

Funções Inversas

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)

Paolo Vettori

Sandrina Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Aveiro

Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Def. 1.1

Uma função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se função real de variável real.

A D_f chamamos **domínio** de f . Quando a ação de f é descrita por uma expressão numérica, D_f é um subconjunto do conjunto D constituído pelos números reais para os quais essa expressão tem significado.

Obs. 1.2

Sempre que a ação de f seja descrita por expressões numéricas, e nada for referido em contrário, toma-se para domínio de f o conjunto D .

Def. 1.3

O **contradomínio** de uma função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto CD_f constituído pelos valores que f assume, isto é,

$$CD_f = \{f(x) : x \in D_f\} = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \wedge x \in D_f\}.$$

Exer. 1.4

Determine o domínio e o contradomínio da função (f definida analiticamente por)
 $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$.

Def. 1.5

Uma função $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função **injetiva** se, para todo o $x_1, x_2 \in D_f$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou de forma equivalente se, para todo o $x_1, x_2 \in D_f$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exer. 1.6

Verifique se as funções $f(x) = 3x - \pi$ e $g(x) = x^2 + 4$ são injetivas.

Def. 1.7

Seja $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **injetiva**. A função

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}: & CD_f & \rightarrow \mathbb{R} \\ & y & \mapsto x \end{array}$$

onde x é tal que $f(x) = y$, é designada por **função inversa** de f .

Dizemos que uma função é **invertível** se admite inversa.

Obs. 1.8

- ▶ O contradomínio de f^{-1} é D_f (isto é, $CD_{f^{-1}} = D_f$);
- ▶ Se f é invertível, f^{-1} é invertível e $(f^{-1})^{-1} = f$;
- ▶ $\forall x \in D_f, \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$;
- ▶ $\forall y \in CD_f, \quad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$;
- ▶ $\forall x \in D_f, \quad \forall y \in CD_f, \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$;
- ▶ Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à reta $y = x$.

Exer. 1.9

Caracterize a inversa das funções $f(x) = 3x - \pi$ e $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

Prop. 1.10

Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **estritamente monótona** em D_f , então f é **injetiva**.

Prop. 1.11

Se $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **estritamente crescente/decrecente** em D_f , então f^{-1} é **estritamente crescente/decrecente** em CD_f .

Prop. 1.12

Seja f uma função contínua e **estritamente crescente/decrecente** num intervalo $[a, b]$. Sejam $c = f(a)$ e $d = f(b)$, então

- (i) f^{-1} é **estritamente crescente** em $[c, d]$ / **decrecente** em $[d, c]$;
- (ii) f^{-1} é contínua.

Função exponencial e Função logaritmo

6

Def. 1.13

Função exponencial de base a :
($a > 0$ e $a \neq 1$)

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

Def. 1.14

g é **estrit. crescente** se $a > 1$ e **estrit. decrescente** se $a < 1$.

Portanto g é invertível nos dois casos. A **inversa de g** é a função,

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \log_a x \end{aligned}$$

onde $y = \log_a x$ sse $a^y = x$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

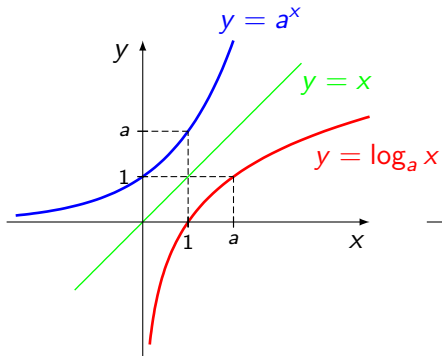
Obs. 1.15

$\log_a x$ lê-se **logaritmo de x na base a** . No caso de $a = e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\log_e x$ lê-se **logaritmo natural de x** ou logaritmo neperiano de x .

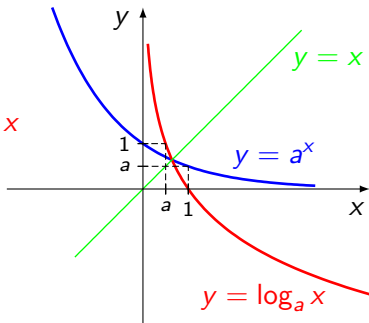
Gráficos das funções $y = a^x$ e $y = \log_a x$

7

Caso $a > 1$



Caso $0 < a < 1$



Prop. 1.16

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\mathbf{1} \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\mathbf{2} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\mathbf{3} \quad \log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x; \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\mathbf{4} \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Exer. 1.17

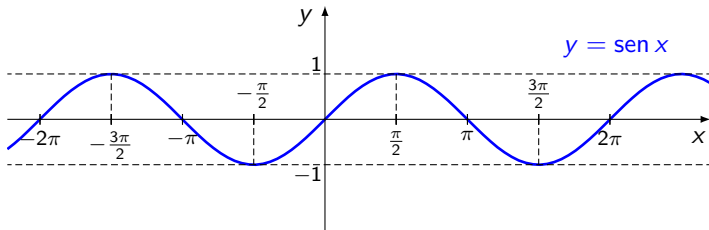
Caracterize a inversa das funções:

$$(a) \quad f(x) = e^{1-2x} \qquad (b) \quad f(x) = \frac{5 \ln(x-3)-1}{4}$$

$$(c) \quad f(x) = \log_3(2-x) \qquad (d) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

Def. 1.18

Função seno: $\text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \text{sen } x$



Prop. 1.19

Propriedades da função seno:

- ▶ **Domínio:** \mathbb{R} ; **Contradomínio:** $[-1, 1]$;
- ▶ **Função periódica** de período 2π , isto é,
 $\text{sen } x = \text{sen}(x + 2k\pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ **Função ímpar** ($\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$);
- ▶ **Não é injetiva**, mas **a sua restrição ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ já é injetiva.**

Def. 1.20

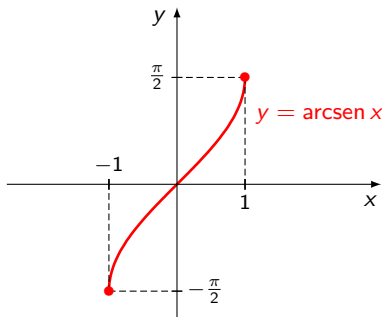
A restrição principal da função seno é a função injetiva

$$\begin{aligned} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$$

A inversa de f é chamada de **função arco seno**, denota-se por **arcsen**, e define-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \arcsen : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \arcsen x \end{aligned}$$

onde, $y = \arcsen x$ sse $\sin y = x$, $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Sempre que houver necessidade de fazer uso de inversas de funções trigonométricas está implicitamente assente que o domínio tomado é o das suas restrições principais.

Exer. 1.21

Caracterize a inversa das funções definidas por:

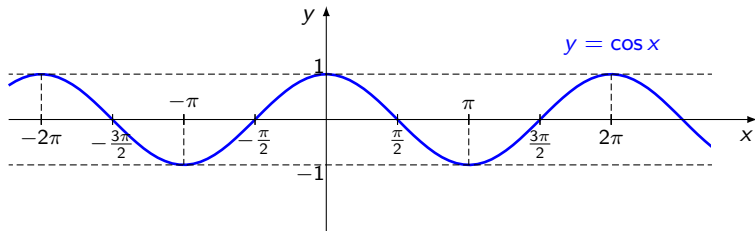
$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2 \operatorname{arcsen}(1-x)}{3}$$

$$(c) \quad f(x) = 2 \operatorname{arcsen}(\sqrt{x}) - \pi$$

Def. 1.22

Função cosseno: $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \cos x$



Prop. 1.23

Propriedades da função cosseno:

- ▶ **Domínio:** \mathbb{R} ; **Contradomínio:** $[-1, 1]$;
- ▶ **Função periódica** de período 2π , isto é,
 $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ **Função par** ($\cos(-x) = \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$);
- ▶ **Não é injetiva.** No entanto, **a sua restrição ao intervalo $[0, \pi]$ já é injetiva.**

Def. 1.24

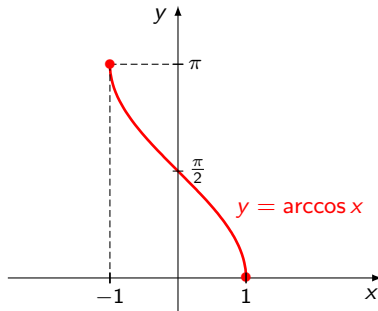
A restrição principal da função cosseno é a função injetiva

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$$

A inversa de f é chamada de função arco cosseno, denota-se por \arccos e define-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \arccos x \end{aligned}$$

onde $y = \arccos x$ sse $\cos y = x$, $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall y \in [0, \pi]$.



