Cálculo I – Agr. 4 (2020/21)

1.º Teste – Turmas TP4-A3 e TP4-A4

Resolução:

$$f(x) := \arcsin\left(-2x + x^2\right) - \frac{\pi}{4}$$

a) (50 pts)

$$D_f = \{ x \in \underbrace{D_{-2x+x^2}}_{\mathbb{R}} : -2x + x^2 \in D_{\arcsin} \}$$

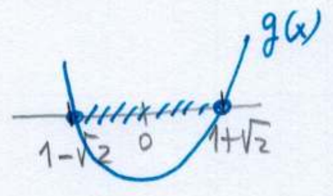
$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : |-2x + x^2| \leq 1 \}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x \leq 1 \\ x^2 - 2x \geq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) := x^2 - 2x - 1 \leq 0 \\ h(x) := x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Estudar $g(x)$:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = \underbrace{1+\sqrt{2}}_{\in \mathbb{R}^+} \vee x = \underbrace{1-\sqrt{2}}_{\in \mathbb{R}^-}$$

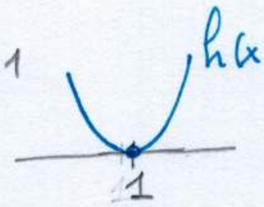


Como $g''(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)'' = 1 > 0$

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$$

Estudar $h(x)$:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \Leftrightarrow x = 1$$



Como $h''(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)'' = 1 > 0$

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] \} = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$$

Nota: $1 \in D_f = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

intervalo compacto

b) (120 pts) $D_f = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ é limitado, fechado e não degenerado.

f é contínua por ser a composição de funções contínuas somada a uma constante $(-\pi/4)$.

$(m \leq M)$

O Teorema de Weierstrass garante que $CD_f = [m, M]$ onde m é o mínimo absoluto de f e M o máximo absoluto de f.

$$f'(x) = \frac{(-2x+x^2)'}{\sqrt{1-(x^2-2x)^2}} \quad , \; 1-(x^2-2x)^2 \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{1-(x^2-2x)^2}} \quad , \; (x^2-2x)^2 \neq 1 \Leftrightarrow |x^2-2x| \neq 1$$

$$D_{f'} = \{ x \in D_f : |x^2-2x| \neq 1 \}$$

$$\begin{cases} x^2-2x \neq 1 \\ x^2-2x \neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \neq 0 \\ h(x) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 1-\sqrt{2} \wedge x \neq 1+\sqrt{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$D_{f'} =]1-\sqrt{2}, 1[\cup]1, 1+\sqrt{2}[$$

- Conjunto de pontos críticos, $\mathcal{C} = \{ x \in D_{f'} : f'(x) = 0 \} = \{\}$
- Conjunto dos pontos sem derivada, $\mathcal{N} = \{1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}\}$
- Conjunto dos pontos fronteiros de D_f = $\mathcal{F} = \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$

Candidatos a extremantes relativos $E = \{1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}\}$

$(E = \mathcal{C} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{F})$

Há que calcular o valor de f nos pontos de E.
Isso fica claro no quadro de variação:

x	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$
$f'(x)$	N.D.	$-$	N.D.	$+$	N.D.
$f(x)$	$\pi/4$	$\searrow$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\nearrow$	$\pi/4$
	$\parallel$ M		$\parallel$ m	ponto anguloso	$\parallel$ M

$$f(1-\sqrt{2}) = \arcsin\left(-2(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})^2\right) - \frac{\pi}{4}$$
$$f(1-\sqrt{2}) = \arcsin(1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = M$$

$$f(1+\sqrt{2}) = \arcsin\left(-2(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2\right) - \frac{\pi}{4}$$
$$f(1+\sqrt{2}) = \arcsin(1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = M$$

$$f(1) = \arcsin(-2+1^2) - \frac{\pi}{4} = \arcsin(-1) - \frac{\pi}{4}$$
$$f(1) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

Como $M = \frac{\pi}{4} > m = -\frac{3\pi}{4}$, então $CD_f = \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$M = \frac{\pi}{4}$ é máximo relativo e absoluto atingido em dois maximizantes alternativos $\left|\begin{array}{l} x_{M_1} = 1-\sqrt{2} \\ x_{M_2} = 1+\sqrt{2} \end{array}\right.$

$m = -\frac{3\pi}{2}$ é o mínimo relativo e absoluto atingido no minimizante único $x_m = -\frac{3\pi}{2}$.

Não há outros extremantes relativos no interior de D_f (não há pontos críticos em $\text{int}(D_f)$).

2. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, f contínua em $[0,2]$.

(30 pts) $2 \leq f'(x) \leq 3$, $\forall x \in [0,2]$

$f(0) = -1$.

Aplicar o T. Lagrange para provar que $\begin{cases} f(2) \geq 3 \\ f(2) \leq 5 \end{cases}$

f é regular em $[0,2]$ por ser contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]0,2[$ (Note: $f'(x)$ finita em $]2,3[$)

O T. Lagrange é aplicável a f em $[0,2]$ concluindo-se que

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(\xi) \text{, para algum } \xi \in]0,2[$$

$$2 \leq \frac{f(2) - \overbrace{f(0)}^{=-1}}{2-0} = f'(\xi) \leq 3 \text{ , pois } \xi \in]0,2[$$

$$2 \leq \frac{f(2)+1}{2} \leq 3$$

$$4 \leq f(2) + 1 \leq 6$$

$$3 \leq f(2) \leq 5 \text{ , como pretendido.}$$

//