Série de Potências

série de potências

Chamamos série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$ a toda a série na forma:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n}$$

generalização de um polinómio

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma sucessão de números reais e cada a_n é chamado coeficiente da série.

Muito útil no cálculo de aproximações!

Algo muito importante é saber quando uma série de potências converge e para que valores de x isso acontece.

Para tal estudo, podemos usar:

- Critério de D'Alembert (Quociente)
- Critério de Cauchy (Raiz)

Estes dois critérios permitem-nos verificar para que valores de x a série se transforma numa série numérica absolutamente convergente

A série converge absolutamente em intervalos da forma $]c-R, c-R[$. $\longrightarrow$ Intervalo de convergência

A R chamamos raio de convergência.

O raio pode tomar 3 formas:

$R = 0$	$R \in \mathbb{R}^+$	$R = +\infty$
A série apenas converge absolutamente se $x = c$.	A série converge absolutamente no intervalo $]c-R; c+R[$	A série irá convergir absolutamente para qualquer valor real.

Neste caso, devemos analisar o que acontece se $x = c-R$ e se $x = c+R$, pois pode verificar-se convergência para esses valores simples ou absoluta.

$$\boxed{\text{Intervalo de valores de } x \text{ para os quais a série converge.}}$$

Domínio de convergência

Podemos fazer o estudo do raio usando o termo geral da série:

$$u_n = a_n(x-c)^n$$

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$$ Critério Quociente

ou

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$$ Critério da Raiz

Ou estudando apenas o termo geral da sucessão dos coeficientes, a_n.

(apenas quando $\underbrace{u_n = a_n (x-c)^n}$)

! Quando exatamente neste formato

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

ou

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Fórmula de Taylor / Maclaurin

A fórmula de Taylor com resto de Lagrange diz-nos que:

$$f(x) = \underbrace{T_c^n (f(x))} + \underbrace{R_c^n (f(x))}$$

Polinómio de Taylor de f centrado em c e ordem n

Resto de Lagrange

$$\boxed{R_c^n (f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}}$$

θ entre c e x

$$\boxed{T_c^n (f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k}$$

nota: têm de existir as derivadas de f de qualquer ordem.

$T_c^n(f(x))$ ⇝ Permite-nos obter um valor aproximado de $f(x)$

$R_c^n(f(x))$ ⇝ Dá-nos informação sobre o erro cometido na aproximação.

Como calcular um Majorante do erro cometido:

$$\left| R_c^n(f(x)) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right|$$

com θ entre x e c

$$\leq \boxed{\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}$$

Majorante do erro

$$M \geq \underbrace{\sup_{y \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right|}_{}$$

menor dos majorantes

majorante de $f^{(n+1)}(x)$ no intervalo $[a,b]$

Série de Taylor/Maclaurin

Para que seja possível representar uma função por uma série de Taylor, isto é, na forma:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}$$

Série de Potências

Uma das seguintes condições tem de ser verificada:

1ª condição:

Sejam I um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em I e $c \in I$. Então:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} R_c^n(f(x)) = 0}$$

2ª condição:

Sejam I um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em I e $c \in I$. Se:

$$\boxed{\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}_0}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}$$

Soma da série

E a função diz-se analítica.

As representações em série analisadas em aula foram:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Outras funções podem ser obtidas a partir da variação do "argumento" x.

  Por exemplo:

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

- Atribuindo valores concretos (numéricos) ao "argumento" x podemos obter somas de séries numéricas.

  Por exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen}(2\pi) = 0$$

Miscelânea de exercícios capítulo 1

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência igual a 2. Indique, justificando:

(a) Um intervalo onde a série é uniformemente convergente;

(b) A natureza da série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}(x-1)^n$.

Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

Represente em série de Taylor no ponto $c = 1$ a função $f(x) = \frac{1}{2-x}$, indicando o maior intervalo onde tal representação é válida.

(a) Escreva a fórmula de Taylor de segunda ordem no ponto 1 da função $\ln x$.

(b) Calcule um valor aproximado de $\ln(1,2)$ usando o polinómio obtido na alínea anterior e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a $0,003$.

Desenvolva em série de MacLaurin a função $\frac{2}{1+4x^2}$, indicando o maior intervalo onde esse desenvolvimento é válido.

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

(a) A soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{2^{4n}(2n)!}$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ (com $a_n \in \mathbb{R}$) tem raio de convergência igual a 3, então a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ é absolutamente convergente.

Determine o raio e o domínio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n(3n+1)}$, indicando os pontos onde a convergência é absoluta e os pontos onde a convergência é simples.

Considere a função $f(x) = \ln(x+4)$, com $x > -4$.

(a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3 da função f no ponto $c = -3$, com resto de Lagrange.

(b) Calcule um valor aproximado de $\ln(2)$ usando o polinómio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $c = -3$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $0,25$.

Usando o resto na forma de Lagrange, mostre que o erro (absoluto) cometido ao aproximar $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ pelo polinómio de MacLaurin $T_0^3 f(x)$, no intervalo $]-0.1, 0.1[$, é inferior a $\frac{2}{3} \times 10^{-4}$.

Determine o raio e o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,2^{n+2}}(x-1)^n$.

Considere a função $f(x) = \ln(x+4)$, com $x > -4$.

(a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3 da função f no ponto $c = -3$, com resto de Lagrange.

(b) Calcule um valor aproximado de $\ln(2)$ usando o polinómio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $c = -3$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $0,25$.

Considere a função *raiz cúbica* $r(x) = \sqrt[3]{x}$.

(a) Escreva a fórmula de Taylor de segunda ordem da função dada no ponto $c = 1$.

(b) Mostre que o erro cometido ao aproximar $r(x)$ por $T_1^2 r(x)$ no intervalo $[1, \frac{3}{2}]$ é inferior a $0,01$.

Determine o raio e o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,2^{n+2}}(x-1)^n$.

Considere a função $f(x) = e^{-2x}$.

(a) Determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função f.

(b) Usando o polinómio da alínea anterior, obtenha um valor aproximado de e^{-1} e indique um majorante para o erro cometido na aproximação, com base no resto de Lagrange.

Considere a série de potências $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(4x-1)^n$.

Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.

Considere a série de potências $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n} x^n$.

Determine o domínio de convergência da série.