3. Campos Eléctrico e Magnético

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.1 Corrente eléctrica

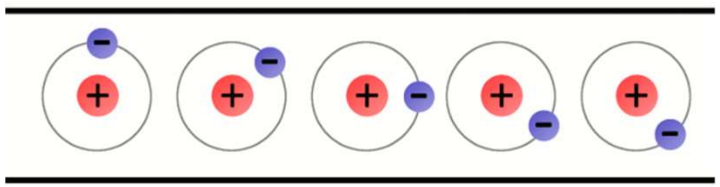
Cargas em movimento

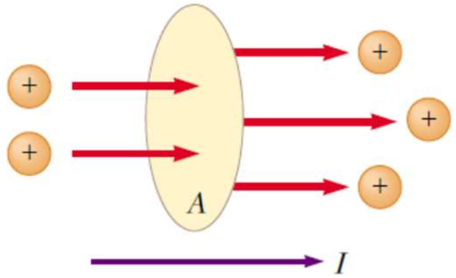
Modelo clássico da condução eléctrica –- Modelo de Drude (1900)

Corrente eléctrica: taxa de fluxo de carga através de uma superfície

$$I_{méd} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

unidade S.I. Ampere $(1A = 1C/1s)$





Paul Karl Ludwig Drude
(1863 - 1906)

Os portadores de carga podem ser positivos our negativos ou ambos → a corrente é o resultado do deslocamento dos dois tipos de carga

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.1 Corrente eléctrica

- Nos feixes de protões o sentido é o do movimento das cargas
- Em alguns casos - condução em gases our em alguns líquidos – a corrente é o resultado do movimento simultâneo de cargas positivas e negativas – condutores iónicos
- As cargas em movimento (positivas our negativas) chamam-se portadores de carga
- Se o fluxo de cargas variar no tempo definimos a intensidade de corrente instantânea

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

cujo sentido convencional é definido pelo movimento dos portadores positivos (sentido do campo eléctrico)

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.1 Corrente eléctrica

Modelo microscópico da condução eléctrica num metal

- Consideramos um condutor cilíndrico com área da secção recta A
- O volume de uma porção de condutor de comprimento Δx é $\Delta x A$
- O número de portadores de carga por unidade volume é n (portadores por m^3) – densidade de portadores de carga
- o número de portadores presentes numa porção do condutor de comprimento Δx é

$$N = n\, A\, \Delta x$$

- Portanto, a carga móvel contida no cilindro de comprimento Δx é

$$\Delta Q = Nq = (n\, A\, \Delta x)\, q$$

onde q é a carga individual de cada portador

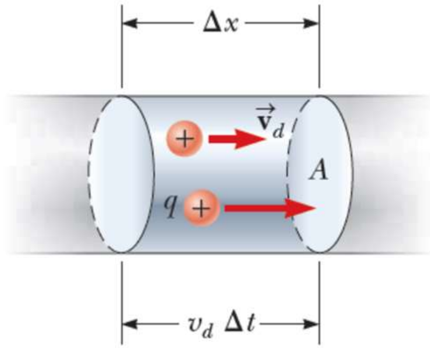


Figure 27.2 A segment of a uniform conductor of cross-sectional area A.

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.1 Corrente eléctrica

Modelo microscópico da condução eléctrica num metal

- Se ligarmos uma bateria às extremidades do condutor, criamos um campo eléctrico no interior do condutor paralelo ao eixo do cilindro $\Longrightarrow$ deslocamento das cargas também é paralelo ao eixo do cilindro
- Se for v_d a velocidade dos portadores então o deslocamento é

$$\Delta x = v_d \, \Delta t$$

onde Δt é o tempo necessário para que os portadores se desloquem ao longo de Δx

- Então fica $\Delta Q = (nA\Delta x)q = (nAv_d\Delta t)q$
- se Δt é o tempo necessário para que a carga contida em Δx passe na área A de uma extremidade do cilindro podemos escrever

$$I_{méd} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = (nAv_d)q$$

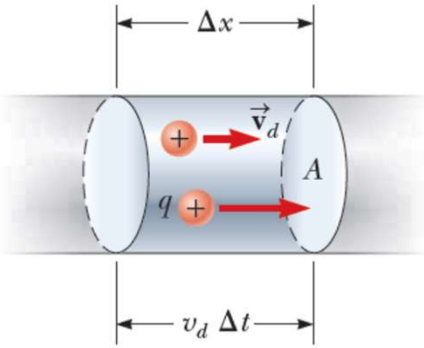


Figure 27.2 A segment of a uniform conductor of cross-sectional area A.

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.1 Corrente eléctrica

Significado de v_d - velocidade de arrastamento

- num metal os electrões têm um movimento de agitação térmica aleatório devido às colisões com os átomos da rede

$$\rightarrow \ \Delta x_{méd} = 0 \ \rightarrow \ v_d = 0$$

(analogia com as moléculas de um gás em equilíbrio)

- Aplicamos uma d.d.p. às extremidades do condutor

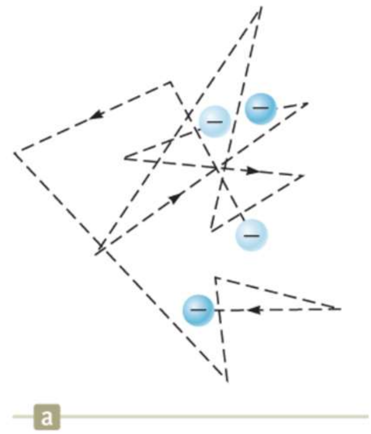
$\Longrightarrow$ estabelecemos um campo eléctrico no condutor

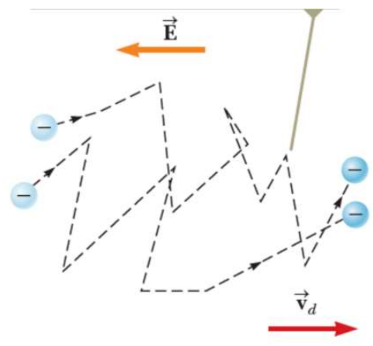
$\Longrightarrow$ este campo cria uma força sobre os portadores

$\Longrightarrow$ estabelemos um corrente eléctrica

$\Longrightarrow$ os electrões não se movem em linha recta, devido às colisões com a rede cristalina

$\Longrightarrow$ a energia transferida nestas colisões causa um aumento da temperatura do condutor



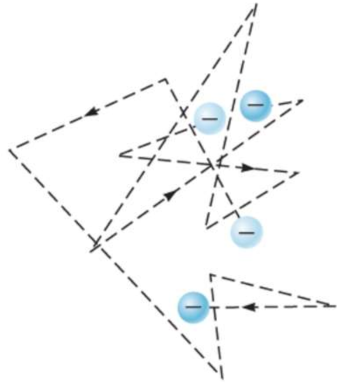


3. Campos Eléctrico e Magnético

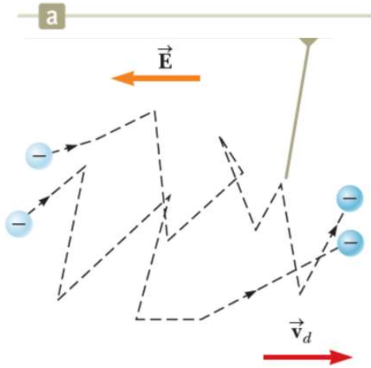
5.1 Corrente eléctrica

Modelo de Drude

$$I_{méd} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = (nAv_d)q$$



$\Longrightarrow$ apesar das colisões os electrões movem-se lentamente ao longo do condutor no sentido oposto ao campo aplicado com v_d

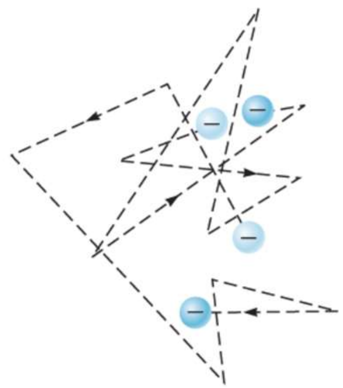


$\Longrightarrow$ o trabalho realizado pelo campo sobre os electrões é maior do que as perdas de energia nas colisões o que resulta numa corrente estacionária

$\Longrightarrow$ Analogia com as forças de viscosidade (atrito interno) em fluídos por ex.: velocidade limite dos paraquedistas

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.1 Corrente eléctrica



Exemplo: calcular v_d dos electrões num fio de cobre (Cu) que transporta uma corrente de $10\ \mathrm{A}$.

