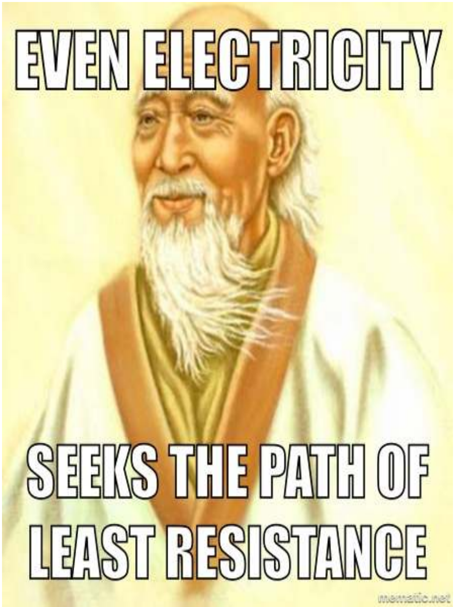


Sinais e Sistemas Electrónicos

Problemas resolvidos III

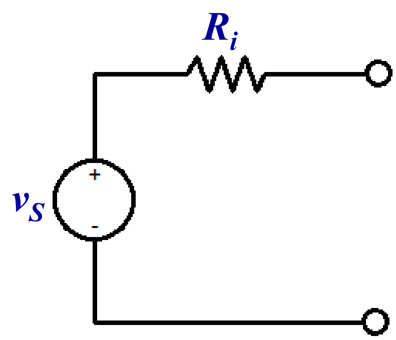
Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

1 – Efectuaram-se as seguintes medições de tensão aos terminais de uma fonte de alimentação DC de laboratório:

- ***75V*, com a fonte em aberto;**
- ***60V*, tendo-se ligado previamente uma resistência de *20Ω* entre os terminais da fonte.**

Com base nestes dados, calcule o equivalente de Thévenin da fonte de alimentação.

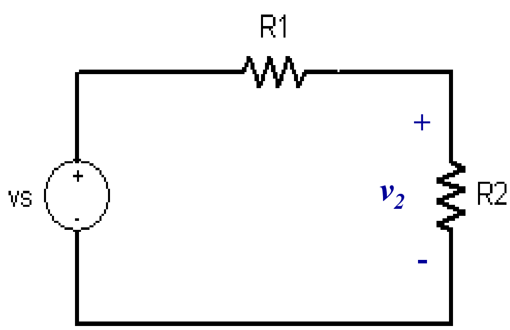
Como sabemos, uma fonte de tensão real pode representar-se pelo circuito…



… que tem, portanto, a mesma forma que o equivalente de Thévenin dessa fonte, com $v_T = v_S$ e $R_T = R_i$.

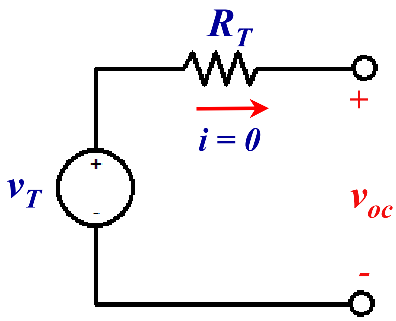
Antes de prosseguir, recordemos, mais um vez, o omnipresente e infinitamente recorrente, divisor de tensão ☺ …

Divisor de tensão



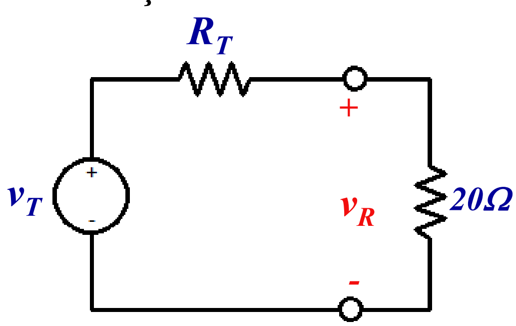
$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

Medição em circuito aberto: ***75V***



$$v_{oc} = 75V = v_T$$

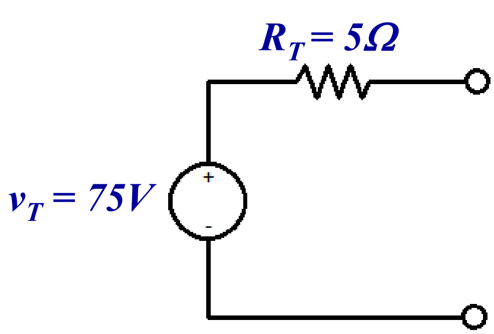
Medição com resistência de ***20Ω*****:** ***60V***



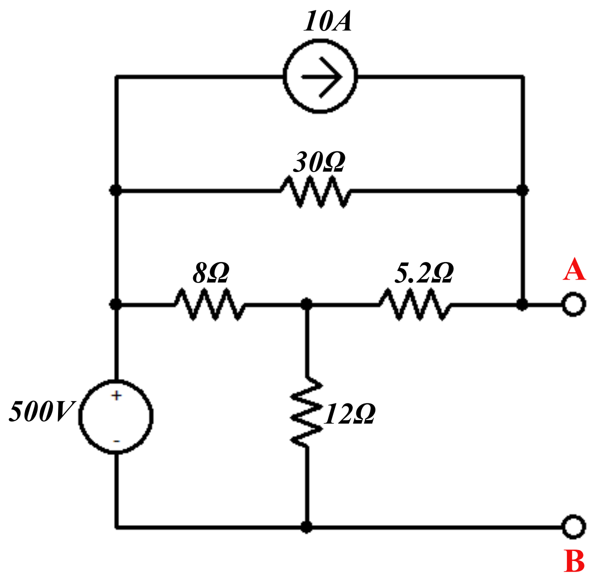
$$v_R = \frac{20}{R_T + 20} 75 = 60V$$

$$R_T = 5\Omega$$

O equivalente de Thévenin da fonte de alimentação é portanto.



2 – Calcule o equivalente de Thévenin entre os terminais A e B do circuito.

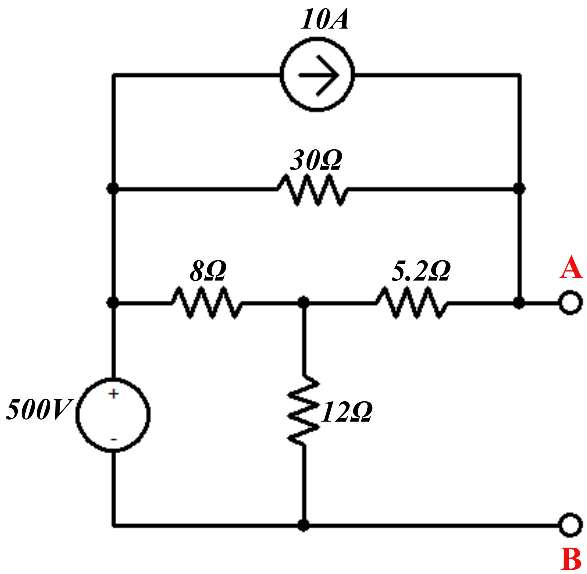


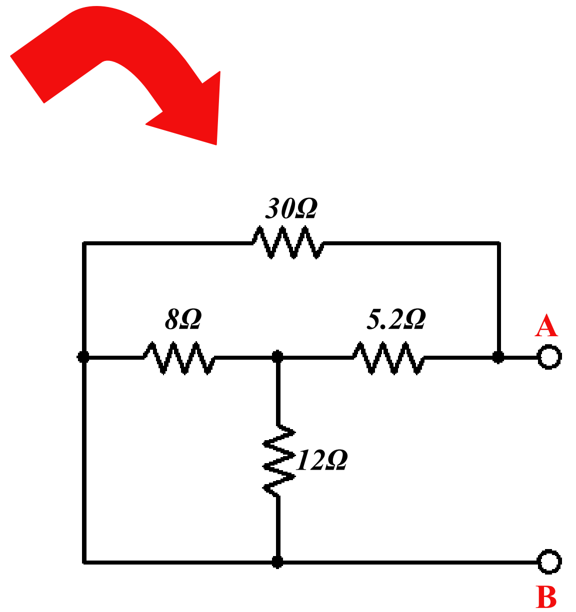
1º Passo: Comecemos por determinar a resistência de Thévenin, R_T

