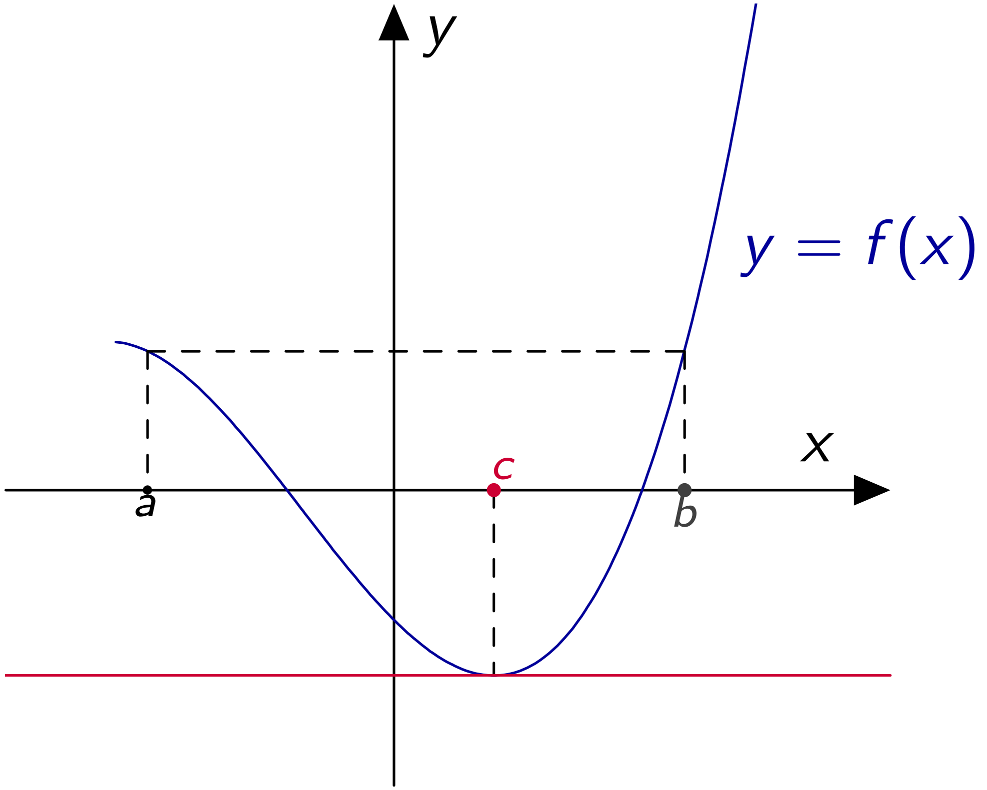
Teorema de Rolle :

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$

Ilustração Gráfica:



Corolários do Teorema de Rolle

Corolário:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f'.

Corolário:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f.

Exercício:

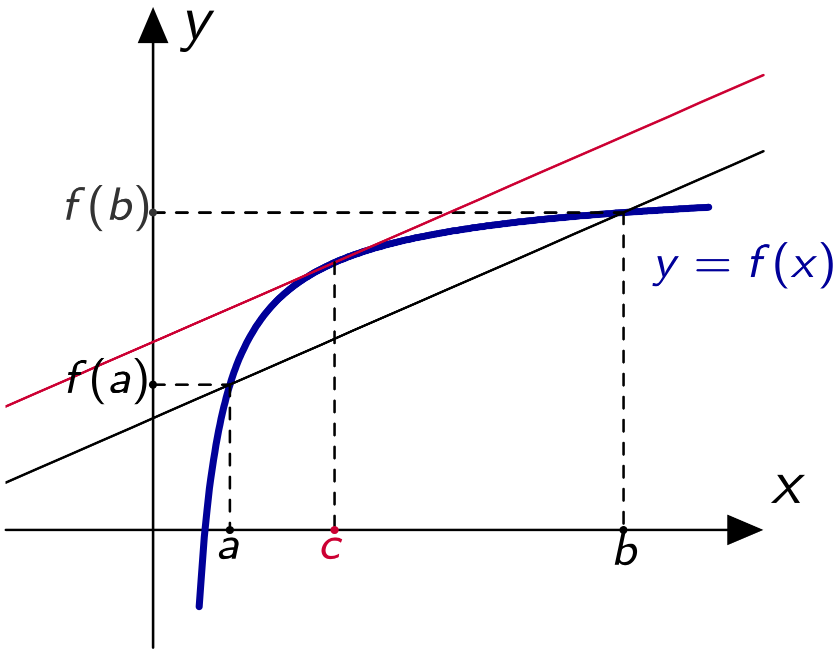
Mostrar que a função definida por $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ tem um único zero no intervalo $[-\pi\,,\,\pi]$.

