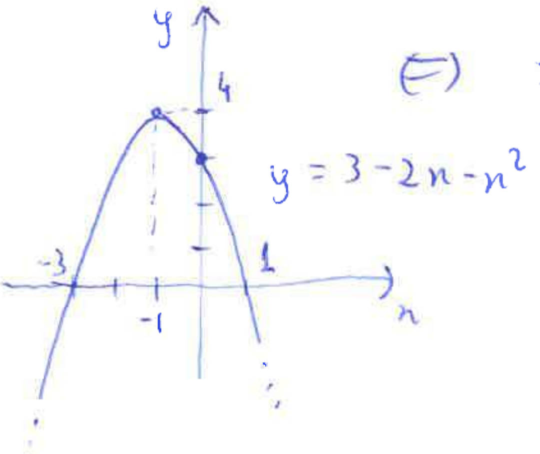
1. (a) Como $D_{\arctan} = \mathbb{R}$, vem que

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : 3 - 2x - x^2 \geq 0 \} = [-3, 1].$$

$$3 - 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow 4 - (x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 4 - (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2 \lor x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = 1 \lor x = -3$$



Note-se também que f é contínua, o que será importante para as conclusões da alínea seguinte.

(b) $$f'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\sqrt{3 - 2x - x^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} \cdot (-2 - 2x)$$

$$= \frac{1 + x}{1 + 3 - 2x - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} \cdot \frac{x+1}{5 - (x+1)^2}$$

, para $x \in]-3, 1[$;

$f'(-1) = 0$, $\quad x \in]-3, -1[\Rightarrow f'(x) < 0$ (f estritamente decrescente),

$x \in]-1, 1[\Rightarrow f'(x) > 0$ (f estritamente crescente);

$f(-1) = \frac{\pi}{4} - \arctan(2)$, $f(-3) = f(1) = \pi/4$.

Donde, $\frac{\pi}{4} - \arctan(2)$ é mínimo absoluto, com $x = -1$ o único minimizante (absoluto), e $\frac{\pi}{4}$ é máximo absoluto, com $x = -3$ e $x = 1$ os dois maximizantes (absolutos).

f não tem mais extremos (cf. variação acima).

2.

(a) $\int x^2 \cdot x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

$= x^2\left(-\frac{\cos(x^2)}{2}\right) - \int 2x\left(-\frac{\cos(x^2)}{2}\right)dx$

$= -\frac{x^2\cos(x^2)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} + C,\ C\in\mathbb{R}$
(em intervalos)

(b)

$\frac{2x+27}{x(x-3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$

$2x+27 = A(x-3)(x^2-6x+9) + Bx(x^2-6x+9) + C(x-3)x + Dx$

$2x+27 = A(x^3-6x^2+9x-3x^2+18x-27) + B(x^3-6x^2+9x) + C(x^2-3x) + Dx$

$2x+27 = (A+B)x^3 + (-9A-6B+C)x^2 + (27A+9B-3C+D)x - 27A$

$\begin{cases} A+B=0 \\ -9A-6B+C=0 \\ 27A+9B-3C+D=2 \\ -27A=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ C=-9+6=-3 \\ D=2+27-9-9=11 \\ A=-1 \end{cases}$

$\int \frac{2x+27}{x(x-3)^3}dx = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} + \frac{11}{(x-3)^3} - \frac{3}{(x-3)^2}\right)dx$

$= -\ln|x| + \ln|x-3| + \frac{3}{x-3} - \frac{11}{2(x-3)^2} + C,\ C\in\mathbb{R}$
(em intervalos)

(c) $\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \int \operatorname{senh}t \cdot \operatorname{senh}t\,dt$

$= \int\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \int \frac{e^{2t}-2e^te^{-t}+e^{-2t}}{4}\,dt$

c. aux.
$x=\cosh t,\ t>0$
$\frac{dx}{dt} = \operatorname{senh}t > 0$
para $t>0$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} - 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right] + C$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} - 2t\right] + C$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})}{2} - 2t\right] + C = \frac{1}{2}\operatorname{senh}t\cosh t - \frac{t}{2} + C$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\,x - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C,\ C\in\mathbb{R}$ (em intervalos $x>1$)

3. Regra de primitivação quase imediata

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivável, onde D é um conjunto aberto. Seja $\varphi : A \subset \mathbb{R} \to D$ diferenciável, onde A é um conjunto aberto. Se F for uma primitiva de f, então $F \circ \varphi$ é uma primitiva de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Prova: De facto, pela regra da cadeia verifica-se que

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \underset{\uparrow}{=} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \,,$$

pois F é primitiva de f, por hipótese

donde a conclusão, atendendo à definição de primitiva.

