continuidade de funções reais de n variáveis reais goza de propriedades análogas às f.R.V.R.

- funções constantes são contínuas.
- A soma, subtração, produto e quociente de funções contínuas é uma função contínua.
- A composição de funções contínuas é ainda uma função contínua.

Exemplo 8

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{xy}}{xy} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - e^{xy}}{xy} \underset{\uparrow}{=} - \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = -1 \neq f(0,0) = 1$$

M.V: $u = xy$ $(x,y) \to (0,0)$ então $u \to 0$

Como o limite existe, mas não coincide com a imagem de f no ponto (0,0), podemos então concluir que f não é contínua em (0,0).

Exemplo 9

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{x+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vimos em cima, no exemplo 2, que o limite de f em (0,0) não existe. Logo, podemos concluir que a função f, não é contínua em (0,0).