Resolução:

Q2. a) do 2.º Teste em Recurso

Q4. do Exame de Recurso

O domínio de $g(x) = \sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}$ é o conjunto

$$Dg = \{ x \in \underset{\substack{\uparrow \\ D\arcsin}}{[-1,1]} : \frac{\arcsin x}{1-x^2} \geq 0 \wedge 1-x^2 \neq 0 \}$$

$Dg = [0, 1[$

O integral $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ é impróprio, de 2.ª espécie, no limite superior de integração porque $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ e a função é contínua. Na verdade, $g(x)$ não é limitada em Dg.

Por definição, o integral é o limite:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} [\arcsin(t)]^{1/2} dt$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \left[\frac{(\arcsin t)^{1/2+1}}{1/2+1} \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \left[\frac{2}{3} (\arcsin t)^{3/2} \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{3} (\arcsin x)^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} = \frac{2}{3} \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

O integral converge e tem valor $\dfrac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}$.