Capítulo 3

Séries Numéricas

3.1 Definições e propriedades

Seja (a_n) uma sucessão de números reais.

Definição 3.1. Chama-se *série numérica de termo geral a_n* ao par $((a_n),(s_n))$ constituído pela sucessão (a_n) e pela sucessão (s_n), onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \,. \end{aligned}$$

Aos números reais $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ chamamos *termos* da série de termo geral a_n e aos números reais $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ chamamos *somas parciais* da série de termo geral a_n.

À sucessão de termo geral s_n chamamos *sucessão das somas parciais* da série de termo geral a_n.

Para representar a série de termo geral a_n é habitual utilizar uma das simbologias

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

ou

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \,.$$

Se a sucessão das somas parciais (s_n) for convergente, isto é, se o limite

$$\lim_{n \to +\infty} s_n$$

existir e for finito dizemos que a série de termo geral a_n é *convergente* e que o valor do limite é a sua *soma*. Neste caso escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$$

onde $s = \lim_{n\to+\infty} s_n$.

Se a sucessão das somas parciais é divergente, isto é, se o limite

$$\lim_{n\to+\infty} s_n$$

não existir ou for infinito dizemos que a série de termo geral a_n é *divergente*.

Observação 3.2.

1. Em muitos dos exemplos que apresentaremos vamos considerar o caso em que a sucessão dos termos da série é a sucessão $(a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots, a_{p+n}, \cdots)$, para algum $p \in \mathbb{N}_0$. Neste caso a série é representada por
$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$$
e a sucessão das somas parciais é a sucessão $(s_n)_{n\geq p} = (s_p, s_{p+1}, \cdots)$, onde, para cada $n \geq p$,
$$s_n = \sum_{k=p}^{n} a_k$$
é a soma dos termos até à ordem n.

2. No que se segue, para exprimir que vamos averiguar se uma série é convergente ou divergente utilizaremos a expressão *estudar a natureza da série*.

Exemplo 3.3.

1. Consideremos a série de termo geral $a_n = (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$. A sucessão das somas parciais desta série é a sucessão (s_n) onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tem
$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$
Uma vez que não existe o limite $\lim_{n\to+\infty} s_n$, a série dada é divergente.

2. Consideremos a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$
O termo geral da sucessão das suas somas parciais é
$$\begin{aligned} s_n &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$
Consequentemente
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$
e, portanto, a série considerada é convergente e tem soma 1. Podemos então escrever
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

3. Consideremos a série de termo geral $a_n = n+1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\,.$$

A sucessão das somas parciais desta série é a sucessão (s_n), onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k+1) \\ &= \frac{2+n+1}{2} \cdot n \\ &= \frac{3n+n^2}{2} \end{aligned}$$

já que s_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de primeiro termo 2 e razão 1.

Como

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+n^2}{2} = +\infty$$

concluímos que a série dada é divergente.

4. Estudar, em função de $\alpha \in \mathbb{R}$, a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\,.$$

Seja (s_n) a sucessão das somas parciais desta série, onde

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \alpha \\ &= n\alpha\,. \end{aligned}$$

Se $\alpha > 0$, então

$$\lim_{n\to+\infty} (n\alpha) = +\infty$$

e a série considerada é, neste caso, divergente.

Se $\alpha < 0$, então

$$\lim_{n\to+\infty} (n\alpha) = -\infty$$

e a série considerada é, neste caso, divergente.

Se $\alpha = 0$, então

$$\lim_{n\to+\infty} (n\alpha) = 0$$

e a série considerada é, neste caso, convergente.

Consideremos as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{3.1}$$

e

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \tag{3.2}$$

com $p > 1$.

Vamos ver que as duas séries têm a mesma natureza, isto é, ou são ambas convergentes, ou são ambas divergentes.

Seja (s_n) a sucessão das somas parciais da série (3.1) e seja $(s'_n)_{n\geq p}$ a sucessão das somas parciais da série (3.2). Temos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

e, para cada $n \in \{p, p+1, \cdots, n, \cdots\}$,

$$s'_n = \sum_{k=p}^{n} a_k \, .$$

Então, para cada $n \in \{p, p+1, \cdots, n, \cdots\}$,

$$s'_n = s_n - s_{p-1} \Longleftrightarrow s_n = s'_n + s_{p-1}$$

donde resulta que

$$\lim_{n\to+\infty} s'_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{p-1})$$

ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} (s'_n + s_{p-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

e, portanto, as sucessões (s_n) e $(s'_n)_{n\geq p}$ ou são ambas convergentes ou são ambas divergentes.

Acabámos de provar que a natureza de uma série não depende dos seus $p-1$ primeiros termos, isto é, que a natureza de uma série não se altera se suprimirmos os seus $p-1$ primeiros termos.

Consequentemente, a maioria dos resultados que se estabelecem para uma série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

podem ser estabelecidos para a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$$

que da primeira se obtém suprimindo os $p-1$ primeiros termos.

Note-se que no caso em que as séries (3.1) e (3.2) são ambas convergentes é possível concluir, pelas propriedades dos limites, que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (s'_n + s_{p-1}) = s_{p-1} + \lim_{n\to+\infty} s'_n \, .$$

Podemos então escrever, em caso de convergência,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s_{p-1} + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \,.$$

A série apresentada no Exemplo 3.3-2 é um exemplo de um certo tipo de séries que são usualmente designadas por **séries telescópicas** ou **séries de Mengoli**.

De um modo geral uma *série de Mengoli* é uma série cujo termo geral se pode escrever como diferença de dois termos de uma sucessão distinta da sucessão das suas somas parciais.

Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

uma série de Mengoli. Então existem uma sucessão (u_n) e um número natural p tais que ou

$$a_n = u_n - u_{n+p}$$

ou

$$a_n = u_{n+p} - u_n \,.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que se tem $a_n = u_n - u_{n+p}$. O termo geral da sucessão das somas parciais desta série é

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(u_k - u_{k+p}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{k+p} \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=p+1}^{n+p} u_k \\
&= \sum_{k=1}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k - \sum_{k=p+1}^{n} u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \\
&= \sum_{k=1}^{p} u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k
\end{aligned}$$

pelo que (s_n) converge se e só se a sucessão de termo geral

$$v_n = u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$$

é convergente. Neste caso, temos

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = u_1 + \cdots + u_p - \lim_{n\to+\infty} v_n \,.$$

Se a sucessão (u_n) for convergente temos que $\lim_{n\to+\infty} v_n = p \lim_{n\to+\infty} u_n$ e podemos escrever

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = u_1 + \cdots + u_p - p \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Observação 3.4. 1. No caso em que $a_n = u_{n+p} - u_n$ temos

$$s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^{p} u_k\ .$$

2. No caso em que $p = 1$, isto é, no caso em que para cada $n \in \mathbb{N}$, a_n é a diferença de dois termos consecutivos de uma sucessão temos

$$s_n = \begin{cases} u_1 - u_{n+1} & \text{se} \quad a_n = u_n - u_{n+1} \\ \\ u_{n+1} - u_1 & \text{se} \quad a_n = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Exemplo 3.5. 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}\ .$$

Atendendo a que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln \frac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1)$$

tem-se que a série considerada é uma série de Mengoli.

Consequentemente

$$\begin{aligned} s_n &= \ln 1 - \ln(n+1) \\ &= -\ln(n+1) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} s_n &= \lim_{n\to+\infty} (-\ln(n+1)) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

o que permite concluir que a série considerada é divergente.

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{(n-1)(n+3)}\ .$$

Como é sabido podemos escrever

$$\frac{4}{(n-1)(n+3)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+3} \tag{3.3}$$

onde A e B são constantes reais a determinar.

