1a)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : (2-x^2)x > 0\}$$

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$2-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2-x^2)x$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$$D_f =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]0, \sqrt{2}[$$

b) O domínio de f é um conjunto aberto e a derivada de f existe em todos os pontos.

$$f'(x) = \frac{2-3x^2}{(2-x^2)x}, \quad x \in D_f$$

Pelo Teorema de Fermat, os extremos só podem ocorrer em pontos críticos da função.

Tem-se que $f'(x)=0$ sse $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

(Nota que, $-\sqrt{\frac{2}{3}} \notin D_f$)

$\therefore$ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ é o único candidato a extremante.

Por análise do sinal de f' podemos concluir que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ é um maximizante relativo de f, sendo $\ln\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ o máximo relativo correspondente.

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ não é maximizante global.

② a) $\int \ln(x^3)\,dx = \int 1 \times \ln(x^3)\,dx$

$= x.\ln(x^3) - \int \cancel{x}.\frac{3}{\cancel{x}}\,dx$

↑ por partes

$= x.\ln(x^3) - 3x + C \quad , \ C \in \mathbb{R}$

com $x > 0$

- $f(x) = \ln(x^3)$
- $f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$
- $g'(x) = 1$
- $g(x) = x$

Obs. Ou $\int \ln(x^3)\,dx = \int 3.\ln(x)\,dx$ e escolher, por exemplo, $g'(x) = 3$ e $f(x) = \ln x$.

---

b) $\int \frac{2x+3}{4x^4+x^2}\,dx$

$\frac{2x+3}{4x^4+x^2}$ é uma fração própria

O denominador $4x^4+x^2 = x^2(4x^2+1)$ fica, assim, fatorizado na forma irredutível.

Decomposição na soma de frações simples:

$$\frac{2x+3}{4x^4+x^2} = \frac{2x+3}{x^2(4x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{4x^2+1}$$

com os coeficientes reais A, B, C e D a determinar pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$2x+3 = 4Ax^3 + Ax + 4Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2$$
$$= (4A+C)x^3 + (4B+D)x^2 + Ax + B$$

Donde $\begin{cases} 4A+C = 0 \\ 4B+D = 0 \\ A = 2 \\ B = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \\ C = -8 \\ D = -12 \end{cases}$

Portanto

$$\int \frac{2x+3}{4x^4+x^2}\,dx = \int \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{-8x-12}{4x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| + 3 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \int \frac{8x}{4x^2+1}\,dx - 12\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| - \frac{3}{x} - \ln\underbrace{(4x^2+1)}_{>0,\ \forall x \in \mathbb{R}} - 6\arctan(2x) + C$$

$C \in \mathbb{R}$

---

c) $$\int \frac{2}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx \underset{x=t^3}{=} \int \frac{2}{(t^2+t)^2} \cdot 3t^2\,dt$$

Mudança de variável:

$\underbrace{x = t^3}_{\varphi(t)}$, escolhemos $t>0$ ou $t<0$

$\varphi'(t) = 3t^2$

$$= 6 \cdot \int \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\,(t^2+2t+1)}\,dt$$

$$= 6 \cdot \int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= 6 \cdot \int (t+1)^{-2}\,dt = -\frac{6}{t+1} + C$$

$$\underset{t=\sqrt[3]{x}}{=} -\frac{6}{\sqrt[3]{x}+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

3. $\sinh y := \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$, definida de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ (contradomínio)

A sua inversa (o enunciado garante que existe) denota-se por argsinh.

$$\begin{tikzcd} \sinh y = x \arrow[r, bend left, "\operatorname{argsinh}"] & y = \operatorname{argsinh} x \arrow[l, bend left, "\sinh"] \end{tikzcd}$$

A função sinh é diferenciável, sendo cosh a sua derivada, onde $\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. Como esta expressão é sempre positiva, logo em particular é diferente de zero, podemos usar a regra da derivação da função inversa e escrever que

