Resumo

Convergência pontual e uniforme

Sucessões de Funções

- $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f em D se $\forall x \in D$, $f(x) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{\text{limite pontual}}$

- $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f se:

$$\underbrace{\sup_{x\in D} \left| f_n(x) - f(x) \right|}_{\text{infinitésimo}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

menor dos majorantes

Conv. uniforme implica

O contrário pode não ser verdade.

①②③ $\not\Rightarrow$ C.Unif

Propriedades

① f é contínua em $D = [a,b]$

② f é integrável em $D = [a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] = \lim \left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]$$

③ Se $f_n(x)$ tem derivadas contínuas em $[a,b]$ e $(f'_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ conv. uniformemente em $[a,b]$ então f é diferenciável em $[a,b]$ e

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

A falha de uma das prop. ①, ② ou ③ prova a $\bar{n}$ conv. uniforme.

Séries de funções

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente se existir limite pontual de S_n (sucessão das somas parciais)

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$$\lim S_n(x) = \lim \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)$$

↳ basta calcular o limite e ver onde existe.

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em D se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em D

Pode ser difícil!

(Muito mais fácil)

Critério de Weierstrass

Se existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente: $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}$, $D = [a,b]$

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

O termo geral da série é majorado por a_n

Então a série converge uniformemente em D

O contrário pode não ser verdade

①②③ $\not\Rightarrow$ Conv. Unif

Propriedades

① $S(x)$ é contínua em $[a,b]$

② S é integrável em $[a,b]$ e:

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

(integração termo a termo)

③ Se cada f_n é diferenciável em $[a,b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente em $[a,b]$ então $S(x)$ é diferenciável em $[a,b]$ e:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

(derivação termo a termo)

Séries de Fourier

Fórmula geral: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right)$

função 2π-periódica

Se f não tiver período 2π, mas sim período T então:

$$\underbrace{F(x)}_{2\pi\text{-periódica}} = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$$

Coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

!

Se f é **par** $\Rightarrow$ $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

Se f é **ímpar** $\Rightarrow$ $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

A série de Fourier nem sempre converge para a própria função.

Mas quais são as condições para que a soma da série de Fourier coincida com a função f ?

Teorema de Dirichlet: Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Então a série de Fourier converge no ponto c para:

$$\boxed{\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}}$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

Quando existe uma partição do intervalo $[a,b]$ em que a função derivada se verifica contínua em todos os subintervalos abertos da partição $]a_{j-1}, a_j[$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ e ainda se existem e são finitos os limites laterais:

$$f(a_{j-1}^+) = \lim_{x \to a_{j-1}^+} f(x)$$

e

$$f(a_j^-) = \lim_{x \to a_j^-} f(x)$$

- Se f é contínua em $x = c$, então:

$$S(c) = \frac{f(c^+) + f(c^-)}{2} = \frac{2\,f(c)}{2} = f(c)$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

- Se f ñ é contínua em $x = c$, então:

$$S(c) = \frac{f(c^+) + f(c^-)}{2} = \text{valor médio dos limites laterais}$$

Miscelânea de exercícios Capítulo 2

[35] Considere $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Desenvolva a função f em série de MacLaurin.

(b) Use a série obtida em (a) para mostrar que $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

[50] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de periodo 2π, definida no intervalo $[-\pi, \pi[$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \le x < 0, \\ \pi - x, & \text{se } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

(a) Sabendo que a série de Fourier de f tem a forma

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)x\right) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right],$$

calcule os coeficientes b_n, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sendo S a função soma da série anterior, justifique que $S(0) = \dfrac{\pi}{2}$ e represente-a graficamente no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

(c) Usando a série de Fourier obtida, prove que $\pi^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2}$.

[30] Considere a série de potências $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,2^{n-1}}$.

(a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

(b) Determine a soma $S(x)$.

(**Sugestão:** Comece por identificar a derivada $S'(x)$ e tenha em conta o valor de $S(1)$)

[10] Determine a série de Fourier de co-senos da função f definida em $[0, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad 0 \le x \le 1, \\ 0, & se \quad 1 < x \le \pi. \end{cases}$$

[35] Considere a função dada por $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

(a) Represente em série de MacLaurin as funções f e f' (indicando os respetivos intervalos de convergência).

(b) Calcule a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{n!}$.

[30] Considere a função f definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|(\pi - |x|)$.

(a) Justifique que a série de Fourier de f é uma série de cossenos, ou seja, da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad (a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0)$$

e calcule o coeficiente a_0 que figura nesta série.

(b) Sabendo agora que a série de Fourier de f é

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2},$$

mostre que esta série converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$ e indique a sua função soma.

(c) Usando o resultado da alínea anterior, prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

[50] Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n} x^n$.

(a) Determine o domínio de convergência da série.

(b) Justifique que

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{para todo o } x \in]-1, 1[.$$

[Sugestão: use convenientemente um dos desenvolvimentos indicados no formulário]

(c) Usando a representação indicada da alínea (b), determine a soma $f(x)$ da série dada (no respetivo intervalo de convergência).

[35] Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (4x-1)^n$.

(a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

(b) Mostre que $f'(x) = \frac{1}{x}$ (para todo o x no intervalo de convergência da série).

[20] Determine a série de Fourier de cossenos da função f, definida em $[0, \pi]$ por $f(x) = x$.

[40] Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n3^n}$.

(a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

(b) Calcule a soma $f(x)$. (**Sug.:** comece por identificar a função derivada de f.)

[20] Represente em série de MacLaurin a função $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$, indicando o maior intervalo onde tal representação é válida.

(Sug.: comece por representar $\frac{1}{1-x^2}$ e derive a série correspondente)

[40] Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2^{n+1}}{n}(x+3)^n$.

(a) Determine o domínio de convergência da série dada, indicando os pontos onde a convergência é simples e absoluta.

(b) Explicite a soma $f(x)$ da série.

Bom trabalho!

Filipa Santana