Temas: Introdução às séries de Fourier ;
Séries de Fourier de funções 2pi-periódicas.
Exemplos de determinação dos coeficientes de algumas séries de Fourier.
Construção da série (de Fourier) de senos e da série de cossenos.

Séries Trigonométricas

Nesta secção vamos discutir a possibilidade de representar funções "pouco regulares" (mesmo descontínuas) através de séries de funções trigonométricas.

Definição:
As série de funções com a seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \mathrm{sen}(n\omega x)\right] \qquad (1)$$

onde $\omega \in \mathbb{R}^+$ e $(a_n), (b_n)$ são sucessões numéricas, têm a designação genérica de séries trigonométricas.

Se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ forem absolutamente convergentes, então a série acima é absolutamente e uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Recorrendo ao crit. de Weierstrass:

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \mathrm{sen}(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são absolutamente convergentes, a sua série dos módulos converge.

Então, $\sum_{n=1} (|a_n| + |b_n|)$ converge absolutamente

e a série trigonométrica converge uniformemente.

Estas séries são muito usadas para aproximar funções periodicas.

Definição:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se periódica se existir $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O período de f é o menor valor de T que verifica a igualdade anterior. Neste caso, dizemos que, f é T–periódica.

Uma função T-periódica pode sempre ser convertida numa função 2π-periódica usando usando uma mudança de variável.

$$\boxed{F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi} x\right)}$$

Seja f uma função T-periódica:

$$f(x) = f(x+T)$$

$$\boxed{F(x)} = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right)$$

$$= f\left(\frac{Tx + 2\pi T}{2\pi}\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right)$$

$$= \boxed{F(x + 2\pi)}$$

$\therefore$ F é 2π-periódica.

Coeficientes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Se esta série trigonométrica convergir uniformemente, a_n e b_n são completamente determinadas pela função f da forma:

$(n=0)$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

$(n \geq 1)$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx}$$

Os coeficientes de Fourier podem ser calculados usando um qualquer intervalo de integração de amplitude 2π (devido à periodicidade das funções integrandas em causa).

Assim podemos concluir que:

Definição:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e integrável em $[-\pi, \pi]$. Chama-se série de Fourier associada à função f (ou da função f) à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right],$$

onde a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ e b_n $(n \in \mathbb{N})$ são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx.$$

a_n e b_n são designados por coeficientes de Fourier da função f.

Se substituirmos n por 0 teremos $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ uma vez que: $\cos(0) = 1$

E temos que $\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)}$

Série de Fourier de Cossenos

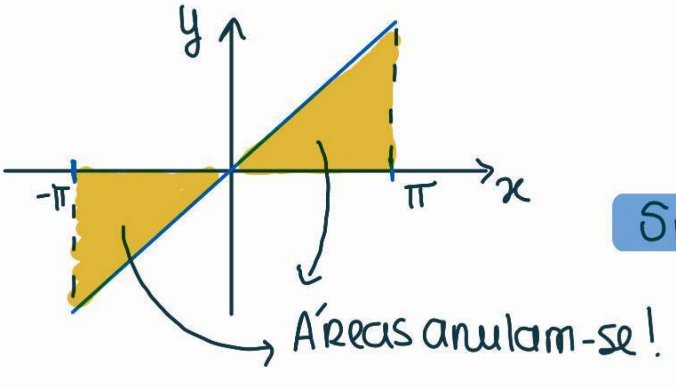
Se f for uma função par $\Rightarrow$ $b_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{par}}\,\underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{\text{impar}}}_{\text{impar}}\, dx = 0$$

impar

$\Downarrow$

Simétrica na origem

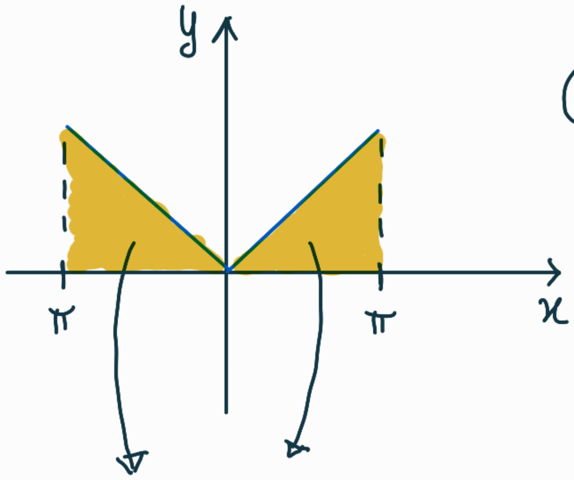


Por outro lado,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{par}}\ \underbrace{\cos(nx)}_{\text{par}}}_{\text{par}}\, dx = $$

Simétrica em Oy

$$= 2 \times \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$



Áreas iguais

Então a série de Fourier de f tem a forma:

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)}$$

Série de Fourier de Senos

Se f for uma função impar $\Rightarrow$ $a_n = 0$ e $a_0 = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{impar}}\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{impar}}\ \underbrace{\cos(nx)}_{\text{par}}}_{\text{impar}}\, dx = 0$$

Por outro lado,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{impar}}\ \underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{\text{impar}}}_{\text{par}}\, dx =$$

$$= 2 \times \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\, dx$$

Assim a série de Fourier de f tem a forma:

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)}$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ 1 & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1/2 & , -\pi < x \leq 0 \\ 1/2 & , 0 < x < \pi \end{cases}$

c) $f(x) = |x| \quad , x \in]-\pi, \pi[$

d) $f(x) = x^2 \quad , x \in]-\pi, \pi[$

e) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$

f) $$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in]0, \pi[\\ -1 & , x \in]-\pi, 0] \end{cases}$$

g) $f(x) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \quad t \in]-\pi, \pi[$

h) $f(x) = x \qquad x \in]-\pi, \pi[$