Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2016/17**

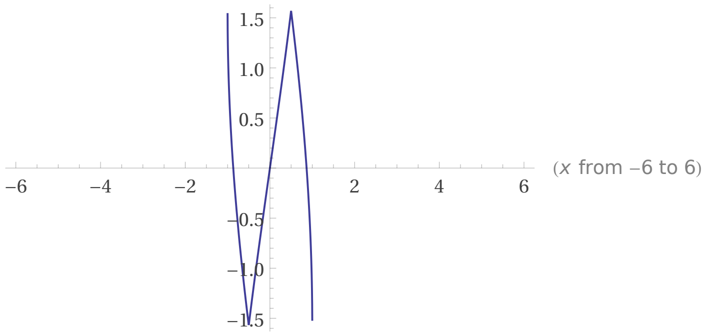
1.º teste Duração: 2h15

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \arcsin(3x - 4x^3)$.

   Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).

   Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

   (a) Determina o domínio D_f de definição de f.

   (b) Determina, caso existam, os extremos absolutos e os extremantes absolutos de f (se achares que não existem, deves explicar porquê).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $x \arctan(x+1)$;

   (b) $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x^2-2x+2)}$;

   (c) $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza uma mudança de variável.

3. Considera a função f definida por

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } \ x = -2 \ \text{ ou } \ x = 0, \\ 1/(x+2), & \text{se } \ -2 < x < 0, \\ \sqrt{4 - x^2}, & \text{se } \ 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Estuda a integrabilidade da função em cada um dos intervalos $[-2,\ -1]$, $[-1,\ 0]$ e $[0,\ 2]$.

(b) Determina, se existir, o integral da função no intervalo $[0,\ 2]$, de preferência através da interpretação geométrica do integral (observa que $y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2+y^2=4$), explicitando o teu raciocínio.

(c) Determina, se existir, o integral da função no intervalo $[-1,\ 2]$.

4. Seja $\mathcal{A} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x+2 \leq y \leq \sqrt{9x}\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = x+2$ e de $y = \sqrt{9x}$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(1,3)$ e $(4,6)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

5. (a) Calcula $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$.

   (b) Determina a primitiva F de $\frac{x^3}{\sqrt{2+x^2}}$ que se anula em 1, i.e., tal que $F(1)=0$ (se não tiveres conseguido responder à alínea anterior, pelo menos explica aqui como resolverias a presente alínea a partir do resultado da alínea anterior).

6. Sejam f e g funções regulares em $[a,b]$ com g' diferente de zero em $]a,b[$.

   (a) Verifica que $g(a) \neq g(b)$ (sugestão: usa o Teorema de Rolle).

   (b) Considera a função F definida em $[a,b]$ através de

   $$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

      i. Mostra que F satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle.

      ii. Aplica então o Teorema de Rolle a F e verifica depois que o resultado pode ser transformado de modo a concluires que existe $c \in\,]a,b[$ tal que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

FIM

Cotação:

1. 4; 2. 5; 3. 3; 4. 3; 5. 2,5; 6. 2,5.