Para determinar estas constantes atenda-se a que de (3.3) resulta $4 = A(n+3)+B(n-1)$, donde resulta o sistema,

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ 3A-B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 4A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

Então

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{(n-1)(n+3)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+3} \right)$$

donde se conclui que a série considerada é uma série de Mengoli. Note-se que o termo geral desta série é da forma $u_n - u_{n+4}$ com $u_n = \frac{1}{n-1}$. Consequentemente

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+3} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=6}^{n+4} \frac{1}{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k-1} + \sum_{k=6}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=6}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+4} \frac{1}{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+4} \frac{1}{k-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\ &= +\frac{25}{12} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{25}{12}$$

o que permite concluir que a série considerada é convergente e tem soma $\frac{25}{12}$. Podemos então escrever

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{(n-1)(n+3)} = \frac{25}{12}\,.$$

A proposição que apresentamos a seguir dá-nos uma **condição necessária** para que uma série numérica seja convergente.

Proposição 3.6. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente, então*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

Demonstração: Seja (s_n) a sucessão das somas parciais da série considerada.

Por hipótese existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s$$

Consideremos a sucessão de termo geral s_{n+1} que é uma subsucessão da sucessão (s_n). Então a sucessão (s_{n+1}) é também convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} s_{n+1} = s\ .$$

Consequentemente

$$\lim_{n\to+\infty} (s_{n+1} - s_n) = 0$$

e, uma vez que $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$$

o que equivale a afirmar que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

como pretendíamos.

■

É consequência imediata da Proposição 3.6 que se não existe o limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n$$

ou se este limite existe mas é diferente de zero, então a série de termo geral a_n é divergente.

Como já foi referido, a Proposição 3.6 é apenas uma condição necessária para que a série de termo geral a_n seja convergente. Assim, no caso em que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

nada se pode concluir sobre a natureza da série, podendo esta ser convergente ou divergente.

Exemplo 3.7. 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n}{n-2}\ .$$

Como

$$(-1)^n \frac{2n}{n-2} = \begin{cases} \dfrac{2n}{n-2} & \text{se} \quad n \text{ é par} \\[2ex] \dfrac{2n}{2-n} & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

temos que não existe o limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left((-1)^n\frac{2n}{n-2}\right)$$

já que a subsucessão dos termos pares converge para 2 e a subsucessão dos termos ímpares converge para -2.

Concluímos então, pela condição necessária de convergência de uma série, que a série dada é divergente.

2. Consideremos a série de termo geral

$$a_n = n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\,.$$

Esta série é divergente porque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\neq 0\,.$$

3. Atendendo a que, para todo o $p<0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=+\infty$$

concluímos que, para todo o $p<0$, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$

é divergente.

4. Consideremos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Temos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$$

pelo que não podemos usar a condição necessária de convergência para determinar a natureza desta série.

Vamos então estudar a sucessão (s_n) das suas somas parciais cujo termo geral é

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\,.$$

Uma vez que, para todo o $k\in\{0,1,\cdots,n\}$, se tem $\sqrt{k+1}\leq\sqrt{n+1}$ concluímos que, para todo o $k\in\{0,1,\cdots,n\}$,

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Consequentemente

$$s_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{n+1 \text{ vezes}}$$

donde se conclui que

$$s_n \geq \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$

e, portanto, o limite

$$\lim_{n \to +\infty} s_n$$

se existir é $+\infty$.

Então a série dada é divergente.

5. Consideremos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} .$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

a análise do termo geral desta série nada nos permite concluir sobre a sua natureza. Vamos então fazer o estudo da sucessão (s_n) das suas somas parciais.

O termo geral da sucessão das somas parciais desta série é

$$s_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

que é a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão $1/3$. Então

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

donde resulta que

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{3}{2}$$

Concluímos então que a série dada é convergente e tem soma $3/2$ podendo escrever-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2} .$$

A série que acabámos de estudar é um exemplo de um certo tipo de séries que se designam habitualmente por *séries geométricas*.

Uma *série geométrica de razão* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n .$$

Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |r|<1 \\ +\infty & \text{se} \quad r>1 \\ 1 & \text{se} \quad r=1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad r\leq -1 \end{cases}$$

concluímos, pela condição necessária de convergência de uma série que, no caso em que $|r|\geq 1$, a série geométrica de razão r é divergente.

Vamos ver que nos outros casos a série geométrica de razão r é convergente.

Seja $r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $|r|<1$. O termo geral da sucessão das somas parciais da série em estudo é

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

que é a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão r.

Consequentemente

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

pelo que, se $|r|<1$, a série geométrica de razão r converge e tem soma $\dfrac{1}{1-r}$.

Observação 3.8. Poder-se-ia também ter definido uma série geométrica como uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$$

com $r\in\mathbb{R}$.

O estudo deste tipo de séries é feito de modo análogo ao apresentado concluindo-se também que se $|r|\geq 1$ a série é divergente e se $|r|<1$ a série é convergente. Convém no entanto notar que, no caso em que $|r|<1$, a soma da série é dada por $\dfrac{r}{1-r}$ uma vez que a sucessão das somas parciais desta série tem termo geral

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} r^n = r.\frac{1-r^n}{1-r}\ .$$

A proposição que apresentamos a seguir inclui algumas propriedades das séries que são consequência imediata das propriedades algébricas dos limites de sucessões. Vamos demonstrar que é convergente a série cujo termo geral é uma combinação linear (com coeficientes reais quaisquer) dos termos gerais de duas séries convergentes. Demonstramos também que, sempre que o termo geral de uma série é uma combinação linear dos termos gerais de uma série convergente (com coeficiente real qualquer) e de uma série divergente (com coeficiente real não nulo), a série é divergente.

Proposição 3.9. *Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas. Verificam-se as condições seguintes:*

(i) Se as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são ambas convergentes, então, para todos os* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

é convergente e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \,.$$

(ii) Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente e a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é divergente, então, para todo o* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e, para todo o* $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

é divergente.

Demonstração: (i) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, arbitrários.

Por hipótese existem $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$s_1 = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)$$

e

$$s_2 = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) \,.$$

Seja (s_n) a sucessão das somas parciais da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \,.$$

Utilizando as propriedades dos somatórios temos, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \,. \end{aligned}$$

Pelas propriedades algébricas dos limites de sucessões concluímos que

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \right) = \alpha s_1 + \beta s_2$$

o que prova que a série considerada é convergente e tem soma $\alpha s_1 + \beta s_2$. Podemos então escrever

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) &= \alpha s_1 + \beta s_2 \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\,.\end{aligned}$$

(ii) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, arbitrários.

Por hipótese existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = s\,.$$

A hipótese garante também que o limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

ou não existe ou é $+\infty$ ou é $-\infty$.

Atendendo a que o termo geral da sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ é

$$s_n = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$$

concluímos, pelas propriedades dos limites de sucessões, que o limite

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

ou não existe ou é $+\infty$ ou é $-\infty$, o que permite concluir que a série em estudo é divergente, como pretendíamos.

■

Observação 3.10. Utilizando a Proposição 3.9 podemos obter as propriedades seguintes:

1. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e tem soma s, então, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n)$ é também convergente e tem soma αs;

   (Basta, em (i), tomar $\beta = 0$.)

2. Se as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são ambas convergentes e têm soma s_1 e s_2, respectivamente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e tem soma $s_1 + s_2$.

   (Basta, em (i) tomar $\alpha = 1 = \beta$.)

3. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, então para todo $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(\beta b_n)$ é também divergente;

(Basta, em (ii), tomar $\alpha = 0$.)

4. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ é divergente.
   (Basta, em (ii) tomar $\alpha = 1 = \beta$.)

Exemplo 3.11. 1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e para cada $r \in \mathbb{R}$ consideremos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha r^n) .$$

Se $\alpha = 0$, então para todos os n e r temos $\alpha r^n = 0$ pelo que a série dada é, neste caso, convergente e tem soma igual a 0.

Suponhamos $\alpha \neq 0$. Então, pela Proposição 3.9, concluímos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha r^n) \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente se } |r| < 1 \\ \\ \text{divergente se } |r| \geq 1 \end{cases}$$

No caso em que $|r| < 1$ e $\alpha \neq 0$ podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha r^n) = \frac{\alpha}{1-r} .$$

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

Atendendo a que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1$$

é divergente e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

é convergente concluímos, pela Proposição 3.9, que a série considerada é divergente.