área da secção recta: $3{,}31 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$

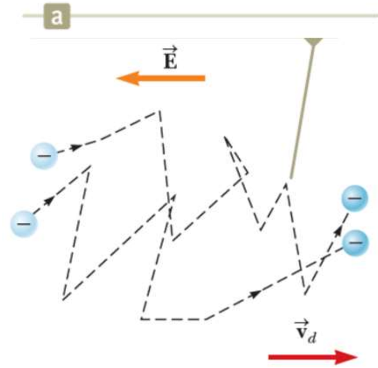
densidade Cu: $\rho = 8{,}92 \times 10^{3}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

Massa molar: $M_{Cu} = 63{,}5\ \mathrm{g/mol}$

carga elementar: $e = 1{,}60 \times 10^{-1}\ \ \mathrm{C}$

Resolução:

Precisamos de calcular n (densidade de portadores livres de carga), assumindo que cada átomo de Cu contribui com um electrão livre para a corrente



$$\begin{cases} n = \dfrac{Número\ Avogadro}{volume\ 1\ mole} = \dfrac{N_{Av}}{V_{mol}}\ (electrões/m^3) \\ V_{mol} = \dfrac{M_{Cu}}{\rho} = \dfrac{63{,}5 \times 10^{-3}}{8{,}92 \times 10^{3}} = 7{,}12 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 \end{cases}$$

A densidade de portadores livres é $n = \dfrac{6{,}02 \times 10^{23}}{7{,}12 \times 10^{-6}} = 8{,}46 \times 10^{28}\ \ \mathrm{electrões/m^3}$

$$I = (nAv_d)e\ \rightarrow\ v_d = \frac{I}{nAe} = \frac{10}{8{,}46 \times 10^{28} \times 3{,}31 \times 10^{-6} \times 1{,}60 \times 10^{-19}} = 2{,}23 \times 10^{-4}\ \mathrm{m/s}$$

tempo para percorrer 1 m : $t = \dfrac{1}{2{,}23 \times 10^{-4}} = 4484\ s = 1\mathrm{h}\ 15\mathrm{min}$

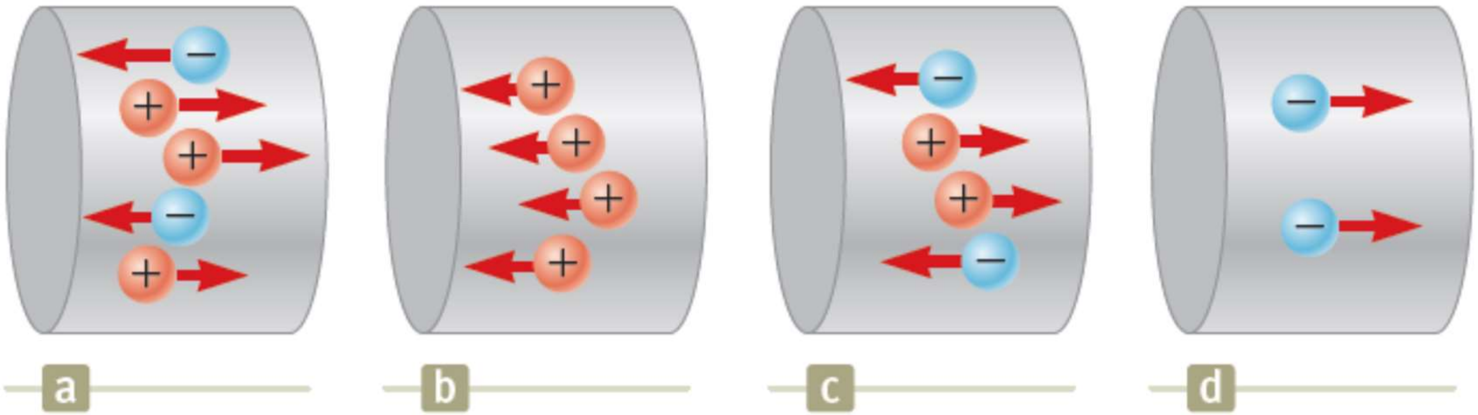
3. Campos Eléctrico e Magnético

5.1 Corrente eléctrica

Cargas em movimento

Modelo clássico da condução eléctrica – Modelo de Drude (1900)

Nos exemplos seguintes, ordenar as intensidades de corrente da mais fraca à mais intensa



Resposta

d), c)=b), a)

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

Definimos densidade de corrente

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d \quad (\mathrm{A/m^2})$$

Em 1827 Ohm elaborou o conceito de resistência eléctrica e descobriu que em muitos materiais, incluíndo a maior parte dos metais, existe uma relação entre densidade de corrente e campo eléctrico

Georg Simon Ohm
(1789 – 1854)

$$J = \sigma E$$

onde σ é a condutividade. Esta é a lei de Ohm (diferencial):

> Em muitos materiais, incluíndo a maior parte dos metais, a razão entre a densidade de corrente e o campo eléctrico é a constante σ que é independente do campo que produz a corrente

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

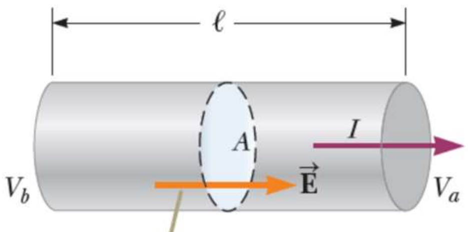
A forma mais conhecida da lei de Ohm é a relação entre corrente e tensão num elemento a que chamamos resistência

$$V = RI$$

e classificamos os materiais relativamente ao transporte de corrente

- materiais ohmicos (lineares em V-I)
- materiais não-ohmicos (não lineares em V-I)

Mas o que é a resistência eléctrica?



A potential difference $\Delta V = V_b - V_a$ maintained across the conductor sets up an electric field $\vec{E}$, and this field produces a current I that is proportional to the potential difference.

Consideramos um condutor cilíndrico de área secção uniforme A e comprimento l. Aplicamos uma d.d.p. $V_{ba} = V_b - V_a$ nos terminais do conductor criando um campo elétrico e uma corrente no interior do conductor

Se o campo é uniforme

$$V = El$$

e a densidade de corrente é

$$J = \sigma E = \sigma \frac{V}{l}$$

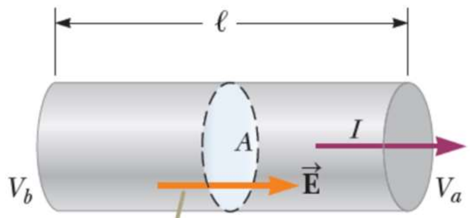
5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

Mas $J = \frac{I}{A}$ e resulta

$$J = \frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{l} \quad \rightarrow \quad V = \left(\frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}\right) I \quad \rightarrow \quad V = RI$$

A grandeza $\boxed{R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}}$

chama-se resistência eléctrica do condutor



A potential difference $\Delta V = V_b - V_a$ maintained across the conductor sets up an electric field $\vec{E}$, and this field produces a current I that is proportional to the potential difference.

Unidades S.I.

$$V = RI \quad \rightarrow [R] = \frac{[V]}{[I]} = \frac{Volt}{Ampere} = Ohm \; - \; \Omega$$

Se uma diferença de potencial de 1 V cria uma corrente de 1 A então a resistência é de 1 Ω.

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

É muito frequente o uso do inverso da condutividade para caracterizar as propriedades eléctricas dos materiais

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}}$$

e chama-se resistividade. A resistência pode escrever-se

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Resistência e resistividade

- A resistividade é uma propriedade de uma susbstância e depende da temperatura
- A resistência é uma propriedade de um objecto

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

Unidades S.I.

- Resistividade

$$[R] = \left[\rho \frac{l}{A}\right] \rightarrow [\rho] = \left[\frac{AR}{l}\right] = \frac{m^2\Omega}{m} = \Omega \cdot m$$ (Ohm · metro)

- Conductividade

$$[J] = [\sigma E] \rightarrow [\sigma] = \left[\frac{J}{E}\right] = \frac{\frac{Ampere}{metro^2}}{\frac{Volt}{metro}} = \frac{A}{V}\frac{1}{m} = S/m$$ (Siemens/metro)

Obs

- $\sigma = \frac{1}{\rho} \rightarrow [\sigma] = (\Omega \cdot m)^{-1}$

3. Campos Eléctrico e Magnético
5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

Material	Conductivity, S/m
Conductors	
Silver	6.1×10^7
Copper	5.7×10^7
Gold	4.1×10^7
Aluminum	3.5×10^7
Tungsten	1.8×10^7
Brass	1.1×10^7
Iron	10^7*
Nichrome	10^6
Mercury	10^6
Graphite	10^5
Carbon	3×10^4
Germanium	2.3
Seawater	4
Insulators	
Wet earth	10^{-3}*
Silicon	3.9×10^{-4}
Distilled water	10^{-4}*
Dry earth	10^{-5}*
Rock	10^{-6}*
Bakelite	10^{-9}*
Glass	10^{-12}*
Barium titanate	10^{-12}–10^{-13}
Rubber	10^{-15}*
Mica	10^{-15}*
Wax	10^{-17}*
Quartz (fused)	10^{-17}*

* Approximate values.

