

Tema: EDO's exatas.

Resolução de exercícios de revisão para OMT.

EDO's Exatas

Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ duas funções contínuas num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. A equação na forma :

$$M(x,y) + N(x,y) y' = 0$$

ou

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

diz-se **exata** se existe uma função $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que :

$$M(x,y) = \frac{dF}{dx} \quad \text{e} \quad N(x,y) = \frac{dF}{dy}$$

ou, de outra forma :

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

Teorema de Schwarz

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dy} \left(\frac{dF}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy} \right)$$

Para encontrar o integral geral desta EDO basta encontrarmos a função F , usando integração.

Exemplo 1

$$\underbrace{y^2 dx}_{M(x,y)} + \underbrace{2xy dy}_{N(x,y)} = 0$$

$$\frac{dM}{dy} = (y^2)'_y = 2y \quad \text{e} \quad \frac{dN}{dx} = (2xy)'_x = 2y$$

iguais

∴ A EDO é exata!

Como $M(x,y) = y^2 = \frac{dF}{dx}$, então:

$$F(x,y) = \int y^2 dx = y^2 x + C(y)$$

Como $N(x,y) = 2xy = \frac{dF}{dy}$, então:

$$F(x,y) = \int 2xy dy = 2x \frac{y^2}{2} + C(x) = xy^2 + C(x)$$

A função F
tem de
verificar as
duas
condições

Então podemos considerar

$$F(x,y) = xy^2$$

O integral geral de uma EDO exata escreve-se
como: $F(x,y) = C, C \in \mathbb{R}$

Neste exemplo seria $xy^2 = C, C \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2

$$\underbrace{(y + 2xe^y)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(x^2e^y + x - 2y)}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dy} &= (y + 2xe^y)'_y = 1 + 2xe^y \\ \frac{dN}{dx} &= (x^2e^y + x - 2y)'_x = e^y 2x + 1 = 2xe^y + 1 \end{aligned}$$

iguais

∴ É exata!

Vamos encontrar $F(x,y)$:

$$\begin{aligned} M = \frac{dF}{dx} &\Rightarrow F(x,y) = \int y + 2xe^y dx \\ &= yx + 2e^y \frac{x^2}{2} + C(y) \\ &= yx + x^2e^y + C(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = \frac{dF}{dy} &\Rightarrow F(x,y) = \int (x^2e^y + x - 2y) dy \\ &= x^2e^y + xy - y^2 + C(x) \end{aligned}$$

Então, $F(x,y) = x^2e^y + xy - y^2$

Integral geral da EDO exata:

$$F(x,y) = C \Leftrightarrow x^2e^y + xy - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}^2$$

Existem certas funções auxiliares que permitem transformar uma dada EDO não exata numa equação desse tipo. Chama-se **fator integrante** da equação:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

a toda a função $\mu(x, y)$ não nula tal que a equação

$$\mu(x,y) M(x,y)dx + \mu(x,y) N(x,y)dy = 0$$

é Exata.

Encontrar $\mu(x,y)$ pode ser complicado mas se depender apenas de uma variável ($\mu(x)$ ou $\mu(y)$) torna-se mais simples.

• Se $\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = g(x)$ → Depende apenas de x
então $\mu(x) = e^{\int g(x) dx}$

• Se $\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{M} = h(y)$ → Depende apenas de y
então $\mu(y) = e^{\int -h(y) dy}$

Exemplo 3

$$2 \cos y \, dx - \sin y \, dy = 0$$

$$\underbrace{2 \cos y \, dx}_{M(x,y)} - \underbrace{\sin y \, dy}_{N(x,y)} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dy} &= (2 \cos y)'_y = -2 \sin y \\ \frac{dN}{dx} &= (-\sin y)'_x = 0 \end{aligned} \quad \leftarrow \neq \quad \text{n\~ao \acute{e} exata!}$$

Vejaamos se o fator integrante pode depender de x :

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \frac{-2 \sin y - 0}{-\sin y} = \frac{-2 \sin y}{-\sin y} = 2 = g(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$$

$$\begin{aligned} &2 \cos y \, dx - \sin y \, dy = 0 \\ \Leftrightarrow &\underbrace{2e^{2x} \cos y \, dx}_{\mu M} - \underbrace{e^{2x} \sin y \, dy}_{\mu N} = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

$\times \mu(x)$

$$\left. \begin{aligned} (\mu M)'_y &= -2e^{2x} \sin y \\ (\mu N)'_x &= -2e^{2x} \sin y \end{aligned} \right) = \text{Como podemos verificar a EDO } (*) \text{ j\acute{a} \acute{e} exata.}$$

Vamos encontrar o integral geral:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \mu M \Rightarrow F(x,y) = \int 2e^{2x} \cos y \, dx \\ &= \cos y \int \underbrace{2e^{2x}}_{u'e^u} \, dx = \cos(y) e^{2x} + C(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dy} &= \mu N \Rightarrow F(x,y) = \int -e^{2x} \cdot \sin(y) \, dy \\ &= -e^{2x} \int \sin(y) \, dy = e^{2x} \cos(y) + C(x)\end{aligned}$$

Então podemos considerar $F(x,y) = e^{2x} \cos(y)$

E, assim, o integral geral da EDO exata pode ser escrito na forma: $F(x,y) = C$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \cos y = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 4

$$\underbrace{3xy + y^2}_{M(x,y)} + \underbrace{(x^2 + xy)}_{N(x,y)} y' = 0 \quad x > 0$$