Teorema de Lagrange:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Ilustração Gráfica:



Consequências do Teorema de Lagrange (sobre a monotonia)

Proposição:

Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I e diferenciável em $int(I)$. Então

(i) Se $f'(x) = 0, \forall x \in int(I)$, então f é constante em I.

(ii) Se $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in int(I)$, então f é crescente em I.

(iii) Se $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in int(I)$, então f é decrescente em I.

(iv) Se $f'(x) > 0, \forall x \in int(I)$,, então f é estritamente crescente em I.

(v) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in int(I)$, então f é estritamente decrescente em I.

Condição suficiente para a existência de extremo local para função contínua (em ponto onde esta poderá ser não diferenciável):

Proposição:

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b] \subseteq D_f$ e diferenciável em $]a, b[$, exceto possivelmente em $c \in]a, b[$. Então,

(i) se $f'(x) > 0$, para todo o $x < c$, e $f'(x) < 0$, para todo o $x > c$, então $f(c)$ é um máximo local de f ;

(ii) se $f'(x) < 0$, para todo o $x < c$, e $f'(x) > 0$, para todo o $x > c$, então $f(c)$ é um mínimo local de f .

Condição suficiente de segunda ordem para que um ponto crítico seja extremante

Proposição:

Seja c um ponto crítico de f num intervalo $]a\,,\,b[$. Admitamos que f é contínua em $]a\,,\,b[$ e f'' existe e é finita em todo o ponto de $]a\,,\,b[$. Então verificam-se as condições seguintes:

(i) se $f''(c) > 0.$, então c é um minimizante local;

(ii) se $f''(c) < 0$, então c é um maximizante local.

Teorema de Cauchy:

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$. Se $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Observação:

Do Teorema de Cauchy pode estabelecer-se uma regra — Regra de Cauchy — de grande utilidade no cálculo de limites quando ocorrem indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.
Nos cinco slides seguintes enunciam-se as várias formas dessa regra.

Regra de Cauchy (versão 1)

Proposição:

Sejam f e g funções diferenciáveis em $I =]a, b[$ tais que, para todo o $x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$.
Se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e existe o limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, .$$

Regra de Cauchy (versão 2)

Proposição:

Sejam f e g funções diferenciáveis em $I =]a, b[$ tais que, para todo o $x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$.

Se

$$\lim_{x \to b^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e existe o limite

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Regra de Cauchy (versão 3)

Proposição:

Sejam $I =]a, b[$ e $c \in I$. Sejam f e g funções definidas em $I \setminus \{c\}$ e diferenciáveis em $I \setminus \{c\}$, tais que $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in I \setminus \{c\}$. Se

$$g'(x) \neq 0, \quad \text{para todo o} \quad x \in I \setminus \{c\},$$

$$\lim_{x \to c} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e existe o limite

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Regra de Cauchy (versão 4)

Proposição:

Sejam f e g funções definidas em $I =]a, +\infty[$ e diferenciáveis em I, com $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$.
Suponhamos que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$.
Se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e

$$\text{existe} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Regra de Cauchy (versão 5)

Proposição:

Sejam f e g funções definidas em $I =]-\infty, b[$ e diferenciáveis em I, com $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$.
Suponhamos que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$.
Se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) \quad \text{são ambos nulos ou ambos infinitos}$$

e

$$\text{existe} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$