Temas: Introdução às equações diferenciais ordinárias (EDO).
Conceitos básicos e terminologia sobre EDO.
Problemas de Valores Iniciais.
EDO de 1ª ordem de variáveis separáveis. Técnica de resolução e discussão de vários exemplos.

Existem muitos problemas que quando formulados, em termos matemáticos, requerem a determinação de uma função que satisfaz determinadas condições, envolvendo uma ou várias derivadas dessa função desconhecida.

↳ esses problemas vão ser traduzidos por equações chamadas equações diferenciais

Exemplos de aplicação:

Exemplos:

1. Taxa de variação de temperatura de um objeto:

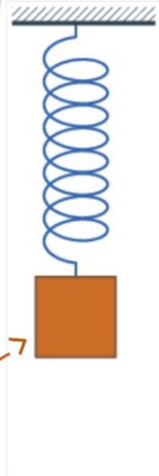
$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

$T(t) \rightarrow$ temperatura do objeto,
$T_m \rightarrow$ temperatura do meio ambiente, $k \rightarrow$ constante positiva.

2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$m \rightarrow$ massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical;
$x(t) \rightarrow$ deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola;
$k > 0 \rightarrow$ constante de mola; Ver figura



Geralmente chamamos somente de

Definição:

Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{(EDO)}$$

onde y é função (real) de x.

Terminologia associada:

y é designada por variável dependente;
x é designada por variável independente;
Uma EDO diz-se estar na forma normal quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

quando conseguimos isolar a derivada de maior ordem.

Notação alternativa: No slide anterior $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função y. Em alternativa, podemos usar a notação $\frac{d^n y}{dx^n}$ e (re)escrever a EDO na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Exemplos:

$xy' + y = 0$

envolve a função e a sua 1º derivada

$(y')^2 + y = \cos(x)$

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2xy = x^2 \operatorname{sen}(x)$

$\Leftrightarrow y'' + 2xy = x^2 \operatorname{sen}(x)$

envolve a função e a segunda derivada em ordem a x

Definição 2.2

Chama-se **ordem** de uma EDO, à maior ordem de derivada existente na equação.

Exemplos

- $xy' + y = 0$ ⟶ utiliza a função e a 1ª derivada → **ordem 1**
- $\frac{d^2y}{dx} + 2xy = x^2 \operatorname{sen}(x)$ ⟶ utiliza a função e a sua 2ª derivada → **ordem 2**
- $(y')^2 + y = \cos x$ ⟶ utiliza a função e a 1ª derivada → **ordem 1**

Solução de uma EDO

Em termos práticos, uma função é solução de uma EDO se, substituindo y na EDO, esta solução verifica a condição da EDO

Definição

Chama-se solução da equação diferencial

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

num intervalo I, a toda a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n, tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Exemplo:

$\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ são duas soluções (em $\mathbb{R}$) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!

Vamos verificar que φ_1 e φ_2 são soluções da EDO:

- $\varphi_1'(x) = \cos(x) \quad \varphi_1''(x) = -\operatorname{sen}(x)$

  $\varphi_1'' + \varphi_1 = -\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x) = 0 \implies$ Verifica a condição da EDO

- $\varphi_2'(x) = -\operatorname{sen}(x) - \cos(x)$

  $\varphi_2''(x) = -\cos(x) + \operatorname{sen}(x)$

  $\varphi_2'' + \varphi_2 = -\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = 0$

- Outras: $\varphi_3(x) = 0$ ou $\varphi_4(x) = \cos(x)$

Mais alguma terminologia

Integral Geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando *n* constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração(ou resolução) da EDO.

Integral Particular (ou solução particular): Solução que faz parte do integral geral;

Solução Singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral;

Solução Geral: Conjunto de todas as soluções.

Exemplo:

1. Determine a solução geral da EDO $y'' - \cos(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}$.
2. Considere a EDO de primeira ordem

$$(y')^2 - 4y = 0.$$

   (a) Verifique que o integral geral desta EDO é $y = (x + C)^2$, $C \in \mathbb{R}$.
   (b) Verifique que $y = x^2$ é uma solução particular da EDO dada.
   (c) Como classifica a solução $y = 0$?

