Cálculo I - agr. 4 - 2021/22 - exame de recurso

Resolução:

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$

Nota que $\frac{\ln n}{n}<1$

(a) $$\sqrt[n]{\left|\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n\right|} = 1-\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

(5 pontos)

O Critério de Cauchy aplicado a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ apenas permite concluir quando $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\neq 1$ (sendo a série (absolutamente) convergente quando esse limite dá <1 e divergente quando esse limite dá >1 ou $+\infty$). Como no caso presente dá 1, nada permite concluir.

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^x$ dá uma indeterminação 1^∞.

(15 pontos)

Logaritmizando:

$$\ln\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^x = x\cdot\ln\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{\ln\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

dá uma indeterminação $\frac{0}{0}$ quando $x\to+\infty$.

Como $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{x\cdot 1/x-\ln x}{x^2}}{1-\ln x/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{1-\frac{\ln x}{x}} = -\infty,$$

pela Regra de Cauchy temos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}{1/x}} = 0.$$

(c) Como consequência da alínea anterior, também $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n=0$,

(10 pontos) ou seja, o termo geral da série tem limite zero quando $n\to+\infty$.

É sabido que isso não é suficiente para determinar a natureza da série.