4.

(a) $x^2 - \dfrac{2}{1+x^2} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(1+x^2)-2}{\underbrace{1+x^2}_{>0}} \leq 0$$

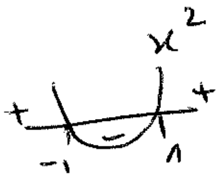
$$\Leftrightarrow x^2 + x^4 - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2+2)}_{>0}(x^2-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$



$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x^2 = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x^2 = -2 \vee x^2 = 1$$

(b)

$$A = \int_{-2}^{2} \underbrace{\left| f(x) - g(x) \right|}_{\text{função par porque } f(-x)=f(x) \text{ e } g(-x)=g(x)} dx = 2\int_0^2 |f(x)-g(x)|\, dx$$

cf. sinais dados pela equivalência da alínea anterior

$$= 2\left[\int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2\right) dx + \int_1^2 \left(x^2 - \frac{2}{1+x^2}\right) dx \right]$$

$$= 2\left[\left(2\,\mathrm{arctg}\,1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(2\,\mathrm{arctg}\,0 - \frac{0^3}{3}\right) + \left(\frac{2^3}{3} - 2\,\mathrm{arctg}\,2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2\,\mathrm{arctg}\,1\right) \right]$$

$$= 2\left[\pi + \frac{6}{3} - 2\,\mathrm{arctg}\,2 \right]$$

$$= 2\pi + 4 - 4\,\mathrm{arctg}\,2.$$

5. (a) Os dois integrais $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\,dx$ e $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ são impróprios de 1.ª espécie, porque os intervalos de integração $[2,+\infty[$ e $[1,+\infty[$ respectivamente são ilimitados à direita, e ambas as funções integrandas $\frac{1}{x \ln x}$ e $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ são contínuas em qualquer dos subintervalos $[2,b]$ e $[1,\beta]$, com $b>2$ e $\beta>1$ respectivamente, logo são aí integráveis à Riemann.

(b)

(i) $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\,dx = \lim\limits_{\beta\to+\infty} \int_2^\beta \frac{1}{x\ln x}\,dx =$

$= \lim\limits_{\beta\to+\infty} \left[\ln(\ln x)\right]_2^\beta = \lim\limits_{\beta\to+\infty}\left(\ln(\ln\beta) - \ln(\ln 2)\right) =$

$= +\infty$ Divergente (note-se que $\ln x > 0$ para $x>1$, donde em particular para $x\geq 2$)

(ii) Como este integral é do tipo $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ com $\alpha>1$ será (absolutamente) convergente e a sua soma é $\frac{1}{\alpha-1}$.

De facto:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right]_1^\beta = -2\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}-1\right) = 2$$

6. (a) (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(2+\frac{1}{n^2}\right)$ diverge porque falha a condição necessária de convergência:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(2+\frac{1}{n^2}\right) = \ln 2 \neq 0, \text{ logo}$$

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \ln\left(2+\frac{1}{n^2}\right)$ também não é zero

já que $\ln\left(2+\frac{1}{n^2}\right) = \left|(-1)^n \ln\left(2+\frac{1}{n^2}\right)\right|$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{n^n}$ converge absolutamente pelo Critério de D'Alembert (ou da razão):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n \frac{2^n n!}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!\, n^n}{2^n n!\,(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{2}{e} < \frac{2}{2{,}7} < 1.$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{9}{6^n}\left(-\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 9\left(\frac{3}{30}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

7.

$$\frac{d}{dx}\int_{\arcsin x}^{\arccos x} \sin|t|\,dt = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\arccos x}\sin|t|\,dt - \int_0^{\arcsin x}\sin|t|\,dt\right)$$

