Cálculo I – ap. 4   2020/21
2º teste – turmas TP4B-2, TP4B-7

Resolução

1. (a)
(35 pontos)

$$\int \frac{arctg\, x}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \cdot arctg\, x - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= -\frac{arctg\, x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx$$

$$= -\frac{arctg\, x}{x} + \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= -\frac{arctg\, x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

C constante em intervalos.

C.A.: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$

$\Rightarrow 1 = A + Ax^2 + Bx^2 + Cx$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$

(b)
(40 pontos)

$$\int \frac{1}{x^2(1-x^2)}\, dx = \int \frac{1}{x^2(1-x)(1+x)}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + C$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,$$

C constante em intervalos.

C.A.: $\frac{1}{x^2(1-x)(1+x)} =$

$= \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{1-x} + \frac{D}{1+x}$

$\Rightarrow 1 = A(1-x^2) + Bx(1-x^2) + Cx^2(1+x) + Dx^2(1-x)$

$\Leftrightarrow 1 = A - Ax^2 + Bx - Bx^3 + Cx^2 + Cx^3 + Dx^2 - Dx^3$

$\Rightarrow \begin{cases} -B+C-D=0 \\ -A+C+D=0 \\ B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C-D=0 \\ C+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$

(c)
(25 pontos)

$$\int \frac{\sqrt[4]{x} + x}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \int \frac{t + t^4}{t^2} 4t^3\, dt$$

$$= 4\int t^2 + t^5\, dt = 4\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^6}{6} + C$$

$$= \frac{4}{3} x^{3/4} + \frac{2}{3} x^{3/2} + C,$$

C constante em intervalos.

C.A.: Mudança de variável dada por $x = t^4, t > 0$
($\Leftrightarrow t = \sqrt[4]{x}, x > 0$).

$\frac{dx}{dt} = 4t^3 > 0$ (sinal constante)

Em alternativa (em vez de reqnir a reyextar):

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}+x}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}+x^{1-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

$$= \frac{4}{3}x^{3/4}+\frac{2}{3}x^{3/2}+c \;,\; C \text{ constante em intervalos.}$$

2. $A := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y \le \sqrt{x^2-x^4}\right\}$.

(a)

(10 pontos)

$$x^2-x^4 \ge 0 \Leftrightarrow x^4 \le x^2 \Leftrightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$$
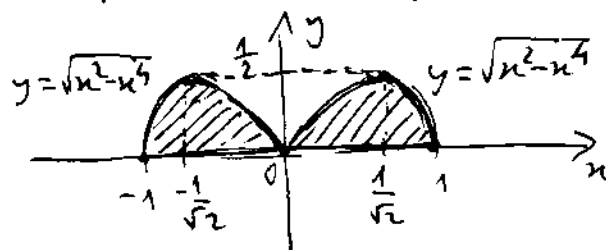
∴ Os valores de x para os quais $\sqrt{x^2-x^4}$ faz sentido são o de intervalo $[-1,1]$.

(b)

(10 pontos)

$$\sqrt{x^2-x^4}=0 \Leftrightarrow x^2-x^4=0 \Leftrightarrow x^2(1-x^2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=1$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=1.$$

Os pontos pedidos são $(0,0)$, $(-1,0)$ e $(1,0)$.

(c)

(20 pontos)

Região A a sombreado

NOTA: Não era muito importante determinar o máximo de funções, a monotonia e as concavidades. Pelos lados anteriores, em cada um dos intervalos $[-1,0]$ e $[0,1]$ o gráfico está acima do eixo dos xx, exceto em -1, 0 e 1, em que está exatamente nesse eixo. E o gráfico é simétrico relativamente ao eixo dos yy, pois $\sqrt{x^2-x^4}$ é par.

Referimo-nos à função e ao gráfico de $y=\sqrt{x^2-x^4}$

(d)

(30 pontos)

$$\text{Área de } A = 2\int_0^1 \sqrt{x^2-x^4}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= -\left[\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3}.$$

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua ; $a \in \mathbb{R}$; $(I_a f)(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(a)

(10 pontos)

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, atendendo a que $t \mapsto \int_a^t f(s)\,ds$ é contínua em $\mathbb{R}$, atendendo a que f é integrável (é até contínua) em qualquer intervalo limitado e fechado contendo o ponto a.

$$(I_a(I_a f))''(x) = \left(\int_a^x \int_a^t f(s)\,ds\,dt \right)''$$

$$= \left(\int_a^x f(s)\,ds \right)' = f(x).$$

Novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, agora atendendo à continuidade de f em $\mathbb{R}$.

(b)

(20 pontos)

Na 2ª parcela usamos o Teorema Fundamental do Cálculo, pela justificação dada na última passagem da alínea (a).

Pela linearidade do integral (e alteramos a primeira e nome da variável de integração no primeiro integral)

$$(I_a(I_a f))(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)\,ds\,dt \quad \leftarrow \text{Integração por partes}$$

$$= \left[t \cdot \int_a^t f(s)\,ds \right]_a^x - \int_a^x t \cdot f(t)\,dt$$

$$= x \cdot \int_a^x f(s)\,ds - a \cdot \underbrace{\int_a^a f(s)\,ds}_{=0} - \int_a^x t \cdot f(t)\,dt$$

$$= \int_a^x x\,f(t) - t\,f(t)\,dt = \int_a^x (x-t)\,f(t)\,dt$$

É claro que isto é o mesmo que usar x em vez de t por variável de integração.

NOTA: Seria admissível usar-se a informação dada em (b) para se resolver a alínea (a) de um modo diferente do indicado acima.