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

Cálculo da resistência eléctrica de condutores com forma qualquer

- Usando a forma diferencial da equação de resistência

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \rightarrow \quad dR = \rho \frac{dl}{A}$$

  e integrando sobre o comprimento do condutor. Aqui temos que conhecer com a área varia com o comprimento do condutor

- Usando a lei de Ohm

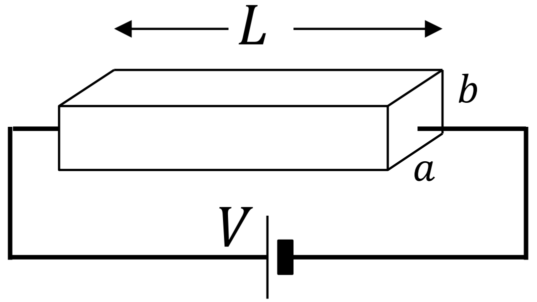
$$R = \frac{V}{I} = \frac{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\iint \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\iint \sigma \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

  onde a integração deve ser feita entre as superfícies terminais do condutor. Este equação é usada quando existe algum grau de simetria que permita resolver analíticamente os integrais (tal como na lei de Gauss)

5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

Cálculo da resistência eléctrica de condutores com forma qualquer

Exemplo: Resistência de uma barra de secção rectangular



Como a área da secção recta é constante, o campo eléctrico no interior da barra é uniforme e

$$\begin{cases} V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = EL \\ I = \iint \sigma \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sigma E a b \end{cases} \rightarrow \quad R = \frac{V}{I} = \frac{EL}{\sigma E a b} = \frac{L}{\sigma a b}$$

Obs:

Se σ e/our a área variam ao longo da barra $\quad R = \int \frac{dl}{\sigma A}$

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

Cálculo da resistência eléctrica de condutores com forma qualquer

Exemplo: Mostre que a resistência entre as extremidades do cone truncado da figura é $R = \frac{\rho}{\pi}\left(\frac{h}{ab}\right)$

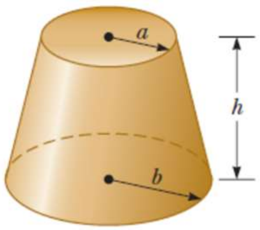
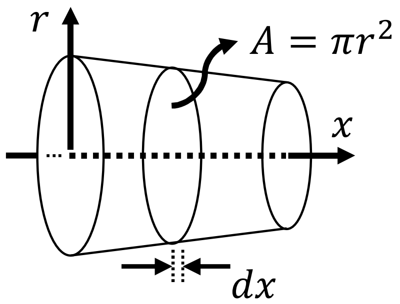


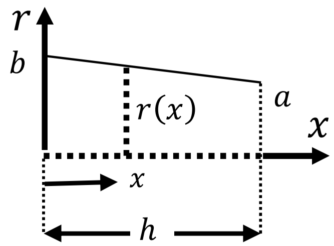
Figure P27.85

Na posição x a área é $A = \pi r^2$ onde $r = r(x) \Rightarrow$ a área da secção recta não é constante, logo temos que usar $R = \int \rho \frac{dx}{A}$

Para resolver este integral temos que encontra $r(x)$

Neste caso $r(x) = b - \left(\frac{b-a}{h}\right) x$ (equação da recta da geratriz). Assim





$$R = \int_0^h \rho \frac{dx}{\pi\left[b - \left(\frac{b-a}{h}\right)x\right]^2} = \frac{\rho}{\pi}\left(\frac{h}{ab}\right)$$

Obs:

$$\int \frac{du}{(B + Au)^2} = -\frac{1}{A(B + Au)}\ . \text{ No exemplo fica} \quad A = \frac{a-b}{h} \quad e \quad B = b$$

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

Cálculo da resistência eléctrica de condutores com forma qualquer

Exemplo: Resistência de um cabo coaxial

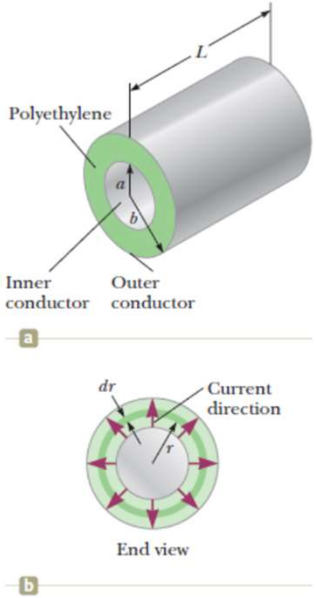
Um cabo coaxial consiste em dois condutores cilíndricos concêntricos separados por um dieléctrico. A corrente de fuga entre os condutores através do dieléctrico é um problema que deve ser evitado, pois o cabo foi desenhado para transportar corrente longitudinal que não vamos estudar aqui.

Resolução

Enquadramento: o espaço entre os condutores é um tubo cilíndrico ôco e o campo nesta região é radial cilíndrico e a superfície que a carga atravessa é a superfície lateral que varia e depende do raio do cilindro, $A = 2\pi rL$.

Portanto, a resistência dR de uma camada dieléctrica de espessura dr é

$$dR = \rho\frac{dr}{A} = \rho\frac{dr}{2\pi rL}$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

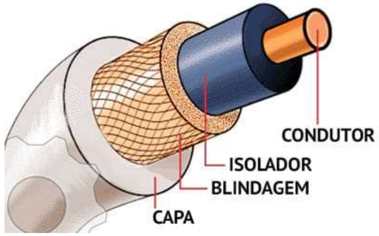
5.2 Resistência eléctrica – Lei de Ohm

Cálculo da resistência eléctrica de condutores com forma qualquer

Exemplo: Resistência de um cabo coaxial

A resistência total é dada pelo integral entre a e b

$$R = \int dR = \frac{\rho_{die}}{2\pi L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho_{die}}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



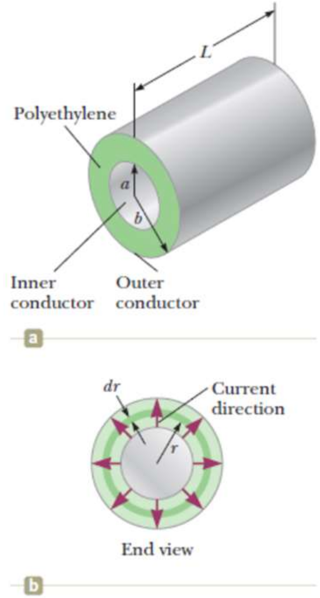
Se $a = 5$ mm, $b = 1.75$ cm, $L = 15$ cm, $\rho_{die} = 1 \times 10^{13}\ \Omega \cdot m$

$$R = \frac{1{,}0 \times 10^{13}}{2\pi \times 0{,}15} \ln \frac{1{,}75}{0{,}5} = 1{,}33 \times 10^{13}\ \Omega$$

Para comparação, a resistência longitudinal do condutor interior de cobre é

$$R = \rho_{Cu} \frac{L}{A} = 1{,}7 \times 10^{-8} \frac{0{,}15}{\pi (5 \times 10^{-3})^2} = 3{,}2 \times 10^{-5}\ \Omega$$

A resistência radial é cerca de 18 ordens de grandeza inferior à longitudinal → a corrente de fuga é cerca de 18 ordens de grandeza inferior à corrente longitudinal



3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Resistência e Temperatura

A resistividade é uma propriedade de uma susbstância e depende da temperature e num intervalo alargado (abaixo do ponto de fusão) esta dependência pode escrever-se

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

- α é o coeficiente de temperatura da resistividade
- ρ_0 é resistividade à temperature de referência T_0
- T é a temperatura em °C

O coeficiente de temperature da resistividade pode ser calculado sabendo a variação da resistividade $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ num dado interval de temperatura $\Delta T = T - T_0$ dado que

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0}\frac{(\rho - \rho_0)}{(T - T_0)} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta\rho}{\Delta T}$$

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Resistência e Temperatura

A resistência eléctrica em função da temperatura é dada por

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

dada a relação entre resistividade e resistência

Exemplo:

Termómetro de resistência de platina Pt. Um termómetro de resistência mede temperaturas através da variação da resistência eléctrica de um conductor. Sendo $\alpha = 3{,}92 \times 10^{-3}\ °C^{-1}$ $R_{20} = 50{,}0\ \Omega$ à temperatura de $20°$ e $R_T = 76{,}8\ \Omega$ quando imerso em In em fusão, qual é o ponto de fusão do In?

$$R(T) = R_{20}[1 + \alpha(T - 20)] \rightarrow T - 20 = \frac{R - R_{20}}{\alpha R_{20}}$$

donde

$$T = 20 + \frac{76{,}8 - 50{,}0}{3{,}92 \times 10^{-3} \times 50{,}0} = 156{,}7\ °\mathrm{C}$$

3. Campos Eléctrico e Magnético
5.2 Resistência e Temperatura

Table 27.2 Resistivities and Temperature Coefficients of Resistivity for Various Materials

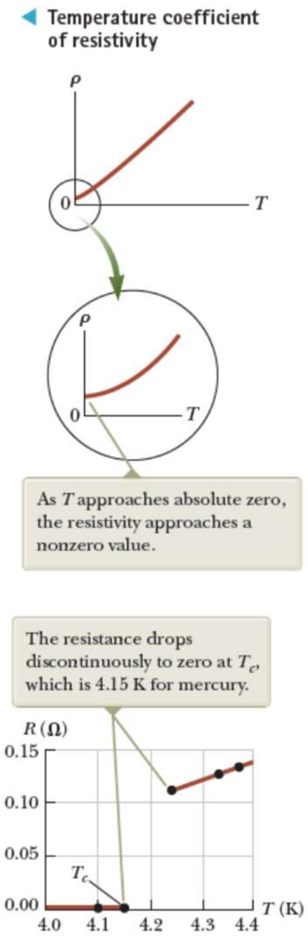
Material	Resistivity[a] ($\Omega \cdot$ m)	Temperature Coefficient[b] α [$(°C)^{-1}$]
Silver	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Copper	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Gold	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
Aluminum	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Tungsten	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Iron	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Platinum	11×10^{-8}	3.92×10^{-3}
Lead	22×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Nichrome[c]	1.00×10^{-6}	0.4×10^{-3}
Carbon	3.5×10^{-5}	-0.5×10^{-3}
Germanium	0.46	-48×10^{-3}
Silicon[d]	2.3×10^{3}	-75×10^{-3}
Glass	10^{10} to 10^{14}	
Hard rubber	$\sim 10^{13}$	
Sulfur	10^{15}	
Quartz (fused)	75×10^{16}	

[a] All values at 20°C. All elements in this table are assumed to be free of impurities.
[b] See Section 27.4.
[c] A nickel–chromium alloy commonly used in heating elements. The resistivity of Nichrome varies with composition and ranges between 1.00×10^{-6} and $1.50 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot$ m.
[d] The resistivity of silicon is very sensitive to purity. The value can be changed by several orders of magnitude when it is doped with other atoms.