Aditividade do integral e convenção, atendendo também a que a função integranda fica definida em todo o $\mathbb{R}$

$$= \sin|\arccos x|\cdot(\arccos x)' - \sin|\arcsin x|\cdot(\arcsin x)'$$

Linearidade da derivada, Teorema Fundamental do Cálculo (atendendo a que $\sin|t|$ é contínua) e Regra da cadeia

$$= \sin(\arccos x)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sin|\arcsin x|\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\arccos x \geq 0$

$$= -\frac{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} - \sin|\arcsin x|\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$, atendendo a que $\arccos x \in [0,\pi]$

Estudo da 2ª parcela:

- Se $x\in[0,1[$, $\arcsin x \geq 0$, logo
  $\sin|\arcsin x| = \sin(\arcsin x) = x$;
- Se $x \in]-1,0[$, $\arcsin x < 0$, logo
  $\sin|\arcsin x| = \sin(-\arcsin x) =$
  $= -\sin(\arcsin x) = -x$

Retomando os cálculos anteriores,

$$\frac{d}{dx}\int_{\arcsin x}^{\arccos x}\sin|t|\,dt = \begin{cases} -1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x\in[0,1[\\[2ex] -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x \in]-1,0[\end{cases}$$

<u>Resolução alternativa:</u>

1º: Cálculo de $\displaystyle\int_{\arcsin x}^{\arccos x}\sin|t|\,dt$:

$\arccos x$ é sempre ≥ 0, mas $\arcsin x$ não.

Caso $x\in[0,1[$: neste caso $\arcsin x \geq 0$ e portanto

$$\int_{\arcsin x}^{\arccos x} \sin|t|\,dt = \int_{\arcsin x}^{\arccos x} \sin t\,dt \underset{\uparrow}{=} \left[-\cos t\right]_{\arcsin x}^{\arccos x} =$$

Fórmula de Barrow
($\sin t$ é contínua)

$$= -\cos(\arccos x) + \cos(\arcsin x) = -x \underset{\uparrow}{+} \sqrt{1-x^2}\,.$$

pois neste caso
$\arcsin x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

Caso $x \in]-1,0[$: neste caso $\arcsin x < 0$ e portanto

$$\int_{\arcsin x}^{\arccos x} \sin|t|\,dt = \int_{\arcsin x}^{0} \sin(-t)\,dt + \int_{0}^{\arccos x} \sin t\,dt =$$

Fórmula de Barrow ($\sin t$ é contínua)

$$= \left[\cos t\right]_{\arcsin x}^{0} - \left[\cos t\right]_{0}^{\arccos x} =$$

$$= 1 - \cos(\arcsin x) - \cos(\arccos x) + 1$$

$$= 2 - \sqrt{1-x^2} - x$$

pois neste caso $\arcsin x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Em resumo: $$\int_{\arcsin x}^{\arccos x} \sin|t|\,dt = \begin{cases} -x + \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in [0,1[\\ 2 - x - \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in]-1,0[\end{cases}$$

2º: $$\frac{d}{dx} \underbrace{\int_{\arcsin x}^{\arccos x} \sin|t|\,dt}_{f(x) :=} = \begin{cases} -1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x \in]0,1[\\ -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x \in]-1,0[\end{cases}$$ ⊛

Em 0 calculamos através da def. de derivadas laterais:

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2 - x - \sqrt{1-x^2} - 1}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - x - \sqrt{1-x^2}}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

R. Cauchy $$= \lim_{x\to 0^-} \left(-1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -1\,;$$

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x+\sqrt{1-x^2}-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1-x+\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{R. Cauchy}}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(-1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -1.$$

Assim, existe $f'(0)$ e é igual a -1, podendo este caso incluir-se no ramo de cima da chaveta em ⊛ da pág. anterior.

Obs.: Para quem pense que, seguindo a abordagem alternativa, no 2.º passo se poderia ter logo incluído o caso de $f'(0)$ no ramo de cima em ⊛, atendendo a que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$, chama-se à atenção que nem sempre o limite das derivadas é igual à derivada no limite. No caso presente até existe justificação teórica que permitiria esse atalho, mas essa justificação teórica não foi dada nas aulas, por isso não se podia assumir como conhecida.