Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 1 **2017/18**

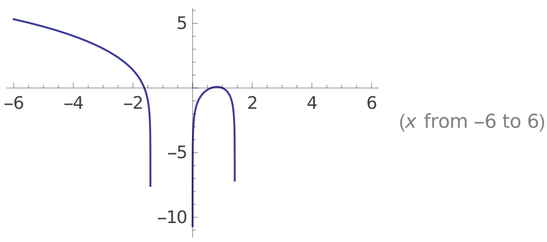
exame final Duração: 3h00

- **Este teste continua no verso e termina com a palavra FIM. No verso encontras também a cotação e formulários.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

1.ª parte

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \ln((2-x^2)x)$.

   Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



   Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

   (a) Determina o domínio D_f de definição de f.

   (b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $\ln(x^3)$; (b) $\dfrac{2x+3}{4x^4+x^2}$; (c) $\dfrac{2}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\,)^2}$.

   <u>Sugestão:</u> Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza uma mudança de variável.

3. A função sinh é invertível e a sua inversa designa-se por argumento seno hiperbólico e denota-se por argsinh. Usa a regra da derivação da função inversa (começa por verificar que podes usá-la neste caso) para determinares a derivada de argsinh à custa da derivada de sinh. Simplifica o resultado o mais que for possível.

2.ª parte

4. Considera a região $\mathcal{A}$ do plano delimitada pelos gráficos das funções $y = 1 + \sin x$, $y = 1 - \frac{x}{\pi}$ e pela reta de equação $x = \pi$. Esboça $\mathcal{A}$ e calcula a sua área (não precisas de justificar o esboço analiticamente, mas convém seres rigoroso e explícito o suficiente para se perceber como determinas a área a partir do esboço que fizeres).

5. Considera os seguintes integrais:

$$\text{(i)} \int_1^2 \frac{2x\arctan(x^2)}{1+x^4}\,dx; \qquad \text{(ii)} \int_1^3 \frac{1}{x\ln\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx.$$

   (a) Diz, para cada um deles e justificando devidamente, se estamos em presença de um integral de Riemann ou de um integral impróprio (e de que espécie).

   (b) Para cada um dos integrais acima, faz o seguinte: no caso de ser de Riemann, calcula-o; no caso de ser impróprio, determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula-o também.

6. (a) Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!}; \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n^2-1}.$$

   (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{10^n}(10+(-2)^n).$$

7. Considera a região do plano delimitada pela curva de equação $y=\sqrt{x-1}$ e pelas retas de equação $x=0$, $y=1$ e $y=5$. Descobre como calcular a área desta região à custa de integração em ordem a y (em vez de ser integração em ordem a x) e efetua o cálculo da área dessa maneira. Não te esqueças de justificar o teu raciocínio!

   Nota: Se não conseguires calcular como se pede, poderás calcular da maneira habitual, mas nesse caso a cotação máxima desta questão será 1 valor.

FIM

Cotação:

1. 3; 2. 4,5; 3. 2,5; 4. 2; 5. 2,5; 6. 3; 7. 2,5.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ \ m\in\mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ \ n\in\mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\ln_a\lvert u(x)\rvert,\ \ a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ \ a\in\mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x)\ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\text{cotan}\,u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\,\text{cotan}\,u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\text{arccot}\,u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u=\frac{1}{\cos u}$	$\csc u=\frac{1}{\sin u}$
$\cot u=\frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u=\frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u=\frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1+\tan^2 u=\sec^2 u$	$1+\text{cotan}^2\,u=\csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u)=1-u^2$	$\sin^2(\arccos u)=1-u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u=\frac{e^u-e^{-u}}{2}$	$\cosh u=\frac{e^u+e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$	