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Semicondutores e Supercondutores

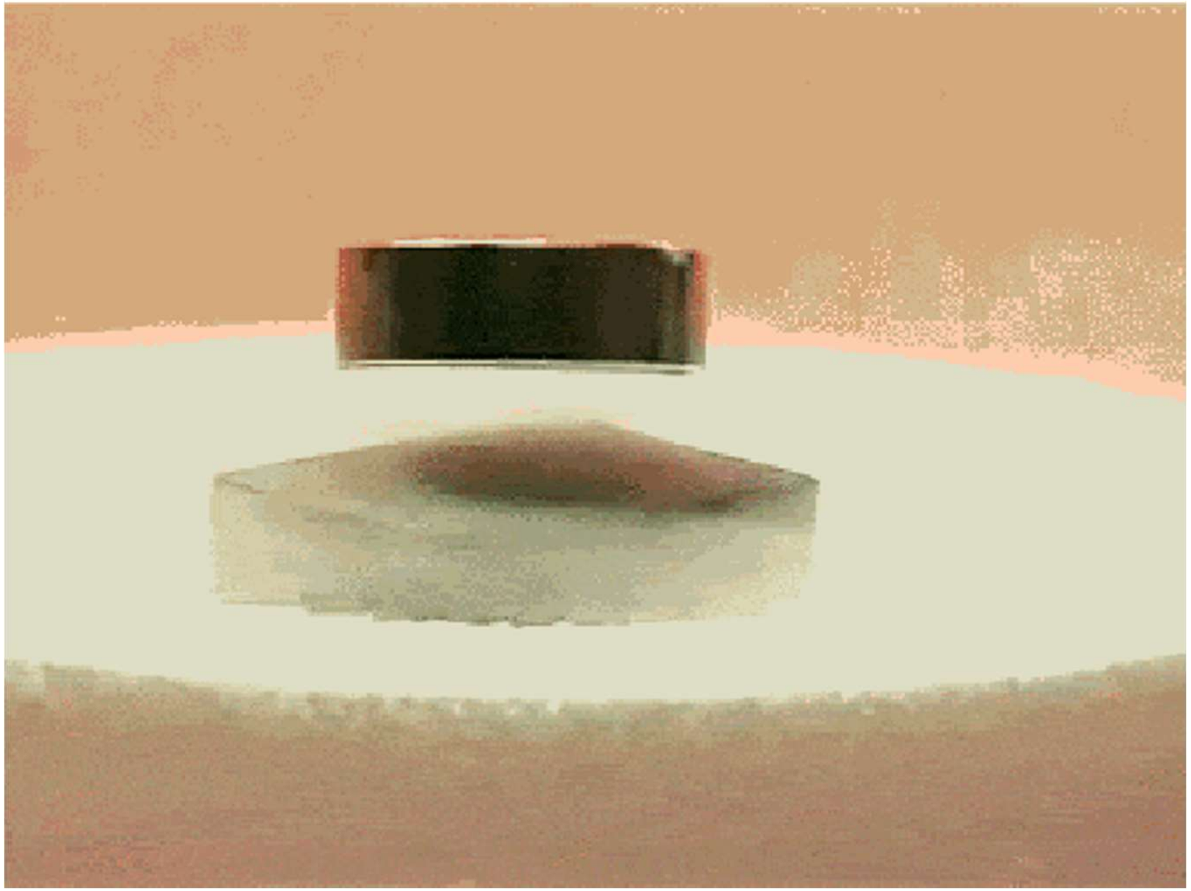
- O coeficiente de temperatura da resistividade pode tomar valores positivos our negativos.
- Nos materiais com $\alpha > 0$ a resistividade aumenta com a temperatura (metais) e é linear num intervalo alargado de temperatura
- Nos materiais com $\alpha < 0$ a resistividade diminui com o aumento da temperatura (semicondutores)
- Existem materiais que têm resistividade nula abaixo de uma temperatura crítica T_c temperatura de transição do estado normal para o estado supercondutor



5.2 Semicondutores e Supercondutores

Table 27.3 Critical Temperatures for Various Superconductors

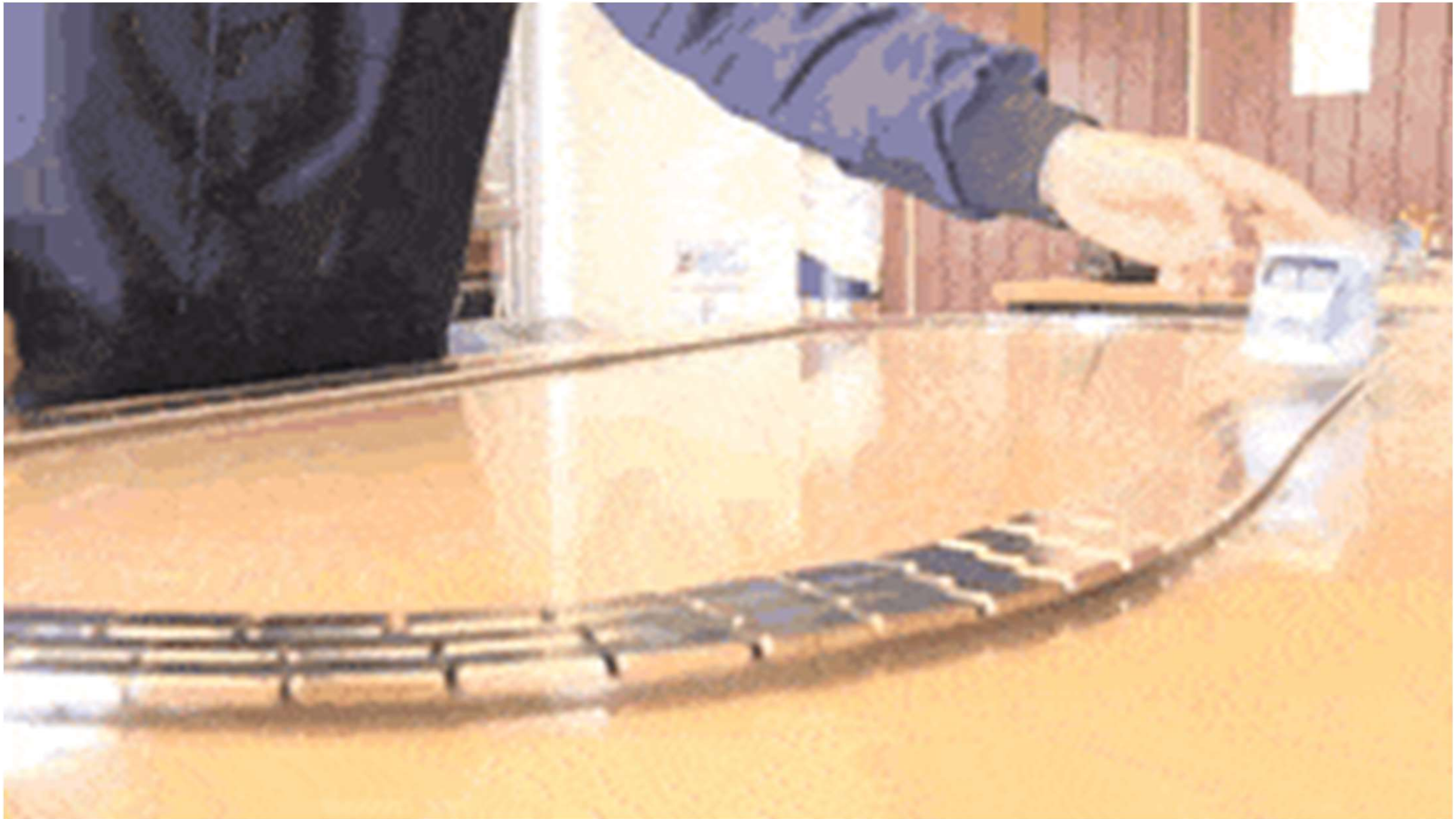
Material	T_c (K)
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$	134
Tl—Ba—Ca—Cu—O	125
Bi—Sr—Ca—Cu—O	105
$YBa_2Cu_3O_7$	92
Nb_3Ge	23.2
Nb_3Sn	18.05
Nb	9.46
Pb	7.18
Hg	4.15
Sn	3.72
Al	1.19
Zn	0.88



Efeito Meissner-Ochsenfeld (1933) expulsão dos campos magnéticos do interior do supercondutor – fenómeno de levitação

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.2 Semicondutores e Supercondutores



3. Campos Eléctrico e Magnético

5.3 Energia e Potência

Transferência de energia de uma fonte para as cargas livres num circuito

No circuito ao lado estudamos as variações da energia de uma carga Q positiva que dá uma volta completa desde o ponto a, no sentido da corrente

- $a \rightarrow b$ a carga passa na fonte e a sua energia potencial aumenta

$$\Delta U = \Delta V \, Q$$

  enquanto que a energia potencial química da bateria diminui do mesmo valor

- $b \rightarrow c$ a resistência dos fios é desprezável e portanto não há perdas de energia $(\Delta V = 0)$

- $c \rightarrow d$ a carga atravessa a resistência e devido às colisões com a rede cristalina a carga perde energia e a resistência ganha essa energia sob a forma de agitação térmica – a resistência aquece

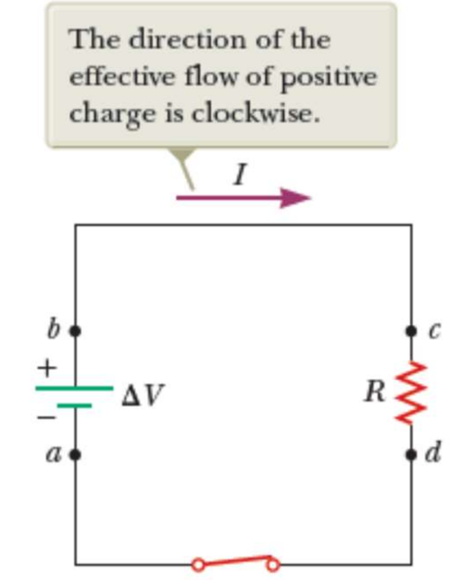


Figure 27.11 A circuit consisting of a resistor of resistance R and a battery having a potential difference ΔV across its terminals.