Exer. 1.25

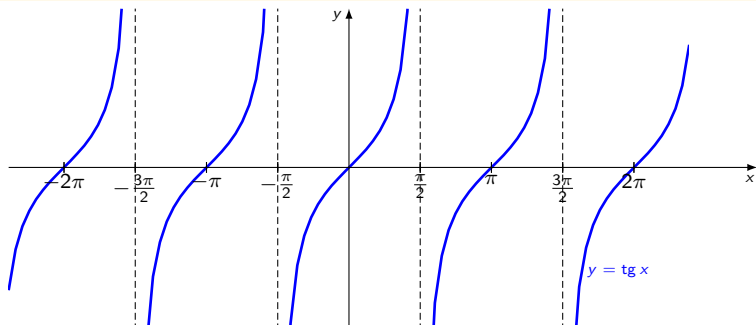
Caracterize a inversa das funções definidas por:

$$(a) \ f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$$

$$(b) \ f(x) = 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Def. 1.26

Função tangente: $\operatorname{tg} : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$



Prop. 1.27

Propriedades da função tangente:

- ▶ **Domínio:** $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; **Contradomínio:** \mathbb{R} ;
- ▶ **Função periódica** de período π , isto é, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, $\forall x \in D$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ **Função ímpar** ($\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$), $\forall x \in D$;
- ▶ **Não é injetiva.** No entanto, **a sua restrição ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ já é injetiva.**

Def. 1.28

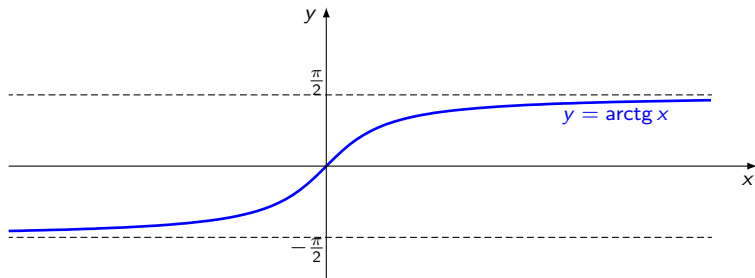
A **restrição principal da função tangente** é a função injetiva

$$\begin{array}{ccc} f : &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

A **inversa de f** é chamada de **função arco tangente**, denota-se por **arctg** e define-se do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arctg} : & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \operatorname{arctg} x \end{array}$$

onde $y = \operatorname{arctg} x$ sse $\operatorname{tg} y = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



Exer. 1.29

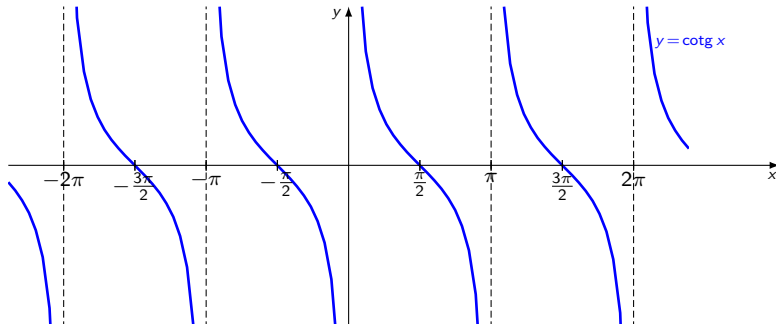
Caracterize a inversa das funções definidas por:

(a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2-x}\right)$

(b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(1-x)$

Def. 1.30

Função cotangente: $\cotg : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$



Prop. 1.31

Propriedades da função cotangente:

- ▶ **Domínio:** $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; **Contradomínio:** \mathbb{R} ;
- ▶ **Função periódica** de período π , isto é, $\cotg x = \cotg(x + k\pi)$, $\forall x \in D$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ **Função ímpar** ($\cotg(-x) = -\cotg(x)$, $\forall x \in D$);
- ▶ **Não é injetiva.** No entanto, **a sua restrição ao intervalo $]0, \pi[$ já é injetiva.**

Def. 1.32

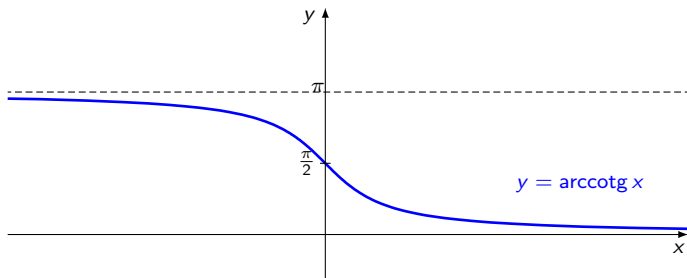
A **restrição principal da função cotangente** é a função injetiva

$$\begin{aligned} f :]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cotg x \end{aligned}$$

A **inversa de f** é chamada de **função arco cotangente**, denota-se por **arccotg** e define-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \operatorname{arccotg} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \operatorname{arccotg} x \end{aligned}$$

onde $y = \operatorname{arccotg} x$ sse $\cotg y = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]0, \pi[$.



Exer. 1.33

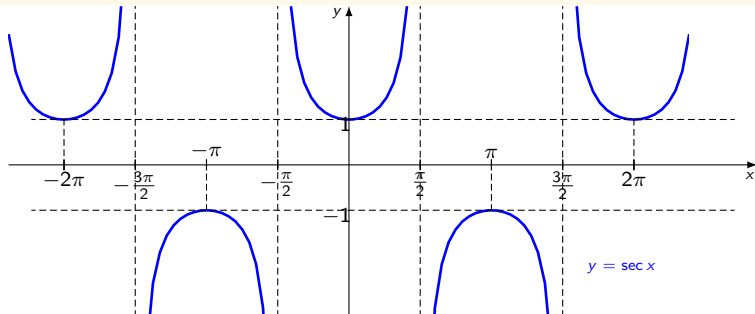
Caracterize a inversa das funções definidas por:

(a) $f(x) = 2 \cotg\left(\frac{x}{3}\right)$

(b) $f(x) = \pi + \operatorname{arccotg}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Def. 1.34

Função secante: $\sec : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sec x = \frac{1}{\cos x}$



Prop. 1.35

Propriedades da função secante:

- ▶ **Domínio:** $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; **Contrad.:** $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$;
- ▶ **Função periódica** de período 2π , isto é,
 $\sec x = \sec(x + 2k\pi), \forall x \in D$ e $k \in \mathbb{Z}$;
- ▶ **Função par** ($\sec(-x) = \sec(x), \forall x \in D$;
- ▶ **Não é injetiva.** Contudo, **a sua restrição ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2} [\cup] \frac{\pi}{2}, \pi]$ é injetiva.**

Def. 1.36

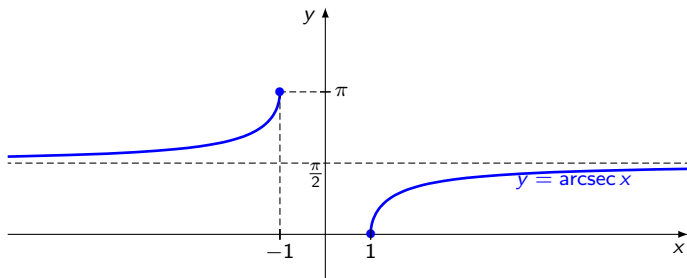
A **restrição principal da função secante** é a função injetiva

$$f : \begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{2} [\cup] \frac{\pi}{2}, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sec x \end{array}$$

A **inversa de f** é chamada de **função arco secante**, denota-se por **arcsec** e define-se do seguinte modo:

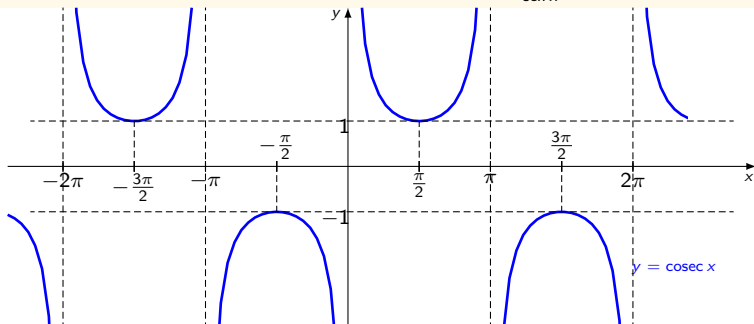
$$\text{arcsec} : \begin{array}{ccc}] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \text{arcsec } x \end{array}$$

onde, $\forall x \in] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \forall y \in [0, \pi] \setminus \{ \frac{\pi}{2} \}, y = \text{arcsec } x$ sse $\sec y = x$.



Def. 1.37

Função cossecante: $\operatorname{cosec} : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$



Prop. 1.38

Propriedades da função cossecante:

- ▶ **Domínio:** $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; **Contradomínio:** $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$;
- ▶ **Função periódica** de período 2π ($\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(x + 2k\pi)$, $\forall x \in D$ e $k \in \mathbb{Z}$);
- ▶ **Função ímpar** ($\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec}(x)$);
- ▶ **Não é injetiva.** Contudo, a sua restrição ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}]$ é injetiva.

