Cálculo I – Agr. 4 (2020/2021)

2.º Teste – Turmas TP4-A4 e TP4-A3

1. a) $\int \arccos x \, dx$, por partes:

(30 pts)

$$\int \underbrace{(1)}_{u'} \cdot \underbrace{\arccos}_{v} dx = x \arccos x - \int \frac{x}{-\sqrt{1-x^2}} dx \quad , |x|<1$$

$$= x \arccos x + \left(-\frac{1}{2}\right) \int (-2x) (1-x^2)^{-1/2} dx$$

$$= x \arccos x - \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{+1/2}}{+1/2}$$

$$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C,$$

C constante real em intervalos.

1. b) $\int \frac{x+3}{x^4-x^2} dx$, fração racional própria

$$\frac{x+3}{x^4-x^2} = \frac{x+3}{x^2(x^2-1)} = \frac{x+3}{x^2(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{x+3}{x^4-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

$$x+3 = Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1)$$

$$x+3 = Ax^3 - Ax + Bx^2 - B + Cx^3 + Cx^2 + Dx^3 - Dx^2$$

$$x+3 = (A+C+D)x^3 + (B+C-D)x^2 - Ax - B$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B+C-D=0 \\ -A = 1 \\ -B = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=-3 \\ C+D=1 \\ C-D=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=-3 \\ C=2 \\ D=-1 \end{cases}$$

$$2C = 4$$

$$\int \frac{x+3}{x^4-x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= -\ln|x| - 3\,\frac{x^{-1}}{-1} + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C,$$

C é constante real em intervalos.

$$= -\ln|x| + \frac{3}{x} + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$$= \frac{3}{x} + \ln\left(\frac{(x-1)^2}{|x(x+1)|}\right) + C$$

1. c) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin t \quad , \; t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[= I$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x = \sin t \iff t = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t > 0, \; \forall t \in I$ (sinal constante)

$dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\,dt$

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx = \int \frac{1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\,dt$$

$$= \int \frac{1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t}{\cancel{2}\,\cancel{\sqrt{1-\sin^2 t}}}\;\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\,\cancel{\cos t}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}t - \frac{2}{3}\cos t + C,$$ C constante real em intervalos

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}t - \frac{2}{3}\cos t + C$$

Mudança de variável inversa:

$t = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$; $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}x \overset{|t|<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}$

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2} + C,$$

C constante real em intervalos.

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{3}\sqrt{4-3x^2} + C$$

2. a) $f(x) := -x$, $g(x) := 1 + (x+1)^2$

$g(x) = 1 + x^2 + 2x + 1$

$g(x) = x^2 + 2x + 2$

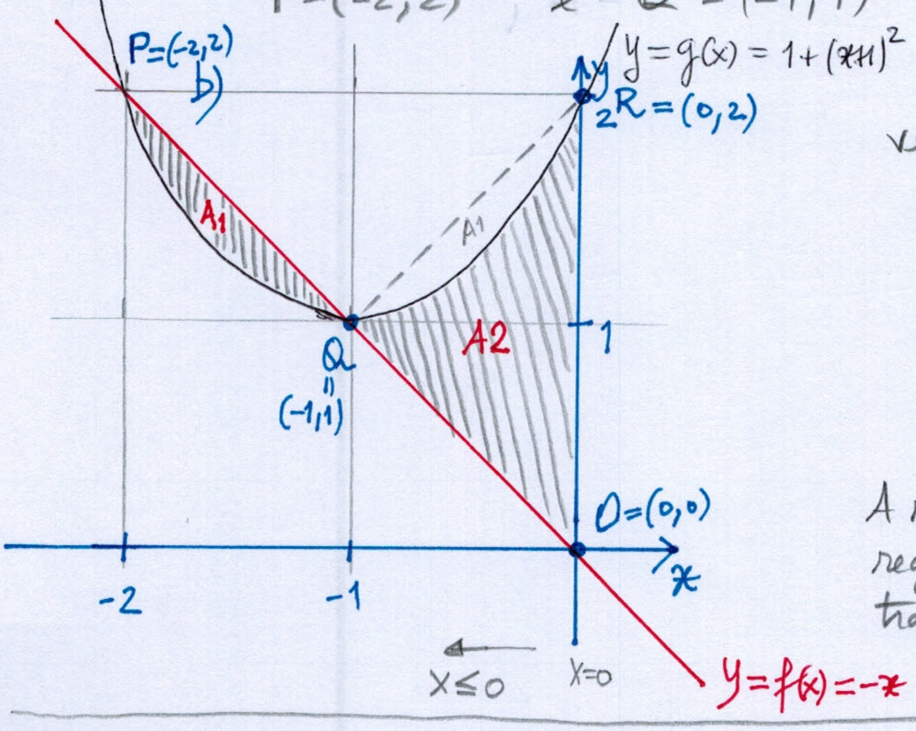
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x = x^2+2x+2 \Leftrightarrow x^2+3x+2 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm 1}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$

