Cálculo I – agr. 4 2020/21

1.º teste – turmas TP4B-1, TP4A-7, TP4B-6

<u>Resolução</u>

1. $f(x) := \arcsin(x^2-2x+1)$

(a) (50 pontos)

$$D_f = \{x\in\mathbb{R} : x^2-2x+1 \in \underbrace{D_{\arcsin}}_{\substack{\parallel \\ [-1,1]}}\}$$

<u>C.A.</u>: $-1 \le x^2-2x+1 \le 1$

$\Leftrightarrow -1 \le (x-1)^2 \le 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \le 1$

$\Leftrightarrow -1 \le x-1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$

$\therefore D_f = [0,2]$.

(b) (120 pontos)

$$f'(x) = \frac{(x^2-2x+1)'}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)^2}} = \frac{2x-2}{\sqrt{1-(x-1)^4}}, \quad 0<x<2$$

(cf. alínea (a))

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x-2>0 \Leftrightarrow x>1$ em $]0,2[$

	0		1		2
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

← As monotonias indicadas incluem os extremos, mesmo f não sendo diferenciável aí, porque f é contínua em $[0,2]$.

Existe apenas um mínimo, $f(1)$, que é absoluto, sendo 1 o único minimizante (absoluto). ($f(1)=\arcsin 0 = 0$)

Existem apenas $\overset{\sigma(s)}{}$ máximo(s) relativo(s) $f(0)$ e $f(2)$ e os respetivos maximizantes 0 e 2. Como $f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ e $f(2) = \arcsin(4-4+1) = \frac{\pi}{2}$, então é mesmo só um máximo, $\frac{\pi}{2}$, que é absoluto, sendo 0 e 2 maximizantes absolutos.

<u>NOTA</u>: Em alternativa, os T. Weierstrass e Fermat podem ser usados para detetar extremos e extremantes absolutos, mas algo mais tem que ser dito para se concluir que não há outros extremos.

2. (a) Universo: conjunto das funções $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

(10 pontos) Hipótese: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e injectiva

Tese: f e f^{-1} são ambas estritamente crescentes ou ambas estritamente decrescentes; a imagem $f([a,b]) =: J$ é um intervalo limitado e fechado; $f^{-1}: J\to\mathbb{R}$ é contínua

<u>NOTA</u>: Há ligeiras variantes para o que se pode considerar o universo e a hipótese.

(b) Sabendo que $x\mapsto \operatorname{tg} x$ é contínua, e injectiva, em

(20 pontos) $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, então também tem as mesmas propriedades em qualquer intervalo $[a,b]\subset\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Aplicando então o T. inversão à função tangente restrita a $[a,b]$, conclui-se que a função arctg é contínua em $[\operatorname{tg} a,\operatorname{tg} b]$. Como para qualquer ponto $x\in D_{arctg}=\mathbb{R}$ existem sempre $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $x\in\,]\operatorname{tg} a,\operatorname{tg} b[$ (pois $\lim_{y\to\pm\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} y=\pm\infty$) e, como vimos, arctg é contínua em $[\operatorname{tg} a,\operatorname{tg} b]$, então também é contínua em x.