

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 5 - 18 e 24 Out 10 22

1.4 Dinâmica de um sistema de partículas

Análise e discussão de exemplos

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt

Gab. 13.3.16

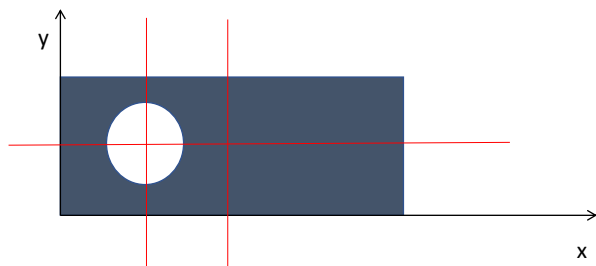
1

1

Capítulo 1.4.a

2. Uma lâmina rectangular homogênea de lados a e $b = 4a$ tem um orifício circular cujo diâmetro é igual a $a/2$. O seu centro está sobre a linha média paralela aos lados b , a meia distância entre o centro da lâmina e um dos lados de comprimento a .

Determinar o centro de massa.



Existe outra hipótese de resolução. Qual?

NB: $m = \sigma A$

σ = densidade superficial

MCE_IM_2022-2023

2

2

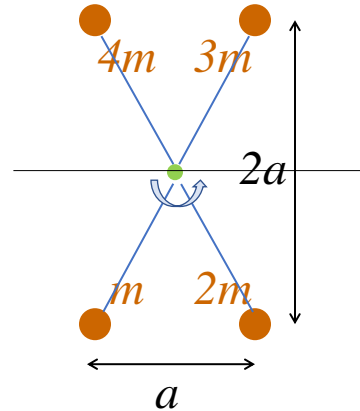
Cálculo de Momento de inércia

Exemplo - Quatro corpos que rodam em torno de eixo perpendicular ao plano (ponto marcado a verde)

Neste caso, ter-se-á:

$$\begin{aligned}
 I &= \sum m_i r_i^2 \\
 &= (m + 2m + 3m + 4m) \left(\sqrt{\frac{5}{4}} a \right)^2 \\
 &= 10m \left(\frac{5}{4} a^2 \right) = M_T \left(\frac{5}{4} a^2 \right)
 \end{aligned}$$

$M_T = \text{massa total}$



MCE_IM_2022-2023

3

3

Cálculo de Momento de inércia

Exemplo - Quatro corpos que rodam em torno de um eixo horizontal e de um eixo vertical

Calcular o momento de inércia relativamente a:

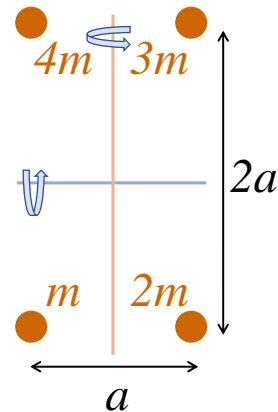
um eixo horizontal (azul):

$$\begin{aligned}
 I &= \sum m_i r_i^2 = ma^2 + 2ma^2 + 3ma^2 + 4ma^2 \\
 &= 10ma^2 = M_T a^2
 \end{aligned}$$

$M_T = \text{massa total}$

um eixo vertical (castanho):

$$\begin{aligned}
 I &= m \frac{a^2}{4} + 2m \frac{a^2}{4} + 3m \frac{a^2}{4} + 4m \frac{a^2}{4} \\
 &= 10m \frac{a^2}{4} = M_T \frac{a^2}{4}
 \end{aligned}$$



MCE_IM_2022-2023

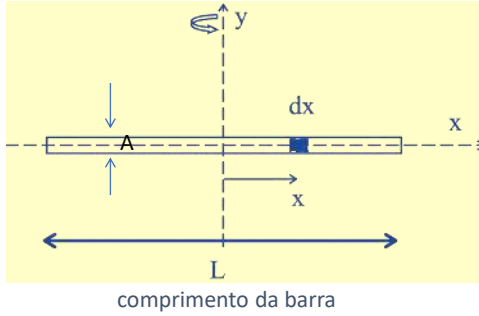
4

4

Exemplo - Barra homogênea 1

Capítulo 1.4.b - 5.b)

Momento de Inércia relativamente ao **eixo perpendicular (transversal)** que passa pelo centro de massa da barra