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.3 Energia e Potência

- de d para a desprezamos as perdas porque a resistência dos fios é desprezável
- a energia potencial em a, ponto de partida e chegada, deve ser a mesma
- a taxa de transferência de energia é

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(QV) = \frac{dQ}{dt}V = I\ V$$

onde I é a corrente no circuito

- A carga readquire a sua energia potencial à custa de energia química da bateria
- A taxa de transferência de energia é

$$P = I\ V$$

igual à energia dissipada na resistência

- Esta expressão $P = I\ V$ é válida para qualquer dispositivo que transporta uma corrente I e com uma d.d.p. V nos seus terminais

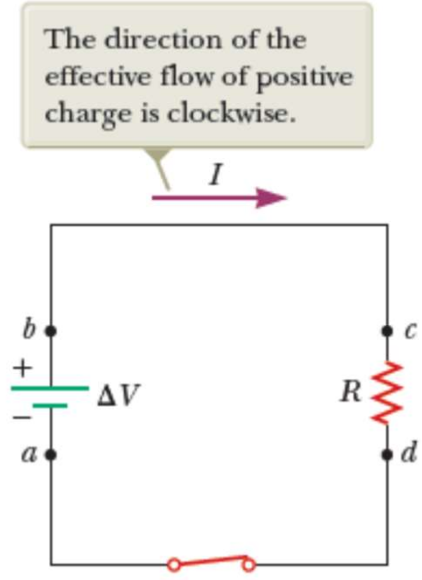


Figure 27.11 A circuit consisting of a resistor of resistance R and a battery having a potential difference ΔV across its terminals.

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.3 Energia e Potência

Como $V = RI$ a potência pode ser expressa em função de I our de V

$$\begin{cases} P = VI \\ V = RI \end{cases} \rightarrow \quad P = RI^2 \quad ou \quad P = \frac{V^2}{R}$$

Unidades S.I.

Se I é expresso em Ampere e V em Volt a potência vem em W (Watt)

$$[P] = [VI] = Volt \times Ampere = \mathrm{V} \times \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{C\,V}}{\mathrm{s}} = \frac{Joule}{segundo} = Watt$$

Exemplo:

Potência dissipada por um fio de NiCr (Níquel Crómio) com $R = 8\ \Omega$ aplicando uma tensão de 110 V

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{110^2}{8} = 1{,}5\ \mathrm{kW}$$

Obs

- Duplicando a tensão a potência quadruplica, e o mesmo se verifica com a corrente
- O aquecimento provocado por uma corrente eléctrica e frequentemente chamado de aquecimento de Joule (1ª lei de Joule)

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC - Força Electromotriz

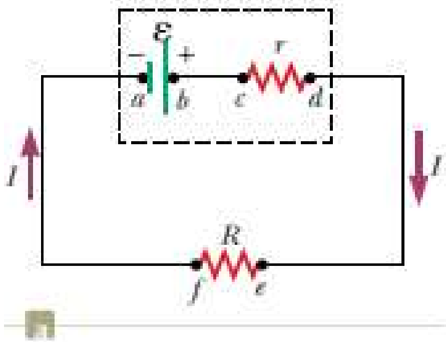
Como a d.d.p. nos terminais da bateria é constante a corrente no circuito é constante em intensidade e sentido, por isso é chamada corrente directa (dc) – em português dizemos corrente contínua

Força electromotriz $\mathcal{E}$ (f.e.m.)

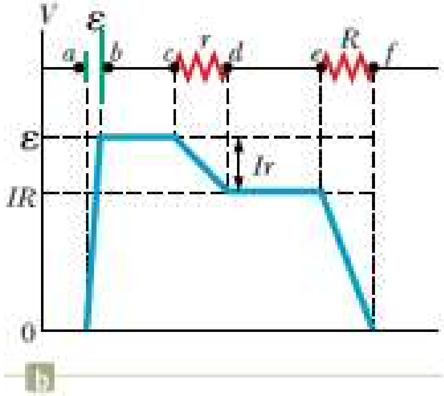
- É o trabalho realizado por unidade de carga (Volt) $\Longrightarrow$ é uma d.d.p.
- Não é uma força
- Uma bateria é uma fonte de f.e.m.
- Uma fonte de f.e.m. move as cargas do potencial mais baixo para o potencial mais elevado
- A f.e.m. de uma bateria é a máxima d.d.p. que a bateria fornece nos seus terminais
- Fonte f.e.m. é um dispositivo capaz de produzir um campo eléctrico e, portanto, induzir o movimento de cargas livres ao longo de um circuito

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC - Força Electromotriz



- Assumimos que os fios de ligação entre elementos num circuito não têm resistência (na realidade a resistência dos fios não é nula, mas é muito baixa e por isso é deprezada)
- Uma bateria ideal não tem resistência interna $\Rightarrow$ a d.d.p. nos seus terminais é igual à f.e.m.
- Uma bateria real oferece resistência à passagem de corrente – tem resistência interna r
- Ligamos uma resistência R aos terminais de uma bateria caracterizada por $\mathcal{E}(V)$ e $r(\Omega)$



3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC - Força Electromotriz

Percorremos o circuito desde o ponto a no sentido da corrente I

Dentro da bateria $a \rightarrow d$

- $a \rightarrow b$: o potencial aumenta de $\mathcal{E}$
- $b \rightarrow c$: ligação sem resistência
- $c \rightarrow d$: potencial diminui - queda de tensão igual a Ir
- A d.d.p. $V_d - V_a$ nos terminais da bateria é

$$V_{da} = \mathcal{E} - Ir$$

Note-se ϵ é a tensão em circuito aberto (corrente nula)

A tensão nas etiquetas das baterias é a f.e.m. pois a d.d.p. nos terminais da bateria depende da corrente interna da bateria

Percorremos o circuito desde o ponto a no sentido da corrente I

Dentro da bateria $a \rightarrow d$

- $a \rightarrow b$: o potencial aumenta de $\mathcal{E}$
- $b \rightarrow c$: ligação sem resistência
- $c \rightarrow d$: potencial diminui - queda de tensão igual a Ir
- A d.d.p. $V_d - V_a$ nos terminais da bateria é

$$V_{da} = \mathcal{E} - Ir$$

Note-se ϵ é a tensão em circuito aberto (corrente nula)

A tensão nas etiquetas das baterias é a f.e.m. pois a d.d.p. nos terminais da bateria depende da corrente interna da bateria

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC - Força Electromotriz

Continuando a percorrer o circuito temos

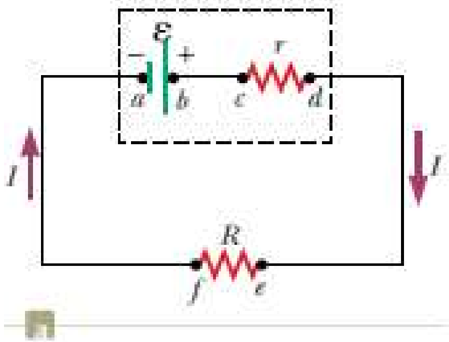
$d \rightarrow e$: ligação sem resistência

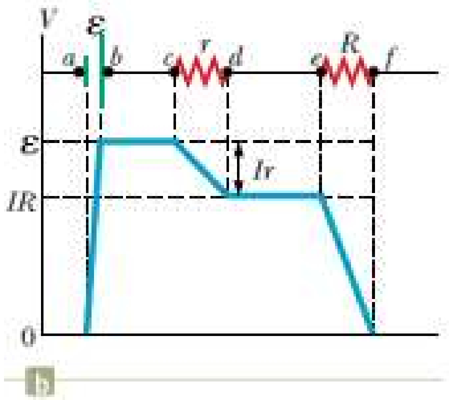
$e \rightarrow f$: queda de tensão na resistência R dada por

$$V_{fe} = -IR$$

$f \rightarrow a$: ligação sem resistência

Como fechamos o circuito no ponto a d.d.p. na bateria tem que ser igual à d.d.p. na resistência pois $V_{aa} = 0$





Obs:

- A resistência R chama-se resistência de carga
- A resistência de carga pode ser um simples element our a resistência de um dispositivo eléctrico qualquer (torradeira) ligado à bateria
- A resistência representa uma carga sobre a bateria porque a bateria deve fornecer energia para que o dispositivo que contém a resistência funcione