Note-se que o estudo da natureza da série considerada neste exemplo pode também ser feito usando a condição necessária de convergência de uma série já que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n(n+1)}\right) = 1 .$$

3. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de números reais tais que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + 5b_n)$ é divergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Utilizando as propriedades das séries concluímos então que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(5b_n)$ é divergente e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é também divergente.

Observação 3.12. Note-se que a Proposição 3.9 nada afirma sobre a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ no caso em que as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são ambas divergentes.

Neste caso, como veremos nos exemplos que se seguem, a série que se obtém tanto pode ser convergente como divergente.

Exemplo 3.13.

1. As séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(-n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+5)$ são ambas divergentes.

   A série cujo termo geral é a soma dos termos gerais das duas séries consideradas é $\sum_{n=1}^{+\infty} 5$ que é uma série divergente.

2. As séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ são ambas divergentes. No entanto, a série cujo termo geral é a soma dos termos gerais das duas séries que estamos a considerar é a série cujo termo geral é igual a zero que é uma série convergente.

Exercícios 3.1:

1. Em cada uma das alíneas que se seguem averigúe se a série considerada é convergente ou divergente e, caso seja convergente, calcule a sua soma:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$

   (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n$

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n-2^n}{4^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{7}{11}\right)^n + \left(\frac{10}{3}\right)^n\right)$

   (f) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$

   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n - \frac{1}{2^n}\right)$

   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{7}{10}\right)^n}$

2. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas.

   Suponha que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b_n$, para todo o $n \geq p$.

   Prove que as duas séries consideradas têm a mesma natureza.

3.2 Critérios de convergência

Até agora temos considerado séries cuja natureza é simples de determinar analisando a sucessão das suas somas parciais.

No entanto, em muitos casos a natureza de uma série pode ser determinada sem fazer o estudo daquela sucessão. Nesta secção incluímos alguns critérios que permitem determinar a natureza de uma série numérica. Apresentamos, em primeiro lugar, o *Critério do Integral*, o *Critério de Comparação* e o *Critério de Comparação por Passagem ao Limite* que se aplicam a uma classe particular de séries que são as séries de termos não negativos. Em seguida apresentamos o *Critério de Cauchy* e o *Critério de D'Alembert* que podem ser aplicados a séries cujos termos não têm sinal constante. Finalmente apresentamos o *Critério de Leibnitz* que só pode ser aplicado a um certo tipo de séries designadas séries alternadas.

3.2.1 Critérios de convergência para séries de termos não negativos

Definição 3.14. Dizemos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é uma *série de termos não negativos* se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem $a_n \geq 0$.

Seja $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Observe-se que, neste caso, a sucessão das somas parciais (s_n) é monótona crescente. De facto, uma vez que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq 0$, tem-se

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Uma vez que uma sucessão monótona crescente é convergente se e só se é limitada superiormente, concluímos que uma série de termos não negativos é convergente se e só se a sucessão das suas somas parciais for limitada superiormente.

Acabámos de demonstrar a seguinte proposição

Proposição 3.15. *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos.*

Então a série é convergente se e só se a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.

Exemplo 3.16. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

Atendendo a que, para todo $k \in \{1,2,\cdots,n\}$, se tem $k! \geq 2^{k-1}$, conclui-se que a sucessão (s_n) das somas parciais desta série é limitada superiormente.

De facto, para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\,. \end{aligned}$$

Concluímos então que a série considerada é convergente.

Um dos processos que pode ser utilizado para estudar a natureza de uma série de termos não negativos consiste em estudar a natureza de um conveniente integral impróprio. Este processo, habitualmente designado **Critério do Integral**, está descrito na proposição que apresentamos a seguir.

Proposição 3.17. *Seja (a_n) uma sucessão de termos não negativos e f uma função definida no intervalo $[1,+\infty[$ e tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a_n$.*

Se f é decrescente no intervalo $[1,+\infty[$, então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

e o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

têm a mesma natureza.

Demonstração: Para demonstrar que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ têm a mesma natureza basta provar que a série considerada é convergente se e só se o integral impróprio considerado é também convergente.

Para estudar a natureza da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ temos de estudar a sucessão das somas parciais (s_n) onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k)\,. \end{aligned}$$

Para estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

temos de estudar a sucessão (I_n), onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_1^n f(x)dx \, .$$

Para cada $n \geq 2$ a soma

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

dá-nos a soma das áreas dos $n-1$ rectângulos de base $[k, k+1]$ e altura $f(k)$, com $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Consequentemente, para cada $n \geq 2$,

$$I_n = \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \, .$$

Por outro lado, para cada $n \geq 2$, a soma

$$\sum_{k=2}^{n} f(k)$$

dá-nos a soma das áreas dos $n-1$ rectângulos de base $[k-1, k]$ e altura $f(k)$, com $k \in \{2, 3, \cdots, n\}$, e, portanto,

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx = I_n \, .$$

Atendendo a que

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s_{n-1}$$

e

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n} a_k = s_n - a_1$$

tem-se, para todo o $n \geq 2$,

$$s_n - a_1 \leq I_n \leq s_{n-1} \, .$$

Se o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

é convergente, então o limite

$$\lim_{n \to +\infty} I_n$$

existe e é finito e, atendendo a que a sucessão (I_n) é monótona crescente, concluímos que esta sucessão é limitada superiormente.

A desigualdade $s_n - a_1 \leq I_n$ implica então que a sucessão (s_n) é limitada superiormente e a Proposição 3.15 permite então concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Reciprocamente admitamos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente. Então a sucessão (s_n) é limitada superiormente donde resulta, atendendo à desigualdade $I_n \leq s_{n-1}$, que a sucessão (I_n) é limitada superiormente, logo convergente. Consequentemente o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

é convergente, como pretendíamos.

∎

Observação 3.18. Utilizando um raciocínio análogo ao que foi utilizado na demonstração da proposição anterior, pode demonstrar-se que sendo $(a_n)_{n\geq q}$, com $q > 1$, uma sucessão de termos não negativos e f uma função definida no intervalo $[q, +\infty[$ tal que, para todo o $n \geq q$, $f(n) = a_n$, se f é decrescente no intervalo $[q, +\infty[$, então a série

$$\sum_{n=q}^{+\infty} a_n$$

e o integral impróprio

$$\int_q^{+\infty} f(x)dx$$

têm a mesma natureza.

Já vimos que, para todo o $p \leq 0$, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

é divergente.

Vamos usar o Critério do Integral para estudar a natureza desta série no caso em que $p > 0$.

Para cada $p > 0$ consideremos a função f definida por

$$\begin{array}{rccc} f: & [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^p} \end{array}$$

Atendendo a que, para todo o $x \in [1, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0$$

temos que f é estritamente decrescente em $[1, +\infty[$, logo decrescente neste intervalo.

Estamos nas condições do critério do integral e, portanto, para cada $p > 0$, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

tem a mesma natureza do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx\,.$$

Uma vez que, para os valores de p considerados, este integral impróprio converge se $p > 1$ e diverge

se $p \in]0,1]$, concluímos que a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p},$$
habitualmente designada *série harmónica de ordem p*, converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Exemplo 3.19. Estudar a natureza da série
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$$

Consideremos a função
$$\begin{array}{rccl} f: & [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x \ln^3 x} \end{array}$$

Temos, para todo o $x \in [2,+\infty[$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\ln^3 x - 3\ln^2 x}{x^2 \ln^6 x} \\ &= \frac{-\ln x - 3}{x^2 \ln^4 x}. \end{aligned}$$

O denominador desta fracção é positivo pelo que o sinal de f' é o sinal de $-\ln x - 3$.

Uma vez que $\ln x + 3 > 0$ se e só se $x > e^{-3}$, concluímos que $f'(x) < 0$, para todo o $x \in [2,+\infty[$, o que garante que f é estritamente decrescente, logo decrescente, no seu domínio.

Estamos nas condições do critério do integral e podemos concluir que a série dada tem a mesma natureza do integral impróprio
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx.$$

Uma vez que
$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln^3 x} dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x} (\ln x)^{-3} dx \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left(\left[\frac{-1}{2\ln^2 x} \right]_2^t \right) \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-1}{2\ln^2 t} + \frac{1}{2\ln^2 2} \right) \\ &= \frac{1}{2\ln^2 2} \end{aligned}$$
concluímos que o integral impróprio é convergente e, portanto, a série considerada é também convergente.

