Temas: Atividade no SIACUA UA
EDO's Homogéneas
EDO's Lineares de 1ª ordem

EDO's Homogéneas

Escrita na forma normal

EDO de primeira ordem da forma:

$$\overbrace{y' = f(x, y)}$$

onde $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é homogénea de grau zero, *i.e.*,
$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \ \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, tais que $(\lambda x, \lambda y) \in \mathcal{D}$.

Exemplo:

$$y' = \underbrace{\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}}_{f(x,y)}$$

Assim identificamos este tipo de EDO

f é homogénea de grau zero pois, desde que $\lambda \neq 0$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = f(x, y)$$

Então a EDO é homogénea.

A resolução desta EDO passa pela aplicação de uma mudança de variável que a irá transformar em uma EDO de variáveis separáveis.

Mudança de variável: $y = zx$ com $z = z(x)$
(isto é, z é função de x)

Vejamos então o esquema de resolução de uma EDO homogénea:

Esquema de Resolução:

1. Escrever a EDO na forma normal
2. Verificar que f é homogénea de grau zero.
3. Aplicar mudança de variável: $y = zx$
4. Encontrar o integral geral da EDO de variáveis separáveis
5. Aplicar substituição inversa $z = \frac{y}{x}$ e temos o integral geral da EDO homogénea.

Exemplos:

a) (Exemplo anterior)

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

já vimos que $f(x,y)$ é homogénea de grau zero.

Considerando $y = zx$ $\Rightarrow$ $y' = (z)'x + z(x)'$
$= z'x + z$

Substituindo,

$$z'x + z = \frac{x^2 + x(zx) + (zx)^2}{x^2}$$

$\Leftrightarrow z'x + \cancel{z} = 1 + \cancel{z} + z^2$

$\Leftrightarrow z'x = 1 + z^2$ ⟿ Lembra-te que depois da mudança de variável a EDO resultante deverá ser de variáveis separáveis. Então aplicamos o seu esquema de resolução.

$\Leftrightarrow z' = \dfrac{1+z^2}{x}$

Depende de z

Depende de x

Conseguimos separar as variáveis

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+z^2}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1+z^2}dz = \dfrac{1}{x}dx$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int \dfrac{1}{1+z^2}dz = \int \dfrac{1}{x}dx$

$\Leftrightarrow \arctan z = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$ ⟶ Integral geral da EDO de variáveis separáveis

$\Leftrightarrow \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$

Integral geral da EDO homogénea, na forma implícita.

b)

Exercício 2.6

1 Verifique que cada uma das seguinte EDOs é homogénea e determine o seu integral geral:

(a) $xe^{y/x}y' = ye^{y/x} + x$

(b) $(x^3 + y^3)dx - 3y^2xdy = 0$;

(c) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$;

a) $x e^{y/x} y' = y e^{y/x} + x$

Escrever na forma normal

$$\Leftrightarrow \quad y' = \underbrace{\frac{y e^{y/x} + x}{x e^{y/x}}}_{f(x,y)}$$

Vamos verificar se f é homogénea de grau zero:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y\, e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \lambda x}{\lambda x\, e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}} = \frac{y e^{y/x} + x}{x e^{y/x}} = f(x,y)$$

$\therefore$ f é homogénea de grau zero e então a EDO é homogénea

Mud. var.

$y = zx$

$y' = z'x + z$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{z\cancel{x}e^{z} + \cancel{x}}{\cancel{x}e^{z}}$$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{ze^{z} + 1}{e^{z}}$$

$$\Leftrightarrow z'x + \cancel{z} = \cancel{z} + \frac{1}{e^{z}}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{1}{e^{z}}$$

$$\Leftrightarrow e^{z} z' = \frac{1}{x} \longrightarrow \text{EDO de var. separáveis}$$

Resolução da EDO de var. separáveis

$$\Leftrightarrow e^{z} dz = \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^{z} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow e^{z} = \ln|x| + C \longrightarrow \text{Integral geral da EDO de var. separáveis}$$

Mud. variável inversa $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow e^{y/x} = \ln|x| + C$$

$$\Leftrightarrow y = x \ln\left(\ln|x| + C\right), \; C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO homogénea.

b) $(x^3+y^3)\,dx - 3y^2x\,dy = 0$

$\Leftrightarrow 3y^2x\,dy = (x^3+y^3)\,dx$

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \underbrace{\dfrac{x^3+y^3}{3y^2x}}_{f(x,y)}$

Escrever na forma normal

Vamos verificar se f é homogénea de grau zero:

$$f(\lambda x,\lambda y) = \frac{\cancel{\lambda^3}x^3+\cancel{\lambda^3}y^3}{3\cancel{\lambda^2}y^2\cancel{\lambda}x} = \frac{x^3+y^3}{3y^2x} = f(x,y)$$

$\therefore$ f é homogénea de grau zero e então a EDO é homogénea

Mud. var:

$y = zx$

$y' = z'x + z$

$\Leftrightarrow z'x+z = \dfrac{\cancel{x^3}+z^3\cancel{x^3}}{3z^2\cancel{x^3}}$

$\Leftrightarrow z'x+z = \dfrac{1+z^3}{3z^2}$

$\Leftrightarrow z'x = \dfrac{1+z^3}{3z^2} - z$

$\Leftrightarrow z'x = \dfrac{1+z^3-3z^3}{3z^2}$ $\longrightarrow$ EDO de var. separáveis

$\Leftrightarrow z'x = \dfrac{1-2z^3}{3z^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3z^2}{1-2z^3}z' = \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{(-2)3z^2}{1-2z^3}\,dz = \int \dfrac{1}{x}\,dx$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\ln|1-2z^3| = \ln|x| + C$

Integral geral da EDO de var. separáveis

Mud. var. inv.

