Indicações relativas à resolução do teste facultativo:

1. $f(x) := \frac{\pi}{2} - \arccos(1+x-x^2)$

A resolução é essencialmente a mesma que a da questão correspondente da 2.ª OT, para a qual foi disponibilizada resolução, de modo que aqui indicam-se somente as conclusões.

(a) $D_f = [-1,0] \cup [1,2]$.

(b) Máximo absoluto: $\frac{\pi}{2}$

Maximizantes absolutos: 0 e 1.

Mínimo absoluto: $-\frac{\pi}{2}$.

Minimizantes absolutos: -1 e 2.

2. (a) por partes tal como sugerido

$$\int (2x^3+x)\cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \left(2\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^4+x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^4+x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{1+x^2}}\,dx$$

$$= \frac{x^4+x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + C \quad \text{em intervalos}$$

$$= \frac{x^4+x^2}{2}\cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6} + C \quad \text{em intervalos.}$$

(b) C.A.: $\frac{2x+1}{x^3+x} = \frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

função racional própria

$$\Rightarrow 2x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = \underbrace{Ax^2}+A+\underbrace{Bx^2}+Cx$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=2 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=2 \\ B=-A=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x+2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| + \int \frac{-x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C \text{ em intervalos.}$$

(c) C.A.: Seguindo a sugestão: $x = 3\sec t$, $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;

$dx = 3.\sec t.\,\mathrm{tg}\,t\,dt$ $\qquad \cos t = \frac{3}{x} \Leftrightarrow t = \arccos\frac{3}{x}$

mantém o sinal (positivo, neste caso) para $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$$\int \frac{3}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx = \int \frac{\cancel{3}\times \cancel{3}.\sec t.\,\mathrm{tg}\,t}{\cancel{9}.\sec^2 t.\sqrt{9\sec^2 t-9}}\,dt$$

mudança de variável $x = 3.\sec t$, $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

$$= \int \frac{\mathrm{tg}\,t}{\sec t\sqrt{9.\mathrm{tg}^2 t}}\,dt = \frac{1}{3}\int \cos t.(-1)\,dt$$ (pois $\mathrm{tg}\,t < 0$ qd $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$).

$$= -\frac{1}{3}\sin t + C = -\frac{1}{3}\sin\left(\arccos\frac{3}{x}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}} + C$$ (usando o facto de $\sin t > 0$ qd $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$)

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2}} + C \qquad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C$$ (pois $x<0$, já que $\underbrace{x<-3}_{\text{ver enunciado}}$)

em intervalos.

3. $f(x) := \arcsin x$, $x \in [-1,1]$.

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\arcsin 1 - \arcsin x}{1-x}$: indet. $\frac{0}{0}$.

Tentando usar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{0-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-1} = \infty . \quad \therefore \lim_{x\to 1^-} \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \infty .$$

(b) Suponhamos que existe $k>0$ t.q.

$$f(1)-f(x) \le k(x-1) \quad \text{para } x\in[-1,1].$$

Ora $x\le 1 \Rightarrow x-1\le 0 \Rightarrow k(x-1)\le 0$.

Por outro lado, $f(x) = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, que é crescente, logo $f(1)-f(x)\ge 0$ para $x\in[-1,1]$. P.e., para $x=0$ tem-se

$$\frac{\pi}{2} = f(1)-f(0) \le k(0-1) = -k, \quad \text{com } k>0,$$

o que é uma contradição.

Obs: O enunciado deste exercício era para ter sido feito com $k(1-x)$ em vez de $k(x-1)$. Por lapso ficou esta última versão, o que tornou o exercício mais fácil de resolver (não sendo necessário invocar a alínea (a) para o efeito).

Segue-se uma resolução alternativa tirando-se partido da alínea anterior.

b). Suponhamos que existe $k>0$ tal que

$f(1)-f(x) \leq k(x-1) \quad \forall x \in [-1,1]$

. Se $x=1$: $f(1)-f(1) \leq k(1-1)$

$0 \leq 0$ ✓

$0=0$

. se $x \in [-1,1[$: $f(1)-f(x) \leq k(x-1)$

$\frac{f(1)-f(x)}{x-1} \geq k$, porque $x-1<0$ para $x \in [-1,1[$

Pela alínea anterior:

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = +\infty$, logo

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(1)-f(x)}{x-1} = -\infty$, o que contradiz que $\exists k>0$

tal que $\frac{f(1)-f(x)}{x-1} \geq k \quad \underline{\forall x} \in [-1,1[$

logo que $f(1)-f(x) \leq k(x-1) \quad \underline{\forall x} \in [-1,1]$