

3. Campos Eléctrico e Magnético

Índice

3.1 Campo eléctrico

Propriedades das cargas eléctricas. Isoladores e condutores. Lei de Coulomb. Campo eléctrico.

3.2 Potencial eléctrico

Diferença de potencial. Potencial eléctrico. Energia potencial. Cálculo do campo eléctrico a partir do potencial.

3.3 Lei de Gauss

Lei de Gauss. Condutores em equilíbrio electrostático. Aplicações da Lei de Gauss.

3.4 Capacidade e condensadores

Capacidade eléctrica. Energia armazenada num condensador.

3.5 Corrente eléctrica e resistência

Corrente eléctrica. Resistência e a Lei de Ohm. Energia e potência eléctricas. Leis de Kirchhoff.

3.6 Campo magnético

Campo magnético. Força magnética. Lei de Biot-Savat. Lei de Ampère.

3.7 Indução electromagnética

Lei de Faraday. Lei de Lenz. Auto-indutância. Indutância mútua.

3.8 Equações de Maxwell



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

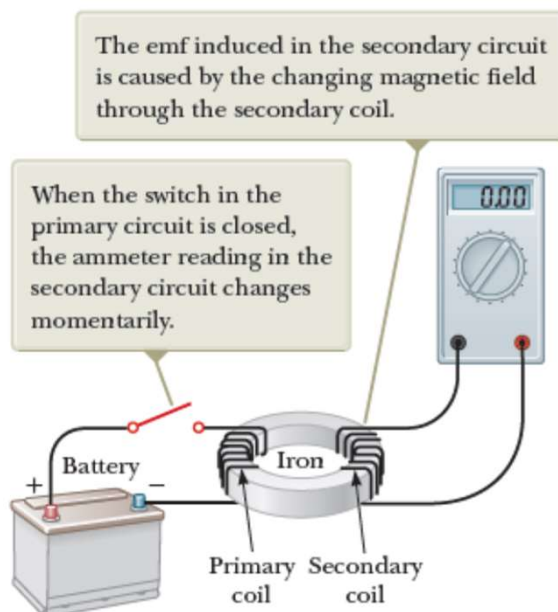
Em 1831, as experiências realizadas por Michael Faraday em Inglaterra e Joseph Henry nos E.U.A. mostraram que uma f.e.m. pode ser induzida num circuito por um campo magnético variável



Michael Faraday
(1777-1851)



Joseph Henry
(1777-1851)

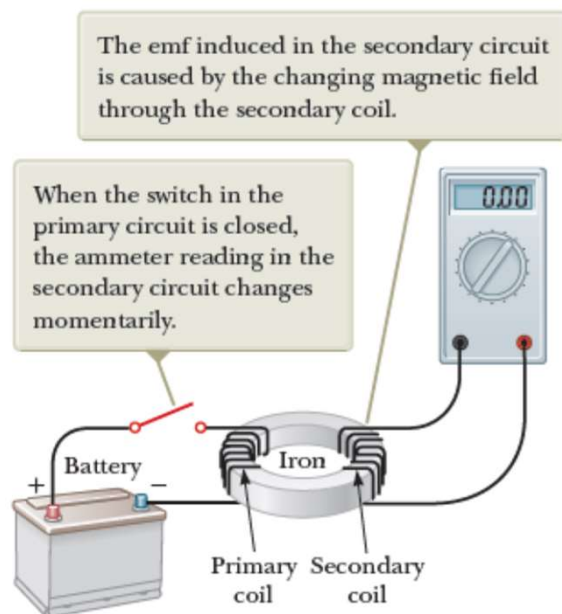


A experiência de Faraday
Circuito primário: fio enrolado (bobine) num anel de ferro para ampliar o campo B produzido pela corrente que está ligado a uma bateria
circuito secundário: fio enrolado (bobine) no anel e ligado a um galvanómetro