Def. 1.39

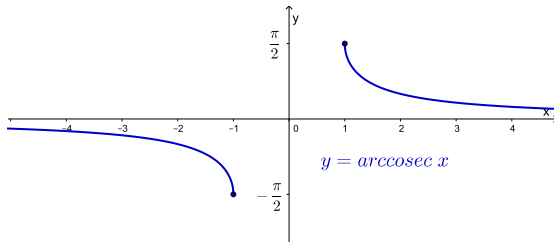
A **restrição principal da função cossecante** é a função injetiva

$$\begin{array}{ccc} f : [-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{cosec} x \end{array}$$

A **inversa de f** é chamada de **função arco cossecante**, denota-se por **arccosec** e define-se do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arccosec} :]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \operatorname{arccosec} x \end{array}$$

onde, $\forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \forall y \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}, y = \operatorname{arccosec} x$ sse $\operatorname{cosec} y = x$.



Obs. 1.40

Função	Domínio	Contradomínio
$\arcsen x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctg x$	\mathbb{R}	$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$
$\text{arccotg } x$	\mathbb{R}	$]0, \pi[$
$\text{arcsec } x$	$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	$[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$
$\text{arccosec } x$	$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$

Prop. 1.41

$$\mathbf{1} \quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathbf{2} \quad \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cotg^2 x, \text{ para } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{3} \quad \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \text{ para } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{4} \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\mathbf{5} \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\mathbf{6} \quad \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\mathbf{7} \quad \operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\mathbf{8} \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\mathbf{9} \quad \operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\mathbf{10} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\mathbf{11} \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Fórmulas envolvendo inversas de funções trigonométricas

27

Prop. 1.42

1 $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{(1 - x^2)} = \cos(\arcsin(x));$

2 $\operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right);$

3 $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right);$

4 $\operatorname{arccosec}(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$

5 $\sec(\operatorname{arctg}(x)) = \sqrt{(1 + x^2)}.$

Teo. 1.43

Teorema da derivada da função composta - Regra da cadeia

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $g \circ f$ está definida. Se f é diferenciável em a , i.e. a derivada em $a \in D_f$ existe e é finita, e g é diferenciável em $f(a)$ então $g \circ f$ é diferenciável em a e

$$(g \circ f)'(a) = (g'(f(a))) \cdot f'(a)$$

Exer. 1.44

Considere as funções reais de variável real f e g definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sin(x)$. Determine usando a regra da cadeia as derivadas seguintes:

1 $(g \circ f)'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$;

2 $(f \circ g)'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Teo. 1.45

Teorema da derivada da função inversa

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua e f^{-1} a função inversa de f . Se f é diferenciável em $x_0 \in]a, b[$ e $f'(x_0) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e $(f^{-1})'(f(x_0)) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Exer. 1.46

- 1 Sendo $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente tal que $f(2) = 7$ e $f'(2) = \frac{2}{3}$, calcule, caso exista, $(f^{-1})'(7)$.
- 2 Sabendo que $f(x) = 4x^3 + x + 2$ é invertível, calcule $(f^{-1})'(2)$.
- 3 Seja $f(x) = x^3$. Determine a derivada de f^{-1} utilizando o teorema da função inversa.

Exer. 1.47

Utilizando o teorema da derivada da função inversa mostre que:

$$\mathbf{1} \quad (\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$\mathbf{2} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$\mathbf{3} \quad (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{4} \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Obs. 1.48

Seja u uma função de x .

- $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
- $(\operatorname{cosec} u)' = -u' \cotg u \operatorname{cosec} u$
- $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$
- $(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$
- $(\operatorname{arccos} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\cotg u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
- $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
- $(\sec u)' = u' \operatorname{tg} u \sec u$
- $(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Exer. 1.49

- 1** Seja $f(x) = \ln(\arcsen x)$, com $x \in]0, 1[$.

Calcule $(f^{-1})'$ utilizando o teorema da função inversa.

- 2** Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$ (c) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{sen}(4x^3))$

(b) $f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{\arccos x}$

- 3** Considere a função $f(x) = \arcsen(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$.

(a) Determine o domínio de f .

(b) Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x - x^2}}$

$$1.4. D_f = [-1, +\infty[\text{ e } CD_f =]-\infty, 3].$$

$$1.9. D_{f^{-1}} = CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y+\pi}{3}$$

$$D_{g^{-1}} = [1, +\infty[\text{ e } CD_{g^{-1}} = \mathbb{R}_0^+, \quad g^{-1}(y) = 1 + y^2$$

1.17.

$$(a) D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+, \quad CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1-\ln y}{2}$$

$$(b) D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad CD_{f^{-1}} =]3, +\infty[, \quad f^{-1}(y) = 3 + e^{\frac{4y+1}{5}}$$

$$(c) D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad CD_{f^{-1}} =]-\infty, 2[, \quad f^{-1}(y) = 2 - 3^y$$

$$(d) D_{f^{-1}} =]0, 1[, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

1.21.

$$(a) D_{f^{-1}} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad CD_{f^{-1}} = [-\pi, 0], \quad f^{-1}(y) = \arcsen(2y) - \frac{\pi}{2}$$

$$(b) D_{f^{-1}} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right], \quad CD_{f^{-1}} = [0, 2], \quad f^{-1}(y) = 1 - \sen\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3y}{2}\right)$$

$$(c) D_{f^{-1}} = [-\pi, 0], \quad CD_{f^{-1}} = [0, 1], \quad f^{-1}(y) = \sen^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right)$$

1.25.

$$(a) D_{f^{-1}} = \left[\frac{1}{3}, 1\right], \quad CD_{f^{-1}} = [0, \pi], \quad f^{-1}(y) = \arccos\left(\frac{1}{y} - 2\right)$$

$$(b) D_{f^{-1}} = [\pi, 2\pi], \quad CD_{f^{-1}} = [-2, 2], \quad f^{-1}(y) = 2 \cos y$$

1.29.

$$(a) D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad CD_{f^{-1}} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[, \quad f^{-1}(y) = 2 - \frac{\pi}{\operatorname{arctg} y}$$

$$(b) D_{f^{-1}} =]0, \pi[, \quad CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

1.33.

$$(a) D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad CD_{f^{-1}} =]0, 3\pi[, \quad f^{-1}(y) = 3 \operatorname{arccotg}\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$(b) D_{f^{-1}} =]\pi, 2\pi[, \quad CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = 2 \operatorname{cotg}(y - \pi) + 1$$

1.44.

$$(a) \quad (g \circ f)'(x) = 3x^2 \cos(x^3) \quad (b) \quad (f \circ g)'(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x)$$

1.46.

$$1. \quad \frac{3}{2} \quad 2. \quad 1 \quad 3. \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

1.49.

$$1. \quad (f^{-1})'(y) = e^y \cos(e^y)$$

$$2. \quad (a) \quad 2x \arctg x + 1 \quad (b) \quad -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}} \quad (c) \quad -\frac{12x^2 \cos(4x^3)}{1+\sin^2(4x^3)} \quad (d) \quad -\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}\sqrt[3]{\arccos^2 x}}$$

$$3. \quad (a) \quad [0, 2]$$

Teoremas de Bolzano, Weierstrass, Rolle, Lagrange e Cauchy.

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)

Paolo Vettori

Sandrina Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Aveiro

Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Teorema de Bolzano ou dos Valores Intermédios - Relembrar

36

Teo. 2.1

Seja f uma função **contínua em** $[a, b]$. Se $f(a) \neq f(b)$ então, para todo o y entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = y$

Cor. 2.2

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ com $f(a) \neq f(b)$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Exer. 2.3

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ cujos únicos zeros são $x = a$ e $x = b$. Mostre que f tem sinal constante em $[a, b]$.

Def. 2.4

Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- ▶ a é um **maximizante local** de f e $f(a)$ diz-se um **máximo local** de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in]a - \delta, a + \delta[\cap D_f.$$

- ▶ a é um **minimizante local** de f e $f(a)$ diz-se um **mínimo local** de f se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in]a - \delta, a + \delta[\cap D_f.$$

- ▶ Aos máximos e mínimos locais chamamos **extremos locais**.
- ▶ Aos maximizantes e minimizantes locais chamamos **extremantes locais**.

Def. 2.5

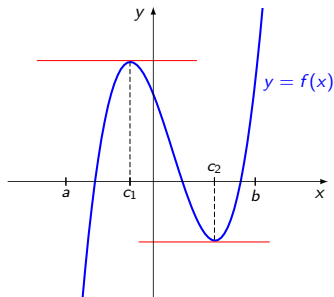
Sejam $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- ▶ a é um **maximizante global** de f e $f(a)$ diz-se um **máximo global** de f se $f(a) \geq f(x)$, $\forall x \in D_f$.
- ▶ a é um **minimizante global** de f e $f(a)$ diz-se um **mínimo global** de f se $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in D_f$.
- ▶ Aos máximos e mínimos globais chamamos **extremos globais**.
- ▶ Aos maximizantes e minimizantes globais chamamos **extremantes globais**.

Prop. 2.6

Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $c \in]a, b[$. Se c é um extremante local de f , então $f'(c) = 0$.