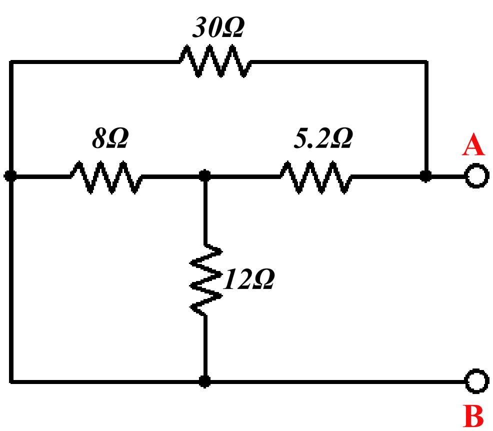
Segundo a definição, esta resistência é:

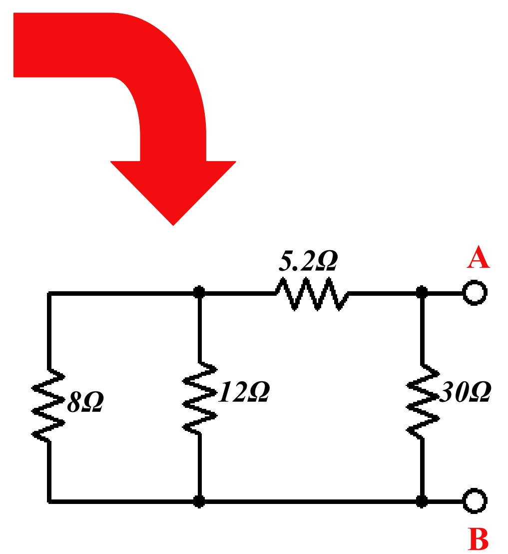
- ***a resistência equivalente vista aos terminais do circuito quando este é desativado, ou seja, quando todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).***

desactivando as fontes…









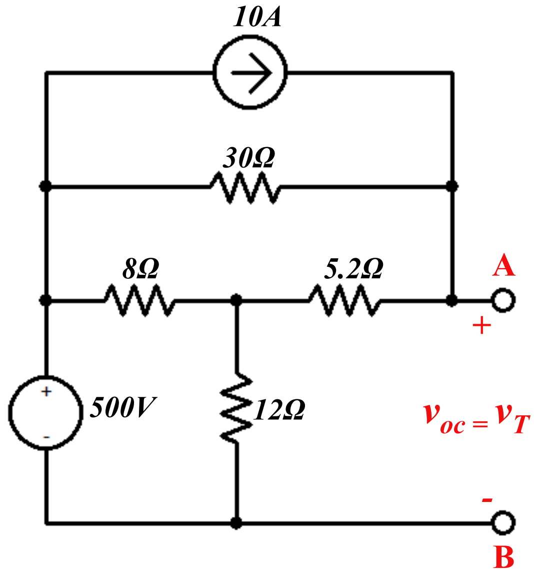
portanto

$$R_T = [(8 // 12) + 5.2] // 30$$

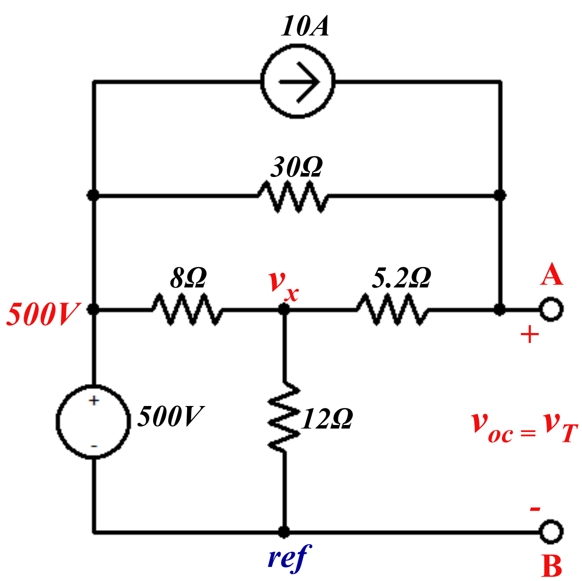
$$R_T = 7.5\Omega$$

2º Passo: calculo de ou v_T

v_T é igual à tensão em circuito aberto



Calculemos a tensão em circuito aberto



Usando análise nodal

Nó v_x:

$$\frac{500 - v_x}{8} = \frac{v_x}{12} + \frac{v_x - v_T}{5.2}$$

Nó A:

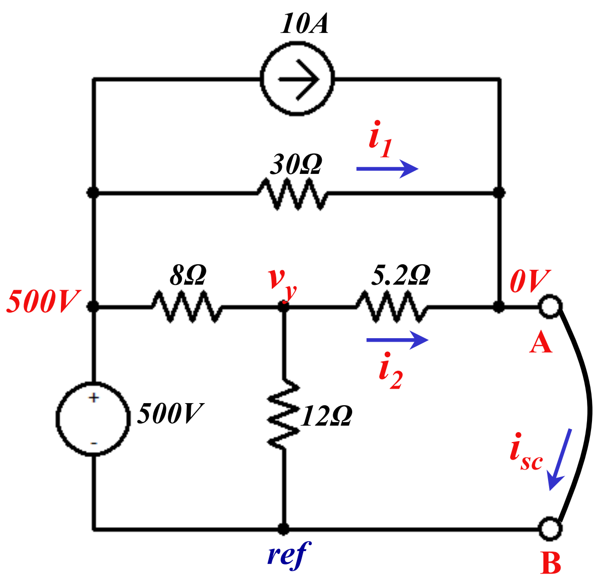
$$10 + \frac{500 - v_T}{30} + \frac{v_x - v_T}{5.2} = 0$$

Resolvendo…

$$v_x = 360V$$

$$v_T = 425V$$

Em alternativa podiamos determinar a corrente de curto-circuito pois seria mais fácil!…



$$i_{sc} = 10 + i_1 + i_2$$

$$= 10 + \frac{500}{30} + \frac{v_y}{5.2}$$

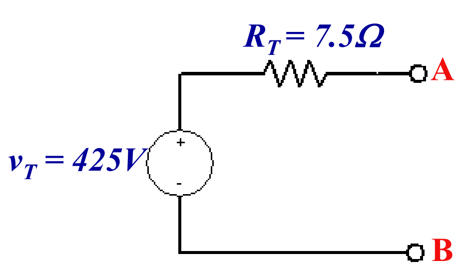
$$v_y = \frac{5.2//12}{8 + (5.2//12)} 500 = 156.1V$$

$$i_{sc} = 56.67A$$

Com a corrente de curto-circuito obtemos a tensão de Thévenin

$$v_T = R_T i_{sc}$$

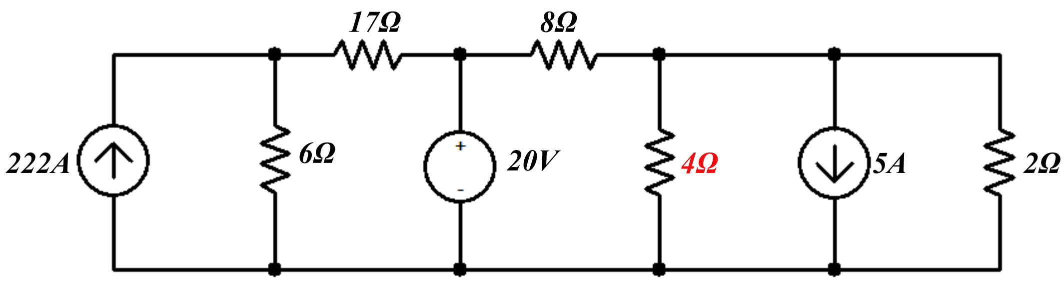
O equivalente de Thévenin é portanto



3 – Calcule:

a) A potência dissipada na resistência de 4Ω;

b) O novo valor que esta resistência deve ter de forma a que dissipe, neste circuito, a potência máxima.