3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

- O interruptor é fechado, o galvanómetro no circuito secundário deflete numa direcção e volta para zero
- O interruptor é aberto, o galvanómetro deflete na direcção oposta e novamente volta para zero
- O galvanómetro está no zero quando existe uma corrente estacionária no circuito primário
- Não há fontes ligadas ao circuito secundário



Faraday concluiu

Uma corrente eléctrica é induzida no circuito secundário por um campo magnético variável

A corrente induzida só existe enquanto o campo magnético variar. Quando campo magnético atinge um regime estacionário a corrente desaparece

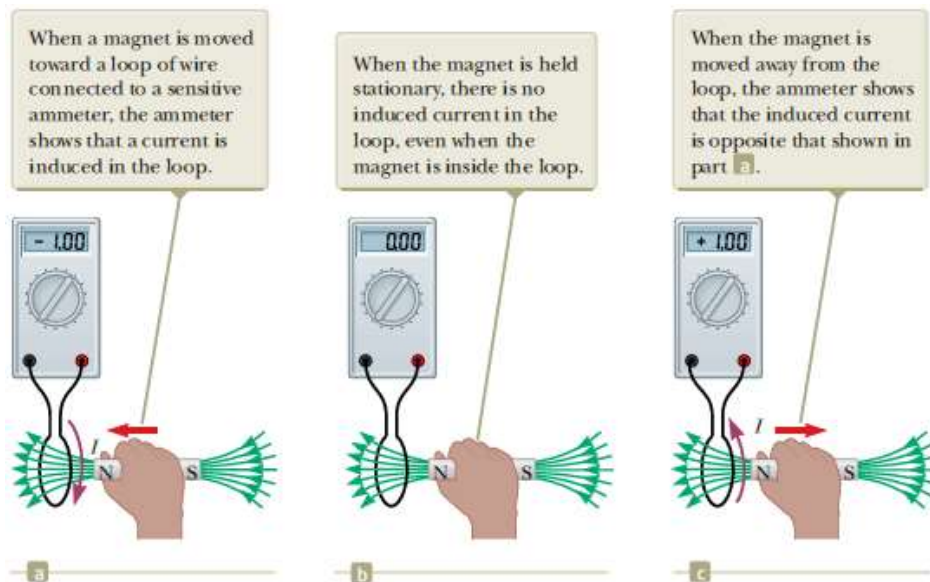
É a mudança do campo que gera a corrente, não é apenas a existência do campo

3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Outra experiência que mostra a que uma f.e.m. pode ser induzida por um campo magnético variável