Ilustração gráfica



Obs. 2.7

- 1 **O recíproco** da proposição do slide anterior **não é verdadeiro**. De facto, existem funções com derivada nula em determinado ponto e esse ponto não é extremante. Por exemplo, $f(x) = x^3$, no ponto $x = 0$.
- 2 Pode ainda acontecer que a derivada de f não exista num dado ponto x_0 , mas x_0 ser extremante. São exemplos:
 - ▶ $f(x) = |x|$, no ponto $x_0 = 0$ e
 - ▶ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, no ponto $x_0 = 0$.

Def. 2.8

Seja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $c \in \text{int}(D_f)$. Se $f'(c) = 0$ dizemos que c é **ponto crítico** de f .

Teorema de Weierstrass ou Teorema dos valores mínimo e máximo

41

Teo. 2.9

Se f é uma função **contínua em $[a, b]$** então f **atinge** em $[a, b]$ **o máximo e o mínimo globais** (isto é, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo o $x \in [a, b]$).

Exer. 2.10

Considere a função real de variável real f definida por,

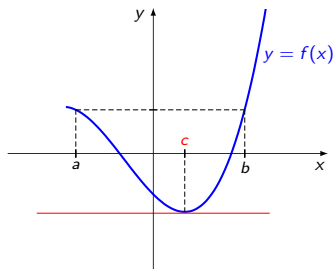
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{e^{x-1} - 1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Mostre que a restrição de f ao intervalo $[-3, 10]$ atinge nesse intervalo um máximo e um mínimo.

Teo. 2.11

Seja f uma função **contínua em $[a, b]$** e **diferenciável em $]a, b[$** . Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$

Ilustração Gráfica



Cor. 2.12

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

- (i) Entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f' .
- (ii) Entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f .

Exer. 2.13

- 1** Seja f a f.r.v.r. definida por $f(x) = \arctg((x-1)^2) + 2$.

Usando o Teorema de Rolle, mostre que existe $c \in]0, 2[$ tal que $f'(c) = 0$.

- 2** Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.
- 3** Mostre que a função definida por $f(x) = \sin x + x$ tem um único zero no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Teo. 2.14

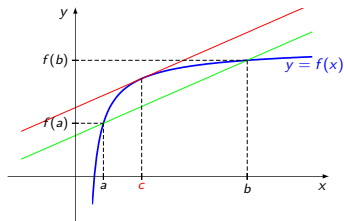
Seja f uma função **contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$** . Então, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O Teorema de Lagrange generaliza o Teorema de Rolle.

Para a demonstração basta considerar a função $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

Ilustração Gráfica



Obs. 2.15

Satisfeitas as condições do Teorema de Lagrange pode garantir-se a existência de $c \in]a, b[$ tal que **a tangente ao gráfico de f em $C = (c, f(c))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.**

Relembrar que o declive m_c da **reta tangente ao gráfico de $C = (c, f(c))$** é dada por $m_c = f'(c)$ e por conseguinte uma equação dessa reta é $y - f(c) = f'(c)(x - c)$.

Exer. 2.16

1 Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

- (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.
(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in]-\frac{2}{\pi}, 0[$ tal que $f'(c) = \frac{2}{\pi}$.

2 Seja $f(x) = \operatorname{arcsen}(\ln x)$.

- (a) Determine o domínio de f .
(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in]1, e[$ tal que $f'(c) = \frac{\pi}{2(e-1)}$.

3 Seja h uma função de domínio \mathbb{R} tal que $h'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen}^2 x}$ e $h(0) = 0$. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que $h(x) \leq e \cdot x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Prop. 2.17

Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I e diferenciável em $\text{int}(I)$.

- (i) Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **constante** em I .
- (ii) Se $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **crescente** em I .
- (iii) Se $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **decrecente** em I .
- (iv) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **estritamente crescente** em I .
- (v) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in \text{int}(I)$, então f é **estritamente decrecente** em I .

Obs. 2.18

$\text{int}([a, b]) = \text{int}(]a, b]) = \text{int}([a, b[) = \text{int}(]a, b[) =]a, b[$; $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
 $\text{int}(]-\infty, a]) = \text{int}(]-\infty, a[) =]-\infty, a[$; $\text{int}([a, +\infty]) = \text{int}(]a, +\infty[) =]a, +\infty[$.

Prop. 2.19

Seja $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b] \subseteq D_f$ e diferenciável em $]a, b[$, exceto possivelmente em $c \in]a, b[$.

- (i) Se $f'(x) > 0, \forall x \in]c - \delta, c[$, e $f'(x) < 0, \forall x \in]c, c + \delta[$, $\delta > 0$, então $f(c)$ é um **máximo local** de f
- (ii) Se $f'(x) < 0, \forall x \in]c - \delta, c[$ e $f'(x) > 0, \forall x \in]c, c + \delta[$, $\delta > 0$, então $f(c)$ é um **mínimo local** de f .

Prop. 2.20

Seja c um ponto crítico de f num intervalo $]a, b[$. Admitamos que f é contínua em $]a, b[$ e f'' existe e é finita em todo o ponto de $]a, b[$. Então verificam-se as condições seguintes:

- (i) se $f''(c) < 0$, então f admite em c um **máximo local**.
- (ii) se $f''(c) > 0$, então f admite em c um **mínimo local**.

Exer. 2.21

- 1** Mostre que $g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x - 1$ tem um único zero no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 2** Mostre que $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ é estritamente crescente em \mathbb{R} .
- 3** Mostre que o polinómio $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ tem uma única raiz no intervalo $] -2, 1[$.

Teo. 2.22

Sejam f e g duas **funções contínuas** em $[a, b]$ e **diferenciáveis** em $]a, b[$. Se $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Obs. 2.23

Do Teorema de Cauchy pode estabelecer-se uma regra — **Regra de Cauchy** — de grande utilidade no cálculo de limites quando ocorrem **indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$** .

Nos cinco slides seguintes enunciam-se as várias formas dessa regra.

Prop. 2.24

VERSÃO 1: Sejam f e g **funções diferenciáveis** em $I =]a, b[$ tais que, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$.

Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ são **ambos nulos** ou **ambos infinitos**

e **existe o limite** $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ então

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prop. 2.25

VERSÃO 2: Sejam f e g **funções diferenciáveis** em $I =]a, b[$ tais que, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$.

Se $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$ são **ambos nulos** ou **ambos infinitos**

e **existe o limite** $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ então

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prop. 2.26

VERSÃO 3: Sejam $I =]a, b[$ e $c \in I$. Sejam f e g funções definidas em I e diferenciáveis em $I \setminus \{c\}$, tais que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{c\}$.

Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ são **ambos nulos** ou **ambos infinitos** e existe o limite $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Prop. 2.27

VERSÃO 4: Sejam f e g funções definidas em $I =]a, +\infty[$ e diferenciáveis em I , com $g(x) \neq 0, \forall x \in I$. Se $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos e existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prop. 2.28

VERSÃO 5: Sejam f e g funções definidas em $I =]-\infty, b[$ e diferenciáveis em I , com $g(x) \neq 0, \forall x \in I$. Se $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ são ambos nulos ou ambos infinitos e existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exer. 2.29

1 Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsen x}{3x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln(-x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)^{\ln x}$$

2 Mostre que existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x},$$

mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

Integrais indefinidos

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)

Paolo Vettori

Sandrina Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Aveiro

Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Def. 3.1

Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde I é um intervalo não degenerado (isto é, com mais do que um ponto) de \mathbb{R} . Uma **primitiva ou antiderivada de f** é **uma qualquer função F** diferenciável em I **tal que, para todo o $x \in I$,**

$$F'(x) = f(x).$$

Se f admite uma primitiva em I dizemos que f é primitivável em I .

Obs. 3.2

- ▶ Caso $I = [a, b]$, dizer que F é diferenciável em I significa que, para todo o $x \in]a, b[$, F é diferenciável em x e que existem e são finitas $F'_+(a)$ e $F'_-(b)$. Convenções análogas para $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$.
- ▶ Toda a primitiva de uma função é uma função contínua.

Exer. 3.3

Indique uma primitiva das seguintes funções (no intervalo indicado)

(a) $f(x) = 2x$, em \mathbb{R} ; (b) $f(x) = e^x$, em \mathbb{R} ;

(c) $f(x) = \cos x$, em \mathbb{R} ; (d) $f(x) = \frac{1}{x}$, em \mathbb{R}^+

Prop. 3.4

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f em I . Então, para cada $C \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + C$ é também uma primitiva de f em I .

Prop. 3.5

Se $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ são duas primitivas de $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = C$, para todo o $x \in I$.

Def. 3.6

À família de todas as primitivas de uma função f chamamos **integral indefinido de f** . Denota-se esse conjunto de funções por

$$\int f(x) dx.$$

A f chamamos **função integranda** e a x **variável de integração**.