A distância ao eixo
é a coordenada x $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$

densidade
linear, μ

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

Massa Total, M

$$dm = \rho \cdot A \cdot dx$$

$$dm = \mu \cdot dx$$

$$I_C = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$I_C = \frac{ML^2}{12}$$

MCE_IM_2022-2023

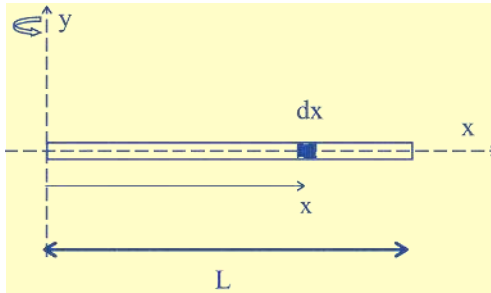
5

5

Exemplo - Barra homogênea 2

Capítulo 1.4.b - 5.a)

Momento de Inércia relativamente a um **eixo perpendicular que passa pela extremidade da barra**



A distância ao eixo
é a coordenada x

$$0 \leq x \leq L$$

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

Massa Total, M

Comprimento da
barra, L

$$I_E = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L$$

$$I_E = \frac{ML^2}{3}$$

MCE_IM_2022-2023

6

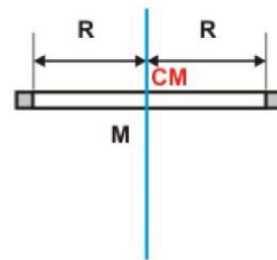
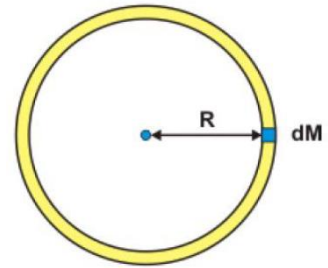
6

Exemplo - Anel

Anel fino homogêneo de massa M e raio R relativamente a um eixo perpendicular pelo centro.

$$I = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = R^2 M$$

O resultado é o mesmo para um cilindro oco de espessura fina!



MCE_IM_2022-2023

7

7

Teorema de Steiner ou do eixo paralelo

O Teorema permite que consideremos a seguinte igualdade para o momento de inércia em torno de um eixo paralelo ao eixo que passa pelo Centro de Massa

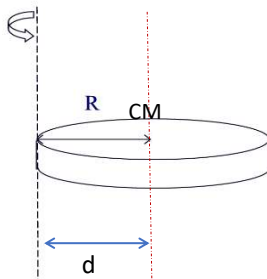
Capítulo 1.4.b - 7

**Momento de Inércia em
torno de um eixo paralelo**

$$I = I_{CM} + Md^2$$

d = distância do CM ao eixo

M = Massa do corpo



Considerando o exemplo ilustrado, obtém-se

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

MCE_IM_2022-2023

8

8

Capítulo 1.4.b

4 - Duas crianças, com 25 kg, estão sentadas nas extremidades de uma prancha de 2,6 m de comprimento e de 10 kg de massa. A prancha gira com velocidade de cinco rotações por minuto, em torno de um eixo que passa pelo seu centro.

Se cada uma das crianças se sentar 60 cm mais à frente, em direcção ao centro, como se altera a velocidade angular do sistema?

E como varia a energia cinética do sistema?

Sugestão: conservação do momento angular

$$\sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{L}_f$$

$$(\sum_{i=1}^n I_i) \omega_i = (\sum_{i=1}^n I_f) \omega_f$$

MCE_IM_2022-2023

9

9

Capítulo 1.4.b

11 - Um homem está em pé, no centro de uma mesa giratória sem atrito, e mantém os braços estendidos horizontalmente, segurando uma massa de 5,0 kg em cada mão. A mesa é posta em rotação por um agente exterior, com uma velocidade angular de uma rotação em 2,0 s.

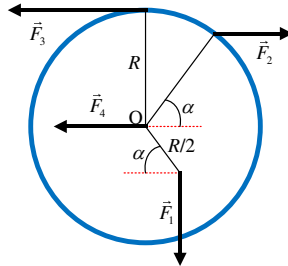
Determine o valor da velocidade angular após o homem deixar cair os braços ao longo do corpo. Considere o momento de inércia do homem constante e igual a 5,0 kg.m². A distância original das massas ao eixo de rotação é 90 cm e a final é 15 cm.