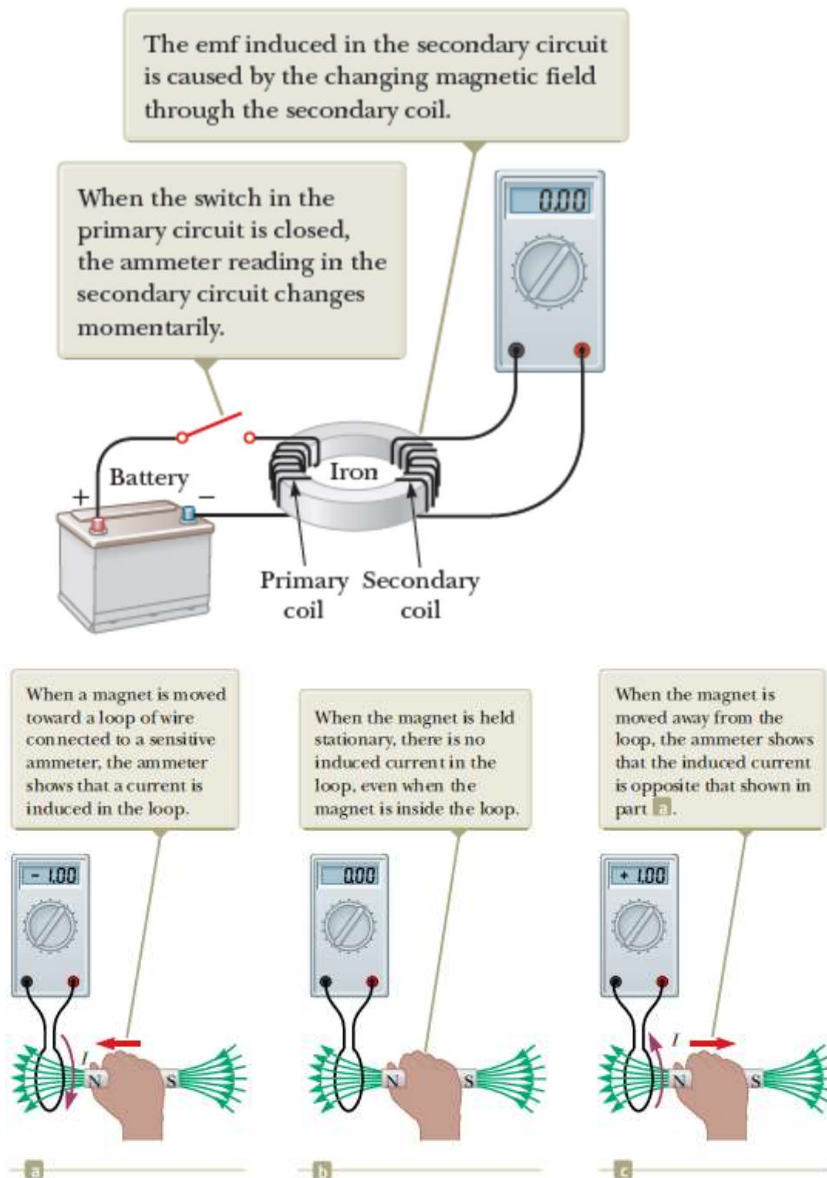
- Uma espira condutora é ligada a um amperímetro
- Quando um íman é aproximado da espira observamos uma corrente negativa.
- Quando o íman é afastado, a corrente no amperímetro muda para positiva
- Quando o íman está em repouso não há corrente



- Mas se o íman estiver em repouso e a espira se mover também aparece uma corrente na espira
- A espira detecta o movimento do íman relativamente a si própria e esta detecção está relacionada com um campo magnético variável

3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética



Estas experiências têm algo em comum
Em ambos os casos uma f.e.m. é induzida numa espira *quando o fluxo do campo magnético através da área limitada pela espira varia no tempo*
Esta é lei de Faraday da indução e a sua expressão matemática é

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

onde

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

é o fluxo magnético através da espira

3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética - Fluxo

O que é o fluxo do campo magnético?

Tal como no caso do caso do fluxo do campo eléctrico o fluxo através de um elemento de superfície é $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$ de modo que o fluxo magnético total através da superfície é

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Consideremos o caso particular de uma superfície plana de área A num campo \vec{B} uniforme em toda a superfície plana. Temos

$$\Phi_B = BA \cos \theta$$

O fluxo é máximo $\Rightarrow \vec{B} \parallel \vec{A}$ ou $\vec{B} \perp \text{plano}$

Unidades S.I. $(\Phi_B) = \text{T} \cdot \text{m}^2$ ou Wb (weber)

$$1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$$

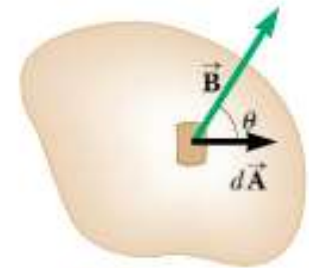
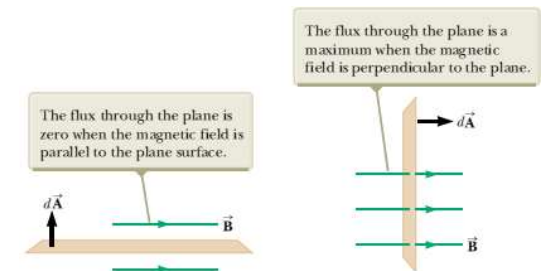


Figure 30.19 The magnetic flux through an area element dA is $\vec{B} \cdot d\vec{A} = B dA \cos \theta$, where $d\vec{A}$ is a vector perpendicular to the surface.