(*) $$\frac{d}{dx}\operatorname{argsinh} x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\sinh y} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsinh} x)}$$

variáveis correspondentes   voltando à variável inicial

Pela fórmula fundamental das funções hiperbólicas, $\cosh^2(\operatorname{argsinh} x) - \sinh^2(\operatorname{argsinh} x) = 1$, de onde sai

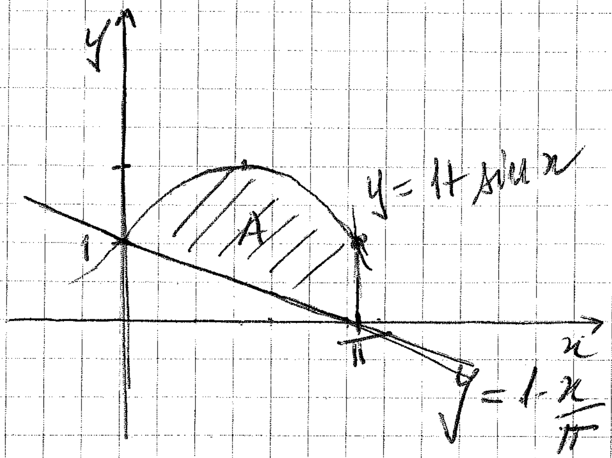
$$\cosh^2(\operatorname{argsinh} x) = 1 + x^2$$ e, como $\cosh y > 0$,

$\cosh(\operatorname{argsinh} x) = \sqrt{1+x^2}$.

Substituindo em (*) acima obtém-se

$$\frac{d}{dx}\operatorname{argsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.



$$\text{Área}(A) = \int_0^{\pi} (1+\sin x) - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) dx$$

$$= 2 + \frac{\pi}{2}$$

(5) a) (i) É um integral de Riemann, porque a função $\frac{2x \cdot \arctan(x^2)}{1+x^4}$ é uma função contínua (pela álgebra das funções contínuas) em $\mathbb{R}$, logo em $[1,2]$ e, por isso, é integrável em $[1,2]$.

(ii) É um integral impróprio de 2ª espécie, porque a função $\frac{1}{x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)}$ é ilimitada em $x=2$:

$$\lim_{x \to 2^{\mp}} \frac{1}{x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{0^{\mp}} = \mp\infty$$

---

b)

(i) $$\int_1^2 \frac{2x}{1+x^4} \cdot \arctan(x^2)\,dx = \left[\frac{\arctan^2(x^2)}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{\arctan^2(4)}{2} - \frac{\pi^2}{32}$$

(ii) Temos de estudar a natureza dos integrais impróprios de 2ª espécie:

$$\int_1^2 \frac{1}{x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx \quad \text{e} \quad \int_2^3 \frac{1}{x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

$$\lim_{\beta \to 2^-} \int_1^\beta \frac{1}{x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx = \lim_{\beta\to 2^-} \int_1^\beta \frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$$

$$= \lim_{\beta\to 2^-} \left[\ln \left| \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right| \right]_1^\beta$$

$$= \lim_{\beta\to 2^-} \left(\ln\left|\ln\left(\beta/2\right)\right| - \ln\left|\ln\left(1/2\right)\right| \right)$$

$$= \ln\left|\ln(1^-)\right| - \ln\left|\ln(1/2)\right|$$

$$= \underbrace{\ln(0^+)}_{=-\infty} - \ln\left|\ln(1/2)\right| = -\infty \text{ , portanto}$$

o integral impróprio $\int_1^2 \frac{1}{x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$ diverge, pelo que o integral impróprio $\int_1^3 \frac{1}{x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$ também é divergente, não havendo necessidade de estudar o outro integral impróprio.

---

⑥ a)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!}$ $\qquad a_n = \frac{(-3)^n}{(n+1)!} \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que podemos aplicar o critério de D'Alembert (critério do quociente):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{(-3)^{n+1}}{(n+2)!}\right|}{\left|\frac{(-3)^n}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+2} = 0$$

Como o valor do limite pertence a $[0,1[$, pelo critério de D'Alembert, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!}$$ é absolutamente convergente.

