1 Composição e inversa

A função $f \circ g$ ("f após g") é a *composição* de f e g, caracterizada por

- expressão $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$ e domínio $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

f é invertível $\Leftrightarrow \exists g : D_g = CD_f$ e $\forall x \in D_f, g \circ f(x) = x$, ou seja,

$$y = f(x) \Rightarrow x = g(y)$$

- g é a *inversa* de f e denota-se por f^{-1}
- f é a inversa de f^{-1}, ou seja, $D_f = CD_{f^{-1}}$, $CD_f = D_{f^{-1}}$ e $(f^{-1})^{-1} = f$
- logo, $\forall x \in D_f, f^{-1} \circ f(x) = x$ e $\forall x \in CD_f, f \circ f^{-1}(x) = x$

f é invertível $\Leftrightarrow$ f é injetiva

f é **estritamente** monótona $\Rightarrow$ f é invertível
e f^{-1} é monótona com o mesmo sentito

Se $f \circ g$ é invertível, então $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

em [*1.1 Ponto de partida*/*Informação adicional*] ver Universo das funções (revisão), parte 1 e parte 2

2 Composição e condições

Função F:	$(a, b \in D_F)$		
qualquer	$a = b$	$\Rightarrow$	$F(a) = F(b)$
crescente	$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a \geq b \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$F(a) \geq F(b)$
decrescente	$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a \geq b \end{array}\right\}$	$\Rightarrow$	$F(a) \leq F(b)$
injetiva	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$F(a) = F(b)$
estritamente crescente	$a > b$ $a \geq b$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$F(a) > F(b)$ $F(a) \geq F(b)$
estritamente decrescente	$a > b$ $a \geq b$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$F(a) < F(b)$ $F(a) \leq F(b)$

3 Composição e condições: exemplos

Aplicando a função F a ambos os membros de uma condição ...

$\frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$	$F(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ **invertível**
$\frac{1}{x} < 4 \not\Rightarrow x > \frac{1}{4}$	$F(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ **não monótona (decr.)**
$\frac{1}{x^2} < 4 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{4}$	$F(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ **estritamente decr.**
$x^2 < 4 \Leftrightarrow \lvert x \rvert < 2$	$F(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ **estritamente cr.**
$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$	$F(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ **qualquer**
$x < 2 \not\Rightarrow x^2 < 4$	$F(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ **não monótona (cr.)**

Uma consequência importante

$$F \text{ e } G \text{ (estr.) monótonas, } \begin{cases} \text{com o mesmo sentido} & \Rightarrow F \circ G \text{ (estr.) cr.} \\ \text{com sentidos diferentes} & \Rightarrow F \circ G \text{ (estr.) decr.} \end{cases}$$

ver *1.2 Universo das funções (complemento)*

4 Limite da composição

Supondo que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e que $\lim_{x\to b} g(x) = c$
podemos concluir que $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = c$ SE

1) g é contínua em b ou 2) g não está definida em b ou 3) $f(x) \neq b$ para qualquer $x \neq a$ "perto" de a ou ...

Exemplos: sejam $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $g(x) = \ln x$

- $\lim_{x\to 0} g\circ f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 0$, pois g é contínua em $b = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to 1} f\circ g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$, pois f não está definida em $b = \lim_{x\to 1} g(x) = 0$

Exercícios:

1. verifica que a condição 3) se aplica a ambos os exemplos anteriores
2. Dadas $f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, mostra que $g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
   e prova que, sem as hipóteses 1), 2), 3), ..., o enunciado é falso!

5 Derivada da composição

Regra da cadeia: se f é diferenciável em a (no interior de D_f) e g é diferenciável em $f(a)$ (no interior de D_g) então $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$

Uma (simples) demonstração em dois passos:

- $h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}, & y \neq f(a) \\ g'(f(a)), & y = f(a) \end{cases}$ é contínua em $y = f(a)$
- $h(f(x))\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$, $\forall x \in D_{g\circ f} \setminus \{a\}$, e se $x \to a \ldots$

Notação: encontra-se frequentemente uma notação mais compacta

- se $y = f(x)$, $z = g\circ f$ é função de x ($z = g(f(x))$) e também de y ($z = g(y)$)
- usando a notação diferencial de Leibniz, $f' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$ e $g' = \frac{dg}{dy} = \frac{dz}{dy}$
- logo, $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(y)f'(x) \to \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ (como se fossem frações)

wiki dot: em [*1.1 Ponto de partida*/*Informação adicional*] ver também Derivadas - parte 2 (revisão) e em [*1.3 Derivadas (complemento)*] ver Exercícios I

6 Inversas e derivadas

1. Justifica a invertibilidade e caracteriza a inversa de:

   (a) $f(x) = \operatorname{arccos} e^x$ (b) $g(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ (c) $h(x) = x\cdot|x| + 1$

