Cálculo I - SE - Exame de recurso 2020/21 - Resolução

1. $f(x) := \ln(\arccos(x^2))$

(a) D_f ? $\quad \underbrace{x^2 \in D_{\arccos} = [-1,1]}_{\Updownarrow \atop x \in [-1,1]}$ e $\underbrace{\arccos(x^2) \in D_{\ln} = \mathbb{R}^+}_{\Updownarrow \atop x^2 \neq 1 \ (\text{e } x^2 \in D_{\arccos})}$

Conjugando as duas restrições, temos que $D_f =]-1,1[$.

(b) $$f'(x) = \frac{-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}{\arccos(x^2)} = -\frac{2x}{\underbrace{\sqrt{1-x^4}\cdot\arccos(x^2)}_{>0}}, \quad x \in]-1,1[.$$

O sinal de f' é o contrário do sinal de $2x$.

	-1		0		1
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

f tem um único máximo em 0, que é absoluto e igual a $f(0) = \ln(\arccos(0^2)) = \ln\frac{\pi}{2}$.

f não tem mínimos.

2. (a) $\int x^2 \cosh x \, dx = \sinh x \cdot x^2 - \int \sinh x \cdot 2x \, dx$

primitivação por partes

$= x^2 \sinh x - 2\left(\cosh x \cdot x - \int \cosh x \, dx\right)$

$= x^2 \sinh x - 2x\cosh x + 2\sinh x + C$

(b) $\int \frac{2x^2+3x+1}{2x^2+3} dx$. C.A.:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^2}+3x+1 & 2x^2+3 \\ \hline -\cancel{2x^2} \quad\ \ -3 & 1 \\ \hline 3x-2 & \end{array}$$

C.A.: $\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+3} = 1 + \dfrac{3x-2}{2x^2+3}$

$$\int \frac{2x^2+3x+1}{2x^2+3}\,dx = x + \int \frac{3x}{2x^2+3}\,dx - \int \frac{2}{2x^2+3}\,dx$$

$$= x + \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2+3}\,dx - \int \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}x^2+1}\,dx$$

$$= x + \frac{3}{4}\ln|2x^2+3| - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\right)^2+1}\,dx$$

$$= x + \frac{3}{4}\ln(2x^2+3) - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\text{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x\right) + C$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

C.A.: Mud. variável $x = \text{tg}\,t,\ t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $\iff$ $t = \text{arctg}\,x,\ x\in\mathbb{R}$.

$\dfrac{dx}{dt} = \sec^2 t > 0.$

$$= \int \frac{1+\text{tg}\,t}{\sqrt{\underbrace{1+\text{tg}^2 t}_{=\sec^2 t}}}\cdot \sec^2 t\,dt$$

$$= \int \frac{1+\text{tg}\,t}{\sec t}\cdot \sec^2 t\,dt$$ ← pois $\sec t > 0$ para $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$= \int \sec t\,dt + \int \text{tg}\,t\cdot\sec t\,dt$$ ← pela informação dada na sugestão.

$$= \ln|\sec t + \text{tg}\,t| + \sec t + C$$

$$= \ln|\sec(\text{arctg}\,x) + x| + \sec(\text{arctg}\,x) + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right| + \sqrt{1+x^2} + C.$$ } Este último passo não era exigido.

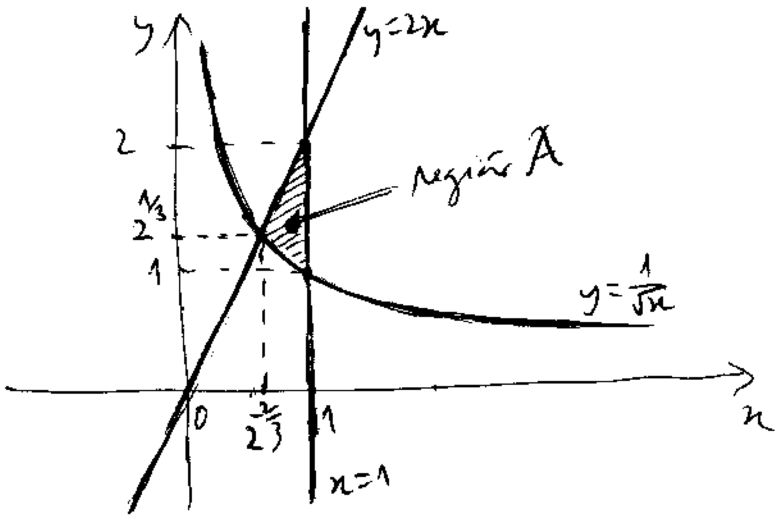
3. A: região de área finita delimitada por $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $y=2x$ e $x=1$.

(a) $$\frac{1}{\sqrt{x}} = 2x \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x\sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{2}{3}}.$$

O correspondente y é $y=2\cdot 2^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$.

Assim, há apenas um ponto de intersecção pedido: $(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$.

(b)



(c) Área de A: $$\int_{2^{-\frac{2}{3}}}^{1} 2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[x^2-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{2^{-\frac{2}{3}}}^{1}$$

$$= \left(1-2-2^{-\frac{4}{3}}+2\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) = -1-2^{-\frac{4}{3}}+2^{\frac{2}{3}}.$$

Obs: Não era exigido, mas pode ver-se que o valor é $\simeq 0{,}19$.

4. (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

A série dos módulos tem termo geral $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; comparando com $\frac{1}{n^{1/2}}$ (termo geral de série divergente) vem

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \in]0,\infty[,$$

logo a série dos módulos tem a mesma natureza, logo é divergente.

À série dada pode aplicar-se o Critério de Leibniz: é alternada e $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ tende para zero de um modo decrescente (já que o denominador tende para $+\infty$ de um modo crescente). Assim, é convergente. Como a dos módulos não é, então concluímos que é <u>simplesmente convergente</u>.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (2n)!}{n^{2n}}$.

$$\frac{\left|\frac{2^{n+1}(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}}\right|}{\left|\frac{2^n(2n)!}{n^{2n}}\right|} = \frac{\cancel{2^n}\cdot 2(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\, n^{2n}}{(n+1)^{2n}\cdot(n+1)^2\cdot \cancel{2^n}\cdot\cancel{(2n)!}} =$$

$$= 2\cdot\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$$

$$= 2\cdot\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{8}{e^2} > 1.$$

Então o Critério de D'Alembert garante que a série é divergente

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\int_1^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt}{x^3}$. Como $\cos x$ varia entre -1 e 1, o numerador está bem definido e tem limite 0 quando $x\to 0^-$ (pois então $\cos x \to 1$ e usamos a continuidade do integral indefinido). Como o mesmo acontece ao denominador, temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Pela regra de Cauchy tem-se então que o limite pedido é

T. fundamental do Cálculo ($\sqrt{1-t^2}$ é contínua) e regra da cadeia

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{3x^2} = \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{(-\sin x)\cdot(-\sin x)}{3x^2}}_{\sin x<0 \text{ qd } x\to 0^-} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{limite notável}}.$$