Cálculo I - SE - exame final - 2020/21

1. $f(x) := 1 - \left(\arcsin \frac{1-x^2}{2}\right)^2$.

(a) D_f? $\quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{1-x^2}{2} \leq 1 \right\}$

$$\text{C.A.: } -1 \leq \frac{1-x^2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 1-x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 \geq -1}_{\text{universal}} \wedge x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

$\therefore D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

(b) Em $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$, $f'(x) = -2\left(\arcsin \frac{1-x^2}{2}\right) \cdot \frac{\frac{1}{2}(-2x)}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2}}$

$$= \frac{2x \arcsin \frac{1-x^2}{2}}{\underbrace{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2}}_{>0}}$$

O sinal de f' é o sinal do numerador.

O sinal de $\arcsin \frac{1-x^2}{2}$ é o sinal de $\frac{1-x^2}{2}$.

C.A.: $\frac{1-x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$
$2x$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\arcsin \frac{1-x^2}{2}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

~~obs~~: f é contínua em $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

Máximos relativos em -1 e em 1

Mínimos relativos em $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$.

$f(\pm 1) = 1 - (\arcsin 0)^2 = 1$, logo 1 é o máximo absoluto, atingido em -1 e em 1.

$$f(\pm\sqrt{3}) = 1 - (\arcsin(-1))^2 = 1 - \frac{\pi^2}{4}$$

$$f(0) = 1 - \left(\arcsin \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi^2}{36}$$

C.A.: $\frac{\pi^2}{4} > \frac{\pi^2}{36}$, logo $1 - \frac{\pi^2}{4} < 1 - \frac{\pi^2}{36}$.

Assim, o mínimo absoluto é $1 - \frac{\pi^2}{4}$, atingido em $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

O extremo que resta é $1 - \frac{\pi^2}{36}$, mínimo relativo atingido em 0.

2. (a)
$$\underbrace{\int e^{x+1}\cos(2x)\,dx}_{=:F(x)+C} \underset{\text{por partes}}{=} e^{x+1}\cdot\cos(2x) - \int e^{x+1}(-\sin(2x))\cdot 2\,dx =$$

$$\underset{\text{por partes}}{=} e^{x+1}\cdot\cos(2x) + 2\left[e^{x+1}\sin(2x) - \int e^{x+1}\cos(2x)\cdot 2\,dx\right]$$

$$= e^{x+1}\cdot\cos(2x) + 2e^{x+1}\sin(2x) - 4\underbrace{\int e^{x+1}\cos(2x)\,dx}_{=:F(x)}.$$

Então

$$5F(x) = e^{x+1}\left(\cos(2x) + 2\sin(2x)\right) - C,$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{e^{x+1}}{5}\left(\cos(2x) + 2\sin(2x)\right) - \frac{C}{5},$$

com $C \in \mathbb{R}$ arbitrário.

Também se pode escrever que

$$\int e^{x+1}\cos(2x)\,dx = \frac{e^{x+1}}{5}\left(\cos(2x) + 2\sin(2x)\right) + C,$$

com $C \in \mathbb{R}$ arbitrário.

(b) $$\int \frac{(1+x^2)x^4}{x^7+x^6+x^5}\,dx = \int \frac{(1+x^2)x^4}{x^5(x^2+x+1)}\,dx = \int \underbrace{\frac{1+x^2}{x(x^2+x+1)}}_{\text{função racional}}\,dx$$

C.A.: grau num. $= 2 < 3 =$ grau denom.

$x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$, raízes complexas, logo

x^2+x+1 é irredutível.

Existem $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que $\dfrac{1+x^2}{x(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$$1+x^2 = Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1-A=0 \\ C=-A=-1 \end{cases}$$

Então $$\int \frac{(1+x^2)x^4}{x^7+x^6+x^5}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

C.A.:
$x^2+x+1 =$
$= x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1$
$= (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$$= \ln|x| - \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \ln|x| - \int \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt3}x+\frac{1}{\sqrt3}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt3}}{\left(\frac{2}{\sqrt3}x+\frac{1}{\sqrt3}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt3}x+\frac{1}{\sqrt3}\right)+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,(1+e^{\sqrt{x}})}\,dx$

C.A.: Mud. variável $x=t^2, t>0$ $(\Leftrightarrow t=\sqrt{x}, x>0)$;

$\frac{dx}{dt}=2t>0$.