Obs. 3.7

1 Atendendo à proposição 3.5, tem-se:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde F é uma primitiva de f .

2 Se f for diferenciável, então

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Obs. 3.8

- $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, C \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$ (onde $x \in \mathbb{R}^+$ ou $x \in \mathbb{R}^-$)
- $\int e^x dx = e^x + C, C \in \mathbb{R}$ • $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, C \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, C \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}$ • $\int \cos x dx = \sin x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C, C \in \mathbb{R}$ • $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cotg x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C, C \in \mathbb{R}$ • $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \operatorname{cosec} x \cotg x dx = -\operatorname{cosec} x + C, C \in \mathbb{R}$

Prop. 3.9

Sejam f e g funções definidas em I e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos. Se f e g são primitiváveis em I , então $\alpha f + \beta g$ é primitivável em I e

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx .$$

Exer. 3.10

Calcule:

$$(a) \int (2^x - 3 \operatorname{sen} x) dx \quad (b) \int \frac{x+3}{x^2} dx$$

Prop. 3.11

Sejam I e J intervalos de números reais, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que a composta $f \circ g$ está definida.

Se g é diferenciável em J , então $(f \circ g)g'$ é primitivável e tem-se

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde F é uma primitiva de f .

Exemplo de aplicação

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Obs. 3.12

Como consequência imediata da proposição anterior tem-se:

Seja u uma função de x .

- $\int u' u^p dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' e^u dx = e^u + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $\int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \cos u dx = \operatorname{sen} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \sec^2 u dx = \operatorname{tg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \operatorname{cosec}^2 u dx = -\operatorname{cotg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arctg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \sec u \operatorname{tg} u dx = \sec u + C, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u dx = -\operatorname{cosec} u + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Exer. 3.13

Calcule os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int \frac{x^4}{1+x^5} dx$

(f) $\int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx$

(k) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

(b) $\int \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) dx$

(g) $\int \frac{x}{x^2+9} dx$

(l) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$

(c) $\int x7^{x^2} dx$

(h) $\int \frac{1}{(x+9)^2} dx$

(m) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(d) $\int \operatorname{tg} x dx$

(i) $\int \frac{1}{x^2+9} dx$

(n) $\int \frac{5}{x \ln^3 x} dx$

(e) $\int \operatorname{sen} x \cos^5 x dx$

(j) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

(o) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

Exer. 3.14

1 Determine a primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ que se anula no ponto $x = 2$.

2 Determine a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f'(x) = \frac{2e^x}{3 + e^x} \quad \text{e} \quad f(0) = \ln 4.$$

3 Sabendo que a função f satisfaz a igualdade

$$\int f(x) dx = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ determinar } f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

4 Usando dois processos distintos mostre que:

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta a derivada do produto, $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ obtemos por primitivação $\int uv \, dx = u'v + \int uv' \, dx$, que dá origem à chamada (técnica da) **primitivação por partes** usualmente enunciada do modo seguinte:

Prop. 3.15

Sejam u e v funções de x diferenciáveis em I , então

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx. \quad (\text{Primitivação por partes})$$

Exemplos

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\ln x}_v \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}; \\ \int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\ln x}_v \, dx &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obs. 3.16

- ▶ Esta fórmula é útil quando a função integranda se pode escrever como o produto de duas funções e é conhecida uma primitiva de pelo menos uma delas.
- ▶ Sabendo primitivar apenas uma das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra função.
- ▶ Quando conhecemos uma primitiva de cada uma das funções, devemos escolher para derivar a função que mais se simplifica por derivação. Por vezes essa escolha é indiferente.
- ▶ Por vezes é necessário efetuar várias aplicações sucessivas da fórmula de integração por partes.
- ▶ Por vezes obtém-se novamente o integral que se pretende determinar. Nesses casos, interpreta-se a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é o integral que se pretende determinar.

Exer. 3.17

Utilize a técnica de integração por partes para calcular os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int x \cos x \, dx$

(e) $\int x^3 e^{x^2} \, dx$

(b) $\int e^{-3x} (2x + 3) \, dx$

(f) $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$

(c) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

(g) $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx$

(d) $\int x^3 \ln x \, dx$

(h) $\int \ln^2 x \, dx$

Def. 3.18

Uma **função cuja expressão analítica admite a forma** $\frac{N(x)}{D(x)}$,
onde N e D são polinómios em x com coeficientes reais e D é não
nulo, **diz-se** uma **função racional**.

Caso $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$ dizemos que $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma **fração própria**.

Prop. 3.19

Se $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$, então existem polinómios Q e R tais que:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$. A Q e R chamamos quociente e resto da
divisão de N por D , respetivamente.

Exemplo

Sendo $N(x) = 4x^3 + 3x$ e $D(x) = 2x^2 + 1$ tem-se, $\frac{N(x)}{D(x)} = 2x + \frac{x}{2x^2+1}$.

Neste caso, os polinómios quociente e resto são, respetivamente, $Q(x) = 2x$ e
 $R(x) = x$.

Obs. 3.20

Caso $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$, $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$

\swarrow \searrow
polinómio **fração própria**

Como,
$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx,$$

e a primitivação de funções polinomiais é imediata, a primitivação de funções racionais reduz-se à primitivação de frações próprias, que por sua vez se pode reduzir à **primitivação de frações simples**.

Def. 3.21

Chamamos **fração simples** a toda a fração do tipo

$$\frac{A}{(x - \alpha)^p} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^q},$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Exemplos de frações simples

$$\frac{2}{x-1}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{x-2}{x^2+x+1}, \quad \frac{1}{(x^2+x+2)^3}$$

Prop. 3.22

Toda a fração própria pode ser decomposta numa soma de frações simples.

Obs. 3.23

A primitiva de uma função racional $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ pode sempre escrever-se como somas, produtos, quocientes e composições de funções racionais, logaritmos e arco-tangentes.

Obs. 3.24

Fração a decompor: $\frac{R(x)}{D(x)}$, com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$

Procedimento

1 Decompor $D(x)$ em fatores irredutíveis:

$$D(x) = a(x - \alpha_1)^{p_1} \dots (x - \alpha_n)^{p_n} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{q_1} \dots (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)^{q_m}$$

onde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, com $\beta_j - 4\gamma_j < 0$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

2 Associar a cada factor de $D(x)$ uma determinada fração simple ou soma de frações simples de acordo com o seguinte:

(i) Ao fator de $D(x)$ do tipo $(x - \alpha)^r$ ($r \in \mathbb{N}$) corresponde

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - \alpha)^r}$$

onde A_1, \dots, A_r são constantes reais a determinar.

Procedimento (cont.)

(ii) Ao fator de $D(x)$ do tipo

$$(x^2 + \beta x + \gamma)^s, \text{ com } \beta^2 - 4\gamma < 0 \text{ e } s \in \mathbb{N}$$

corresponde,

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \cdots + \frac{B_sx + C_s}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}$$

onde B_i, C_i são constantes reais a determinar, $i = 1, \dots, s$.

- 3** Escrever $\frac{R(x)}{D(x)}$ como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Primitivação de Frações Simples

1 Fração do tipo: $\frac{A}{(x - \alpha)^r}$

$$\text{Se } r = 1, \int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } r \neq 1, \int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \frac{A(x - \alpha)^{-r+1}}{-r + 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2 Fração do tipo: $\frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}$

Reduz-se à primitivação de frações do tipo:

$$(i) \frac{t}{(1 + t^2)^s} \quad \text{ou} \quad (ii) \frac{1}{(1 + t^2)^s}.$$

Primitivação das frações do tipo (i) e (ii) do slide anterior

(i) Fração do tipo: $\frac{t}{(1+t^2)^s}$

$$\text{Se } s = 1, \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln |1+t^2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } s \neq 1, \int \frac{t}{(1+t^2)^s} dt = \frac{(1+t^2)^{-s+1}}{2(-s+1)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(ii) Fração do tipo: $\frac{1}{(1+t^2)^s}$

$$\text{Se } s = 1, \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Se $s \neq 1$, aplica-se o método de primitivação por partes recursivamente, partindo de $\int \frac{1}{1+t^2} dt$.

Exemplos:

$$1 \quad \int \frac{x-5}{x^2+x-2} dx$$

Passo 1: Fatorizar o denominador.

Como as raízes de $x^2 + x - 2$ são 1 e -2, obtemos

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2);$$

Passo 2: Determinar A e B de modo a que:

$$\frac{x-5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2},$$

isto é tais que: $x-5 = A(x+2) + B(x-1)$,

pelo que, $A + B = 1$ e $2A - B = 5$, ou seja $A = 2$, e $B = -1$, i.e.

$$\frac{x-5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+2},$$

Passo 3: Calcular o integral indefinido à custa das frações simples.

$$\int \frac{x-5}{x^2+x-2} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{-1}{x+2} dx = 2 \ln |x-1| - \ln |x+2| + C, C \in \mathbb{R}$$

Obs. 3.25

1 Potências ímpares de $\sin x$ ou $\cos x$

Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função usando $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Exercício: Calcule $\int \sin^3 x \, dx$

2 Potências pares de $\sin x$ ou $\cos x$

Passam-se para o arco duplo através das fórmulas

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{ou} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Exercício: Calcule $\int \cos^2 x \, dx$

3 Produtos onde existem fatores tipo $\sin(mx)$ ou $\cos(nx)$

Aplicam-se as fórmulas,

- $\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y));$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y));$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)).$

Exercício: Calcule $\int \sin(2x) \sin(-3x) \, dx$.