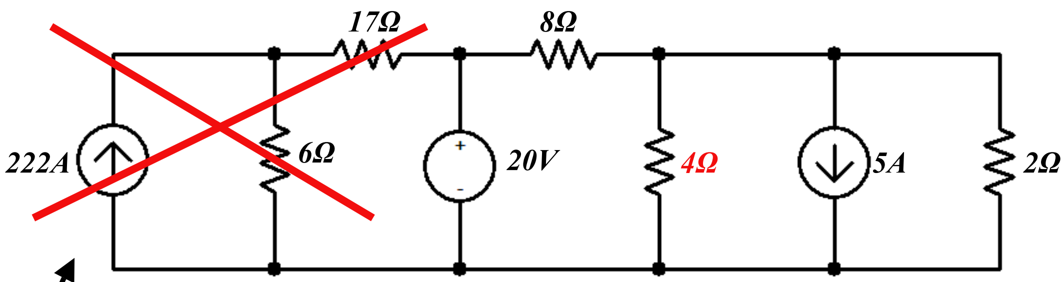


Dado que

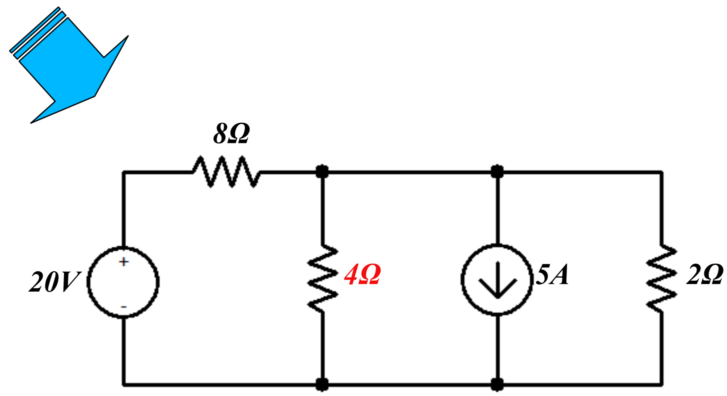
- **as duas alíneas do problema se referem à resistência de 4Ω;**
- **uma delas remete para o Teorema da Máxima Transferência de Potência…**

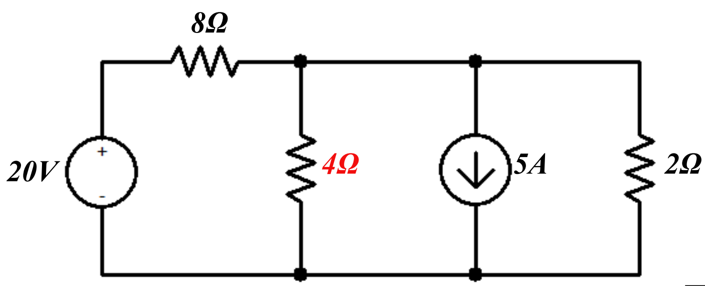
… a melhor estratégia passa por determinar primeiro o Equivalente de Thévenin visto por esta resistência.

Começemos por simplificar o circuito…

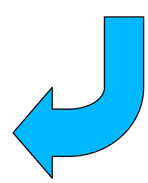


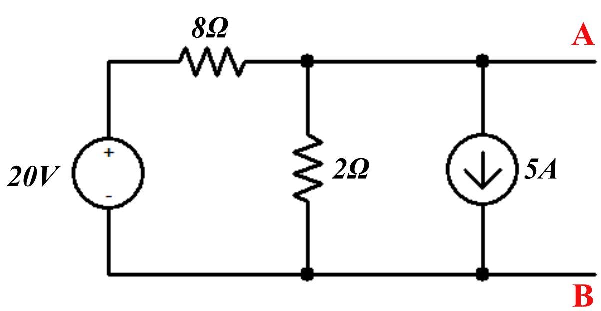
Elementos em paralelo com fontes de tensão não têm influência no resto circuito!





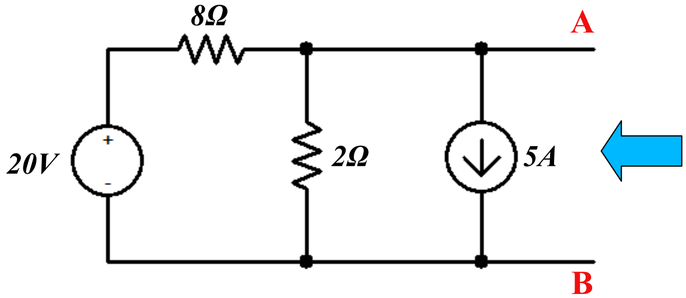
Este é o circuito *visto* pela resistência de 4Ω





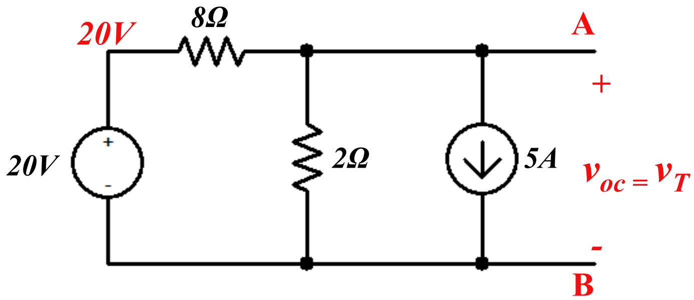
Vamos portanto calcular o Equivalente de Thévenin entre A e B

Resistência equivalente



$$R_T = 8 // 2 = 1.6\Omega$$

Tensão em circuito aberto



Nó *A*:

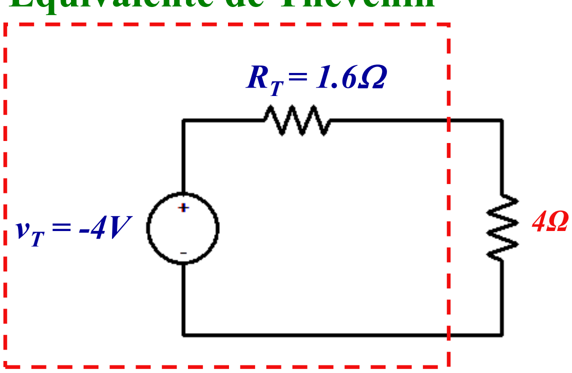
$$\frac{20 - v_T}{8} = \frac{v_T}{2} + 5$$

Resolvendo…

$$v_T = -4V$$

Com o Equivalente de Thévenin é agora muito fácil responder às questões:

Equivalente de Thévenin



a) A potência dissipada na resistência de 4Ω ?

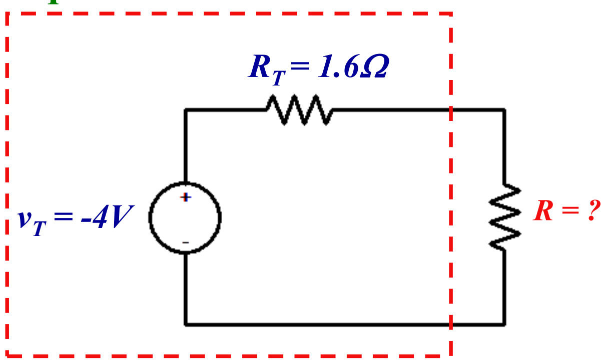
$$P = RI^2$$

$$= 4\left(\frac{-4}{4+1.6}\right)^2$$

$$= 2.04W$$

b) **Novo valor da resistência de forma a que dissipe a potência máxima?**

Equivalente de Thévenin



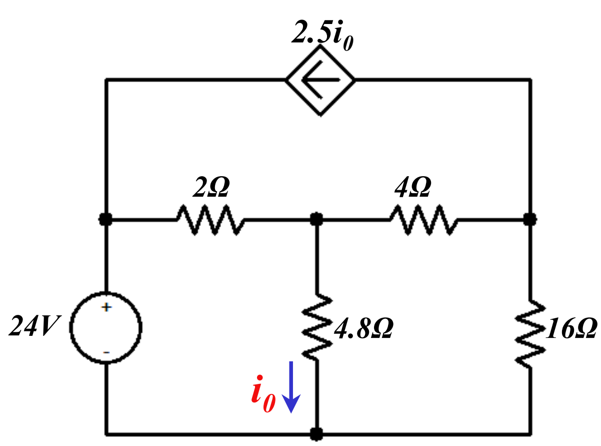
Teorema da máxima transferência de potência:
Uma fonte real de tensão com resistência interna R_S, fornece a potência máxima quando a resistência de carga tem o valor $R_L = R_S$.