3. Campos Eléctrico e Magnético

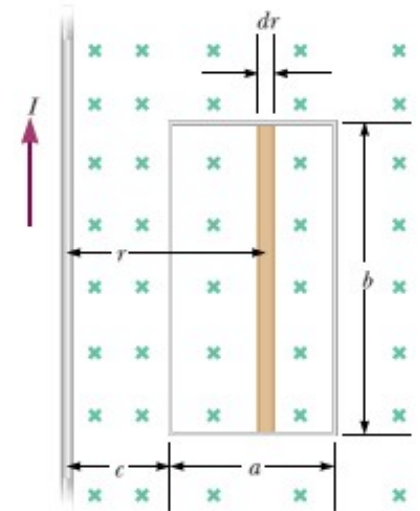
7. Indução electromagnética - Fluxo

Exemplo:

Consideremos uma espira rectangular de lados a e b colocada a uma distância c de um fio longo que transporta uma corrente I . O fio é paralelo ao lado b da espira. Calcular o fluxo magnético que atravessa a espira

Resolução

As linhas de campo magnético do fio são círculos concêntricos com o fio e atravessam a espira na perpendicular à área da espira $\Rightarrow \vec{B} \parallel d\vec{A} \rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{A} = B dA$



$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B dA$$

Como $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ é igual em todos os pontos à distância $r \Rightarrow dA = b dr$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right) \text{ (Wb)}$$

- O fluxo depende da área da espira
- Se a, b e c são constantes, o fluxo através da área da espira é constante se $I = \text{constante}$



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Se tivermos N espiras (bobine) da mesma área e Φ_B é o fluxo através de uma espira, uma f.e.m. é induzida em cada espira. Então as espiras estão ligadas em série e as f.e.m. somam-se e a f.e.m. induzida total é

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

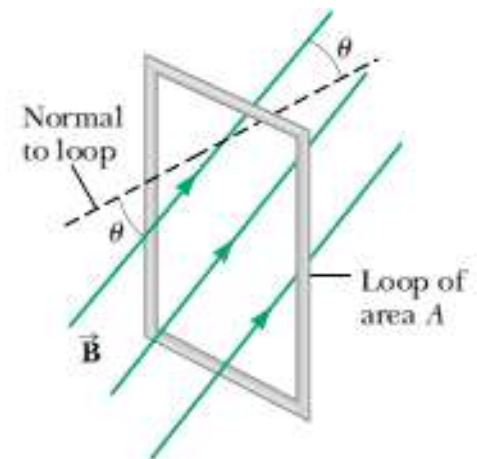
onde o sinal negativo tem um significado físico muito importante e será abordado mais adiante (lei de Lenz).

Espira rectangular plana num campo uniforme.

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(BA \cos \theta)$$

A f.e.m. pode ser induzida se

- B varia no tempo - $B(t)$
- A área limitada pela espira varia no tempo - $A(t)$
- O ângulo entre \vec{B} e \vec{A} varia no tempo - $\theta(t)$
- Qualquer combinação das variações anteriores