$\boxed{1}$ $y'' = \cos(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$y' = \int \cos(x)\,dx$

$\Leftrightarrow y' = \operatorname{sen}(x) + C \ , C \in \mathbb{R}$

Primitivando andamos para trás

$y = \int \operatorname{sen}(x) + C \, dx$

$\Leftrightarrow y = -\cos(x) + Cx + D \ , C, D \in \mathbb{R}$

$\boxed{2}$ $(y')^2 - 4y = 0$

a) Para que $y = (x+C)^2$ seja o integral geral da EDO tem de verificar a condição da EDO qualquer que seja o valor de C. ($\forall C \in \mathbb{R}$)

$y' = 2(x+C)$

Substituindo,
$$(2(x+C))^2 - 4(x+C)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4(x+C)^2 - 4(x+C)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{c.q.m.}$$

b) $y = x^2$ é solução particular pois basta considerar $C=0$ no integral geral e obtemos essa expressão.

c) $y=0$ é solução singular pois não pode ser obtida do integral geral, mas é solução.

PVI

Definição:

Chama-se problema de valores iniciais (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

A solução de um PVI é uma solução particular da EDO dada.

Exemplo:

$y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI

Para que seja solução tem de verificar as 3 condições.

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

Vamos verificar...

$y' = -\frac{3}{6}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 \qquad y'' = -x$

$-x + x = 0 \Rightarrow$ verifica a cond. da EDO

$y(0) = -\frac{0^3}{6} + 1 = 1 \qquad y'(0) = -\frac{1}{2} \times 0^2 = 0 \qquad$ c.q.m

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, *i.e.*, do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO lineares (mais à frente).

Problema de valores de fronteira

Definição:

Chama-se problema de valores na fronteira (ou problema de fronteira) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo:

O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Qual é?

$$y'' = -x$$
$$\Leftrightarrow y' = \int -x \, dx$$
$$\Leftrightarrow y' = -\frac{x^2}{2} + C$$
$$y = \int -\frac{x^2}{2} + C \, dx$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{x^3}{6} + Cx + D$$
$$C, D \in \mathbb{R}$$

Usando as condições

$$\begin{cases} D - \frac{1}{2} + C = -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} + C + D + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \frac{1}{6} - C \\ 2C + \frac{1}{6} - C = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 1/6 \\ C = 0 \end{cases}$$

$y = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}$ é a solução.

EDO's de 1°ordem

EDOS de variáveis separáveis

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para p e q dependentes apenas de x e de y, respetivamente.

quando escrita na forma normal a EDO toma esta forma e é possível separar as variáveis x e y.

Esta EDO é equivalente a : $q(y)\, y' = p(x)$

$$\Leftrightarrow q(y) \frac{dy}{dx} = p(x) \Leftrightarrow q(y)\, dy = p(x)\, dx$$

Para encontrar o integral geral da EDO basta integrar de ambos os lados da EDO:

$$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$$

Exemplos

a) $y' + xy = 0$

b) $y' = \frac{1}{y} e^{x}$ $\quad y \neq 0$

a) $y' = -xy$

É possível separar as variáveis

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} y' = -x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{-\frac{x^2}{2} + C}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{C} \quad , C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO

b) $y' = \frac{1}{y} e^{x} \quad y \neq 0$

$\Leftrightarrow \; y y' = e^{x}$

$\Leftrightarrow \; y \, dy = e^{x} dx$

$\Leftrightarrow \; \int y \, dy = \int e^{x} dx$

$\Leftrightarrow \; \frac{y^2}{2} = e^{x} + C \quad , C \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ Integral geral da EDO de variáveis separáveis

Exercícios:

1 Determine o integral geral das EDOs:

(a) $y + y'\text{cosec}(x) = 0$

(b) $y^2 + y = (x^2 - x)y'$

(c) $y'\text{sen}(x) + y\cos(x) = 0$

(d) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

2 Determine a solução do problema de Cauchy PVF

(a) $y'\text{cotg}(x) + y = 2$, com $y(\pi/4) = -1$.

Exercício 2.5.

