Cálculo I - agr. 4 Exame de recurso

1ª parte - resolução

1. (a) $\begin{cases} x>0 \\ -1 \le 2+\ln x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -3 \le \ln x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ e^{-3} \le x \le e^{-1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in [e^{-3}, e^{-1}]$. $D_f = [e^{-3}, e^{-1}]$.

(b) f é contínua em $[e^{-3}, e^{-1}]$ e diferenciável em $]e^{-3}, e^{-1}[$.

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(2+\ln x)^2}}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall x \in]e^{-3}, e^{-1}[$, logo f é estritamente monótona decrescente $\Rightarrow$ f tem o único máximo no ponto $x=e^{-3}$, $f(e^{-3}) = \arccos(2+\ln(e^{-3})) = \pi$, e este máximo é global, e f tem o único mínimo no ponto $x=e^{-1}$, $f(e^{-1}) = \arccos(2+\ln(e^{-1})) = 0$, e este mínimo é global.

2.(a) $\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{(x^3+x)+(2x^2+2x+1)}{x^3+x} = 1 + \frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)}$.

$\frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$

$2x^2+x+1 = Ax^2+A+Bx^2+Cx$

$\begin{cases} 2=A+B \\ 1=C \\ 1=A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=1 \\ B=1 \end{cases}$. Logo $\frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}$

$\int \left(1+\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x + \ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$+ \operatorname{arctg} x = x + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$,

C constante em intervalos

(b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+9x}dx = \int \frac{t}{t^4+9t^2}\cdot 2t\,dt$

C.A.: $\sqrt{x}=t$, (estritamente monótona crescente) $x=t^2$, $t>0$. $\frac{dx}{dt}=2t$

$= 2\int \frac{1}{t^2+9}dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+(t/3)^2}\cdot\frac{1}{3}dt$

$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right)+C = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$.