Na proposição que apresentamos a seguir estabelece-se um critério para a determinação da natureza de uma série de termos não negativos que é habitualmente designado **Critério de Comparação**.

Proposição 3.20. *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries de termos não negativos tais que*
$$0 \leq a_n \leq b_n$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente;

(ii) se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Demonstração: (i) Seja (s_n) a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e (s'_n) a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Da hipótese resulta que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq s_n \leq s'_n \,. \tag{3.4}$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, a Proposição 3.15 garante que a sucessão (s'_n) é limitada superiormente.

Da desigualdade (3.4) deduzimos que a sucessão (s_n) é também limitada superiormente e, pela Proposição 3.15, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é também convergente.

(ii) Seja (s_n) a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e (s'_n) a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Da hipótese resulta que a desigualdade (3.4) se verifica para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Uma vez que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente tem-se, pela Proposição 3.15, que a sucessão (s_n) não é limitada superiormente.

Da desigualdade (3.4) concluímos que a sucessão (s'_n) também não é limitada superiormente e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, como pretendíamos.

■

Exemplo 3.21. 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n+1} \,.$$

Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, $3^n + 1 > 0$, a série considerada é uma série de termos positivos.

Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$,

$$3^n + 1 \geq 3^n > 0$$

concluímos que

$$0 \leq \frac{1}{1+3^n} \leq \frac{1}{3^n} \,, \tag{3.5}$$

para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

Como a série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$
é uma série geométrica de razão, em módulo, inferior a um, logo convergente, a desigualdade (3.5) e o Critério de Comparação permitem concluir que a série dada é convergente.

2. Consideremos a série de termos positivos
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos
$$0 < 2\sqrt{n}-1 \leq 2\sqrt{n},$$
donde resulta
$$0 < \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}-1}, \tag{3.6}$$
para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente, as propriedades das séries permitem concluir que a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
é também divergente. Utilizando a desigualdade (3.6) e o Critério de Comparação podemos concluir que a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$$
é também divergente.

3. Consideremos a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n+\cos^2 n}{2^n}.$$

Atendendo a que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem $\cos^2 n \geq 0$ concluímos que
$$0 \leq 7^n \leq \cos^2 n + 7^n.$$

Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $2^n > 0$, obtem-se desta última desigualdade
$$0 \leq \frac{7^n}{2^n} \leq \frac{\cos^2 n + 7^n}{2^n}$$

donde resulta que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left(\frac{7}{2}\right)^n \leq \frac{\cos^2 n + 7^n}{2^n} \,. \tag{3.7}$$

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{2}\right)^n$$

é uma série geométrica de razão $\frac{7}{2}$ e, portanto, é divergente.

Da desigualdade (3.7) e do Critério de Comparação concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n + \cos^2 n}{2^n}$$

é divergente.

4. Consideremos a série de termos positivos

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3}{\ln n} \,.$$

Para todo o $n \geq 2$ temos $0 < \ln n \leq n$ donde resulta que

$$\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} > 0$$

e, portanto, para todo o $n \geq 2$,

$$\frac{n^3}{\ln n} \geq n^2 > 0 \,. \tag{3.8}$$

Como a série $\sum_{n=2}^{+\infty} n^2$ é divergente, a desigualdade (3.8) e o Critério de Comparação permitem concluir que a série em estudo é divergente.

A proposição que apresentamos a seguir, é habitualmente designada **Critério de Comparação por Passagem ao Limite** ou, simplesmente, **Critério do Limite**, e utiliza na sua demonstração a definição de limite de uma sucessão e a Proposição 3.20.

Observe-se que, sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série de termos positivos, o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \,,$$

quando existe, ou é $+\infty$ ou é um número real não negativo.

Proposição 3.22. *Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série de termos positivos. Seja*

$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \,.$$

Então verificam-se as condições seguintes:

(i) *se* $L \in \mathbb{R}^+$, *então as séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *têm a mesma natureza;*

(ii) *se* $L = 0$ *e a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é convergente, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é também convergente;*

(iii) *se* $L = +\infty$ *e a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é divergente, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é também divergente.*

Demonstração: (i) Para demonstrar que as séries têm a mesma natureza $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ têm a mesma natureza basta demonstrar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e só se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é também convergente.

Resulta da hipótese que, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon\ .$$

Tome-se $\varepsilon = \dfrac{L}{2} > 0$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$,

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}L$$

ou seja, atendendo a que $b_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{L}{2}\right) b_n < a_n < \left(\frac{3}{2}L\right) b_n\ .$$

Desta dupla desigualdade resultam, utilizando a hipótese, as desigualdades

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{3}{2}L\right) b_n,\ \text{para todo o } n \geq p \tag{3.9}$$

e

$$0 < b_n \leq \left(\frac{2}{L}\right) a_n,\ \text{para todo o } n \geq p. \tag{3.10}$$

Admitamos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente. Então a série $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$ é também convergente e, portanto, a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \left(\left(\frac{3}{2}L\right) b_n\right)$$

é também convergente.

Utilizando a desigualdade (3.9) e o Critério de Comparação concluímos então que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é convergente e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Admitamos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente. Então a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é também convergente o que permite concluir que a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \left(\frac{2}{L} a_n\right)$$

é também convergente.

Utilizando a desigualdade (3.10) e o Critério de Comparação concluímos então que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$ é convergente e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é também convergente.

Está então provado que as duas séries consideradas têm a mesma natureza.

(ii) Admitamos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente e que $L = 0$. Vamos provar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é também convergente.

Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

tem-se que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$,

$$0 \leq \frac{a_n}{b_n} < 1$$

donde resulta, uma vez que $b_n > 0$,

$$0 \leq a_n < b_n, \tag{3.11}$$

para todo o $n \geq p$.

Uma vez que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente, tem-se que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$ é também convergente. Atendendo à desigualdade (3.11) e ao Critério de Comparação podemos então concluir que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é também convergente e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(iii) Admitamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty\,.$$

Então, para todo o $M > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$, se tem

$$\frac{a_n}{b_n} > M\,.$$

Tome-se $M = 1$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$, $\frac{a_n}{b_n} > 1$, donde resulta, atendendo a que $b_n > 0$,

$$0 \leq b_n < a_n\,. \tag{3.12}$$

Se supusermos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, concluímos que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$ é também divergente. A desigualdade (3.12) e o Critério de Comparação permitem concluir que a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ é divergente e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é também divergente, como pretendíamos.

■

Exemplo 3.23. 1. Consideremos a série de termos não negativos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{1+\sqrt{n}}.$$

Não é difícil verificar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem

$$0 \leq \frac{5}{1+\sqrt{n}} \leq \frac{5}{\sqrt{n}}.$$

Uma vez que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{\sqrt{n}}$ é divergente, o Critério de Comparação nada permite concluir a partir da desigualdade estabelecida.

Para estudar a natureza da série considerada vamos utilizar o Critério de Comparação por Passagem ao Limite tomando como referência a série harmónica de ordem α, com α convenientemente escolhido.

Vamos determinar, se possível, $\alpha \in \mathbb{R}$ por forma que o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^\alpha}{1+\sqrt{n}}$$

seja finito e não nulo.

Uma vez que para $\alpha = 1/2$ se tem [1]

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 5$$

tem-se que a série dada e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ têm a mesma natureza.

Como a série harmónica de ordem $\frac{1}{2}$ é divergente, concluímos que a série dada é divergente.

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}.$$

Trata-se de uma série de termos não negativos já que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$ é o quociente de dois números reais positivos.

[1] Note que o limite considerado é igual a zero se $\alpha < 1/2$ e é igual a $+\infty$ se $\alpha > 1/2$.