$z = y/x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\ln\left|1-2\dfrac{y^3}{x^3}\right| = \ln|x| + C,\ C\in\mathbb{R}$

Integral geral da EDO homogénea.

c) $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(x+y)}{y-x}$$

$$\Leftrightarrow y' = \underbrace{\frac{-x-y}{y-x}}_{f(x,y)}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{-\lambda x - \lambda y}{\lambda y - \lambda x} = \frac{-x-y}{y-x} = f(x,y)$$

$\therefore$ f é homogénea de grau zero e então a EDO é homogénea

$y = zx$

$y' = z'x + z$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{-x - zx}{zx - x}$$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{-1-z}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{-1-z}{z-1} - z$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{-1-\cancel{z}-z^2+\cancel{z}}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{-1-z^2}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{-1-z^2}\,z' = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{-(1+z^2)}\,dz = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{z}{-(1+z^2)}\,dz + \int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{2z}{1+z^2}\,dz + \int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1+z^2| + \arctan(z) = \ln|x| + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$z = y/x$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C \quad , x \neq 0$$

Integral geral da EDO homogénea

EDO's Lineares de 1ª ordem

Se a EDO pode ser escrita na forma

$$a_0(x)\,y' + a_1(x)\,y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x)\,y = q(x).$$

Quando $b \equiv 0$ ($q \equiv 0$), a equação diz-se incompleta ou homogénea.

Linear

não confundir com as EDO's homogéneas vistas anteriormente.

Mas como se resolvem este tipo de EDO's? Como encontramos o seu integral geral?

A solução de uma EDO linear de 1a ordem obtém-se efectuando:

1. Considerar a EDO escrita na forma $y' + p(x)y = q(x)$.
2. Construir o **factor integrante** $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.
3. Multiplicar a EDO por $\mu(x)$

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \Leftrightarrow (\mu(x)y)' = \mu(x)q(x)$$

4. Integrar em ordem a x

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx$$

com mais pormenor...

1º passo: Dividir tudo por $a_0(x)$ para que y' fique sozinho e a EDO fique na forma

$$y' + \underbrace{p(x)}_{\frac{a_1(x)}{a_0(x)}}\, y = \underbrace{q(x)}_{\frac{b(x)}{a_0(x)}}$$

2º passo: calcular o fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

3º passo: Multiplicar tudo por $\mu(x)$

$$\underbrace{\mu(x)\,y' + \mu(x)\,p(x)\,y} = \mu(x)\,q(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mu(x)\,y)' = \mu(x)\,q(x)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(x)\,y = \int \mu(x)\,q(x)\,dx$$

4º passo: Resolver o integral e isolar y:

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\,q(x)\,dx$$

Exemplos

Resolva as seguintes EDOs

(a) $xy' - y = x - 1, \; x > 0$

(b) $xy' + y - e^x = 0, \; x > 0$

(c) $y' - y = -e^x$

a) $\underbrace{x}_{a_0(x)} y' \underbrace{- y}_{a_1(x)} = \underbrace{x - 1}_{b(x)}$ $\quad x > 0$

Dividir por $a_0(x) = x$

$$\Leftrightarrow y' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{q(x)}$$

Fator integrante: $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} \underset{x>0}{=} e^{-\ln(x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}$

Multiplicar tudo por $\mu(x) = \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y} = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} y\right)' = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \int \left(\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow y = x\left[\int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx\right]$$

$$\Leftrightarrow y = x\left[\ln(x) + \frac{1}{x} + c\right]$$

$$\Leftrightarrow y = x\ln(x) + 1 + Cx \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO linear.

b) $x y' + y = e^x \quad x > 0$

$$\Leftrightarrow y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{q(x)}$$

Fator integrante:

$\mu(x) = e^{\int 1/x \, dx} = x \; , \; x > 0$

$$\Leftrightarrow \quad xy' + y = e^x$$ Multiplicar por $\mu(x) = x$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(xy)'}_{} = e^x$$

$$\Leftrightarrow \quad xy = \int e^x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x}\left(e^x + c\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x}{x} + \frac{c}{x} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO Linear

c) $\underbrace{y' - y}_{p(x)} = \underbrace{-e^x}_{q(x)}$

Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}y' - e^{-x}y}_{} = -e^x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad (e^{-x}y)' = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}y = \int -1 \, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}y = -x + C$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -xe^x + ce^x \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO linear

PVI associado a EDO Linear de Primeira Ordem:

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)\,y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

A solução, existindo, é única!

Exemplo:

O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

exemplo anterior

tem como solução única $y = -xe^x$, para $x \in \mathbb{R}$. Porquê?

$y = -xe^x + ce^x \quad , \quad c \in \mathbb{R} \longrightarrow$ Integral geral

$y(0) = 0$

$0 = -0e^0 + ce^0$

$\Leftrightarrow 0 = 0 + c$

$\Leftrightarrow c = 0$

Solução do problema de Cauchy (PVI) é a solução particular:

$$y = -xe^x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Bom trabalho!

Filipa Santana.