Se f é contínua, injetiva no intervalo I e diferenciável em a (no interior de I)

$$f'(a) \neq 0 \iff f^{-1} \text{ é diferenciável em } b = f(a) \text{ e } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Assim, se as hipóteses são satisfeitas, tem-se que $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

2. Calcula, usando a fórmula da derivada da inversa, a derivada de:

   (a) $\sqrt{x}$ (b) $\ln x$ (c) $\operatorname{arccos} x$ (d) $\operatorname{arsenh} x\, [= \operatorname{senh}^{-1}(x)]$

Observação: se $y = f(x) \Rightarrow f' = \frac{dy}{dx}$, também $x = f^{-1}(y) \Rightarrow (f^{-1})' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'}$

wiki dot: em [*1.3 Derivadas (complemento)*] ver Derivada da inversa de uma função

7 Algumas observações

- Inequações com radicais (analisa e verifica também os casos '≤' e '≥')

$$\sqrt{A} < B \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A < B^2 \end{cases} \qquad \sqrt{A} > B \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} A > B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

- Resolve: a) $\sqrt{5+x} < 1 - x$ b) $\sqrt{5-x^2} \geq 1 + x$
- Mostra que, para $x \neq 0$, $(|x|)' = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (dica: $|x| = \sqrt{x^2}$)
- Lembrete: $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ (verificar!!)
- Seja g a inversa de f restrita a I: $f \circ g(x) = x, \forall x \in D_g$ e $g \circ f(x) = x, \forall x \in I$
  mas, geralmente, $g \circ f(x) \neq x, \forall x \in D_f$ (até pode não estar definida!)

$(\sqrt{x})^2 = x \quad (x \geq 0)$ $\qquad$ $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \quad (x \in [-1, 1])$

$\sqrt{x^2} = x, \; x \geq 0$ $\qquad$ mas, se $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x, \; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\qquad$ mas, se $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = ?!?$

8 Exercício de revisão

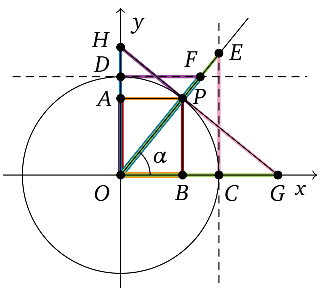
Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \ln(\frac{\pi}{2} - \arccos x)$.

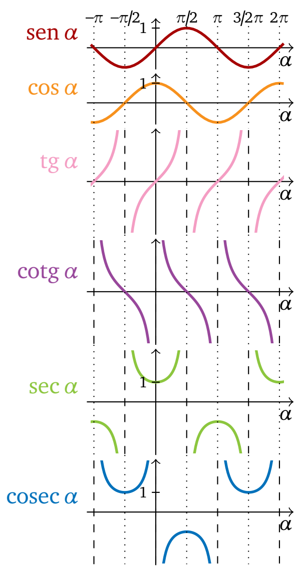
1. Defina a sua inversa, apresentando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.
2. Calcule $f(\cos(\frac{23\pi}{12}))$, apresentando o resultado na sua forma mais simples.
3. Encontre a expressão analítica da função derivada de f.
4. Aplicando o Teorema da derivada da função inversa, calcule $(f^{-1}(x))'$.
5. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\ln x}$.
6. Enuncie o Teorema de Lagrange. Justifique usando este teorema que
$$0 < x < 1 \Rightarrow f(x) < \ln(\tfrac{\pi}{2}).$$

(Teste 1 de Cálculo I, Agr. 1, 2020/21)

9 Pequeno resumo de trigonometria

$\overline{OP} = \overline{OC} = \overline{OD} = 1$
$\overline{OA} = \overline{BP} = \operatorname{sen}\alpha$
$\overline{OB} = \overline{AP} = \cos\alpha$
$\overline{CE} = \overline{GP} = \operatorname{tg}\alpha$
$\overline{DF} = \overline{HP} = \operatorname{cotg}\alpha$
$\overline{OG} = \overline{OE} = \sec\alpha$
$\overline{OH} = \overline{OF} = \operatorname{cosec}\alpha$
(sem sinal: para $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$)





$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\qquad$ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\quad$ $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}$ $\quad$ $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sec\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$

$(\operatorname{tg}\alpha)' = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$ $\qquad$ $(\sec\alpha)' = \sec\alpha\operatorname{tg}\alpha$

$(\operatorname{cotg}\alpha)' = -\frac{1}{\cos^2\alpha} = -1 - \operatorname{cotg}^2\alpha$ $\qquad$ $(\operatorname{cosec}\alpha)' = -\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$