Cálculo I - agr. 4 2020/21

1º teste - turmas TP4A-2 e TP4A-5

Resolução

1. $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{2x}$.

(a) $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \frac{x-1}{2x} \in \underbrace{D_{\arcsin}}_{=[-1,1]} \}$

(60 pontos)

C.A.: $-1 \leq \frac{x-1}{2x} \leq 1 \iff \left(\frac{x-1}{2x} \geq -1 \wedge \frac{x-1}{2x} \leq 1 \right)$

$\iff \left(\frac{3x-1}{2x} \geq 0 \wedge \frac{x+1}{2x} \geq 0 \right) \iff$

		0		1/3	
$\frac{3x-1}{2x}$	+		−	0	+

		−1		0	
$\frac{x+1}{2x}$	+	0	−		+

$\iff \left(x \in]-\infty, 0[\cup [\frac{1}{3}, +\infty[\wedge x \in]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[\right)$

$\iff x \in]-\infty, -1] \cup [1/3, +\infty[$. $\therefore D_f =]-\infty, -1] \cup [1/3, +\infty[$.

(b) $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{x-1}{2x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2}} = \dfrac{\frac{1}{2x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2}}$ em $]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$.

(60 pontos)

Em $]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$, $x^2 > 0$ e $\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2} > 0$, logo $f'(x) > 0$.

(c) f é contínua e estrit. crescente nos intervalos

(50 pontos) $]-\infty, -1]$ e $[\frac{1}{3}, +\infty[$, logo existe um máximo no ponto $x = -1$ e um mínimo no ponto $x = 1/3$.

$f(-1) = \arcsin(1) = \pi/2$, $f(1/3) = \arcsin(-1) = -\pi/2$,

logo estes extremos são absolutos (pois são o valor máximo e o valor mínimo de arco seno).