Portanto, o novo valor da resistência deve ser *1.6Ω*.

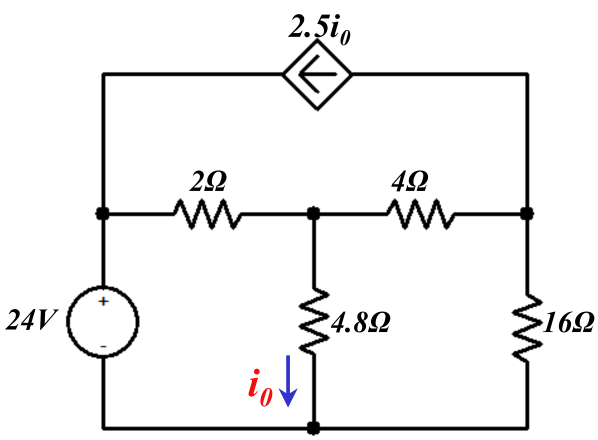
4 – Um amperímetro é usado para medir a corrente i_0, indicando o valor *2.1A*. Determine:

a) A resistência interna do amperímetro;

b) A percentagem de erro introduzida pelo amperímetro na medição.

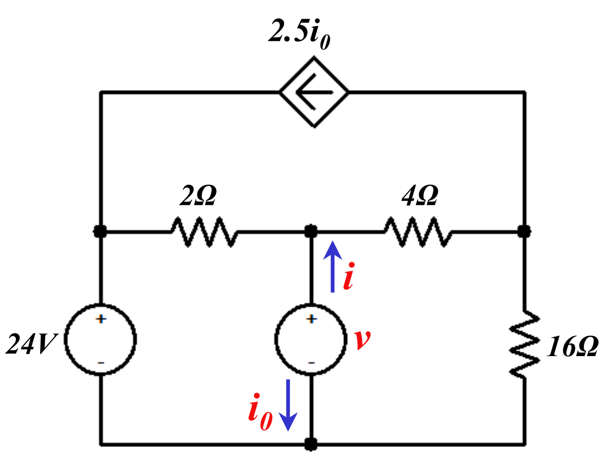


O problema diz respeito ao ramo onde está a resistência de *4.8Ω*, portanto o melhor é começarmos por determinar o Equivalente de Thévenin visto por esta resistência.



Dado que o circuito inclui uma fonte dependente, vamos usar aqui o Método Universal, substituindo a resistência de *4.8Ω* por uma fonte de tensão de teste, de valor *v*.

Aplicação do Método Universal



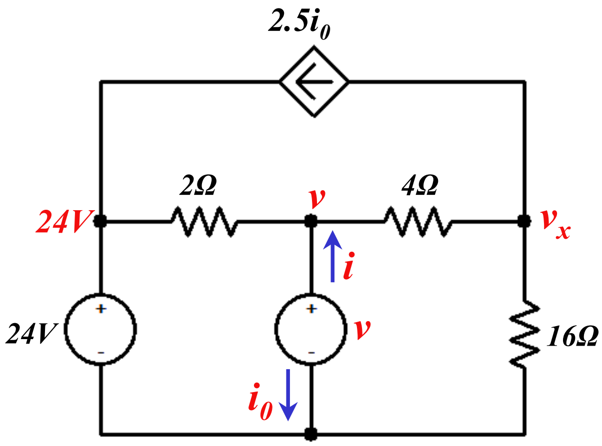
- **Vamos então analisar o circuito de forma a obter uma expressão de *v* em função de *i*, com a forma**

$$v = ai + b$$

- **Dos coeficientes *a* e *b* concluiremos**

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

Usando análise nodal…



Nó *v*: $$\frac{24-v}{2}+i=\frac{v-v_x}{4}$$

Nó v_x: $$\frac{v-v_x}{4}=2.5i_0+\frac{v_x}{16}$$

Sabendo que $i_0 = -i$ obtém-se

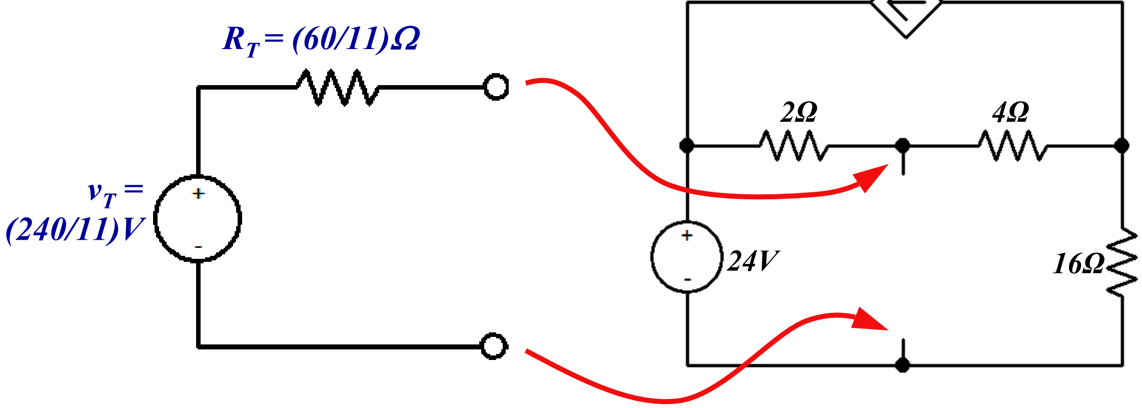
$$\begin{cases} v+10i=\frac{5}{4}v_x \\ -3v+4i=-v_x-48 \end{cases}$$

Eliminando v_x, obtemos…

$$v=\frac{60}{11}i+\frac{240}{11}$$

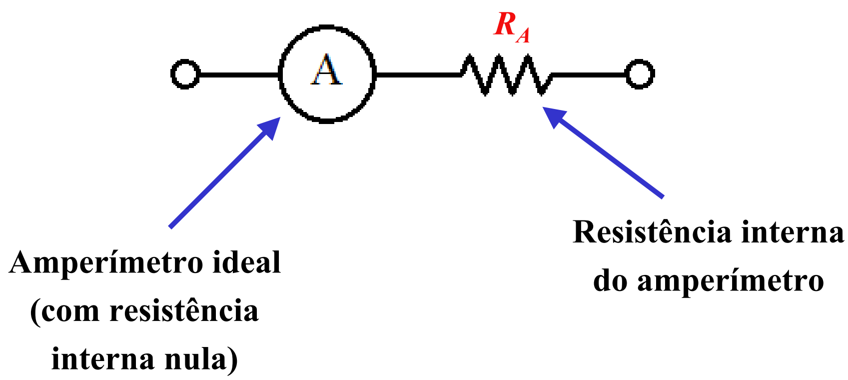
$$\boxed{\begin{array}{c} v=ai+b \\ R_T=a \quad \text{e} \quad v_T=b \end{array}}$$

Equivalente de Thévenin

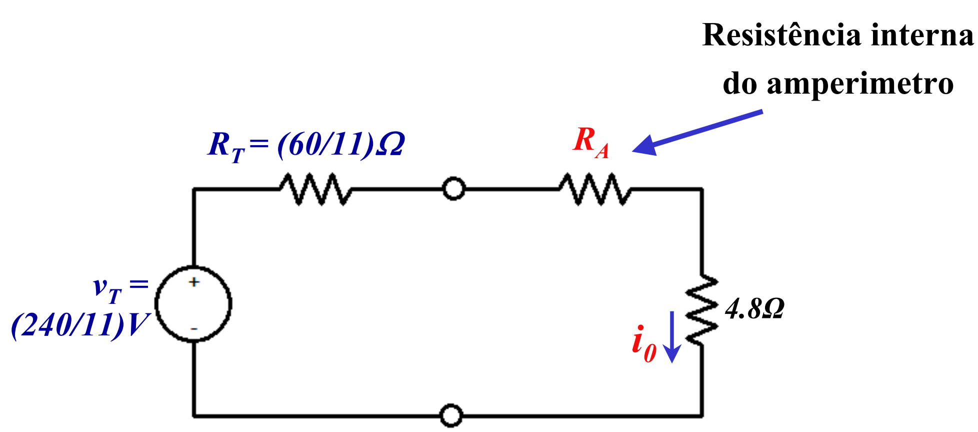


Modelo do amperímetro

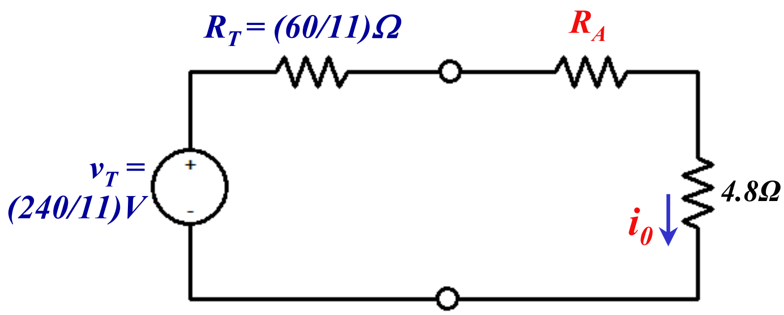
Podemos considerar que o amperímetro usado na medição é constituído por um amperímetro ideal em série com uma resistência.