Obs. 3.25 (cont.)

4 Potências pares e ímpares de $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{cotg} x$

Destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ ou $\operatorname{cotg}^2 x$ e aplicam-se as fórmulas

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

Exercício: Calcule $\int \operatorname{tg}^6 x \, dx$.

5 Potências pares de $\sec x$ ou $\operatorname{cosec} x$

Destaca-se $\sec^2 x$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ e ao fator resultante aplicam-se as fórmulas

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{ou} \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x.$$

Exercício: Calcule $\int \sec^6 x \, dx$.

6 Potências ímpares de $\sec x$ ou $\operatorname{cosec} x$

Destaca-se $\sec^2 x$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ e primitiva-se por partes escolhendo esse fator para primitivar.

Exercício: Calcule $\int \sec^3 x \, dx$.

Exer. 3.26

Calcule os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int \sin^4 x \, dx$

(c) $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$

(b) $\int \sin x \cos^2 x \, dx$

(d) $\int \sin(3x) \cos(4x) \, dx$

Primitivação por Substituição-Mudança de variável

78

Prop. 3.27

Sejam I e J intervalos de \mathbb{R} ,

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e
 $x \longmapsto f(x)$

$\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e invertível
 $t \longmapsto \varphi(t) = x$ tal que $\varphi(J) \subseteq I$.

Então a função $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável e, sendo H uma primitiva de $(f \circ \varphi)\varphi'$, tem-se que $H \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f . Assim, usando a mudança de variável $\varphi(t) = x$, temos

$$\int f(x) dx = \underbrace{\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt}_{\text{mudança de variável}} = H(t) + C = \underbrace{H(\varphi^{-1}(x))}_{\text{regresso à variável inicial}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemplos

Calcule o integral indefinido $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx$, $x \in \mathbb{R}_0^+$, utilizando a substituição de variável $\sqrt{2x} = t$.

Dado que $\sqrt{2x} = t$, tem-se $x = \frac{t^2}{2}$, $t \geq 0$. A função $\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$ é diferenciável e invertível em \mathbb{R}_0^+ ; $\varphi(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$; e $\varphi'(t) = t$. Onde,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx &= \int \frac{t}{1+t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= t - \ln|1+t| + C, \\ &= \sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Calcule o integral indefinido $\int \frac{\ln(x)}{x(\ln^2 x + 1)} dx$, $x \in \mathbb{R}^+$, utilizando a substituição de variável $x = e^t$.

Ora $x = e^t$ se e somente se $t = \ln(x)$. A função $\varphi(t) = e^t$ é diferenciável e invertível em \mathbb{R}^+ e $\varphi'(t) = e^t$. Onde,

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x(\ln^2 x + 1)} dx &= \int \frac{t}{e^t(t^2 + 1)} e^t dt = \int \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(\ln^2(x) + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tabela

Função com radical

1. $\sqrt{a^2 + x^2}, a > 0$
2. $\sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}, a > 0$
4. $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}, a, b > 0$
5. $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}, a, b > 0$
6. $\sqrt{-a^2 + b^2 x^2}, a, b > 0$
7. $\sqrt{a^2 x^2 + bx + c}, a \neq 0 \text{ e } b, c \in \mathbb{R}$

Substituição

$x = a \operatorname{tg} t$, com $t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

$x = a \operatorname{sen} t$, com $t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

$x = a \operatorname{sec} t$, com $t \in] 0, \frac{\pi}{2} [$

reduz-se ao caso 1.

reduz-se ao caso 2.

reduz-se ao caso 3.

reduz-se a um dos anteriores.

Exercício:

Exer. 3.28

Calcule, usando uma mudança de variável adequada os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int x^2 \sqrt{1-x} \, dx$$

$$(e) \int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} \, dx$$

$$(b) \int x(2x+5)^{10} \, dx$$

$$(f) \int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \, dx$$

$$(c) \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \, dx$$

$$(g) \int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} \, dx$$

$$(d) \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$(h) \int \frac{\ln x}{x(1 + \ln^2 x)} \, dx$$

Integrais de Riemann ou Integrais definidos

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)

Paolo Vettori

Sandrina Santos

Departamento de Matemática

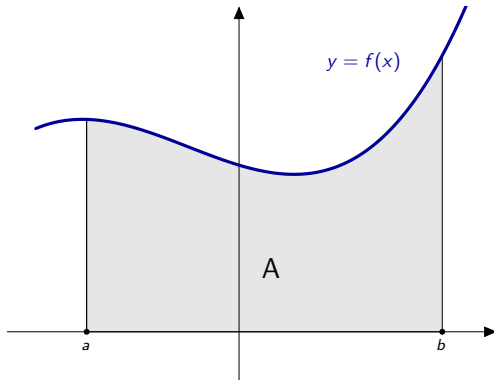
Universidade de Aveiro

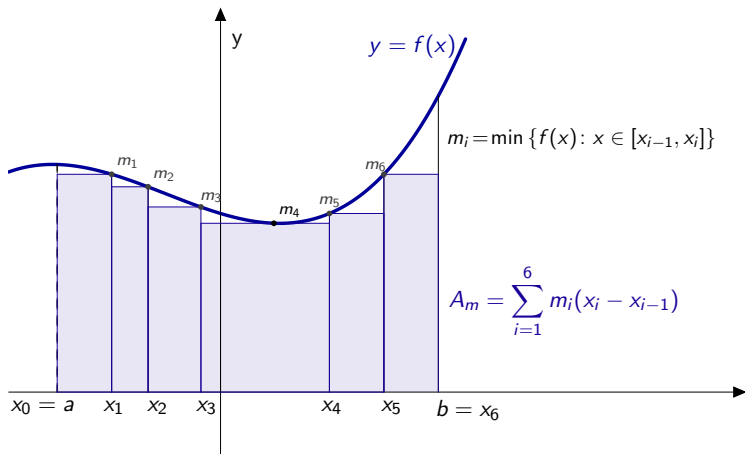
Setembro de 2016

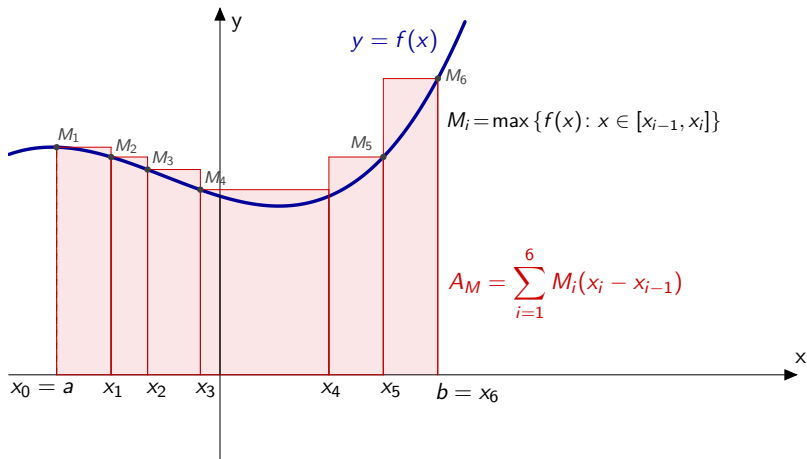
Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

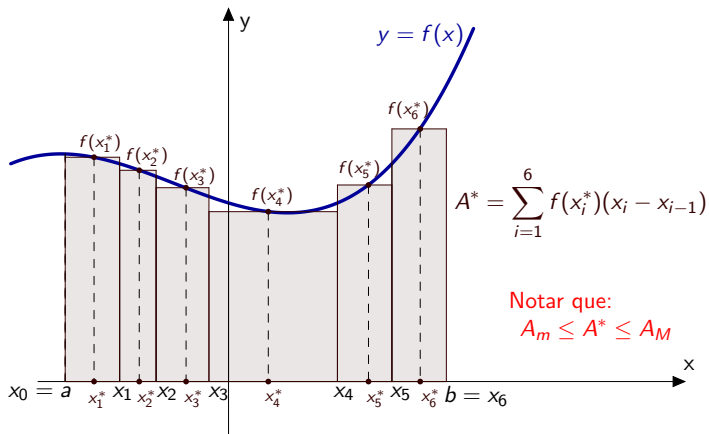
Questão:

Como calcular a área delimitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$?









Def. 4.1

- Chamamos **partição** de $[a, b]$, a todo o subconjunto finito de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, tal que $a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b$.
- Sendo $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, chamamos **diâmetro de \mathcal{P}** , e denotamos por $\Delta\mathcal{P}$, à maior das amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é,

$$\Delta\mathcal{P} = \max \{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

- Chamamos **seleção de \mathcal{P}** a todo o conjunto $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ tal que $x_1^* \in [x_0, x_1]$, $x_2^* \in [x_1, x_2]$, \dots , $x_n^* \in [x_{n-1}, x_n]$.