$= \displaystyle\int \frac{e^t}{\cancel{t}(1+e^t)}\cdot 2\cancel{t}\,dt$

$= 2\displaystyle\int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = 2\ln|1+e^t| + C = 2\ln(1+e^{\sqrt{x}})+C,\ C\in\mathbb{R}.$

3. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-x-2\le y\le 1-|x|\}$.

(a) $\begin{cases} y=x^2-x-2 \\ y=1-|x| \end{cases}$. Caso $x\geq 0$: $x^2-\cancel{x}-2=1-\cancel{x}$

$\Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ (pois $x\geq 0$)

Caso $x<0$: $x^2-x-2=1+x$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$

$\Leftrightarrow x=-1$ (pois $x<0$).

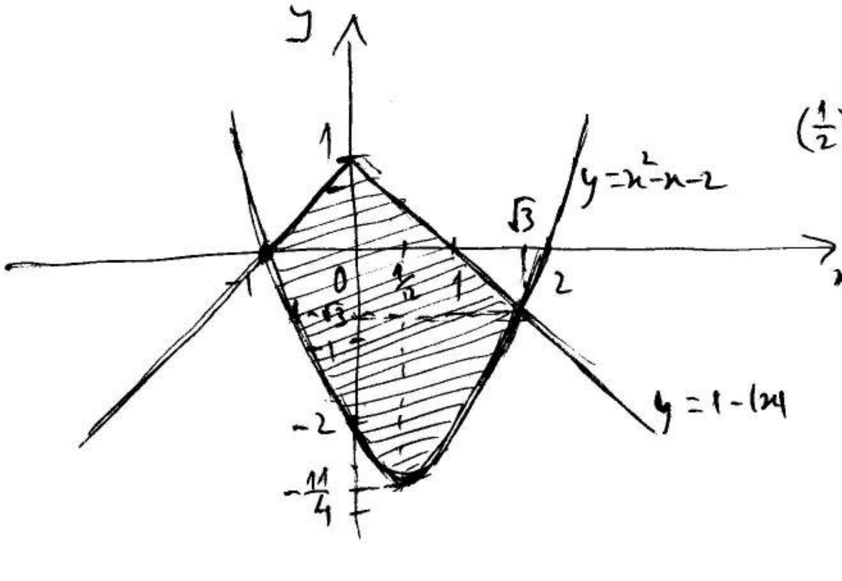
Como $1-|\sqrt{3}|=1-\sqrt{3}$ e $1-|-1|=0$, então os pontos pedidos são $(\sqrt{3},1-\sqrt{3})$ e $(-1,0)$.

(b) C.A.: $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$;

$\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2=$

$=\frac{1-4-8}{4}=\frac{-11}{4}$



Região A a sombreado na figura.

(c) Área de A:

$$\int_{-1}^{0} 1+x-(x^2-x-2)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} 1-x-(x^2-x-2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \overbrace{1+\underbrace{x-x^2+x}_{2x}+2}^{3}\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} \overbrace{1-\cancel{x}-x^2+\cancel{x}+2}^{3}\,dx$$

$$= \left[3x+x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[3x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{3}}$$

$$= 0-\left(\underbrace{-3+1}_{-2}+\frac{1}{3}\right) + 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}^3}{3} - 0$$

$$= \frac{6-1}{3} + 3\sqrt{3} - \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \frac{5}{3} + 2\sqrt{3}.$$

4. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2-10n+1}$

Série dos módulos: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|n^2-10n+1|}$, tem a mesma natureza que a série $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-10n+1}$ de termos não negativos.