Ligar o amperimetro em série com a resistência de 4.8Ω no circuito original, é o mesmo que ligar este conjunto ao Equivalente de Thévenin determinado:



a)

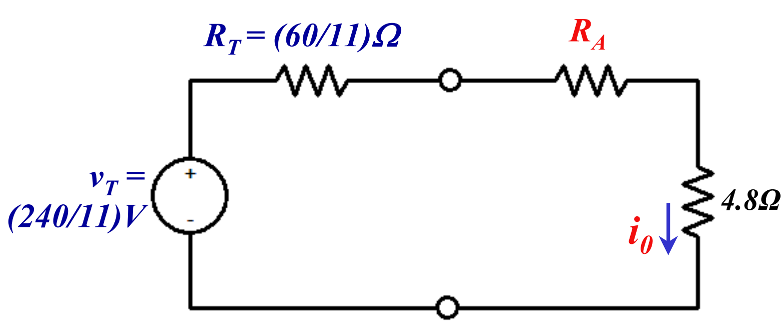


Nestas condições o valor medido de i_0 foi $2.1A$, portanto

$$\frac{240/11}{(60/11)+R_A+4.8}=2.1$$

$$R_A = 135m\Omega$$

b)

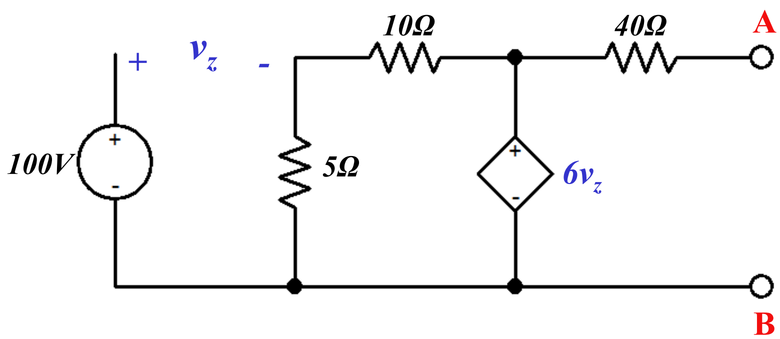


Sem o amperímetro presente no circuito o valor de i_0 seria

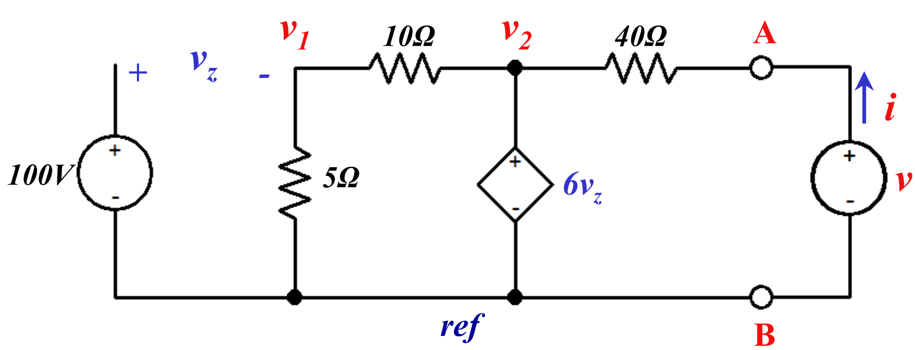
$$\frac{240/11}{(60/11)+4.8}=2.13A$$

O erro introduzido pelo amperímetro é portanto $\frac{2.1-2.13}{2.13}=-0.014 \quad \rightarrow -1.4\%$

5 – Determine o equivalente de Thévenin entre os terminais A e B do circuito.



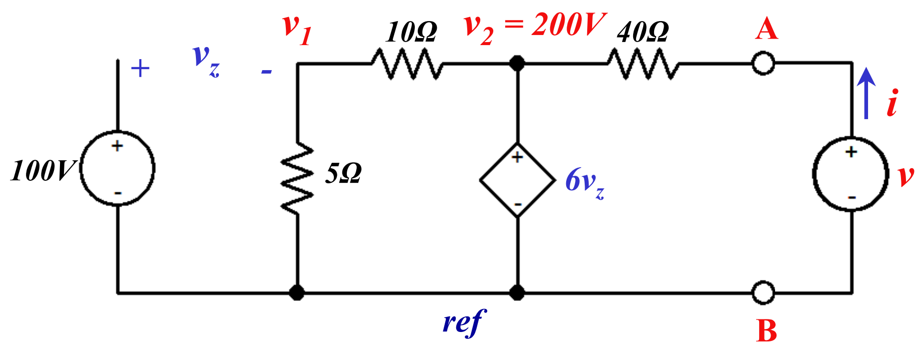
Como o circuito contém uma fonte dependente, vamos usar o Método Universal.



Por um lado: $$v_1 = \frac{5}{5+10} v_2 = \frac{v_2}{3}$$

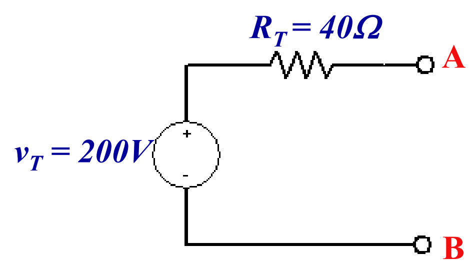
… e por outro: $$v_2 = 6v_z = 6(100 - v_1)$$

Conjugando as duas equações obtemos $v_2 = 200V$



$$i = \frac{v - 200}{40} \quad \Leftrightarrow v = 40i + 200$$

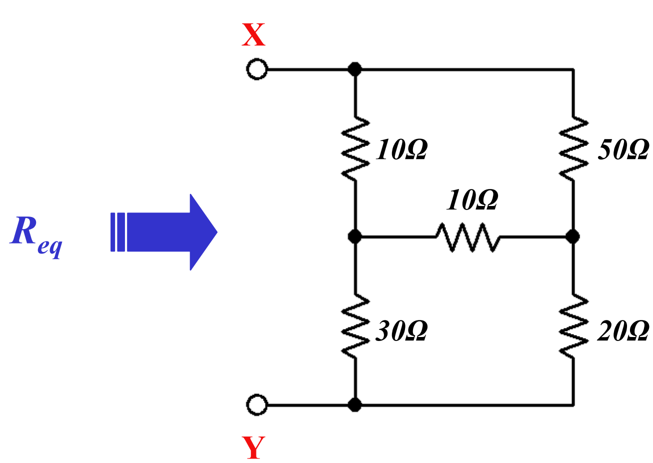
Equivalente de Thévenin



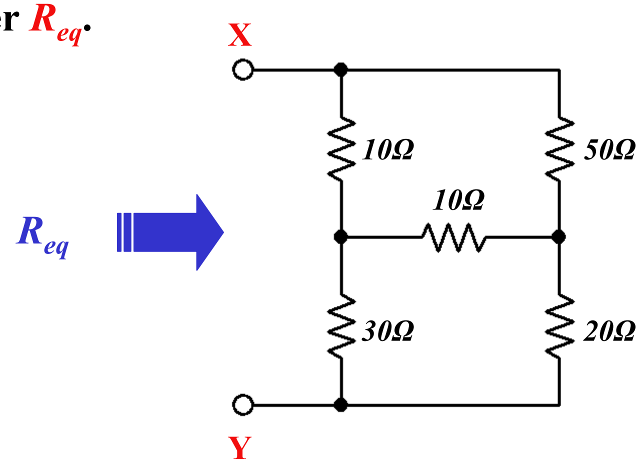
Portanto

$$v_T = 200V \quad R_T = 40\Omega$$

6 – Determine a resistência equivalente entre os terminais X e Y.



