Exame de recurso, 21/fevereiro/2022, CI pg. IV

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: ☐ (Questão 2). Resolução da questão 2

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $x^2 2^x$; (b) $\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}$; (c) $\frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}$.

Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) faz uma mudança de variável ou usa primitivação quase imediata.

Resposta à questão 2:

(a) $\int x^2 2^x \, dx \overset{ppp}{=} x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \int 2x \frac{2^x}{\ln 2} dx = x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int x 2^x dx$

$\overset{ppp}{=} x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(x \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx \right) = x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{(\ln 2)^2} x \cdot 2^x +$

$+ \frac{2}{(\ln 2)^2} \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^x}{\ln 2}\left(x^2 - \frac{2}{\ln 2} x + \frac{2}{(\ln 2)^2} \right) + C,$

$C \in \mathbb{R}$ em intervalos.

(b) $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx = \int \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2} dx = *$

MCI: $\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2} \Rightarrow 11x+16 = A_1(x+2)^2 +$

$+ A_2(x-1)(x+2) + A_3(x-1) \Leftrightarrow 11x+16 = A_1(x^2+4x+4) + A_2(x^2+x-2) +$

$+ A_3(x-1) \Leftrightarrow 11x+16 = (A_1+A_2)x^2 + (4A_1+A_2+A_3)x + (4A_1-2A_2-A_3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1+A_2=0 \\ 4A_1+A_2+A_3=11 \\ 4A_1-2A_2-A_3=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2=-A_1 \\ 3A_1+A_3=11 \\ 6A_1-A_3=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2=-A_1 \\ A_3=11-3A_1 \\ 6A_1-11+3A_1=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=3 \\ A_2=-3 \\ A_3=2 \end{cases}$

$* = 3\ln|x-1| - 3\ln|x+2| - 2\frac{1}{x+2} + C,$ $C \in \mathbb{R}$ em intervalos.

Exame de recurso, 21/fevereiro/2022, CI reg. IV

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: ☐ (Questão 2). Resolução da questão 2

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $x^2 2^x$; (b) $\dfrac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}$; (c) $\dfrac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}$.

Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) faz uma mudança de variável ou usa primitivação quase imediata.

Resposta à questão 2:

Primitivação quase imediata:

$$(c)\ \int \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x+1}{1+e^{2x}}\,e^x\,dx = \int \frac{u+1}{1+u^2}\,du =$$

$u=e^x$, $du=e^x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}\,du + \int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \arctan(u) + C = \ln\sqrt{1+e^{2x}} + \arctan(e^x) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$ em intervalos.

ou

Mudança de variável:

$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{t^2+t}{1+t^2}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+1}{1+t^2}\,dt =$$

$t=e^x \Leftrightarrow x=\ln t$, $dx=\frac{1}{t}\,dt$, $t>0$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan(t) + C$$

$$= \ln\sqrt{1+e^{2x}} + \arctan(e^x) + C,$$ $C\in\mathbb{R}$ em intervalos.