Para estudar a natureza desta série vamos usar o Critério de Comparação por Passagem ao Limite utilizando como referência a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \,.$$

Vamos então estudar o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}}{\frac{1}{n^\alpha}}$$

em função de $\alpha \in \mathbb{R}$ escolhendo, se possível, α por forma que o limite considerado seja uma constante não nula. Temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha+1/2}}{n^2+3}$$

e, se $\alpha + \frac{1}{2} = 2$, ou seja, se $\alpha = \frac{3}{2}$ temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha+1/2}}{n^2+3} = 1$$

e, portanto, a série dada tem a mesma natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \,.$$

Como esta última é uma série convergente, concluímos que a série dada é convergente.

3. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2 \operatorname{arctg} n}{n^3+1} \,.$$

Temos, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{-2 \operatorname{arctg} n}{n^3+1} \leq 0$$

pelo que, para estudar a natureza desta série, não podemos aplicar os critérios apresentados. No entanto, atendendo a que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} n}{n^3+1}$$

é uma série de termos não negativos que tem a mesma natureza da série dada, já que o seu termo geral se obtém multiplicando por -1 o termo geral da série dada, vamos estudar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} n}{n^3+1} \,.$$

Atendendo a que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{2\operatorname{arctg} n}{n^3+1}}{\dfrac{1}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^3}{n^3+1} 2\operatorname{arctg} n\right) = \pi$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

é convergente concluímos, pelo Critério de Comparação por Passagem ao Limite, que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\operatorname{arctg} n}{n^3+1}$$

é convergente. Do que foi dito anteriormente podemos então concluir que a série dada é convergente.

4. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}\,.$$

Como, para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $\frac{1}{n} \in]0,1] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, e a função seno é positiva neste intervalo, temos que a série considerada é uma série de termos positivos.

Atendendo a que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = 1$$

e a que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente concluímos, pelo Critério de Comparação por Passagem ao Limite, que a série dada é divergente.

Os critérios apresentados nesta secção destinam-se a estudar a natureza de séries de termos não negativos. No entanto, tal como vimos num dos exemplos anteriores, se os termos da série são não positivos, podemos estudar a série de termos não negativos cujo termo geral se obtém multiplicando por -1 o termo geral da série dada.

Os critérios que apresentámos nesta secção podem então ser aplicados a séries cujos termos têm sinal constante ou a séries cujos termos têm sinal constante a partir de certa ordem.

Na secção seguinte vamos apresentar critérios que permitem estudar a natureza de séries cujos termos não têm necessariamente sinal constante.

Exercícios 3.2 1. Utilize o Critério do Integral para estudar a natureza das séries seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

(c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{17n-13}$

2. Utilize o Critério de Comparação ou o Critério de Comparação por Passagem ao Limite para estudar a natureza de cada uma das séries seguintes:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

   Sugestão: Atenda a que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem $n! \geq 2^{n-1}$.

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^3}}$

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10n^2}{n^6+1}$

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^3+2}}$

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(1/n)}{n^2}$

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n}$

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\operatorname{sen} n}{n^2}$

   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{e^n(n+1)^2}$

   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n^4+1}}$

   (j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$

   (k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

3. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos.

   (a) Prove que se a série considerada é convergente, então a série

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$$

   é também convergente.

   (b) Prove que se a série considerada é convergente e (c_n) é uma sucessão de números reais positivos tal que

   $$\lim_{n\to+\infty} c_n = 0\,,$$

   então a série

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n c_n)$$

é também convergente.

3.2.2 Convergência simples e absoluta

Definição 3.24. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais. Chama-se *série dos módulos* associada à série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ à série cujo termo geral é $|a_n|$.

Exemplo 3.25. 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3}\ .$$

A série dos módulos associada a esta série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{n^3}\right|\ .$$

Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left|\frac{\cos n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente, concluímos pelo Critério de Comparação, que a série dos módulos é convergente.

2. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ .$$

A série dos módulos associada a esta série é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

que, como vimos anteriormente, é uma série divergente.

Como vimos nos exemplos considerados a série dos módulos associada a uma série pode ser convergente ou divergente. A proposição que apresentamos a seguir estabelece que a convergência da série dos módulos estabelece uma condição suficiente para que uma série seja convergente.

Proposição 3.26. *Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais. Se a série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente, então a série dada é também convergente.*

Demonstração: Atendendo a que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

conclui-se que

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|\ ,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Como a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2|a_n|$$

é convergente concluímos, pelo Critério de Comparação, que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$$

é convergente.

Atendendo à Proposição 3.9 concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \big((a_n + |a_n|) - |a_n|\big)$$

é convergente, como pretendíamos.

■

É consequência imediata da Proposição 3.26 que se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é também divergente.

Definição 3.27. Dizemos que uma série numérica é *absolutamente convergente* se a série dos módulos que lhe está associada é convergente e dizemos que uma série numérica é *simplesmente convergente* se é convergente e a série dos módulos que lhe está associada é divergente.

A Proposição 3.26 garante que toda a série absolutamente convergente é convergente.

O Critério de Comparação e o Critério de Comparação por Passagem ao Limite apenas permitem estudar a natureza das séries de termos não negativos. A proposição que apresentamos a seguir estabelece um critério, habitualmente designado **Critério de Cauchy** ou **Critério da Raiz**, que permite estudar a natureza de algumas séries numéricas, independentemente do sinal dos seus termos.

Proposição 3.28. *Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais e*

$$L := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Se o limite L existir [2], verificam-se as condições seguintes:

(i) se $0 \leq L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, logo convergente;

(ii) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

[2] Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$, temos que, se o limite L existir, então $L \in \mathbb{R}_0^+$ ou $L = +\infty$.

Demonstração: (i) Admitamos que

$$L := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

e $L \in [0, 1[$.

Então, para todo o $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$,

$$|\sqrt[n]{|a_n|} - L| < \varepsilon\,,$$

ou seja,

$$-\varepsilon + L < \sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon + L\,,$$

para todo o $n \geq p$.

Como $L \in [0, 1[$, existe $r \in]0, 1[$ tal que $r - L > 0$.

Considere-se $\varepsilon := r - L$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} < r\,.$$

Desta desigualdade resulta que, para todo o $n \geq p$, se tem

$$0 \leq |a_n| < r^n\,. \tag{3.13}$$

Como $r \in]0, 1[$ tem-se que a série geométrica de razão r é uma série convergente. Consequentemente, a série $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} r^n$ é também convergente.

A desigualdade (3.13) e o Critério de Comparação permitem então concluir que a série

$$\sum_{n=p}^{+\infty} |a_n|$$

é convergente, o que implica que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente.

Então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, logo convergente, pela Proposição 3.26.

(ii) Seja

$$L := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Suponhamos que $L > 1$.

Por um raciocínio análogo ao anterior e, atendendo a que $L - 1 > 0$, temos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$ se tem

$$1 - L + L < \sqrt[n]{|a_n|}$$

donde resulta que

$$|a_n| > 1\,,$$

para todo o $n \geq p$.

Esta desigualdade permite concluir que o limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n$$

caso exista, é não nulo. A condição necessária de convergência de uma série permite então concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Suponhamos que $L = +\infty$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq p$ se tem $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, o que implica, como acabámos de demonstrar, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, o que completa a demonstração da proposição.

■

Vamos agora apresentar alguns exemplos de aplicação do Critério de Cauchy.

Exemplo 3.29. 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(\ln n)^n}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

o que permite concluir, pelo Critério de Cauchy, que a série dada é absolutamente convergente, logo convergente.

2. Consideremos a série de termo geral

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} .$$

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \\
&= \frac{e}{2} > 1 ,
\end{aligned}$$

concluímos, pelo Critério de Cauchy, que a série considerada é divergente.

3. Consideremos a série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k!+2}\,.$$
Para todo o $k \in \mathbb{N}$ temos
$$0 \leq \frac{3^k}{k!+2} \leq \frac{3^k}{k!}\,. \tag{3.14}$$
Vamos estudar a natureza da série de termos positivos
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}\,.$$
Temos
$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[k]{k!}}$$
Como
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = +\infty$$
concluímos [3] que $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty$ e, portanto,
$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k}{k!}} = 0$$
Pelo Critério de Cauchy, a série
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}$$
é convergente.