$\boxed{1}$ $y + y' \operatorname{cosec} x = 0$

$\Leftrightarrow y' = \dfrac{-y}{\operatorname{cosec} x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{y} y' = -\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$ ⇝ conseguimos separar de maneira a ter variavel y no 1º membro e variável x no 2º membro.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{y} dy = -\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x} dx$

Agora para resolver bastará integrar de ambos os lados.

$\Rightarrow \int \dfrac{1}{y} dy = \int -\dfrac{1}{\operatorname{cosec} x} dx$ $\rightarrow \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \cos x + C, C \in \mathbb{R}$ $\rightarrow \dfrac{-1}{\operatorname{cosec} x} = -\operatorname{sen} x$

→ Integral geral na forma implícita

$\Leftrightarrow y = e^{\cos x + C}, C \in \mathbb{R}$

→ Integral geral na forma explícita

Lembrem-se que podiamos escrever uma função nestas duas formas

b) $y^2 + y = (x^2 - x) y'$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2 - x} = \dfrac{1}{y^2 + y} y'$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{y^2 + y} dy = \dfrac{1}{x^2 - x} dx$ ⟶ EDO de var. separáveis

$\Rightarrow \int \dfrac{1}{y^2 + y} dy = \int \dfrac{1}{x^2 - x} dx$ ⇝ $\boxed{\text{Rever}}$ primitivação de funções racionais.

$\Leftrightarrow \int \dfrac{1}{y(y+1)} dy = \int \dfrac{1}{x(x-1)} dx$

$\Leftrightarrow \int \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{y+1} dy = \int \dfrac{C}{x} + \dfrac{D}{x-1} dx$

A, B, C e D podem ser encontradas no final.

$\Leftrightarrow A\ln|y| + B\ln|y+1| = C\ln|x| + D\ln|x-1| + E \ , \ E \in \mathbb{R}$

<u>Determinar A, B, C, D:</u>

$A(y+1) + By = 1$

$Ay + A + By = 1$

$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$

$C(x-1) + Dx = 1$

$Cx + Dx - C = 1$

$\begin{cases} C+D=0 \\ -C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=1 \\ C=-1 \end{cases}$

Integral geral na forma implicita:

$$\ln|y| - \ln|y+1| = -\ln|x| + \ln|x-1| + E \ , \ E \in \mathbb{R}$$

c) $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 0$

$\Leftrightarrow y' \operatorname{sen} x = -y\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} y' = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx \longrightarrow$ EDO de var. separáveis

$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx$ (u', u)

$\Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|\operatorname{sen} x| + C \ , \ C \in \mathbb{R}$

↳ Integral geral na forma implícita.

d) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

$\Leftrightarrow (1+y^2)dx = -(1+x^2)dy$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+y^2} dy$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2} dy = -\frac{1}{1+x^2} dx \longrightarrow$ EDO de var. separáveis

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{-1}{1+x^2} dx$

$\Leftrightarrow \arctan y = -\arctan x + C \ , \ C \in \mathbb{R}$

↳ Integral geral na forma implícita

2

$$\begin{cases} y' \cot(x) + y = 2 \\ y(\pi/4) = -1 \end{cases}$$

1º passo: Resolver a EDO dada:

$$y' \cot x = 2 - y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2-y} y' = \frac{1}{\cot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2-y} dy = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

$$\Rightarrow -\int \frac{-1}{2-y} dy = -\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx \Leftrightarrow \ln|2-y| = \ln|\cos x| + C$$

$C \in \mathbb{R}$

Integral geral na forma implícita

2º passo: Encontrar o valor concreto da constante

$$y(\pi/4) = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln|2-(-1)| = \ln|\cos \tfrac{\pi}{4}| + C$$

$$\Leftrightarrow \ln(3) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + C$$

$$\Leftrightarrow \ln(3) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = C$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(3 : \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = C$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right) = C$$

$$\Leftrightarrow \ln(3\sqrt{2}) = C$$

Solução do P. Cauchy:

$$\ln|2-y| = \ln|\cos x| + \ln(3\sqrt{2})$$

Exercícios Extra

folha de exercícios nº 4: 1 até 7.