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC - Força Electromotriz

Análise do circuito

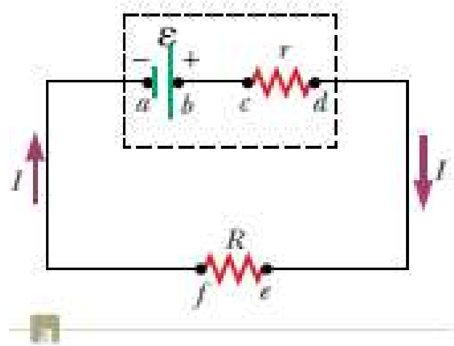
$$\mathcal{E} = IR + Ir \;\rightarrow\; I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

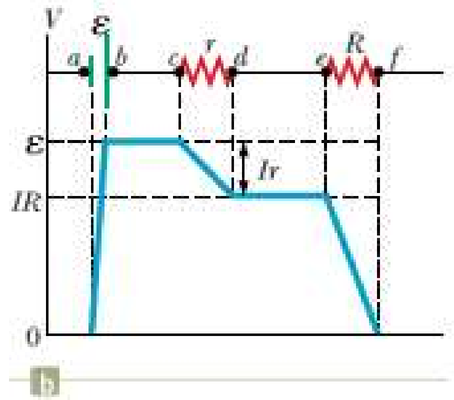
se $R \gg r$ Podemos desprezar r

Multiplicando a equa ção de f.e.m. por I

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r$$

Vemos que a potência fornecida pela f.e.m. da bateria distribui-se pela carga externa I^2R e pela resistência interna da propria bateria I^2r





3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC – Resistência equivalente

Resistências em série

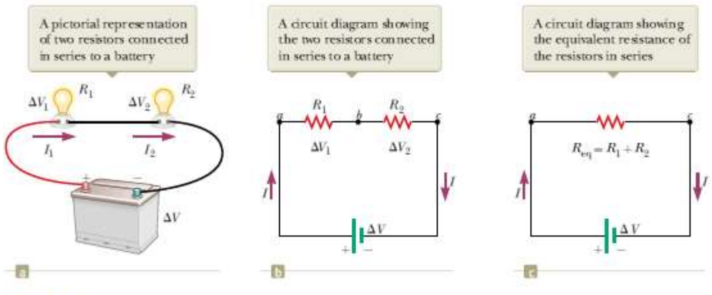


Figure 28.3 Two lightbulbs with resistances R_1 and R_2 connected in series. All three diagrams are equivalent.

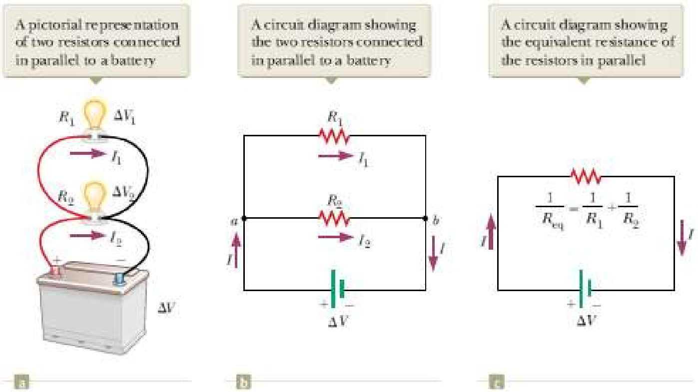
A carga que sai de R_1 entra em R_2 → mesma corrente → $I_1 = I_2 = I$

$$\begin{cases} V = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I \\ V = R_{eq} I \end{cases} \rightarrow \quad R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$\boxed{R_{eq} = \sum_i R_i}$$

Resistências em paralelo

As resistências estão ligadas à fonte → mesma d.d.p. → $V_1 = V_2 = V$



- As cargas dividem-se no ponto a uma parte vai para R_1 e a restante para R_2
- A carga total é conservada ⟹

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ I = \frac{V}{R_{eq}} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}}$$

3. Campos Eléctrico e Magnético

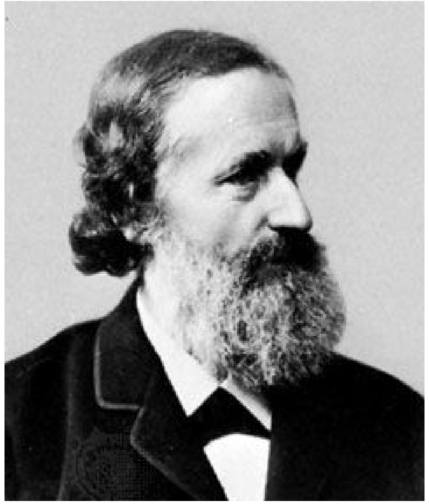
5.4 Circuitos DC – Leis de Kirchhoff

Procedimento para análise de circuitos

1. Lei dos nodos

   A soma algébrica das correntes que entram num nodo (junção de fios) é igual à soma algébrica das correntes que saem desse nodo – esta lei exprime a lai de conservação da carga

$$\sum_{nodo} I = 0$$



Gustav Robert Kirchhoff
(1824 - 1887)

2. Lei das malhas

   A soma algébrica das variações de potencial através de todos os elementos em circuito fechado é nula

$$\sum_{\substack{malha\\fechada}} V = 0$$

Esta lei exprime a conservação da energia num sistema isolado

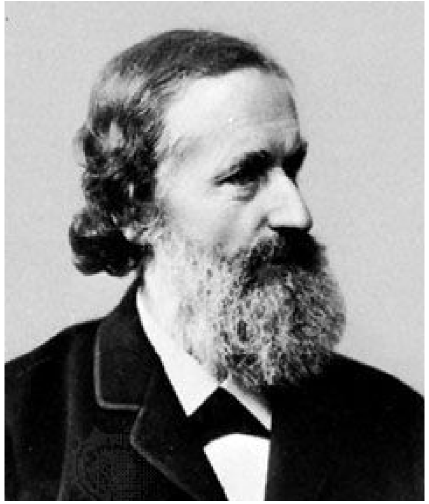
3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC – Leis de Kirchhoff

Procedimento para análise de circuitos

1. Lei dos nodos

   Esta lei exprime a lei de conservação da carga pois todas as cargas que entram num ponto qualquer num circuito têm que sair desse ponto porque a carga não pode aumentar our desaparecer num ponto.



Gustav Robert Kirchhoff
(1824 - 1887)

2. Lei das malhas

   Esta lei exprime a conservação da energia num sistema isolado. Imaginemos uma carga movendo-se num circuito fechado. Quando a carga retorna ao ponto de partida a energia total do sistema carga+circuito tem de ser igual à energia que o sistema tinha quando a carga iniciou o movimento. A soma dos aumentos de energia quando as cargas passam em alguns elementos tem de ser igual à soma das diminuições de energia quando a carga passa pelos ourtros elementos

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC – Leis de Kirchhoff

Procedimento para análise de circuitos

- Cada ramo de um circuito é percorrido por uma única corrente $\Longrightarrow$ o número total de correntes tem de ser igual ao número de ramos num circuito
- Antes de escrevermos as equações é necessário:
  1. Escolher arbitrariamente o sentido positivo das correntes em todos os ramos do circuito e indicá-las no esquema
  2. Escolher o sentido positivo do percurso dos circuitos para estabelecer as equações conforme a segunda lei de Kirchhoff. É conveniente escolher o mesmo sentido em todas as malhas

Se num circuito tivermos r ramos e n nodos

- a 1ª lei de Kirchhoff permite obter um número de equações linearmente independentes igual a $n-1$
- o número de equações linearmente independentes obtidas de acordo com a 2ª lei é $r-(n-1)$ - *número de malhas independentes*
- o número total de equações é r (número de ramos)

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC – Leis de Kirchhoff

Procedimento para análise de circuitos

Convenções para os sinais das diferenças de potencial através de resistências e das fontes quando usamos a 2ª lei

Na figura ao lado temos a convenção usada pelos físicos:

Em todos os diagramas

$$\Delta V = V_b - V_a$$

Se a corrente flui no sentido $a \rightarrow b$ então $V_b < V_a$ e resulta $V_b - V_a = IR < 0 \;\; \rightarrow V_b - V_a = -IR$

Em engenharia usa-se a convenção em que as quedas de tensão são positivas $\rightarrow$ indicam o sentido correcto da corrente

$$\Delta V = V_a - V_b = RI$$

Muito importante: Nesta convenção se as quedas de tensão são positivas então as subidas de tensão devem ser negativas

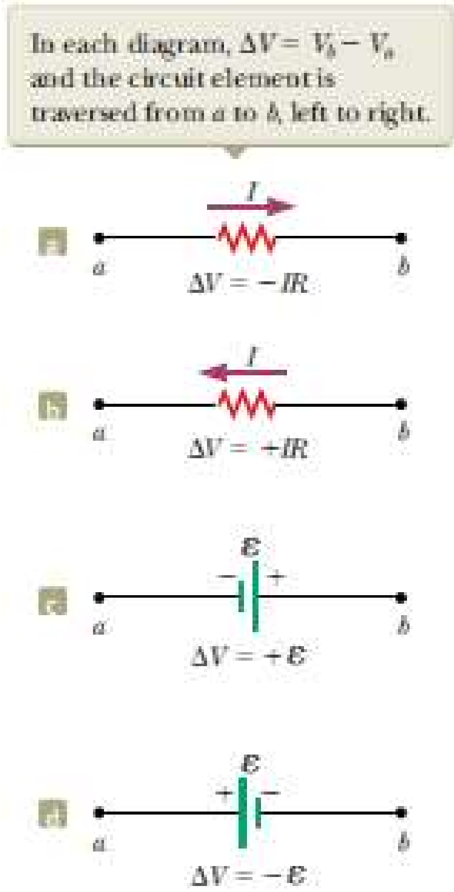


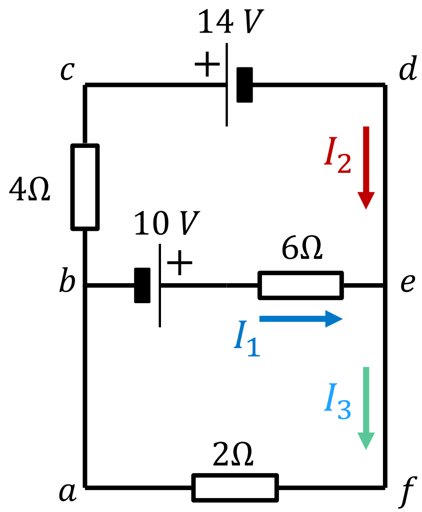
Figure 28.13 Rules for determining the signs of the potential differences across a resistor and a battery. (The battery is assumed to have no internal resistance.)