Def. 4.2

Sejam $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ uma sua seleção. À soma,

$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) := \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Chamamos **soma de Riemann de f associada à partição \mathcal{P} e seleção \mathcal{C} .**

Def. 4.3

Sejam $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $I \in \mathbb{R}$. Dizemos que **I é o integral de Riemann (ou o integral definido) de f em $[a, b]$** (ou de a para b) se, para todo o $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para toda partição \mathcal{P} de $[a, b]$, com $\Delta\mathcal{P} < \delta$, e, para toda a seleção \mathcal{C} de \mathcal{P} ,

$$|S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) - I| < \epsilon.$$

Caso exista I , nas condições anteriores, diz-se que **f é integrável em $[a, b]$** e escreve-se,

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Obs. 4.4

f é **integrável** em $[a, b]$ se e só se para toda a sucessão de partições $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ do intervalo $[a, b]$, tal que

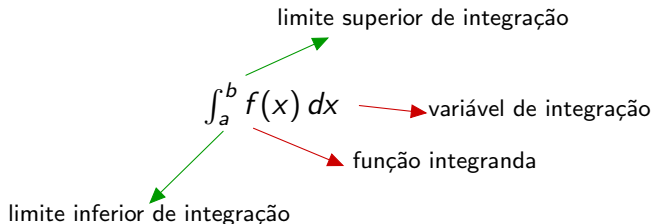
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{P}_n| = 0, \text{ se tem,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = I,$$

para toda a sucessão $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de seleções \mathcal{P}_n - compatíveis.

Exer. 4.5

Considere a função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k$, onde k designa uma constante real arbitrária. Determine, caso exista, o integral definido de f em $[a, b]$.



Obs. 4.6

- A variável de integração é uma variável muda, i.e., podemos escrever, por exemplo $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$.
- Na definição de integral de Riemann considerou-se $a < b$. Vamos agora dar significado ao integral de Riemann quando $a = b$ e quando $a > b$. Sendo f integrável, escrevemos por convenção, que
$$\int_a^a f(x) dx = 0, \text{ e,}$$
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \text{ se } a > b.$$

Prop. 4.7

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se f é **integrável** em $[a, b]$ **então** f é **limitada** em $[a, b]$.

Obs. 4.8

- A proposição anterior permite concluir que f não limitada em $[a, b] \Rightarrow f$ não integrável em $[a, b]$.
- O **recíproco** da proposição anterior **não é válido**. Existem funções limitadas num intervalo que não são integráveis nesse intervalo.

Exer. 4.9

Mostre que a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$, onde $a < 0 < b$.

Prop. 4.10

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- 1 Se f for **contínua** em $[a, b]$ então f é **integrável** em $[a, b]$.
- 2 Se f for **limitada** em $[a, b]$ e **descontínua** num número finito de pontos então f é **integrável** em $[a, b]$.
- 3 Se f for **monótona** em $[a, b]$ então f é **integrável** em $[a, b]$.

Prop. 4.11

Sejam f e g funções definidas em $[a, b]$. Se f é integrável em $[a, b]$ e g difere de f apenas num número finito de pontos (isto é, $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, exceto para um número finito de valores de x), então

$$g \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

Exer. 4.12

Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis no intervalo considerado:

1 $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$, em $[0, 4]$

2 $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, em $[0, \frac{\pi}{2}]$

3 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [-2, 0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}$, em $[-2, 1]$

4 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [3, 7] \text{ e } x \notin \mathbb{N} \\ 1 & \text{se } x \in [3, 7] \cap \mathbb{N} \end{cases}$, em $[3, 7]$

Prop. 4.13

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1 $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

2 αf é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx;$

3 $f \cdot g$ é integrável em $[a, b];$

4 f é integrável em qualquer sub-intervalo $[c, d]$ de $[a, b];$

5 Se $c \in]a, b[$, então f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx ;$$

Prop. 4.13 (cont.)

6 Se $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$;

7 Se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

8 Se $m \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \in [a, b]$, onde $m, M \in \mathbb{R}$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a);$$

9 $|f|$ é integrável em $[a, b]$ e $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Exer. 4.14

1 Mostre que $\int_0^2 e^{-x^2} dx \geq 0$.

2 Sabendo que

$$\int_1^3 f(x) dx = 5 \quad \text{e} \quad \int_7^1 f(x) dx = -11,$$

calcule $\int_3^7 f(x) dx$.

3 Mostre que se f é uma função contínua e estritamente crescente no intervalo $[1, 3]$, então

$$f(1) < \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx < f(3).$$

Teo. 4.15

Seja f uma função **integrável** num intervalo fechado I de \mathbb{R} . Então, para cada $a \in I$, a função F de I em \mathbb{R} definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ é}$$

- (i) **contínua** em I ;
- (ii) e se f for **contínua** em $x \in \text{int}(I)$, F é **diferenciável** em x e $F'(x) = f(x)$.

Por outras palavras, F é uma primitiva de f .

Cor. 4.16

Seja f uma função contínua em I , $a \in I$ e $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Então F é diferenciável em I e tem-se que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I,$$

isto é,

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Exer. 4.17

- 1** Calcule $F'(x)$ sendo F a f.r.v.r. dada por

$$(a) \quad F(x) = \int_1^x (\sin t^2 + e^{-t^2}) dt \quad (b) \quad F(x) = \int_x^2 \cos t^4 dt$$

- 2** Seja f a função definida em \mathbb{R}^+ por $f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ e seja

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad \text{para } x > 1.$$

Justifique que F é diferenciável em $x = 2$ e calcule $F'(2)$.

- 3** Mostre que se f é uma função contínua e não negativa em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x) dx = 0$, então $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Sugestão: Considere a função $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ e use o Teo. 4.15.

Cor. 4.18

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$.
Então existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(t) dt = f(c)(b - a) .$$

Exer. 4.19

Seja $f(x) = x^2$ e $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

- 1** Justifique que a função F é contínua em $[1, 4]$.
- 2** Calcule $F(1)$ e $F'(2)$.
- 3** Mostre que existe um $c \in]1, 4[$ tal que $F(4) = 3c^2$.

Como, referido anteriormente,

Obs. 4.20

Se f é contínua em $[a, b]$, então $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$, é uma primitiva de f em $[a, b]$.

Cor. 4.21

Sejam I um intervalo aberto de \mathbb{R} , $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$ e $g_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em I tais que $g_1(I) \subseteq]a, b[$ e $g_2(I) \subseteq]a, b[$.

Então a função H definida em I por $H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t) dt$, é diferenciável em I e, $\forall x \in I$, $H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x)$.

Obs. 4.22

Sendo $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$ e $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$, $x \in I$, com $g(I) \subset]a, b[$, então $G = F \circ g$ e portanto $G'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$

Exer. 4.23

- 1** Calcule $F'(x)$ sendo F a f.r.v.r. dada por

$$(a) \quad F(x) = \int_{x^3}^{\cos x} \ln(t^2 + 1) dt \quad (b) \quad F(x) = x^3 \int_1^x e^{-t^2} dt$$

- 2** Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função definida em \mathbb{R}^+ por

$$F(x) = \int_x^{k \ln x} e^{-t^2} dt.$$

- 3** Considere a função F definida em \mathbb{R} por

$$F(x) = \int_0^{x^2} (4 + \sin t) dt.$$

- (a) Calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Exer. 4.24

1 Considere a função F definida em \mathbb{R} por $F(x) = \int_0^{x^3} t e^{\sin t} dt$.

(a) Justifique que F é diferenciável em \mathbb{R} e determine $F'(x)$.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{\sin x}$

2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere a função φ dada por

$$\varphi(x) = \int_{e^x}^{1+x^2} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Justifique que φ é diferenciável em \mathbb{R} e determine $\varphi'(x)$.

(b) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = -f(1)$.

Prop. 4.25

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e se $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de f então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Obs. 4.26

Notação: $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \left[F(x) \right]_a^b$

Exemplos de aplicação:

$$\mathbf{1} \quad \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3}$$

$$\mathbf{2} \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{y \ln y} dy = \left[\ln |\ln y| \right]_e^{e^2} = \ln |\ln(e^2)| - \ln |\ln(e)| = \ln(2)$$

Exer. 4.27

1 Calcule

(a) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

(b) $\int_{-\pi}^0 \sin(3x) dx$

(c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(d) $\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$

(e) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

(f) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$

2 Calcule $\int_{-1}^1 f(x) dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x \in [-1, 0[\\ 7 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}$

Prop. 4.28

$$\int_a^b u' v \, dx = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b uv' \, dx.$$

Exemplo de aplicação:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos x \, dx &= \left[\sin x \cdot x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx \\ &= 0 - \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\ &= \cos \pi - \cos 0 = 2 \end{aligned}$$

Exer. 4.29

Calcule: (a) $\int_0^1 (x+2)e^x \, dx$ (b) $\int_1^e x \ln x \, dx$

Prop. 4.30

Sejam f uma função contínua em I e

$$\begin{array}{ccc} \varphi: J & \longrightarrow & I \\ t & \mapsto & x = \varphi(t) \end{array}$$

diferenciável em J e tal que φ' é contínua em J .