Utilizando a desigualdade (3.14) e o Critério de Comparação podemos então concluir que a série dada é convergente.

Observação 3.30. Note-se que no caso em que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ a Proposição 3.28 nada afirma sobre a natureza da série de termo geral a_n.

Temos
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$
e, como sabemos, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Por outro lado, temos também
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$
e a série de termo geral $\frac{1}{n^2}$ é convergente.

[3] Seja (u_n) uma sucessão de termos positivos. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ (podendo l ser $+\infty$), então $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

A proposição que apresentamos a seguir estabelece um critério que permite estudar a natureza de algumas séries numéricas de termos não nulos, independentemente do sinal dos seus termos. Este critério é habitualmente designado **Critério de D'Alembert** ou **Critério do Quociente**.

Proposição 3.31. *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de números reais não nulos e*

$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Se o limite L existir [4], *verificam-se as condições seguintes:*

(i) se $0 \leq L < 1$, *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é absolutamente convergente, logo convergente;*

(ii) se $L > 1$ *ou* $L = +\infty$, *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração: (i) Admitamos que $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0,1[$ e vamos provar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

Seja $\varepsilon := r - L$ com $r \in]L,1[$. Então $\varepsilon > 0$ e, por definição de limite de uma sucessão, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$,

$$\left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L \right| < r - L\,,$$

ou seja,

$$L - r < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L < r - L\,,$$

donde resulta

$$2L - r < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r\,,$$

para todo o $n \geq p$.

Uma vez que, para todo o n, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 0$ temos

$$0 \leq \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r\,, \tag{3.15}$$

para todo o $n \geq p$.

Por outro lado, uma vez que, por hipótese, $a_n \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, resulta da desigualdade (3.15)

$$0 \leq |a_{n+1}| < r|a_n|\,, \tag{3.16}$$

para todo o $n \geq p$.

[4]Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 0$, temos que, se o limite L existir, então $L \in \mathbb{R}_0^+$ ou $L = +\infty$.

Utilizando a desigualdade (3.16) e o Princípio da Indução Matemática vamos provar que

$$0 \leq |a_{n+p}| < r^n |a_p| \ , \tag{3.17}$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

A desigualdade (3.17) verifica-se para $n = 1$ já que coincide com a desigualdade (3.16) quando tomamos $n = p$.

Admitamos que a desigualdade (3.17) se verifica para $n = k$, ou seja, que

$$0 \leq |a_{k+p}| < r^k |a_p| \ . \tag{3.18}$$

Da desigualdade (3.16) resulta, para $n = p + k$,

$$|a_{p+k+1}| < r|a_{p+k}|$$

donde resulta, atendendo a (3.18),

$$|a_{p+k+1}| < r(r^k |a_p|) = r^{k+1} |a_p| \ .$$

Acabámos de provar que a desigualdade (3.17) se verifica para $n = 1$ e que se verifica para $n = k+1$ sempre que se verifica para $n = k$. Pelo Princípio da Indução Matemática podemos então concluir que a desigualdade (3.17) se verifica para todo o $n \in \mathbb{N}$, como pretendíamos.

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$$

é uma série geométrica de razão $r \in]0,1[$, logo convergente.

Pela Proposição 3.9 a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (r^n |a_p|)$$

é também convergente.

Atendendo à desigualdade (3.17) podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{p+n}|$$

é convergente.

Uma vez que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{p+n}| = \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n|$$

concluímos que a série

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n|$$

é convergente.

Uma vez que a natureza de uma série não depende dos seus p primeiros termos podemos concluir que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

é convergente, como pretendíamos.

(ii) Admitamos que $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ e vamos provar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Seja $\varepsilon := L-1$. Então $\varepsilon > 0$ e, por definição de limite de uma sucessão, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$,

$$\left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L \right| < L-1 \ ,$$

ou seja,

$$1-L < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L < L-1 \ ,$$

donde resulta, para todo o $n \geq p$,

$$1 < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 2L-1 \ .$$

Temos então, para todo o $n \geq p$,

$$|a_{n+1}| > |a_n| \ ,$$

o que significa que, a partir da ordem p a sucessão de termos positivos $(|a_n|)$ é monótona crescente, logo não é um infinitésimo. Consequentemente, a sucessão (a_n) também não é um infinitésimo. Pela condição necessária de convergência de uma série, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, como pretendíamos.

Admitamos que $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = +\infty$ e vamos provar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Seja $\varepsilon := 1$. Então $\varepsilon > 0$ e, por definição de limite de uma sucessão, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \ .$$

Utilizando um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do caso em que $L > 1$, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, como pretendíamos.

■

Exemplo 3.32. 1. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \ .$$

Temos $\frac{n!}{n^n} \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$,. Vamos estudar a natureza desta série utilizando o Critério de D'Alembert.

Temos de estudar o limite

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{n!}{n^n}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!\,n^n}{n!\,(n+1)(n+1)^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \frac{1}{e}\,. \end{aligned}$$

Como $L \in [0,1[$, o Critério de D'Alembert permite concluir que a série considerada é absolutamente convergente, logo convergente.

2. Consideremos a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left((-2)^n \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}\right)\,.$$

Temos $(-2)^n \dfrac{(2n)!}{n!(2n)^n} \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e vamos estudar a natureza desta série utilizando o Critério de D'Alembert.

Temos de estudar o limite

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|(-2)^{n+1}\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(2n+2)^{n+1}}\right|}{\left|(-2)^n\dfrac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}\right|} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{|(-2)^{n+1}|(2n+2)!\,n!\,(2n)^n}{|(-2)^n|(2n)!\,(n+1)!\,(2n+2)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(2n+2)(2n+1)(2n)!\,n!\,(2n)^n}{(2n)!\,(n+1)n!\,(2n+2)(2n+2)^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(2n+1)(2n)^n}{(n+1)(2n+2)^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4n+2}{n+1}\left(\frac{2n}{2n+2}\right)^n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4n+2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4n+2}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right) \\
&= \frac{4}{e}\,.
\end{aligned}$$

Como $L>1$ o Critério de D'Alembert permite concluir que a série considerada é divergente.

3. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-3)^n}\,.$$

Temos $\dfrac{n!}{(-3)^n} \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, pelo que vamos estudar a sua natureza utilizando o Critério de D'Alembert.

Temos de estudar o limite

$$\begin{aligned}
L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{(n+1)!}{(-3)^{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{n!}{(-3)^n}\right|} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,|(-3)^n|}{n!\,|(-3)^{n+1}|} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3} \\
&= +\infty\,.
\end{aligned}$$

Como $L=+\infty$ o Critério de D'Alembert permite concluir que a série considerada é divergente.

4. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\pi^n\,n!}{n^n}\,.$$

Temos, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1+\pi^n\,n!}{n^n} \geq \frac{\pi^n\,n!}{n^n} \geq 0\,, \tag{3.19}$$

pelo que vamos estudar a natureza da série dada utilizando o Critério de Comparação.

Consideremos então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n\, n!}{n^n} .$$

Temos $\dfrac{\pi^n\, n!}{n^n} \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e vamos estudar a natureza desta série utilizando o Critério de D'Alembert.

Temos de estudar o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{\pi^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{\pi^n\, n!}{n^n}\right|} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^{n+1}\,(n+1)!\, n^n}{\pi^n\, n!\,(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi(n+1)n!\,n^n}{n!\,(n+1)(n+1)^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi\, n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\pi\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) \\ &= \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

Como $L > 1$ o Critério de D'Alembert permite concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\pi^n\, n!}{n^n}$ é divergente.

Atendendo à desigualdade (3.19) podemos concluir, pelo Critério de Comparação, que a série dada é divergente.

Observação 3.33. Note-se que no caso em que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, a Proposição 3.31 nada permite concluir sobre a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Por exemplo temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{1}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{1}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ é divergente e temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{1}{(n+1)^2}\right|}{\left|\dfrac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Exercícios 3.3: 1. Utilize o Critério de Cauchy para estudar a natureza da série considerada em cada uma das alíneas seguintes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{7^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{3^{n^2}}$

2. Utilize o Critério de D'Alembert para estudar a natureza de cada uma das séries seguintes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,n^2}{(2n)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{3^n (n!)^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

3. Estude a natureza de cada uma das séries seguintes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n+n}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!+1}{n^n}$

3.3 Séries alternadas

Nesta secção vamos estudar as séries cujos termos são alternadamente positivos e negativos.

