

1.a)  $\int \sin(\sqrt{x}) dx$ , mudança de variável:  
(30 pts)  $t = \sqrt{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$   
 $x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t > 0$  (mantém sinal)  
 $dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} \int \sin(\sqrt{x}) dx &= \int \sin t (2t) dt \\ &= 2 \int \underbrace{t}_{u} \underbrace{\sin t}_{v'} dt, \text{ por partes} \\ &= 2 \left[ \underbrace{t}_{u} (-\cos t) - \int \underbrace{1}_{u'} (-\cos t) dt \right] \\ &= -2t \cos t + \int \cos t dt \\ &= -2t \cos t + 2 \sin t + C, \text{ } C \text{ constante real em intervalos} \\ \text{Substituição inversa: } t &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = -2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin(\sqrt{x}) + C.$$

1.b)  $\int \frac{x+2}{x^3+2x^2+5x} dx$ , fração racional própria  
(45 pts)

$$x^3+2x^2+5x = x(x^2+2x+5), \Delta = 2^2 - 4(1)(5) < 0$$

$f(x)$  tem um par de raízes complexas

$$\frac{x+2}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$x+2 = Ax^2+2Ax+5A+Bx^2+Cx$$

$$x+2 = (A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A$$



$$\begin{cases} 5A=2 \\ 2A+C=1 \\ A+B=0 \end{cases} \begin{cases} A=2/5 \\ C=1-4/5=1/5 \\ B=-2/5 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2+2x+5}{x(x^2+2x+5)} dx = \int \frac{2/5}{x} + \frac{(-2/5)x + 1/5}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \int \frac{2x-1}{x^2+2x+5} dx$$

C.A.

$$(x^2+2x+5)' = 2x+2$$

$$= \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \int \frac{(2x+2)-2-1}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - \frac{1}{5} \int \frac{-3}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$$= \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{4[1+(\frac{x+1}{2})^2]}$$

$$= \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{20} \int \frac{1/2}{1+(\frac{x+1}{2})^2} dx$$

C.A.

$$(\frac{x+1}{2})' = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{5} \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{10} \operatorname{arctg}(\frac{x+1}{2}) + C, \quad C \text{ constante real em intervalos}$$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2+2x+5}}\right) + \frac{3}{10} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$



1. c)  $\int \frac{2}{\sqrt{x} (2+\sqrt{x})^{101}} dx$ , mudança de variável

03.  
05

$$2 + \sqrt{x} = t \Leftrightarrow \sqrt{x} = t - 2, \quad t \in ]2, +\infty[, \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = (t-2)^2$$

$\uparrow$   
 $x > 0$

$$\frac{dx}{dt} = 2(t-2) \Rightarrow dx = 2(t-2) dt$$

$$\int \frac{2}{(t-2) t^{101}} 2(t-2) dt = 4 \int \frac{dt}{t^{101}}$$

$$= 4 \int t^{-101} dt$$

$$= 4 \frac{t^{-101+1}}{-101+1} + C, \quad C \text{ constante real em intervalos}$$

$$= 4 \frac{t^{-100}}{-100} + C$$

$$= \frac{1}{-\frac{100}{4} t^{100}} + C$$

$$= \frac{1}{-25 t^{100}} + C$$

Substituição inversa  
 $t = 2 + \sqrt{x}$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x} (2+\sqrt{x})^{101}} dx = - \frac{1}{25 (2+\sqrt{x})^{100}} + C$$

$$= - \frac{1}{25 (1+25 x^{50})}$$



2.a)  $f(x) = g(x)$

$$1-2x = \sqrt{x} \Rightarrow (1-2x)^2 = x \Leftrightarrow 1-4x+4x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(4)1}}{2(4)} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{4}$$