3. Campos Eléctrico e Magnético

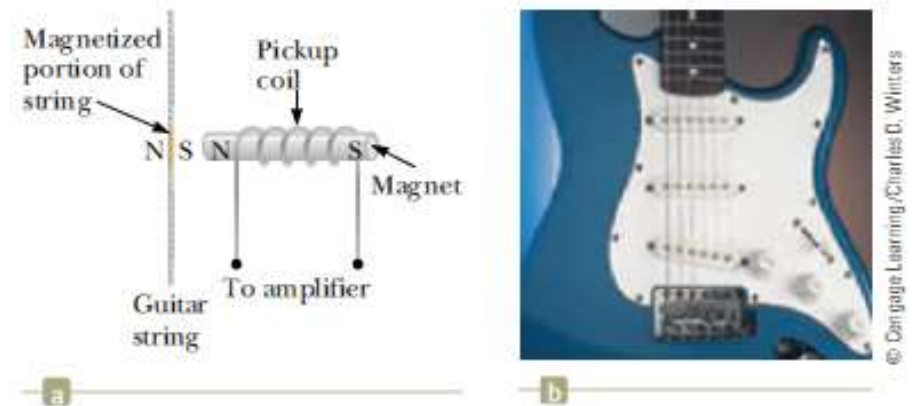
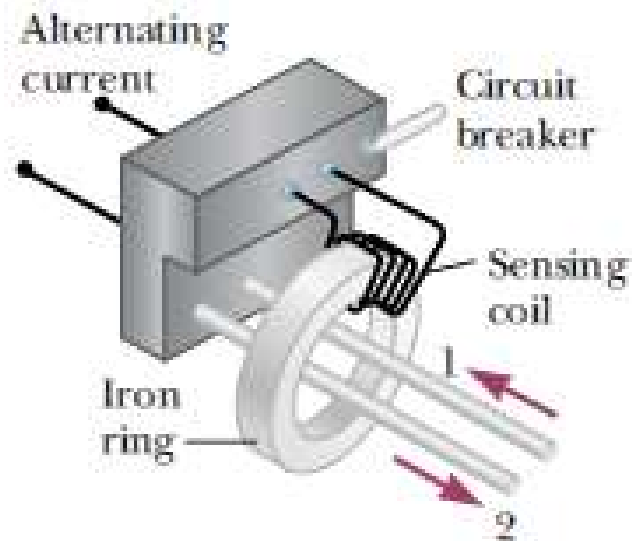
7. Indução electromagnética

Aplicações da lei de Faraday

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Captador de som numa guitarra eléctrica

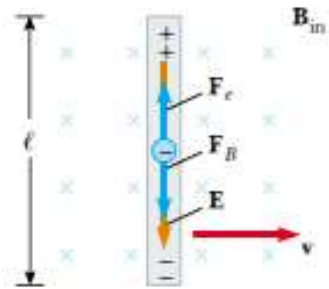
Protecção de terra



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Movimento de condutores em campo magnético uniforme



Consideremos uma barra metálica de comprimento L com velocidade de translação \vec{v} sob a acção do campo \vec{B} dirigido para a página, como no esquema ao lado. Os electrões do condutor sofrem acção da força

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Esta força promove a separação de cargas no interior da barra, criando um campo eléctrico no seu interior
- Os electrões movem-se para a extremidade inferior, ficando um excesso de carga positiva na outra extremidade
- As cargas acumulam-se nas extremidades até ao equilíbrio

$$\vec{F}_B + \vec{F}_E = 0 \implies qvB = qE \implies E = vB$$

- Como o campo \vec{E} é constante, a d.d.p. entre as extremidades do condutor é

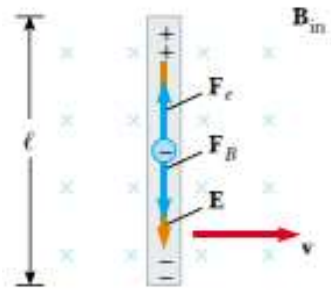
$$V = EL$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