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dy} &= (3xy + y^2)'_y = 3x + 2y \\ \frac{dN}{dx} &= (x^2 + xy)'_x = 2x + y\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned}\frac{dM}{dy} \\ \frac{dN}{dx}\end{aligned}} \right) \neq \quad \text{Não é exata!}$$

Vejam se o fator integrante pode depender de x :

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \frac{3x+2y - (2x+y)}{x^2 + xy} = \frac{\cancel{x+y}}{x(\cancel{x+y})} = \frac{1}{x} = g(x)$$

então $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x, x > 0$

Sabemos que,

$$\mu(x) M(x,y) + \mu(x) N(x,y) y' = 0$$

será uma EDO Exata!

$$\Rightarrow \underbrace{(3xy + y^2)x}_{\mu M} + \underbrace{(x^2 + xy)x}_{\mu N} y' = 0$$

$$F(x,y) = \int 3x^2y + xy^2 dx \leftarrow \text{Porque } \mu M = \frac{dF}{dx}$$
$$= 3y \frac{x^3}{3} + y^2 \frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$= x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} + C(y)$$

$$F(x,y) = \int x^3 + x^2 y dy$$
$$= x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} + C(x)$$

Porque $\mu N = \frac{dF}{dy}$

$$F(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} //$$

Integral geral: $F(x,y) = C$

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C //$$

$C \in \mathbb{R}$

Exemplo 5

$$\underbrace{y^2 \cos x \, dx}_{M(x,y)} + \underbrace{(4 + 5y \sin x) \, dy}_{N(x,y)} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dM}{dy} = \cos x \, 2y \\ \frac{dN}{dx} = 5y \cos x \end{array} \right\} \neq \quad \therefore \text{Não é exata!}$$

Veamos se o fator integrante pode depender de y :

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{M} = \frac{2y \cos x - 5y \cos x}{y^2 \cos x} = \frac{-3y \cancel{\cos x}}{y^2 \cancel{\cos x}} = \underbrace{-\frac{3}{y}}_{h(y)}$$

$$\mu(y) = e^{\int -(-\frac{3}{y}) dy} = e^{3 \ln |y|} = y^3, \quad y > 0$$

Então $\mu(y) M(x,y) + \mu(y) N(x,y)$ é exata!

$$\Rightarrow y^3 y^2 \cos(x) + (4y^3 + 5y^4 \sin x) y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y^5 \cos(x)}_{\mu M} + \underbrace{(4y^3 + 5y^4 \sin x)}_{\mu N} y' = 0$$

Vamos encontrar o integral geral:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} = \mu M &\Rightarrow F(x, y) = \int y^5 \cos x \, dx \\ &= y^5 \int \cos(x) \, dx = y^5 \sin(x) + C(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dy} = \mu N &\Rightarrow F(x, y) = \int 4y^3 + 5y^4 \sin x \, dy \\ &= y^4 + \sin(x) \times y^5 + C(x) \end{aligned}$$

Então $F(x, y) = y^4 + y^5 \sin(x)$ (Por exemplo)

e o integral geral é:

$$y^4 + y^5 \sin(x) = C, C \in \mathbb{R}$$

Exercícios revisado sobre EDO's
de primeira
ordem



Exercícios Revisão

1. A EDO $y + y' \operatorname{cosec}(x) = 0$

- ☐ Está escrita na forma normal
- ☐ É uma EDO de 2ª ordem
- ☒ É uma EDO de variáveis separáveis
- ☐ É uma EDO homogénea

2. A EDO $y^2 + y = (x^2 - x)y'$ é uma EDO :

- ☐ Linear
- ☒ Variáveis separáveis
- ☐ Homogénea
- ☐ Exata

3. Identifica o tipo das seguintes EDO's :

a) $(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0$ VS

b) $(x + y) dx + (y - x) dy = 0$ H

c) $xy' + y - e^x = 0 \quad x > 0$ L

4. Considere a equação diferencial

$$-(3x^2 - 4y^2)y' + 2xy = 0, \text{ com } x > 0$$

- ☐ É uma EDO Linear
- ☒ É uma EDO homogênea
- ☐ É uma EDO Exata
- ☐ É uma EDO variáveis separáveis

5. A EDO $xy' - y = x - 1$, $x > 0$, é:

- ☐ uma EDO homogênea
- ☐ uma EDO Linear homogênea
- ☒ uma EDO Linear
- ☐ uma EDO Exata.

6. Encontre a solução do Problema de Cauchy.

$$\begin{cases} x^2 y' - 2xy = 3y^4 \rightsquigarrow \text{Bernoulli} \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

7. A EDO $xy' - y = x - 1$, $x > 0$, tem como fator integrante:

☐ $\mu(x) = x^2$

☐ $\mu(x) = x$

☒ $\mu(x) = \frac{1}{x}$

☐ $\mu(x) = \ln(x)$

8. Relativamente à EDO:

$$(\cos(x) + 2)y' - y^2 - 1 = 0$$

podemos dizer:

☐ Ordem 1 Linear

☐ Ordem 2

☒ Variáveis separáveis

☐ homogénea

→ Resolver mini-teste modelo → elearning UA