Note-se, antes de mais, que este circuito não permite associação de resistências em série ou em paralelo para obter R_{eq}.



Na prática, se tivéssemos que medir esta resistência, aplicaríamos uma tensão v entre os terminais X e Y, mediamos a corrente i e, finalmente, calcularíamos R_{eq} fazendo $R_{eq} = v/i$.

É isso mesmo que podemos fazer!

Usando análise nodal…

Nó v_1:

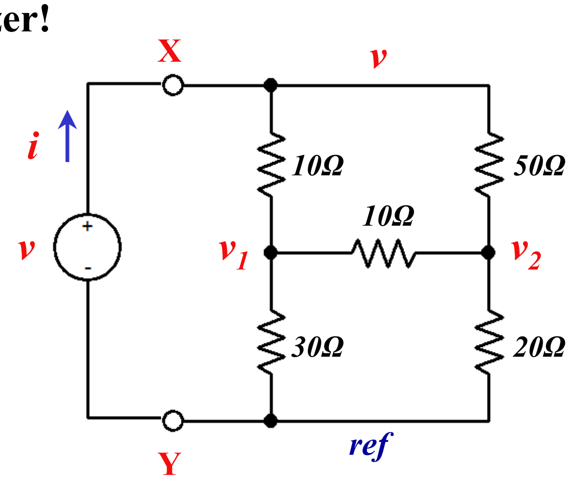
$$\frac{v_1}{30} + \frac{v_1 - v_2}{10} + \frac{v_1 - v}{10} = 0$$

Nó v_2:

$$\frac{v_2}{20} + \frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{v_2 - v}{50} = 0$$

Usando KCL no nó inferior…

$$\frac{v_1}{30} + \frac{v_2}{20} = i$$



Eliminando as incógnitas v_1 e v_2 obtemos…

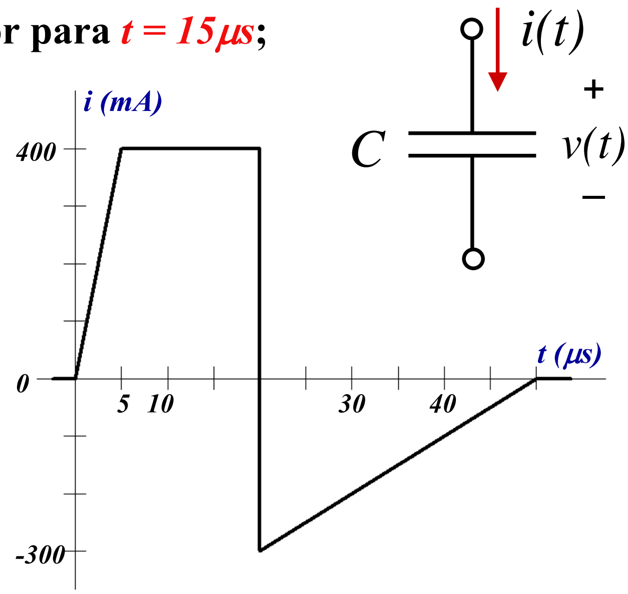
$$\frac{v}{i} = 21.7\Omega = R_{eq}$$

7 – Um condensador de $0.25\mu F$ é percorrido pela corrente i do gráfico abaixo. Sabendo que $v(0) = 0$, calcule

a) A carga no condensador para $t = 15\mu s$;

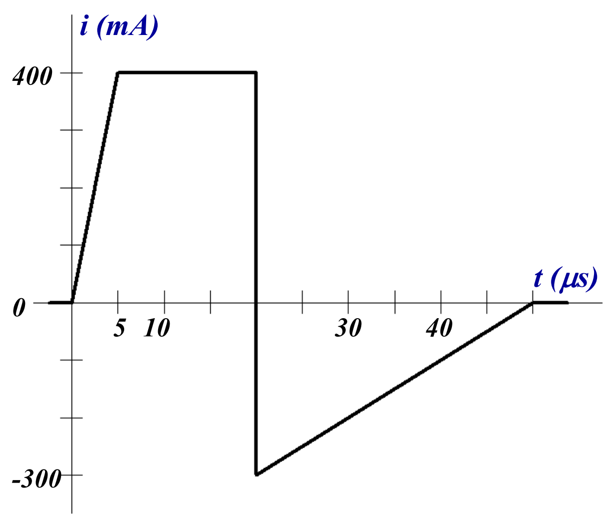
b) A tensão no condensador para $t = 30\mu s$;

c) A energia armazenada no condensador para $t > 50\mu s$.



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2022/2023

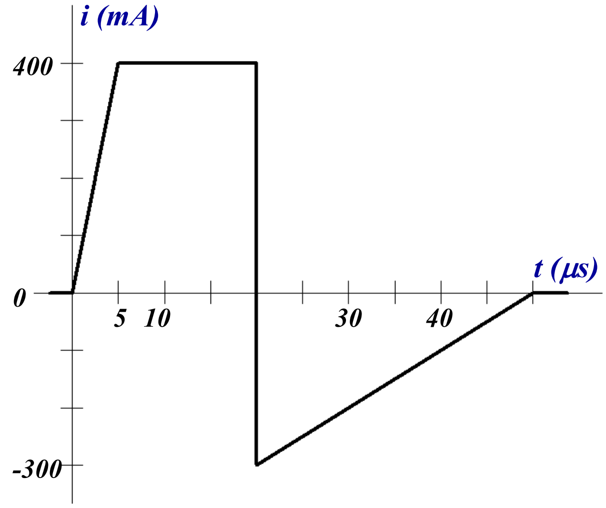
- **A partir do gráfico dado poderíamos começar por exprimir algebricamente $i(t)$, integrando depois as equações correspondentes a cada intervalo de tempo, de forma a responder às questões pedidas.**



- **… mas uma maneira mais expedita de chegar lá é calculando áreas.**

Vejamos:

a) $q(t = 15\mu s) = ?$



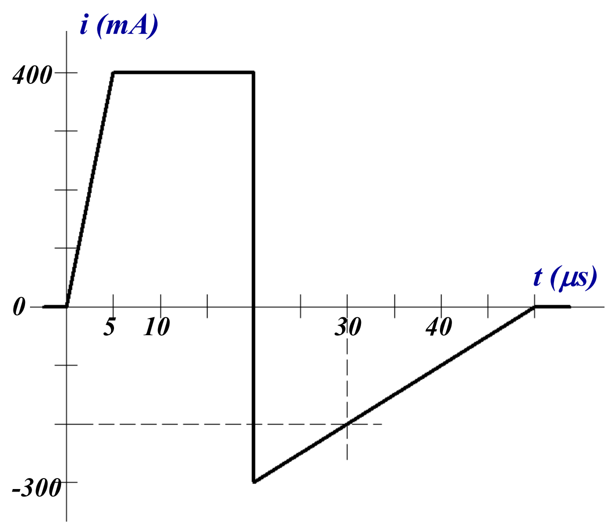
Num qualquer instante t_1 a carga no condensador pode ser calculada por

$$q(t_1) = \int_0^{t_1} i(t)dt + q(0)$$

Como $v(0) = 0$, então $q(0) = 0$ e a carga pode ser obtida calculando a área:

$$Área_{[0,15]} = \frac{5\text{x}400}{2} + (15-5)\text{x}400 = 5000nC = 5\mu C$$

b) $v(t = 30\mu s) = ?$



Num qualquer instante t_1 a tensão no condensador é dada por

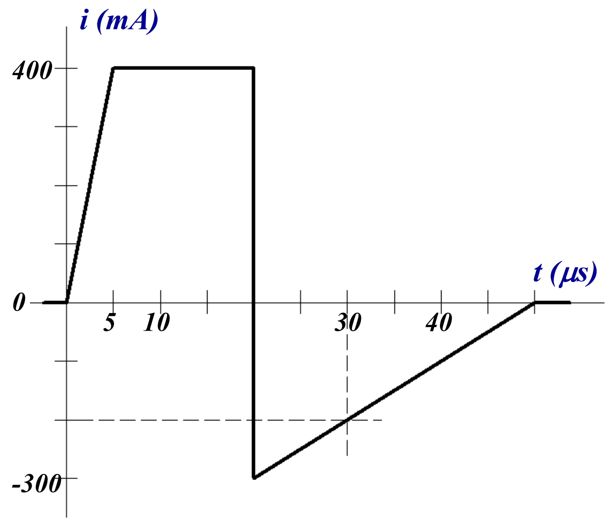
$$v(t_1) = \frac{1}{C}\int_0^{t_1} i(t)dt + v(0)$$