Definição 3.34. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se uma *série alternada* se os seus termos se podem escrever na forma

$$a_n = (-1)^n z_n ,$$

com z_n de sinal constante, isto é, ou $z_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ ou $z_n < 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.35. 1. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ é uma série alternada já que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} > 0$.

2. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^n$ é uma série alternada já que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^{n+1} e^n = (-1)^n (-e^n)$$

com $-e^n < 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

3. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos n$ não é uma série alternada já que, por exemplo, $\cos 1 > 0$ e $\cos 4 < 0$.

Observação 3.36. Toda a série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

com b_n de sinal constante é uma série alternada já que pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (-b_n)$$

onde $-b_n$ tem sinal constante.

A proposição que apresentamos a seguir é uma condição suficiente para a convergência de uma série alternada e é habitualmente designada *Critério de Leibniz*.

Proposição 3.37. *Seja (a_n) uma sucessão de números reais positivos, monótona decrescente e tal que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Então a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ é convergente.

Demonstração: As séries $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ têm a mesma natureza já que o termo geral da primeira se obtém multiplicando por -1 o termo geral da segunda.

Vamos ver que, nas condições do enunciado da proposição a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{3.20}$$

é convergente. Podemos então concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ é convergente e a proposição fica demonstrada.

Sejam (s_n) a sucessão das somas parciais da série (3.20) e (s_{2n}) a sua subsucessão dos termos de ordem par.

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= s_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2} - s_{2n} \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \,. \end{aligned}$$

Uma vez que, por hipótese, a sucessão (a_n) é monótona decrescente, tem-se que $a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$ e, portanto, a sucessão (s_{2n}) é monótona crescente.

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n} = a_1 - a_{2n} + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n-2}) \,.$$

Uma vez que a sucessão (a_n) é monótona decrescente, as parcelas

$$(a_3 - a_2), (a_5 - a_4), \cdots, (a_{2n-1} - a_{2n-2})$$

são todas não positivas e, portanto,

$$s_{2n} - (a_1 - a_{2n}) \leq 0 \Longleftrightarrow s_{2n} \leq a_1 - a_{2n} \, .$$

Uma vez que, por hipótese, a sucessão (a_n) é uma sucessão de termos positivos, temos que $a_1 - a_{2n} \leq a_1$ o que implica que

$$s_{2n} \leq a_1 \, .$$

Consequentemente, a sucessão (s_{2n}) é monótona crescente e limitada superiormente pelo que é convergente.

Consideremos a subsucessão (s_{2n-1}) dos termos ímpares.

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} s_{2n+1} - s_{2n-1} &= s_{2n-1} + (-1)^{2n+1} a_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} - s_{2n-1} \\ &= a_{2n+1} - a_{2n} \, . \end{aligned}$$

Uma vez que, por hipótese, a sucessão (a_n) é monótona decrescente, tem-se que $a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0$ e, portanto, a sucessão (s_{2n-1}) é monótona decrescente.

Por outro lado, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n-1} = a_1 - a_2 + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1} \, .$$

Atendendo a que a sucessão (a_n) é monótona decrescente, as parcelas

$$(a_3 - a_4), (a_5 - a_6), \cdots, (a_{2n-3} - a_{2n-2})$$

são todas não negativas e, atendendo a que a sucessão (a_n) é uma sucessão de termos positivos, temos $a_{2n-1} > 0$.

Consequentemente,

$$s_{2n-1} \geq a_1 - a_2 \, .$$

Concluímos então que a sucessão (s_{2n-1}) é monótona decrescente e limitada inferiormente, logo convergente.

Vamos provar que as sucessões (s_{2n}) e (s_{2n-1}) têm o mesmo limite, o que permite concluir que a sucessão (s_n) é convergente e, portanto, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é convergente.

Uma vez que, por hipótese, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, temos

$$\lim_{n \to +\infty} a_{2n} = 0 \, .$$

Atendendo a que
$$s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n}$$
temos
$$\lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_{2n-1}) = 0$$
o que permite concluir que
$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n-1} \ ,$$
como pretendíamos.

■

Observação 3.38. 1. Vale, com uma demonstração análoga, uma proposição do mesmo tipo para uma série que seja alternada a partir de uma ordem $p > 1$.

2. Muitas vezes, quando se pretende estudar a natureza de uma série alternada, há toda a vantagem em estudar em primeiro lugar a natureza da série dos módulos que lhe está associada já que, se esta for convergente, então a série alternada é absolutamente convergente, logo convergente. Se a série dos módulos que está associada for divergente, então nada podemos concluir sobre a natureza da série alternada e teremos de averiguar se podemos aplicar o Critério de Leibniz.

   No entanto, não podemos utilizar este procedimento como regra porque, como veremos num dos exemplos que apresentamos a seguir, a condição necessária de convergência de uma série permite em alguns casos concluir imediatamente que a série alternada em estudo é divergente.

   No caso em que a série dos módulos é divergente e a série alternada não satisfaz as condições do Critério de Leibniz, o estudo da natureza da série alternada deverá ser feito recorrendo à definição.

Exemplo 3.39. 1. Consideremos a série numérica
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1} \ .$$

   Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1}{2n+1} > 0$$
   a série considerada é uma série alternada.

   A série dos módulos que lhe está associada é a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1} \ .$$

   Utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite e utilizando como referência a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, podemos concluir que a série dos módulos é divergente.
   Consequentemente, nada podemos concluir sobre a natureza da série alternada dada.

   Vamos então averiguar se estamos nas condições do Critério de Leibniz.

Temos
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$$
onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{1}{2n+1} \, .$$

Uma vez que

i. para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2n+1} > 0$ e, portanto, a sucessão $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$ é uma sucessão de números reais positivos;

ii. para todo o $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{2n+1-2n-3}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{-2}{(2n+1)(2n+3)} < 0 \end{aligned}$$
o que permite concluir que a sucessão $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$ é monótona decrescente;

iii. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$;

a série alternada considerada satisfaz as condições do Critério de Leibniz e, portanto, é convergente.

2. Consideremos a série numérica
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{3n+1}{5n+2} \, .$$

Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{3n+1}{5n+2} > 0$$
a série considerada é uma série alternada.

Atendendo a que
$$(-1)^n \frac{3n+1}{5n+2} = \begin{cases} \dfrac{3n+1}{5n+2} & \text{se } n \text{ é par} \\[2ex] -\dfrac{3n+1}{5n+2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$
temos que não existe o limite
$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \frac{3n+1}{5n+2} \, .$$

Pela condição necessária de convergência de uma série concluímos que a série alternada dada é divergente.

3. Consideremos a série numérica
$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}\,.$$
Uma vez que, para todo o $n\geq 2$,
$$\frac{\ln n}{n}>0$$
a série considerada é uma série alternada.

A série dos módulos que lhe está associada é a série
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right|=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}\,.$$

Utilizando o Critério de Comparação por Passagem ao Limite e utilizando como referência a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ podemos concluir que a série dos módulos é divergente uma vez que
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\ln n=+\infty$$
e a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente.

Consequentemente, utilizando a natureza da série dos módulos, nada podemos concluir sobre a natureza da série alternada dada.

Vamos então averiguar se estamos nas condições do Critério de Leibniz.

Temos
$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n a_n$$
onde, para todo o $n\geq 2$,
$$a_n=\frac{\ln n}{n}\,.$$

i. Uma vez que, para todo o $n\geq 2$, temos $\frac{\ln n}{n}>0$ podemos concluir que a sucessão $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 2}$ é uma sucessão de números reais positivos.

ii. Para averiguar se a sucessão $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 2}$ é monótona decrescente consideremos a função auxiliar
$$\begin{array}{rccl} f: & [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\ln x}{x} \end{array}$$
Temos, para todo o $x\in[2,+\infty[$,
$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$
pelo que $f'(x)\leq 0$ se $x\in[e,+\infty[$ e $f'(x)>0$ se $x\in[2,e[$.

