Cálculo I - Ag. 4 (2020/21)

1.º Teste (Turmas TP4-B4 e TP4-B5)

1. $f(x) := x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

a) (50 pts)

$$D_f = \left\{\left(x \in D_{4-x^2} \wedge 4-x^2 \in D_{\sqrt{\ }}\right) \wedge \left(x \in D_{\frac{x}{2}} \wedge \frac{x}{2} \in D_{\arcsin}\right)\right\}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 4-x^2 \geqslant 0 \wedge \left|\frac{x}{2}\right| \leq 1\right\}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 4 \wedge |x| \leq 2\right\}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 2 \wedge |x| \leq 2\right\} = [-2, 2]$$

b) (120 pts) f é contínua por ser uma soma de produtos de funções contínuas (compostas com funções contínuas).

$D_f = [-2, 2]$ é um intervalo limitado, fechado não degenerado

O Teorema de Weierstrass garante que o $CD_f = [m, M]$ onde m é o mínimo absoluto de f e M é o máximo absoluto de f.

Para $x \in \operatorname{int}(D_f) =]-2, 2[$:

$$f'(x) = x'(4-x^2)^{1/2} + x\left[(4-x^2)^{1/2}\right]' + 2\,\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\left[\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)\right] + \frac{1}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4-x^2 - x^2 + 2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{6-2x^2}{\underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{>0}} \quad , \quad \mathcal{D}_{f'} =]-2,2[$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6-2x^2=0 \Leftrightarrow 2x^2=6 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \vee x=+\sqrt{3}$$

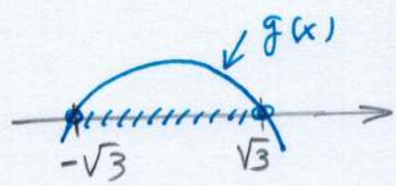
- Conjunto de pontos críticos $\mathcal{C} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \subset \mathcal{D}_{f'}$
- conjunto de pontos sem derivada $\mathcal{N} = \{-2, 2\}$
- conjunto de pontos fronteiros $\mathcal{F} = \{-2, 2\}$
- Conjunto de candidatos a extremantes

$$E = \mathcal{C} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{F} = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$$

Estudo de $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) := 6-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = +\sqrt{3}$$

$$g''(x) = (6-2x^2)'' = -4 < 0$$



$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2[$$

Há que calcular os valores de f nos pontos do conjunto E.

Mostra-se isso no quadro de variação:

x	-2		$-\sqrt{3}$		$+\sqrt{3}$		2
$f'(x)$	N.D.	$-$	0	$+$	0	$-$	N.D.
$f(x)$	$-\pi$	$\searrow$	$-(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3})$	$\nearrow$	$+(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3})$	$\searrow$	π
	‖ máximo relativo		m (mínimo absoluto)		M (máximo absoluto)		K mínimo relativo

$$f(-2) = -2\sqrt{4-(-2)^2} + 2\arcsin\left(-\frac{2}{2}\right) = 2\arcsin(-1) = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$$

$$f(2) = -2\sqrt{4-(2)^2} + 2\arcsin\left(\frac{2}{2}\right) = 2\arcsin(1) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}\sqrt{4-(-\sqrt{3})^2} + 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} + 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 2\left(-\frac{\pi}{3}\right), \text{ pois } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}\sqrt{4-(\sqrt{3})^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$$

Há que ordenar os valores de $f(-2), f(2), f(\sqrt{3})$ e $f(-\sqrt{3})$

Para isso, basta verificar que $\sqrt{3} > \frac{\pi}{3}$

pois $(\sqrt{3})^2 > \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 3 > \frac{\pi^2}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi^2 < 27$, o que é óbvio

$\pi^2 < 4^2 = 16 < 27$.

Então

$$f(\sqrt{3}) > f(2) > f(-2) > f(-\sqrt{3})$$

$$\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} > \pi > -\pi > -(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3})$$

Conclusão:

- O Máximo absoluto $M = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$ é atingido no maximizante absoluto $x_M = +\sqrt{3}$.
- O Mínimo absoluto $m = -\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ é atingido no minimizante absoluto $x_m = -\sqrt{3}$.
- No ponto fronteiro $x = -2$ a função atinge um máximo relativo.
- No ponto fronteiro $x = 2$ a função atinge um mínimo relativo.

Não há outros extremantes pois f é diferenciável em $\text{int}(D_f)$ e só foram encontrados os dois pontos críticos assinalados.

2. $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b > a$

f regular em $[a,b]$ (cont. em $[a,b]$ e dif. em $]a,b[$).

$f'(x) \neq 1, \forall x \in]a,b[$.

Mostrar que

"$f(x) = x$ tem no máximo uma solução em $[a,b]$".

<u>Método</u>: Redução ao absurdo (argumentar por contradição)

(10 pts) a) <u>1.º Passo:</u>

Supor, por absurdo, que $f(x) = x$ tem duas soluções distintas x_1 e x_2 em $[a,b]$ implica que x_1 e x_2 seriam zeros distintos de $g(x) := f(x) = x$ em $[a,b]$.

$$\begin{cases} f(x_1) = x_1 \\ f(x_2) = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x_1) - x_1 = 0 \\ f(x_2) - x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g(x_1) = 0 \\ g(x_2) = 0 \end{cases} \quad \text{com } x_1 < x_2$$

(sem perda de generalidade)

(15 pts) b) <u>2.º Passo:</u>

Aplicar o Teorema de Rolle para contradizer uma das hipóteses (qual?).

$g := f(x) - x$ é regular por ser a soma de funções regulares em $[a,b]$. O T. Rolle é aplicável a g em $[a,b]$ uma vez que $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Concluo: $\exists c \in]x_1, x_2[\subset [a,b] : g'(c) = 0$

(05 pts)

Mas $g'(x) = [f(x) - x]' = f'(x) - 1$. $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = 1$ (contradição)

Conclusão por contradição > Supor que $f(x) = x$ tem duas soluções distintas é absurdo. Então, no máximo há uma