• confirmar se  $x = 1$  é solução  $f(1) = 1-2(1) \neq \sqrt{1} = g(1)$

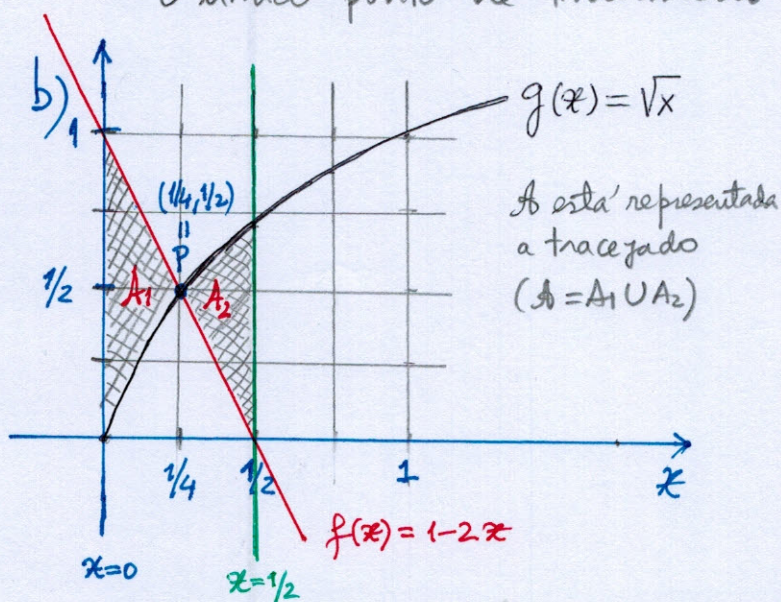
$f(1) = -1 \neq 1 = g(1)$ ,  $x = 1$  não é solução.

• confirmar se  $x = 1/4$  é solução  $f(1/4) = 1-2(1/4) = \sqrt{1/4} = g(1/4)$

$f(1/4) = 1/2 = g(1/4)$ ,  $x = 1/4$  é solução.

$$(f(x) = g(x) \wedge x \in [0, 1/2]) \Leftrightarrow (x = \frac{1}{4} \wedge x \in [0, 1/2]) \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

O único ponto de interseção é  $P = (\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{1}{4}}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$



c)  $f$  e  $g$  são integráveis em  $[0, 1/2]$

$$A = \int_0^{1/2} |f(x) - g(x)| dx$$

$$A = \underbrace{\int_0^{1/4} f(x) - g(x) dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{1/4}^{1/2} g(x) - f(x) dx}_{A_2}$$

$$A = \int_0^{1/4} 1-2x - \sqrt{x} dx + \int_{1/4}^{1/2} \sqrt{x} - (1-2x) dx$$

$$A = \int_0^{1/4} -\sqrt{x} - 2x + 1 dx + \int_{1/4}^{1/2} \sqrt{x} + 2x - 1 dx$$

$f$  e  $g$  são primitiváveis (são até contínuas), usaremos a Regra de Barrow:

$$A = \left[ -\frac{2}{3} x^{2/3} + x - x^2 \right]_0^{1/4} + \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - x + x^2 \right]_{1/4}^{1/2}$$

$$A = \left[ -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{4} \right)^{2/3} + \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right] - [0] - \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4} \right)^{3/2} - \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right] - \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^{3/2} - \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

$$A = 2 \left[ -\frac{2}{3} \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right] + \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right]$$

$$A = -\frac{4}{3} \frac{1}{4 \times 2} + \frac{2}{4} - \frac{2}{16} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$A = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3 \times 2} + \frac{1}{4}, \text{ mmmc}(4, 6, 8) = 24$$

$$A = -\frac{4}{24} - \frac{3}{24} + \frac{4\sqrt{2}}{24} + \frac{6}{24} = \frac{-4-3+6+4\sqrt{2}}{24} = \frac{-1+4\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{24}$$



3.  $f$  contínua em  $\mathbb{R}$

$g$  definida em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  por  $g(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t) dt$

05.  
05

a) Cálculo de  $L = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

- Seja  $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ .

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função  $F$  é diferenciável em todo o intervalo  $[a, b]$  (limitado e fechado) que contenha o ponto  $t=0$ . Na verdade,  $f$  é contínua.

Além disso,  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- Considere-se agora o limite:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}, \text{ indet } \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como  $h(x) := x$  e  $h'(x) = 1$  não se anulam em  $] -1, 1[ \setminus \{0\}$ , estamos em condições de aplicar a Regra de Cauchy se existir o limite

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{h'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = f(0)$$

Como  $L_1$  existe, tem-se  $L = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L_1 = f(0)$ .

b) " $\Rightarrow$ "

Se  $g(x) = k$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  então  $k = \frac{F(x)}{x} \Leftrightarrow F(x) = kx$

obtendo-se para  $x \neq 0$ ,  $F'(x) = (kx)' \Leftrightarrow f(x) = k$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como  $f$  é contínua,  $f(0) = k$ , resultando que  $f(x) = k$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

" $\Leftarrow$ "

Se  $f(x) = c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  então  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x c dt$

Aplicando a Regra de Barrow ( $f(x) = c$  até é contínua em  $\mathbb{R}$ )

$$g(x) = \frac{1}{x} [ct]_0^x = \frac{cx}{x} = c, \text{ resultando}$$

que  $g$  é constante em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .