3. (a) Teorema de Rolle:

(5 pontos) Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ regular (com $a < b$)
e tal que $f(a) = f(b)$. Então $\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$.

(b) f regular em $[a,b]$; $F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} x$, $x \in [a,b]$.

i. F é regular em $[a,b]$, i.e., contínua em $[a,b]$ e
diferenciável em $]a,b[$:

(10 pontos) Como f tem essas propriedades e qualquer poli-
nómio também, então o mesmo se passa com
a diferença que define F.

(*) $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $x \in]a,b[$.

ii. $F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} a = f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} b$

(5 pontos) $\Leftrightarrow f(a) - f(b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-b)$

$\Leftrightarrow f(a) - f(b) = -f(b) + f(a) \Leftrightarrow 0 = 0$,

proposição verdadeira, logo o mesmo vale a $F(a) = F(b)$.

iii. Usando F em vez de f no Teorema de Rolle (já que,
por i e ii, F obedece às hipóteses desse teorema),
(10 pontos) concluímos que $\exists c \in]a,b[: \underbrace{F'(c) = 0}$.

$\Uparrow \leftarrow$ por (*)

$$f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$$