Sejam $a, b \in I$ e $c, d \in J$ tais que $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Obs. 4.31

I e J denotam intervalos não degenerados de \mathbb{R} .

Exer. 4.32

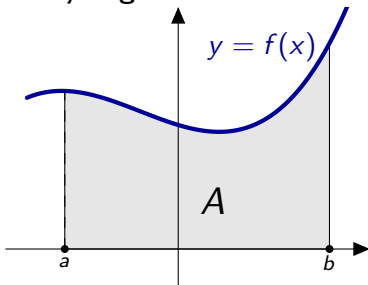
Calcule: (a) $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 4} dx$ (b) $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$

Prop. 4.33

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0, x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Ilustração gráfica



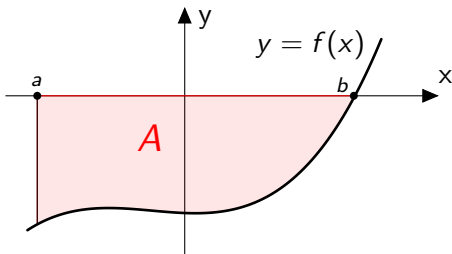
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Prop. 4.34

Se f é uma **função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$** , então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $y = 0, x = a$ e $x = b$ é dada por

$$-\int_a^b f(x) dx.$$

Ilustração gráfica



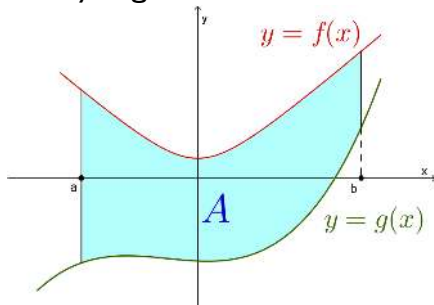
$$A = -\int_a^b f(x) dx$$

Prop. 4.35

Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelos gráficos de f e de g e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Ilustração gráfica



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

Exer. 4.36

- 1** Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$ e pelas retas $x = 2$ e $y = 0$.
- 2** Calcule a área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função h definida por

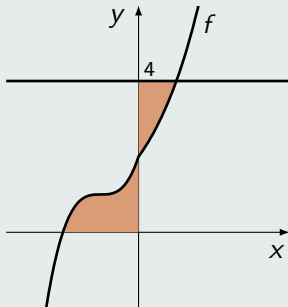
$$h(x) = \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- 3** Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2, y \geq x-1, y \leq 4\}$.
- (a) Represente geometricamente a região A .
- (b) Calcule o valor da área da região A .

Exer. 4.37

Calcule a área da seguinte região sombreada, onde

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$



Integrais impróprios

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)

Paolo Vettori

Sandrina Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Aveiro

Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Obs. 5.1

O integral definido (integral de Riemann) exige que a função integranda, f , esteja definida num intervalo fechado e limitado, I , e que f seja limitada. Podemos estender esta noção de forma a englobar uma destas restrições ou mesmo ambas, passando ao estudo do que chamamos **Integrais Impróprios**.

Os **Integrais Impróprios** podem ser de três espécies:

- 1.^a **Espécie**: O intervalo I não é limitado mas f é limitada em qualquer subintervalo fechado de I .
- 2.^a **Espécie**: a função f não é limitada ou não está definida em alguns pontos de I , sendo I limitado.
- 3.^a **Espécie**: O intervalo I não é limitado e f não é limitada ou não está definida em alguns pontos de I .

Vamos limitar o nosso estudo aos integrais impróprios de 1.^a Espécie.

1ª Espécie

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx;$$

$$\int_{-\infty}^0 x^3 dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx.$$

2ª Espécie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - 1} dx;$$

$$\int_0^3 \frac{1}{x(x-3)} dx;$$

$$\int_{-2}^3 x^2 dx.$$

3ª Espécie

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x-3)} dx;$$

$$\int_{-\infty}^1 \ln(1-x) dx.$$

Vamos limitar o nosso estudo aos integrais impróprios de 1.ª Espécie

Def. 5.2

Integral impróprio de 1.ª espécie no limite superior de integração

Seja $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall t \geq a$.
Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

então o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diz-se **convergente** e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se **divergente**.

Exemplo de aplicação:

Estudar a natureza do integral impróprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctg(x)]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg t \\ &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ é convergente e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exer. 5.3

- 1** Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\int_{\pi}^{+\infty} \cos(x) dx$ (b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2} dx$ (c) $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

- 2** Prove que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ é:

divergente se $\alpha \leq 1$;

convergente se $\alpha > 1$ e, neste caso, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$.

- 3** Prove que o integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{\beta x} dx$ é:

divergente se $\beta \geq 0$;

convergente se $\beta < 0$ e, neste caso, $\int_0^{+\infty} e^{\beta x} dx = -\frac{1}{\beta}$.

Def. 5.4

Integral impróprio de 1.ª espécie no limite inferior de integração

Seja $f:] - \infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, a]$, $\forall t \leq a$.
Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

então o integral impróprio $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ diz-se **convergente** e escreve-se

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se **divergente**.

Exemplo de aplicação:

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} t \right) \\ &= \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ é convergente e

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{3\pi}{4}.$$

Exer. 5.5

- 1** Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{4-x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^0 \frac{4}{1+(x+1)^2} dx$

- 2** Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\int_{-\infty}^0 a^x dx$$

Prop. 5.6

Sejam $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$. Então verificam-se as seguintes condições:

- 1** Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ são convergentes, então $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$ é convergente, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$
- 2** Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x)) dx$ é divergente, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exer. 5.7

Mostre que nas condições da Proposição anterior se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é divergente então $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx$ é divergente.

Obs. 5.8

Resultados análogos válidos para integrais impróprios de 1.^a espécie no limite inferior de integração.

Prop. 5.9

Sejam $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, e $b > a$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

têm a mesma natureza (i.e., ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

Obs. 5.10

Resultado análogo, com as devidas adaptações, é válido para integrais impróprios de 1.^a espécie no limite inferior de integração.

Exemplos de aplicação:

- 1** Pelo Exercício 7.3.2 tem-se que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ converge e que } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^3} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

- 2** Como, atendendo ao Exercício 7.3.2, o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} x^2 dx \text{ é divergente, então o integral impróprio}$$

$$\int_3^{+\infty} x^2 dx \text{ também é divergente.}$$

Def. 5.11

Integral impróprio de 1.º espécie em ambos os limites de integração

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[\alpha, \beta]$ para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta$.

1 Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{são ambos convergentes}$$

dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ é **convergente** e escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Def. 5.12 (cont.)

2 Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, pelo menos um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é divergente dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ é **divergente**.

Exer. 5.13

Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} x dx \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad (c) \int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx$$

Prop. 5.14

Critério de Comparação

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$, integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) ,$$

para todo o $x \in [a, +\infty[$. Então:

- (i) se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente.
- (ii) se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é divergente.

Obs. 5.15

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o mesmo critério para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exemplo de aplicação:

Usando o Critério de Comparação estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} dx .$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$ temos

$$0 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} . \text{ (justifique!)} \quad (1)$$

Uma vez que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente e que a desigualdade (1) se verifica, pelo Critério de Comparação, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente.

Prop. 5.16

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$ e integráveis em $[a, t]$, $\forall t \geq a$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, $\forall x \in [a, +\infty[$. Seja

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Então:

- (i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ têm a mesma natureza.
- (ii) Se $L = 0$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente.
- (iii) Se $L = +\infty$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente.

Exemplo de aplicação:

Usando o Critério do Limite estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} dx .$$

Notar que, $\forall x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \geq 0$ e $\frac{1}{x^2} > 0$. Além disso

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1 .$$

Uma vez que $L \in \mathbb{R}^+$ e que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente, pelo

Critério do Limite, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente.

Obs. 5.17

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o Critério do Limite para integrais impr rios de 1.  espécie, impr rios no limite inferior de integração.

Exemplo de aplicação:

Estudo da natureza do integral impr rio $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx$.

$\forall x \in]-\infty, 0], \frac{e^x}{(x-1)^2} > 0$ e $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$.

Uma vez que

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

e que $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx$   convergente (**verifique!**), concluímos, pelo Critério do Limite, que $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx$   convergente.

Exer. 5.18

Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$$

$$(d) \int_3^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{4 + \sqrt{x}} dx$$

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{5x^2 - 3}{x^8 + x - 1} dx$$

$$(e) \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^7 + 2x + 1} dx$$

$$(c) \int_0^{+\infty} e^{x^2} dx$$

$$(f) \int_{-\infty}^0 \frac{x^3 + 3x}{2 + x^2} dx$$

Def. 5.19

Seja $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \in [a, +\infty[$. Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é **absolutamente convergente**, se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

é convergente.

Prop. 5.20

Seja $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \in [a, +\infty[$. Se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Obs. 5.21

Com ligeiras adaptações, pode definir-se convergência absoluta e enunciar-se a mesma proposição para integrais impróprios de 1.^a espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exer. 5.22

Verifique se os seguintes integrais impróprios são absolutamente convergentes:

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx$$

$$(b) \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 2x^4} dx, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$