

- Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.

1. Considera os seguintes integrais:

$$(i) \int_1^3 \frac{1}{x^2 - 2x} dx; \quad (ii) \int_1^\infty (\ln x)^{-1/2} \frac{1}{x} dx.$$

- (a) Diz, para cada um deles e justificando devidamente, se estamos em presença de um integral de Riemann ou de um integral impróprio (e de que espécie).  
 (b) Para cada um dos integrais acima, faz o seguinte: no caso de ser de Riemann, calcula-o; no caso de ser impróprio, determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula-o também.

2. (a) Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right); \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n+1)^2}{\pi^{n+1}}.$$

- (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{(-2)^{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{n^2 - 1} \right)$ .

Sugestão: Tira partido do resultado enunciado na questão 5.(a) abaixo.

3. Determina a derivada no ponto  $x = 0$  da função  $F$  definida por

$$F(x) := \int_{\sin(x^2)}^{\sqrt{x^2+1}} \arctan(t^2) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Determina a natureza de

$$(a) \int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx; \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

5. Sejam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  duas séries numéricas. Mostra que

- (a) se forem ambas convergentes, então  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  também é convergente e  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ;  
 (b) se uma for convergente e a outra for divergente, então  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  diverge;  
 (c) se forem ambas divergentes, há casos em que  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  converge e outros em que  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  diverge.

**FIM**

**Cotação:**

1. 6;    2. 6;    3. 3;    4. 2,5;    5. 2,5.