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{3n^2-1}$$

A sua série dos módulos é divergente, pois:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{n}{3n^2-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-1}$$

Pelo critério de comparação, temos que

$$0 < \frac{1}{3n} = \frac{n}{3n^2} < \frac{n}{3n^2-1} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmónica, divergente $(\alpha = 1)$.

Falta averiguar se a série alternada é simplesmente convergente.

Considerando a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ com $a_n = \frac{n}{3n^2-1}$, $n \in \mathbb{N}$, verifica-se que:

- $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{3n^2-1} = 0$

e $\bullet$ a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente, uma vez que a função f

com $f: \begin{array}{l} D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{3x^2-1} \end{array}$ é monótona decrescente.

Basta verificar que

$$f'(x) = \frac{-3x^2-1}{(3x^2-1)^2} < 0 \quad \forall x \in D_f$$

$$D_f = \{ x \in [1,+\infty[\; : \; 3x^2-1 \neq 0 \}$$
$$= [1,+\infty[\setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Assim, uma vez que as condições do critério de Leibniz foram validadas, podemos concluir que a série alternada é convergente.

Como a sua série dos módulos diverge, a série alternada converge simplesmente.

6 b) Tem-se que:

$$\frac{2^{n-1}}{10^n}\left(10+(-2)^n\right)=\left(\frac{2}{10}\right)^{n-1}-\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

Por um lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{10}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{2}{10}}=\frac{5}{4}$$

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{1+\frac{2}{5}}=\frac{5}{7}$$

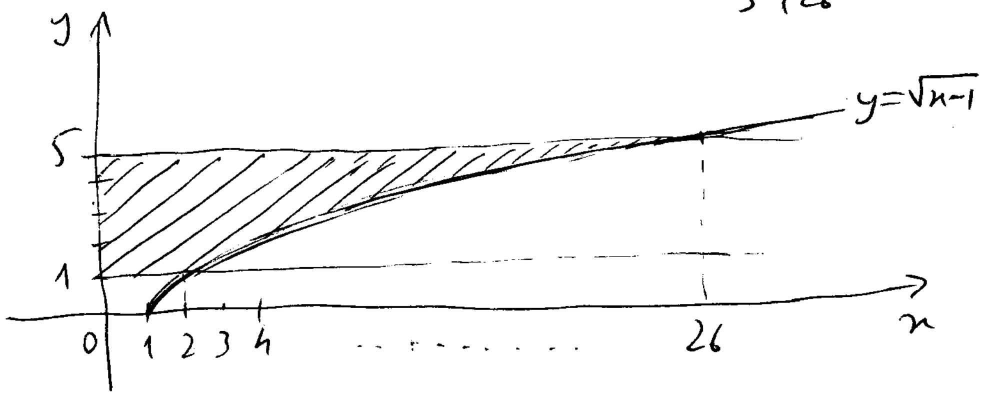
Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{10^n}\left(10+(-2)^n\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{7}$$

$$=\frac{31}{28}$$

7. $y=\sqrt{x-1}$, $x=0$, $y=1$, $y=5$

y	x
1	2
5	26



Para obter o valor da área integrando em ordem a y, descrevemos a região a partir da variável y: y vai de 1 a 5 e os xx correspondentes vão de 0 ao x tal que $y=\sqrt{x-1}$. Como $y=\sqrt{x-1} \Rightarrow y^2=x-1 \Leftrightarrow x=y^2+1$, então o integral em ordem a y que nos dá o valor da área é

$$\int_1^5 y^2+1\,dy.$$

$$\int_1^5 y^2+1\,dy = \left[\frac{y^3}{3}+y\right]_1^5 = \frac{5^3}{3}+5-\frac{1}{3}-1 =$$

$$= \frac{125}{3}-\frac{1}{3}+4 = \frac{124}{3}+4 = \frac{136}{3}.$$