Calculamos então a *área de 0 a 30μs* :

$$Área_{[0,30]} = Área_{[0,15]} + (20-15)\text{x}400 - \left[(30-20)\text{x}200 + \frac{(30-20)\text{x}100}{2}\right]$$

$$Área_{[0,30]} = 4.5\mu C \quad \rightarrow \quad v(30\mu s) = \frac{4.5\mu C}{0.25\mu F} = 18V$$

c) $E_C(t=50\mu s)=?$



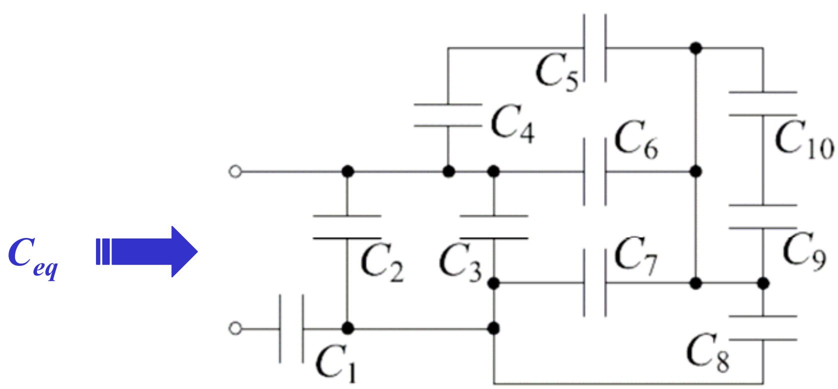
Calculamos *v(50μs)* pela área total

$$Área_{[0,50]} = Área_{[0,30]} - \frac{(50-30)\text{x}200}{2} = 2.5\mu C$$

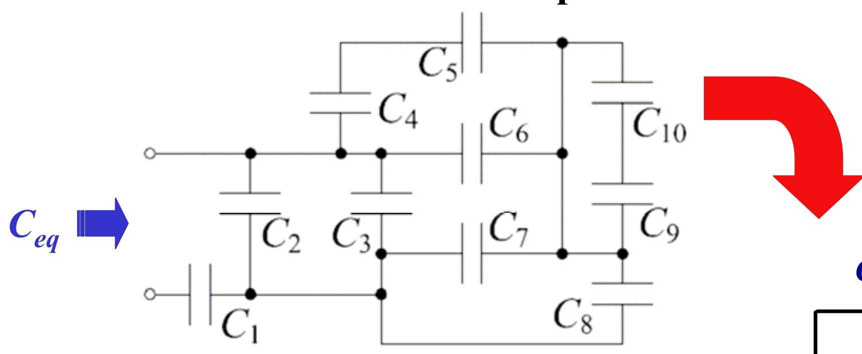
$$v(50\mu s) = \frac{2.5\mu C}{0.25\mu F} = 10V$$

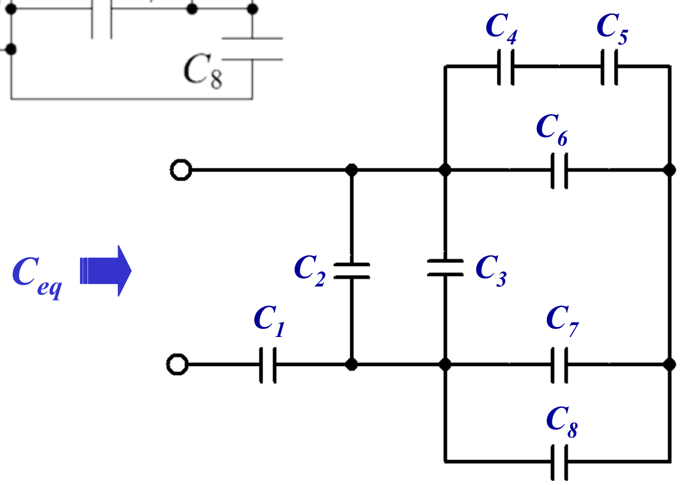
$$\rightarrow \quad E_C(50\mu s) = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}\text{x}0.25\text{x}10^2 = 12.5\mu J$$

8 – Determine o valor da capacidade equivalente no circuito abaixo. Todos os condensadores são de 1μF.

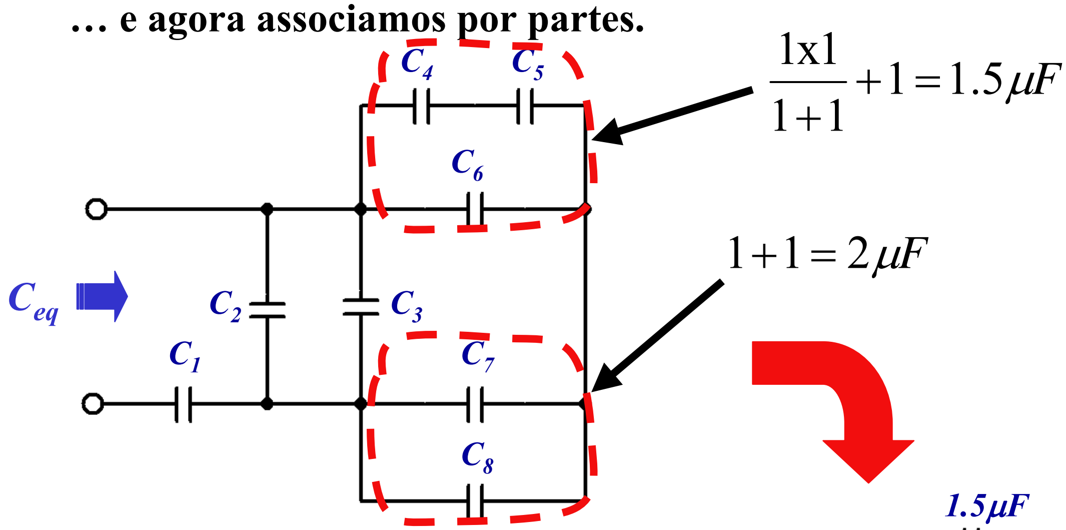


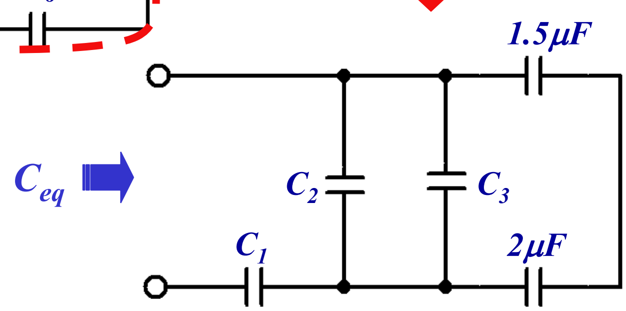
Como sempre, começamos por redesenhar o circuito de maneira a evidenciar séries e paralelos…

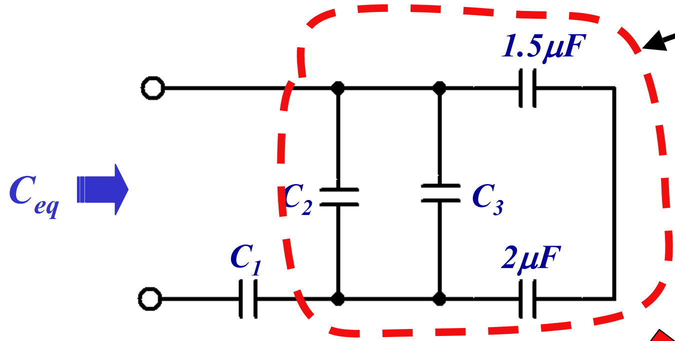




… e agora associamos por partes.