Consequentemente a função f é decrescente no intervalo $[e, +\infty[$ o que permite concluir que a sucessão

$$\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 3}$$

é monótona decrescente.

iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$

Atendendo a i., ii. e iii. podemos concluir que a série alternada

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

satisfaz as condições do Critério de Leibniz e, portanto, é convergente.

Uma vez que a natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos, podemos concluir que a série alternada dada é convergente e, uma vez que a série dos módulos que lhe está associada é divergente, podemos concluir que ela é simplesmente convergente.

4. Consideremos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

onde p é um parâmetro real.

Vamos estudar, em função de $p \in \mathbb{R}$, a natureza desta série.

Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n^p} > 0$$

a série considerada é uma série alternada que habitualmente se designa *série harmónica alternada de ordem p*.

A série dos módulos que lhe está associada é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

que, como vimos, converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Podemos então concluir que se $p > 1$ a série alternada considerada é absolutamente convergente, logo convergente.

Se $p = 0$ obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

que, como vimos anteriormente, é uma série divergente.

Se $p < 0$, então não existe o limite

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

e a condição necessária de convergência de uma série permite concluir que, neste caso, a série alternada considerada é divergente.

Falta então estudar a natureza da série dada no caso em que $p \in]0,1]$.

Note-se que, neste caso,

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}=0$$

pelo que a condição necessária de convergência de uma série nada permite concluir sobre a sua natureza.

Vamos então averiguar se estamos nas condições do Critério de Leibniz.

i. Uma vez que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n^p} > 0$ podemos concluir que a sucessão $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ é uma sucessão de números reais positivos.

ii. Para averiguar se a sucessão $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ é monótona decrescente consideremos a função auxiliar

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^p} \end{array}$$

Temos, para todo o $x \in [1,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{-p}{x^{p+1}}$$

pelo que $f'(x)<0$, para todo o $x \in [1,+\infty[$ e, para todo o $p \in]0,1]$.

Consequentemente, para todo o $p \in]0,1]$, a função f é decrescente o que permite concluir que, para os valores de p que estamos a considerar, a sucessão $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ é monótona decrescente.

iii. Para todo o $p \in]0,1]$ temos $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$.

Atendendo a i., ii. e iii. podemos concluir que, para todo o $p \in]0,1]$, a série alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$$

satisfaz as condições do Critério de Leibniz e, portanto, é convergente.

Uma vez que a série dos módulos que lhe está associada é divergente, podemos concluir que ela é simplesmente convergente.

Resumindo, temos que a série harmónica alternada de ordem p

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p} \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{divergente se } \ p\leq 0 \\ \text{simplesmente convergente se } \ p\in]0,1] \\ \text{absolutamente convergente se } \ p>1 \end{cases}$$

Exercícios 3.4: 1. Estude a natureza da série considerada em cada uma das alíneas seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2n^2+1}$

2. Estude quanto à sua natureza cada uma das séries alternadas seguintes e, em caso de convergência, indique se se trata de convergência simples ou absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^{10}}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

3. Em cada uma das alíneas que se seguem determine a natureza da série indicada e, em caso de convergência, indique se se trata de convergência simples ou absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{(n!)^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k+1+3^k}{5^k}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(3k+2)^3}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^k$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^{10}}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$

(l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(1-\frac{1}{k}\right)^k$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+1}$

(n) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)e^{-k}}{2k+3}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3^{n+1}}$

(q) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2}{k^2-1}$

(r) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

(s) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$

(t) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{5^n}\right)$

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{4^n}$

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1+(-1)^n)$

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

(y) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\operatorname{tg}\left(\frac{1}{k}\right)$

(z) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(\cos^2 k+k^2)k^{-4}$

(α) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} k}{k^2+1}$

(β) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-(n+1)}}{3}$

(γ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(2k)$

(δ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

4. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos positivos convergente. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3u_n}{2+u_n}$ é convergente.

5. Sendo (a_n) uma sucessão de termos positivos, limitada e convergente, indique, justificando, a natureza das séries seguintes:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a_n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1+a_n)$

3.4 Soluções dos exercícios propostos

Exercícios 3.1

1. (a) Divergente, porque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$.

   (b) Série geométrica de razão $r = \frac{99}{100}$. Como $|r| = \frac{99}{100} < 1$, a série é convergente. Soma: $S = 100$.

   (c) Série geométrica de razão $r = -\frac{3}{\mathrm{e}}$. Como $|r| = \frac{3}{\mathrm{e}} > 1$, a série é divergente.

   (d) Convergente, porque o seu termo geral é a diferença dos termos gerais de duas séries convergentes. Soma: $S = 2$.

   (e) Divergente, porque o seu termo geral é a soma do termo geral de uma série divergente com o termo geral de uma série convergente.

   (f) Convergente. Soma: $S = \frac{3}{2}$.

   (g) Convergente, porque o seu termo geral é o produto do termo geral de uma série convergente pela constante $\frac{1}{2}$. Soma: $S = 1$.

   (h) Divergente, porque o seu termo geral é a diferença entre o termo geral de uma série divergente e o termo geral de uma série convergente.

   (i) Divergente, porque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\left(\frac{7}{10}\right)^n} = 1 \neq 0$.

2. Sugestão: Basta atender a que a natureza de uma série não depende dos $p-1$ primeiros termos.

Exercícios 3.2

1. (a) Convergente.

   (b) Divergente.

   (c) Divergente.

   (d) Divergente.

2. (a) Convergente.

   (b) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

   (c) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{4}}$.

   (d) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

   (e) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{2}}$.

   (f) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

   (g) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{n^{2}}$.

(h) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n}$.

(i) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$.

(j) Convergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ ou a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

(k) Divergente. Sugestão: Utilize como referência a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

3. (a) Sugestão: Utilize o Critério do Limite tomando como referência a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

   (b) —

Exercícios 3.3

1. (a) Neste caso o Critério de Cauchy não é aplicável porque $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right|} = 1$. Para estudar a natureza desta série pode utilizar-se a Condição Necessária de Convergência.

   (b) Absolutamente convergente, logo convergente.

   (c) Divergente.

   (d) Absolutamente convergente, logo convergente.

   (e) Absolutamente convergente, logo convergente.

2. (a) Absolutamente convergente, logo convergente.

   (b) Absolutamente convergente, logo convergente.

   (c) Absolutamente convergente, logo convergente.

   (d) Absolutamente convergente, logo convergente.

3. (a) Convergente.

   (b) Divergente.

Exercícios 3.4

1. (a) Simplesmente convergente.

   (b) Absolutamente convergente.

   (c) Divergente.

   (d) Divergente.

2. (a) Absolutamente convergente.

   (b) Absolutamente convergente.

   (c) Divergente.

   (d) Simplesmente convergente.

3. (a) Divergente.
   (b) Divergente.
   (c) Absolutamente convergente.
   (d) Divergente.
   (e) Absolutamente convergente.
   (f) Absolutamente convergente.
   (g) Absolutamente convergente.
   (h) Absolutamente convergente.
   (i) Absolutamente convergente.
   (j) Divergente.
   (k) Simplesmente convergente.
   (l) Divergente.
   (m) Absolutamente convergente.
   (n) Absolutamente convergente.
   (o) Simplesmente convergente.
   (p) Absolutamente convergente.
   (q) Absolutamente convergente.
   (r) Absolutamente convergente.
   (s) Absolutamente convergente.
   (t) Divergente.
   (u) Divergente.
   (v) Absolutamente convergente.
   (w) Divergente.
   (x) Divergente.
   (y) Simplesmente convergente.
   (z) Absolutamente convergente.
   (α) Absolutamente convergente.
   (β) Absolutamente convergente.
   (γ) Divergente.
   (δ) Absolutamente convergente.

4. Sugestão: Utilize o Critério de Comparação.

5. (a) Absolutamente convergente, logo convergente.
   (b) Divergente, pela Condição Necessária de Convergência.