c.A.:
$n^2-10n+1=0$
$\Leftrightarrow n=\frac{10\pm\sqrt{100-4}}{2}$
$\Leftrightarrow x = 5 \pm \frac{\cancel{2}\sqrt{6}}{\cancel{2}}$
$\Leftrightarrow x = 5\pm 2\sqrt{6}$
Assim, por exemplo, para $n\geq 10$ vem $n^2-10n+1>0$

Como no numerador temos $n^{1/2}$ e no denominador o termo dominante (quando $n\to\infty$) é n^2, então comparamos com $\frac{n^{1/2}}{n^2}$, $= \frac{1}{n^{2-1/2}}$, $= \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2-10n+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2-10n+1}}{\frac{n^{1/2}}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2-10n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \in]0,\infty[.$$

Então, pelo Crit. comp. por passagem ao limite, a natureza da série dos módulos da série dada é a mesma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, que é uma série de

Dirichlet convergente ($\frac{3}{2}>1$).

$\therefore$ A série dada é <u>absolutamente convergente</u> (logo também convergente).

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

$$\frac{|(n+1)^2 e^{-(n+1)}|}{|n^2 e^{-n}|} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}_{\downarrow n\to\infty \atop 1} \cdot e^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} < 1.$$

Então, pelo Crit. D'Alembert, a série dada é <u>(absolutamente) convergente.</u>

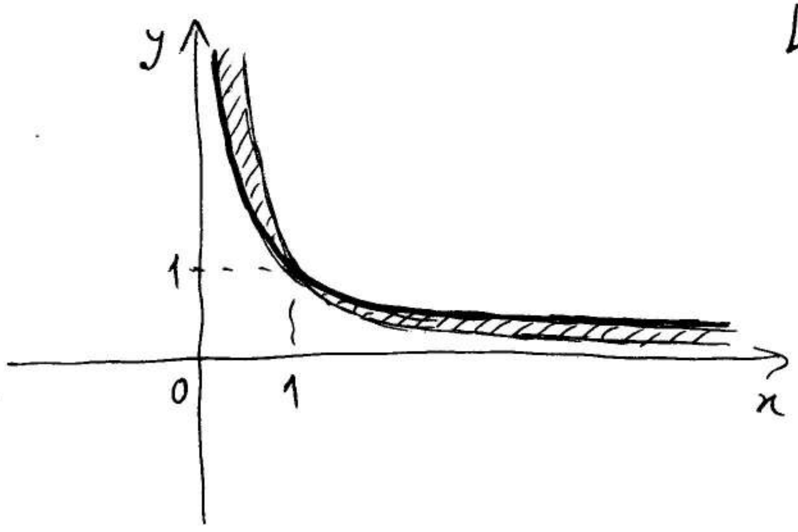
5. $y = \frac{1}{x^2}$; $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

C.A.: $\sqrt{x^3} = x^{3/2}$; como $2 > \frac{3}{2}$, então

$x^2 > x^{3/2}$ quando $x>1$

e $x^2 < x^{3/2}$ quando $x \in]0,1[$,

e temos a relação inversa para os correspondentes y's.



Legenda: — $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$
— $y = \frac{1}{x^2}$

//// ← superfície cuja área se pretende calcular

(a) A área pedida é dada pelo seguinte integral impróprio de 2ª espécie:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 x^{-2} - x^{-3/2}\,dx$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \left[\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_\alpha^1 = \lim_{\alpha \to 0^+} \Big(\underbrace{-1+2}_{1} + \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \Big)$$

Trata-se de uma indeterminação $\infty - \infty$, mas como $\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1-2\sqrt{\alpha}}{\alpha} \xrightarrow[\alpha \to 0^+]{} \infty$, então o valor do integral acima é ∞, que é também o valor da área da superfície pedida.

(b) A área pedida é dada pelo seguinte integral impróprio de 1ª espécie:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\beta \to \infty} \int_1^\beta x^{-3/2} - x^{-2}\,dx$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^\beta = \lim_{\beta \to \infty} \Big(-\frac{2}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\beta} + \underbrace{2-1}_{1} \Big)$$

$= 1$, que será então o valor da área da superfície pedida.

ACastro
11-07-2021