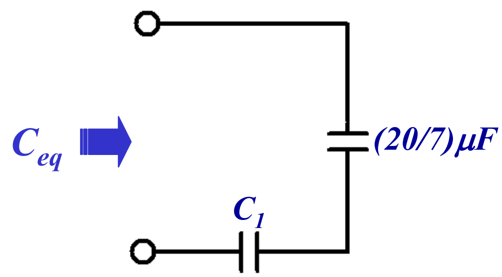






$$\frac{1.5x2}{1.5+2}+1+1=\frac{20}{7}\mu F$$

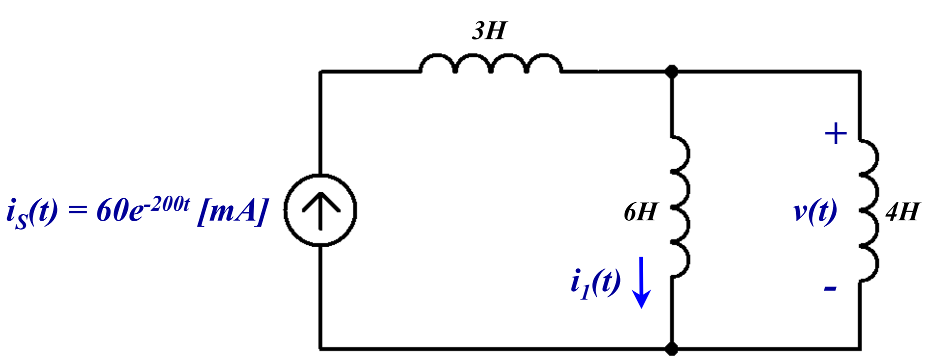
$$C_{eq}=\frac{(20/7)x1}{(20/7)+1}=\frac{20}{27}\mu F$$



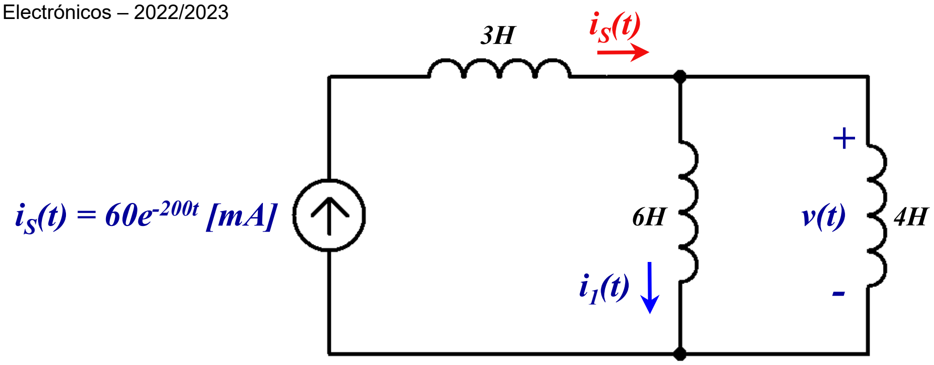
9 – No circuito abaixo considere $i_1(0) = 20mA$. Calcule

a) A tensão $v(t)$;

b) A energia armazenada na bobina de $6H$ em $t = 5ms$.



a)



$$v(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_S(t) \; = 2.4 \frac{d}{dt}\left(60e^{-200t}\right)$$

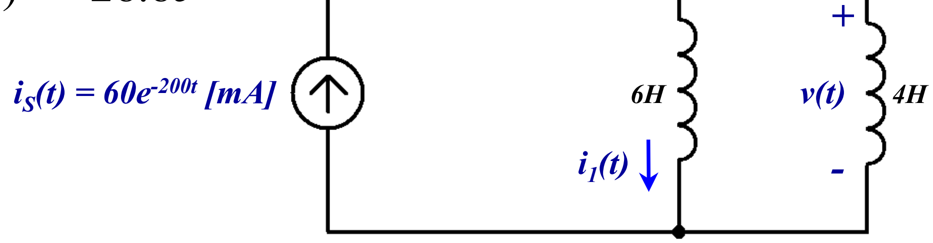
$$L_1 = \frac{6\text{x}4}{6+4} = 2.4H$$

$$= 2.4\text{x}(-200)\text{x}60e^{-200t}$$

$$v(t) = -28.8e^{-200t}[V] \quad t \geq 0$$

b)

$$v(t) = -28.8e^{-200t}$$



$$i_1(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt + i_1(0) \; = \frac{1}{6}\int_0^t -28.8e^{-200t}dt + 0.02$$

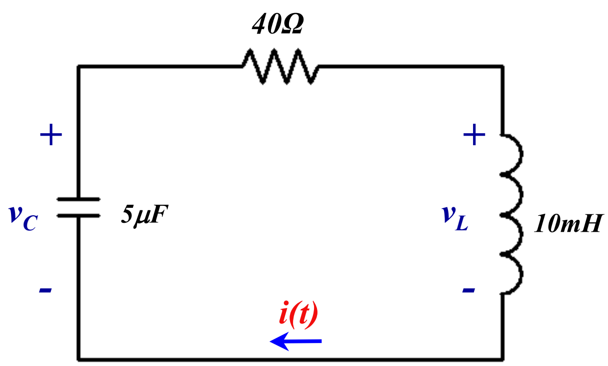
$$= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{200}\right)(-28.8)e^{-200t}\Big|_0^t + 0.02 \; = 24e^{-200t} - 4 \;\; [mA]$$

$$i_1(5ms) = 4.83mA \qquad\qquad W = \frac{1}{2}Li_1^{\,2} = 70\mu J$$

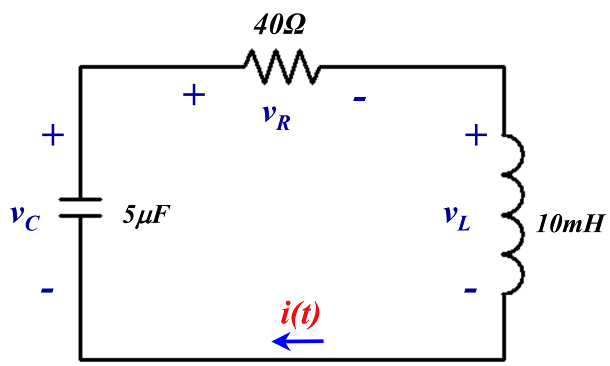
10 – Sabendo que, no circuito abaixo, *i(t)* é dada por

$$i(t) = 5e^{-2000t}\cos 4000t \quad [A] \qquad t \geq 0$$

Calcule $v_L(0)$ e $v_C(0)$.



Começamos por calcular a tensão na bobina

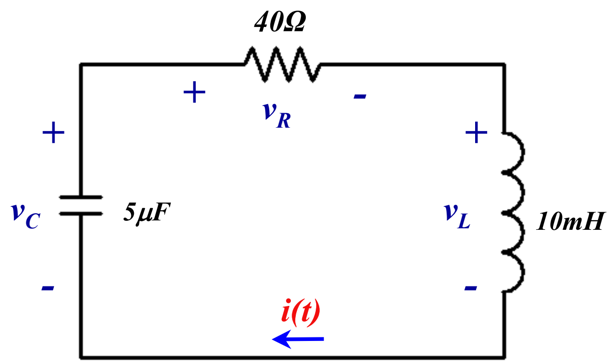


$$v_L = L\frac{d}{dt}i(t)$$

$$= 0.01\frac{d}{dt}\left(5e^{-2000t}\cos 4000t\right)$$

$$= 0.01\left[5(-2000)e^{-2000t}\cos 4000t + 5e^{-2000t}(-4000\sin 4000t)\right]$$

$$v_L = -100e^{-2000t}(\cos 4000t + 2\sin 4000t) \quad [V]$$



Calculamos agora os valores para *t = 0*

$$v_L = -100e^{-2000t}(\cos 4000t + 2\sin 4000t)$$

$$v_L(0) = -100V$$

Aplicando KVL:

$$-v_C(0) + v_R(0) + v_L(0) = 0$$

$$v_C(0) = 40i(0) - 100$$

$$v_C(0) = 40\text{x}5 - 100 = 100V$$

$$i(t) = 5e^{-2000t}\cos 4000t$$
$$i(0) = 5A$$