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC – Leis de Kirchhoff

Procedimento para análise de circuitos

Exemplo: Calcular: a) as correntes em todos os ramos
b) d.d.p. $V_e - V_b$
c) potência nas fontes



Resolução

a) Este circuito tem 3 ramos e 2 nodos → 1 equação para as correntes $(2-1)$ e 2 equações para as tensões $(3-(2-1))$

1. marcar e identificar as correntes em todos os ramos
2. Escrever as equações

correntes: $I_1 + I_2 = I_3$

malha $abefa$ $\quad -10 + 6I_1 + 2I_3 = 0$

malha $bcdeb$ $\quad +4I_2 + 14 - 6I_1 + 10 = 0$

A outra malha fechada $acdfa$ fornece uma equação para as tensões que é igual à soma das ourtras duas

3. Campos Eléctrico e Magnético

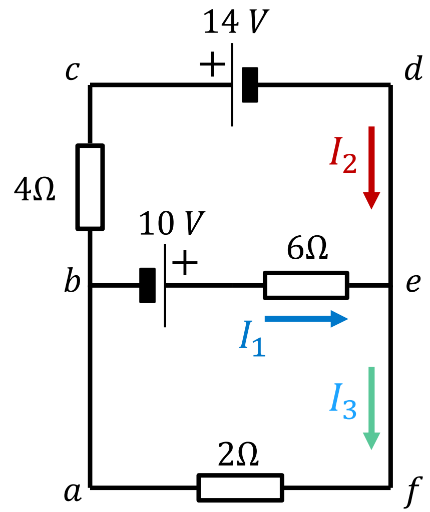
5.4 Circuitos DC – Leis de Kirchhoff

Procedimento para análise de circuitos

Exemplo: Calcular: a) as correntes em todos os ramos

b) d.d.p. $V_e - V_b$

c) potência nas fontes



Resolução

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 6I_1 + 2(I_1 + I_2) = 10 \\ 4I_2 - 6I_1 = -24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \quad - \\ 8I_1 + 2I_2 = 10 \\ 4I_2 - 6I_1 = -24 \end{cases} \rightarrow 22I_1 = 44$$

$$I_1 = 2 \text{ A} \;,\; I_2 = -3 \text{ A} \;,\; I_3 = -1 \text{ A}$$

o sinal – significa que a corrente circula no respectivo ramo no sentido oposto ao convencionado

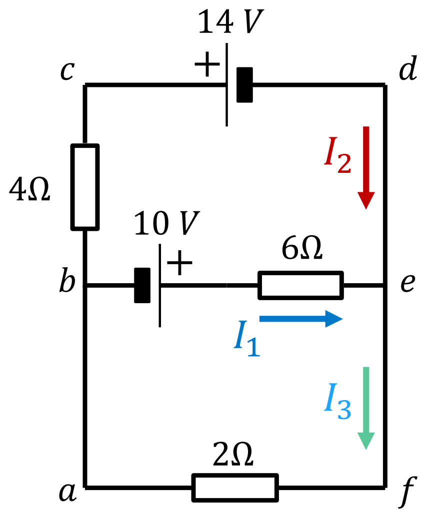
5.4 Circuitos DC – Leis de Kirchhoff

Procedimento para análise de circuitos

Exemplo: Calcular: a) as correntes em todos os ramos

b) d.d.p. $V_e - V_b$

c) potência nas fontes



Resolução

b) temos vários caminhos (ramos) para calcular $V_e - V_b$

$bcde \rightarrow \quad 4I_2 + 14 = -12 + 14 = 2\text{ V}$

$be \quad -10 + 6I_1 = -10 + 12 = 2\text{ V}$

$bafe$ como $V_a = V_b$ e $V_e - V_f$, $V_e - V_b = V_f - V_a = -2I_3 = 2\text{ V}$

$$V_e - V_b = 2 \quad \rightarrow \quad V_e = V_b + 2$$

c) Na fonte de 14 V: $P = (-I_2)V = 3 \times 14 = 42\text{ W}$

Na fonte de 10 V: $P = I_1 V = 2 \times 10 = 20\text{ W}$

Na resistência 4Ω: $P = 4I_2^2 = 4 \times 9 = 36\text{ W}$

Na resistência 6Ω: $P = 6I_1^2 = 6 \times 4 = 24\text{ W}$

Na resistência 2Ω: $P = 2I_3^2 = 2 \times 1 = 2\text{ W}$

Total fornecido $42 + 20 = 62\text{ W}$, total dissipado $36 + 24 + 2 = 62\text{ W}$

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC – Circuitos RC

Comportamento de um condensador em corrente contínua carga e descarga de um condensador – fenómenos transitórios

Até agora temos considerado circuitos com correntes constantes → correntes estacionárias

Nos circuitos com condensadores a corrente tem o mesmo sentido mas pode variar em intensidade no tempo pois

$$Q = CV \quad \rightarrow \quad I_C = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

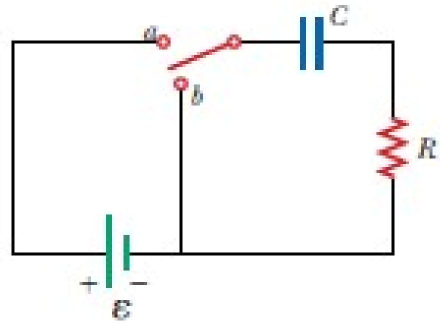
Se a carga ou a tensão variarem, a corrente no ramo onde o condensador está inserido também varia

3. Campos Eléctrico e Magnético

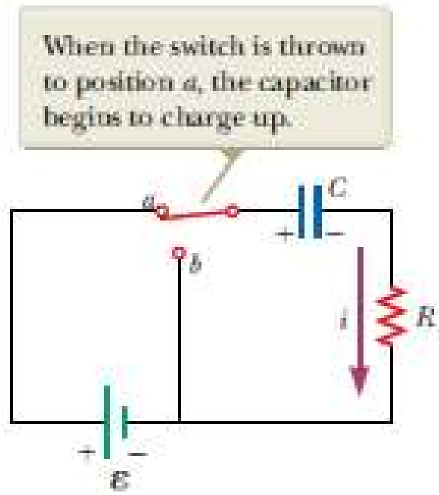
5.4 Circuitos DC – Circuitos RC

Carga de um condensador

Condições iniciais: $Q = CV = 0 \;\rightarrow\; V = 0$



- Fechamos o interruptor em $t = 0$ → a fonte cria um campo nos fios e a carga começa a mover-se → estabelece-se uma corrente no circuito → condensador começa a carregar
- A carga não salta entre as placas do condensador porque o afastamento representa um circuito aberto → a carga é transferida de uma placa para outra devido à acção do campo até o condensador estar completamente carregado



- A d.d.p. aumenta com o aumento da carga e carga máxima $Q_{máx}$ depende da d.d.p. da fonte
- Uma vez atingida a $Q_{máx}$ a corrente no circuito é nula
- Usando a 2ª lei de Kirchhoff

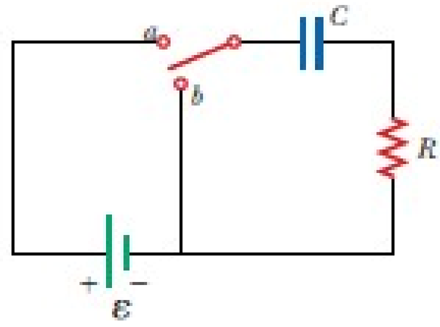
$$-\mathcal{E} + \frac{q}{C} + IR = 0$$

IR é a queda de tensão na resistência
$\frac{q}{C}$ é a queda de tensão no condensador

