Resolução Questão 1

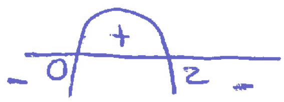
a) $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{2x - x^2 \geq 0}_{(A)} \wedge \underbrace{-1 \leq 1 - x \leq 1}_{(B)} \}$

C. Aux.

(A) A inequação $2x - x^2 \geq 0$ pode ser resolvida com recurso à representação gráfica ou a uma tabela de sinal ou ainda analiticamente.

1. $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

concavidade voltada para baixo



$2x - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 2$

ou 2. tabela

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 2$

ou 3. $2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(2-x) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge 2 - x \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge 2 - x \leq 0)$

$\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \leq 2) \vee \underbrace{(x \leq 0 \wedge x \geq 2)}_{\text{c. imp.}}$

$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 2$

(B) $-1 \leq 1-x \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq 1-x \quad \wedge \quad 1-x \leq 1$

$\Leftrightarrow x \leq 2 \quad \wedge \quad x \geq 0$

Logo $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x \leq 2 \}$

$= [0, 2]$

<u>Nota</u>: Poder-se-ia resolver analiticamente

$2x - x^2 \geq 0 \wedge -1 \leq 1-x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(x \geq 0 \wedge 2-x \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge 2-x \leq 0)] \wedge 1-x \leq 1 \wedge 1-x \geq -1$

b) 1º) Determinar a <u>derivada</u> de f

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x-x^2}\right)' - \left(\arccos(1-x)\right)'$$

$$= \frac{(2x-x^2)'}{2\sqrt{2x-x^2}} - \left(-\frac{(1-x)'}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\right)$$

$$= \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-1+2x-x^2}}$$

$$= \frac{\cancel{2}(1-x)}{\cancel{2}\sqrt{2x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$D_{f'} =]0, 2[$

2.º) Determinar os zeros da derivada

$$f'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow -x=0 \wedge 2x-x^2>0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \wedge x>0 \wedge x<0$$ (usando os cálculos da alínea anterior)

Logo, como $0 \notin D_{f'}$, a função derivada não admite zeros.

3.º) Análise de f e f'

Opção 1

f é contínua num intervalo compacto (fechado e limitado). O Teorema de Weierstrass garante-nos a existência de extremos globais.

Pontos críticos (neste caso, são os pontos onde a derivada não existe): 0 e 2.

$$f(0)=\sqrt{2\times 0-0}-\arccos(1-0)=-\arccos(1)=0$$
$$f(2)=\sqrt{2\times 2-4}-\arccos(1-2)=-\arccos(-1)=-\pi$$

Logo, o máximo absoluto (global) é 0 e o respetivo maximizante é 0. O mínimo absoluto (global) é $-\pi$ e o respetivo minimizante é 2.

Opção 2

- f é contínua em $[0,2]$
- $f'(x) < 0$, $\forall x \in]0,2[$

Então, a função f é estritamente decrescente no seu domínio (consequência do T. de Lagrange)

x	0		2
$f'(x)$	N.D	$-$	N.D
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = -\pi$$

Máximo absoluto (global) 0

maximizante 0

Mínimo absoluto (global) $-\pi$

minimizante 2