Os pontos de interseção são

$P = (-2,2)$ e $Q = (-1,1)$

b)



vértice da parábola é o ponto Q

$g'(x) = 2x+2 = 0$

$x = -1$

$g''(x) = 2 > 0$, gráfico de g convexo

$g(0) = 2$ é a ordenada na origem

A região A é a reunião das regiões A_1 e A_2 indicadas a tracejado.

$A = \frac{2\times 1}{2} = 1$

Invocando argumentos de simetria, a área de A é a área do triângulo RQO

c) Já vimos que $A = 1$. Trata-se da área do ΔRQO.

Usando integrais de Riemann (f e g são integráveis, até contínu

$$A = \int_{-2}^{0} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-2}^{-1} f(x) - g(x)\, dx + \int_{-1}^{0} g(x) - f(x)\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{-1} -x - (x^2+2x+2)\, dx + \int_{-1}^{0} x^2+2x+2+x\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{-1} -x^2 - 3x - 2\, dx + \int_{-1}^{0} x^2+3x+2\, dx$$

A Regra de Barrow pode ser aplicada porque os polinómios são primitiváveis e integráveis

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{3}{2}(-1)^2 - 2(-1)\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - \underbrace{\frac{3}{2}(-2)^2}_{6} - 2(-2)\right] + \left[0\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 3\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right]$$

$$A = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \cancel{2} - \frac{8}{3} + 6 - \cancel{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \cancel{2}$$

$$A = \frac{-6}{3} - \frac{6}{2} + 6$$

$A = -2 - 3 + 6 = 1$, tal como esperado.

05.
05.

3. f é contínua em $\mathbb{R}$

$$\varphi(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

a) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função φ é diferenciável em todo o intervalo $[\alpha, \beta]$ (limitado e fechado) que contenha o ponto $t=0$. Na verdade, f é contínua. Mais ainda,

$$\varphi'(x) = f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por hipótese φ atinge máximo em $x = a \in \mathbb{R}$, sendo $\mathbb{R}$ aberto. Como a é um ponto crítico, interior, de uma função diferenciável, aplica-se o Teorema de Fermat:

$$\varphi'(a) = 0 = f(a).$$

b) Usando a desigualdade triangular generalizada, o que foi dito na alínea a), a definição de máximo (global) de uma função num intervalo:

$$\forall \underset{b>0}{x \in [0,b]} \text{ tem-se } |\varphi(x)| = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt$$

O Teorema de Weierstrass garante que todos os máx. referidos existem. f e φ são contínuas e $[0,b]$ compacto

Resulta para todo o $x \in [0,b]$:

$$|\varphi(x)| \leq \max_{x \in [0,b]} |\varphi(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq b \cdot \max_{x \in [0,b]} |f(x)|$$

Concluo: $\max\limits_{x \in [0,b]} |\varphi(x)| \leq b \cdot \max\limits_{x \in [0,b]} |f(x)|$

Esta relação é mesmo uma igualdade, por exemplo, se $f(x) = 0$, pois

$$|\varphi(x)| = 0 = \max_{x \in [0,b]} |\varphi(x)| = b \cdot 0.$$

Nota: Pode provar-se que se $f(x) = k$ for uma função constante em $\mathbb{R}_0^+$ então obtém-se também uma igualdade

$$b \cdot \max_{x \in [0,b]} |f(x)| = b|k| = \max_{x \in [0,b]} |\varphi(x)|.$$