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC – Circuitos RC

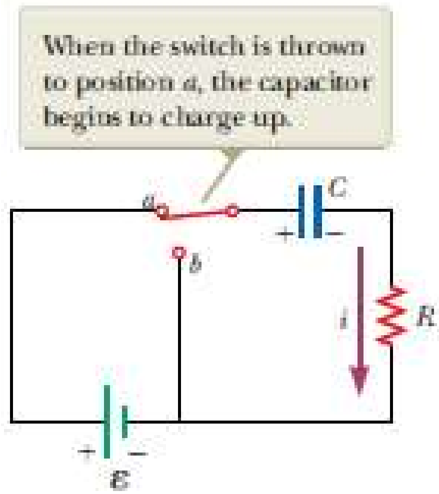
Carga de um condensador



Dado que $i_C = \frac{dq}{dt}$ e a corrente é a mesma em R temos

$$-\mathcal{E} + \frac{q}{C} + iR = 0 \quad \rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Reparemos agora no seguinte:



- A corrente inicial no circuito, isto é, a corrente que se estabelece no circuito quando fechamos o interruptor é

$$I_i = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (t = 0)$$

  O condensador comporta-se como um curto-circuito

- Quando o condensador está na sua carga máxima $Q_{máx}$ a corrente no circuito é nula e a d.d.p. da fonte aparece no condensador. se na equação da malha usarmos $i = 0$ vem

$$-\mathcal{E} + \frac{Q_{máx}}{C} = 0 \quad \rightarrow Q_{máx} = C\mathcal{E}$$

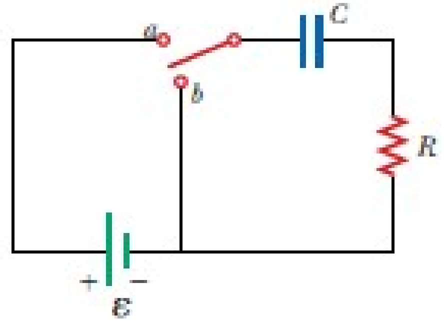
Para determinar a dependencia tempora da carga e da corrente temos que resolver a equação diferencial da malha que é uma equação diferencial de variáveis separadas

5.4 Circuitos DC – Circuitos RC

Carga de um condensador

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \quad \rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E}}{RC} - \frac{q}{RC} = -\frac{(q - C\mathcal{E})}{RC}$$

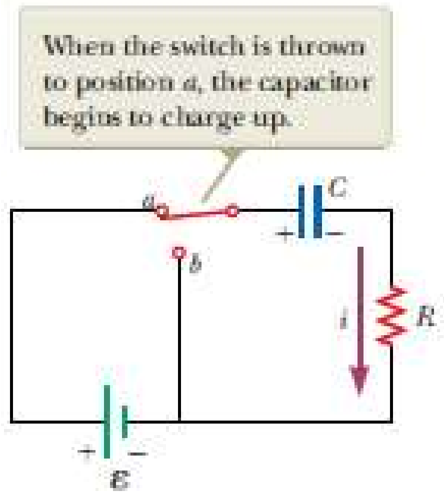
$$\frac{dq}{(q - C\mathcal{E})} = -\frac{dt}{RC}$$



integrando e usando $q = 0$ em $t = 0$

$$\int_0^q \frac{dq}{(q - C\mathcal{E})} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$



donde obtemos a equação da carga em função do tempo

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q_{máx}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

5.4 Circuitos DC – Circuitos RC

Carga de um condensador

Para obtermos a corrente derivamos a equação da carga

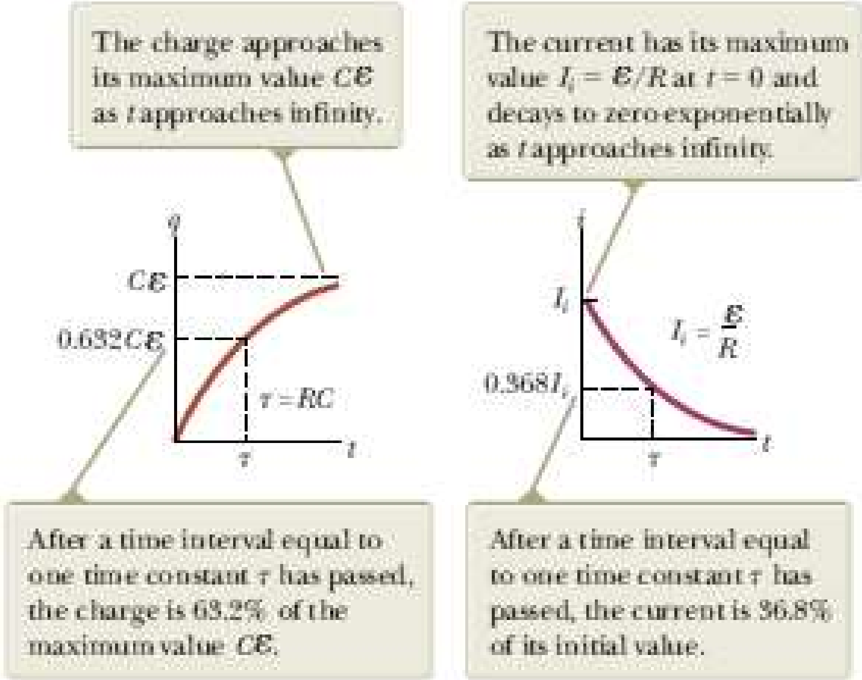
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

A quantidade RC tem as dimensões de um tempo e é a constante de tempo do circuito

$$\tau = RC$$

e representa o tempo necessário para a corrente diminuir para $\frac{1}{e}$ $(36{,}8\ \%)$ do seu valor inicial

$$i(t = RC) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-1} = 0{,}368 I_i$$



$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$
$$= Q_{máx}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Obs: $q(t = 5RC) = 99{,}3\%\ de\ Q_{máx}$

3. Campos Eléctrico e Magnético

5.4 Circuitos DC – Circuitos RC

Descarga de um condensador

O condensador foi carregado até $Q_{máx} = C\mathcal{E}$ e a d.d.p. no condensador é $V_C = \frac{Q_{máx}}{C}$. Se ligarmos o interruptor para a posiçao b em $t = 0$

A equação da malha é agora

$$V_C - iR = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{q}{C} - iR = 0$$

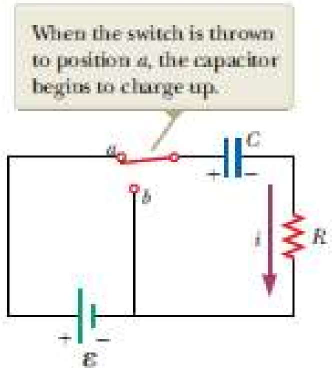
Como $i = -\frac{dq}{dt}$ temos $\quad \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0 \quad \rightarrow \frac{q}{C} = -R\frac{dq}{dt} \quad \rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$

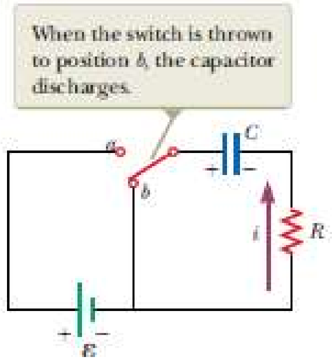
Integrando desde $q = Q_i$ em $t = 0$ resulta

$$\int_{Q_i}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{q}{Q_i}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Q_i e^{-t/RC} \quad \rightarrow \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_i}{RC}e^{-t/RC}$$

onde $\frac{Q_i}{RC} = I_i$ é a corrente inicial no circuito. O sinal – significa que o sentido da corrente de descarga é oposto ao sentido da corrente de carga, como seria de esperar

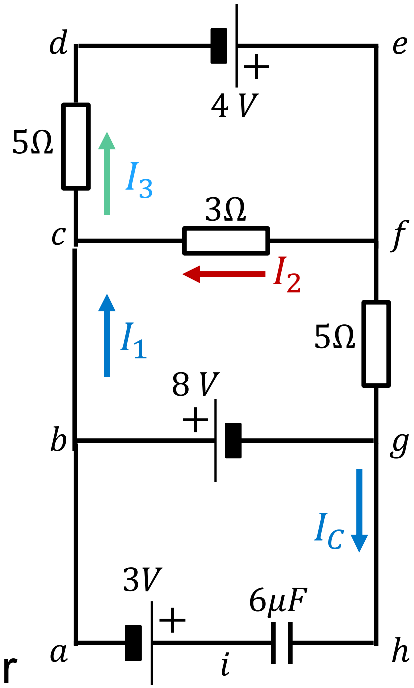




5.4 Circuitos DC – Circuitos RC

Exemplo: a) Calcular as correntes em condições estacionárias.

b) Calcular a carga no condensador



Resolução

a) Em condições estacionárias o condensador está carregado e representa um circuito aberto → $I_C = 0$

$$\begin{matrix} nodo\ c \\ (defcd) \\ (bcfgb) \end{matrix} \begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ -4 + 3I_2 + 5I_3 = 0 \\ -3I_2 + 5I_1 - 8 = \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = 1{,}38\ \mathrm{A} \\ I_2 = -0{,}364\ \mathrm{A} \\ I_3 = 1{,}02\ \mathrm{A} \end{cases}$$

$$V_C + iR = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{q}{C} + iR = 0$$

b) $Q = CV_C \quad \rightarrow \quad V_C$ é a d.d.p. no condensador

Usando a segunda lei numa malha onde o condensador está inserido, por ex. $abgha$, resulta $8 + V_C + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad V_C = -11{,}0\ \mathrm{V}$

$$Q = 6 \times 10^{-6} \times 11 = 66{,}0\ \mu C$$

Obs: O que significa o sinal $(-)$ em $V_C = -11{,}0\ \mathrm{V}$. Qual é a placa positiva?