Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2020/21**

3.º teste Duração: 1h00

- **Este teste termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera os seguintes integrais impróprios de 1.ª espécie:

   (i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$;

   (ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, onde $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} & \text{se } x \leq -2 \\ e^{-x} & \text{se } x > -2 \end{cases}$.

   Para cada um deles, determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula o seu valor.

2. (a) Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta. (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+(-1)^n}{n^3+3n^2+4}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$.

   (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-3)^{n-1}}{2^{2n}} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$.

3. Seja $\alpha > 0$. Embora a função $\frac{1}{x^\alpha}$ não seja integrável em $[0,1]$, define-se a quantidade $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ como $\lim_{y\to 0^+} \int_y^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, caso este limite exista. Com esta definição, mostra que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

FIM

Cotação:

1. 3; 2. 14; 3. 3.