Cálculo I - agr. 4 - 2021/22

Resolução da questão 1 do 1º teste (17 dezembro 2021)

1. $f(x) := \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(a) Domínio de definição D_f de f:

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x^2}{1+x^2} \in D_{\arcsin}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x^2}{1+x^2} \geq -1 \wedge \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq -1-x^2 \wedge 1-x^2 \leq 1+x^2\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : 1 \geq -1 \wedge 0 \leq 2x^2\right\} = \mathbb{R}.$$

(b) Para $x \neq 0$ e pela regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}}{1+x^2}} = \frac{-4x}{1+x^2}\,\frac{1}{\sqrt{4x^2}}.$$

Como $f'(x) > 0$ para $x < 0$, $f'(x) < 0$ para $x > 0$, e $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, conclui-se pelo <u>Critério da Monotonia</u> que f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.

Logo, 0 é o único extremante, maximizante absoluto, e $f(0) = \arcsin(1) = \pi/2$ é o único extremo, máximo absoluto.