MCE_IM_2022-2023

10

10

Um cilindro de 4 kg de massa pode rodar em torno do eixo central que passa pelo ponto O. Sobre o cilindro são aplicadas quatro forças conforme se ilustra na figura, de intensidades $F_1 = 4 \text{ N}$, $F_2 = 3 \text{ N}$, $F_3 = 8 \text{ N}$ e $F_4 = 4,9 \text{ N}$. ($R = 2 \text{ m}$, $\alpha = 53^\circ$, $I_{\text{cm}} = 1/2 m R^2$, $\cos(53^\circ) = 0,6$ e $\sin(53^\circ) = 0,8$).



- Determine a intensidade da aceleração angular do cilindro e identifique se o mesmo roda no sentido horário ou anti-horário.
- Determine a energia cinética de rotação do cilindro ao fim de 1 s. O cilindro encontra-se inicialmente em repouso.

MCE_IM_2022-2023

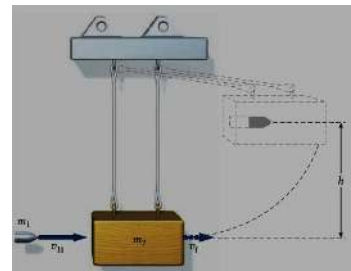
11

11

Capítulo 1.4.a

8. Um pêndulo balístico é constituído por um corpo suspenso dum fio. Um projétil de massa $m_1 = 30 \text{ g}$ penetra no corpo e fica cravado nele. O centro de massa do corpo eleva-se até uma altura $h = 30 \text{ cm}$. A massa do corpo é $m_2 = 3,0 \text{ kg}$.

- Deduza uma expressão para a velocidade do projétil em função destes dados.
- Calcule o valor numérico da velocidade do projétil quando este atinge o corpo.



MCE_IM_2022-2023

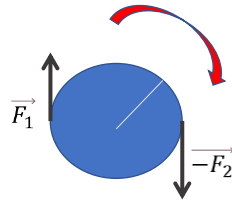
12

12

ESTÁTICA

Binário de forças

$$\sum \vec{F}_i = 0$$



mas

$$\sum \vec{\tau}_i \neq 0$$

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

e, simultaneamente,

$$\sum \vec{\tau}_i = 0$$

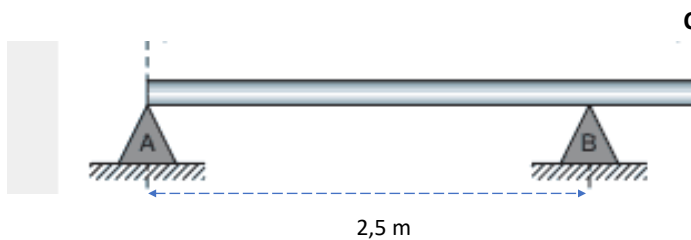
MCE_IM_2022-2023

13

13

Capítulo 1.4.b

12. Uma barra uniforme AC de 4 m tem massa $m = 50$ kg. Existe um ponto fixo B em torno do qual a barra pode rodar. A barra está apoiada no ponto A. Um homem com massa igual a 75 kg anda ao longo da barra partindo de A. Calcule a distância máxima a que o homem pode deslocar-se, mantendo o equilíbrio.



Sugestão: usar as condições de equilíbrio estático
No limite, a reacção sobre A anula-se

MCE_IM_2022-2023

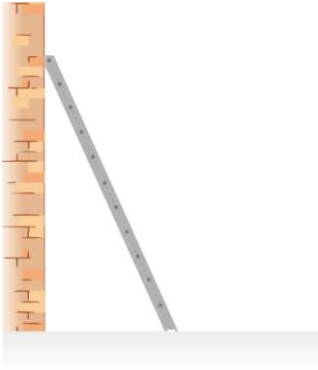
14

14

Análogo ao 13 do Cap. 1.4.b)

Uma escada homogênea de 5 m de comprimento e de 20 kg de massa, está apoiada numa parede vertical, sem atrito, e num piso rugoso (há atrito), como esquematizado. A escada tem uma inclinação com a horizontal de $\theta = 53^\circ$. A escada encontra-se em equilíbrio sem deslizar.

Considere $\cos(53^\circ) = 0,6$; $\sin(53^\circ) = 0,8$; $\tan(53^\circ) = 4/3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- Faça o diagrama das forças aplicadas à escada e escreva as condições de equilíbrio estático.
- Determine a força que atua entre a parede e o topo da escada, nas condições da alínea anterior.
- Determine o valor das forças que atuam entre a escada e o chão assim como o coeficiente de atrito estático.