Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2016/17**

exame de recurso Duração: 2h45

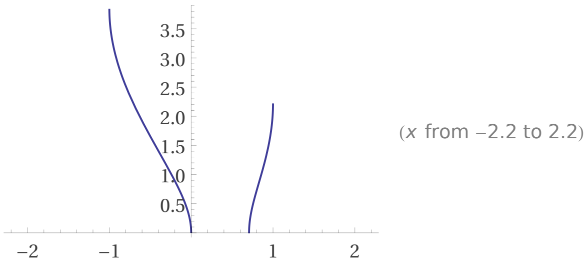
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \sqrt{4\,(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x}.$$

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

(a) Determina o domínio D_f de definição de f.

(b) Determina, caso existam, os extremos absolutos e os extremantes absolutos de f (se achares que não existem, deves explicar porquê).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $\cos(\ln x)$;

(b) $\dfrac{2x^4 + x}{x^3 - x^2 + x - 1}$;

(c) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes; na alínea (c) faz a mudança de variável definida por $x = \frac{1}{t}$.

3. Seja $\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| \le y \le \sqrt{x} + 1\}$.

(a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = |x-1|$ e de $y = \sqrt{x} + 1$.
Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(0, 1)$ e $(4, 3)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

(b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

(c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

4. Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3n}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$.

5. Determina a soma da seguinte série convergente: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1+e^{-n}}{1+e^{-n-2}}\right)$.

6. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente monótona crescente. Mostra que a função F definida por

$$F(x) = \int_{x^2+x}^{x^2+x+2} f(t)\,dt \quad \text{no intervalo} \quad x \in [0,\, 2]$$

atinge os seus extremos absolutos nas extremidades deste intervalo; nomeadamente, o mínimo absoluto no ponto $x=0$ e o máximo absoluto no ponto $x=2$.

FIM

Cotação:

1. 3; 2. 6; 3. 3; 4. 4; 5. 1,5; 6. 2,5.