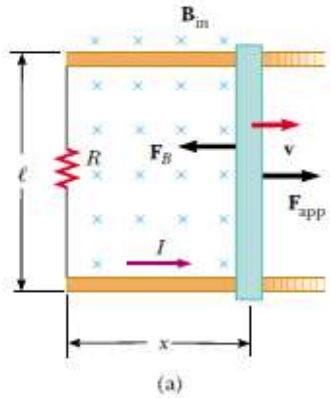
Movimento de condutores em campo magnético uniforme



$$V = EL = BLv$$

com o potencial positivo na extremidade superior

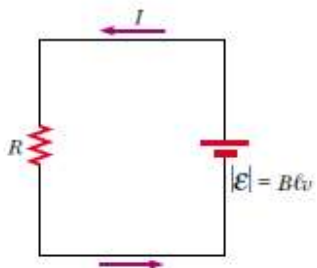
- Uma d.d.p. é mantida no condutor enquanto existir movimento na região do campo magnético
- A polaridade de V é invertida se \vec{v} for também invertida



Se o condutor fizer parte de um circuito fechado → correntes eléctricas

Agora colocamos a barra em contacto com dois fios condutores paralelos num circuito fechado

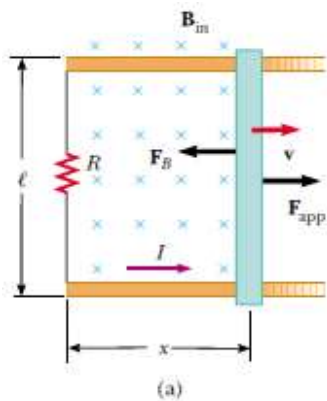
- a resistência eléctrica da barra é nula
- a resistência da parte fixa do circuito é R
- o movimento da barra não tem atrito mecânico



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

- Aplicamos de um campo constante \vec{B} perpendicular ao plano do circuito
- Aplicamos uma força exterior na barra \vec{F}_{app} e a barra desloca-se com velocidade \vec{v}
- O deslocamento induz uma d.d.p. ao longo da barra o que dá origem a uma **corrente eléctrica induzida** I pois as cargas podem mover-se em circuito fechado



- Neste caso a área do circuito é $A = Lx$ e o fluxo magnético que atravessa a área limitada pelo circuito é

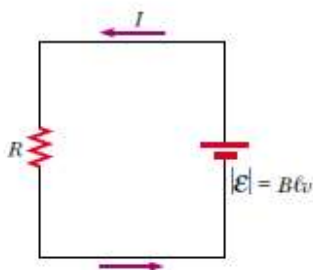
$$\Phi_B = BLx$$

- Usando a lei de Faraday, $v = \frac{dx}{dt}$ e a lei de Ohm resulta

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(BLx) = -BLv \Rightarrow I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

Na figura ao lado está representado o esquema equivalente. A polaridade de \mathcal{E} é explicada mais adiante.

Qual é o balanço de energia neste processo?



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Qual é o balanço de energia neste processo?

Dado que não existe bateria (fonte) qual é a origem da corrente e da energia fornecida à resistência?

- A força \vec{F}_{app} realiza trabalho sobre a barra condutora \rightarrow movimento de cargas num campo magnético
- Este movimento gera um campo eléctrico \rightarrow cargas movem-se com a velocidade de arrastamento \rightarrow corrente eléctrica
- A força magnética do campo sobre a corrente induzida na barra é $F_B = ILB$
- Se a velocidade da barra é constante $\Rightarrow \vec{F}_B + \vec{F}_{app} = 0 \rightarrow F_{app} = ILB$ e a potência fornecida pela \vec{F}_{app} é

$$P = \vec{F}_{app} v = ILB v = \frac{BLv}{R} LB v = \frac{(BLv)^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \rightarrow P = I\mathcal{E}$$

Esta é a potência dissipada na resistência em acordo com o princípio de conservação da energia é igual à potência fornecida pela fonte (o trabalho fornecido é igual à variação da energia interna da resistência $W = \Delta E_{int}$)



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Lei de Lenz

A lei de Faraday indica que a f.e.m. induzida e a variação do fluxo têm sinais opostos.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Em 1834 Lenz introduziu a interpretação física

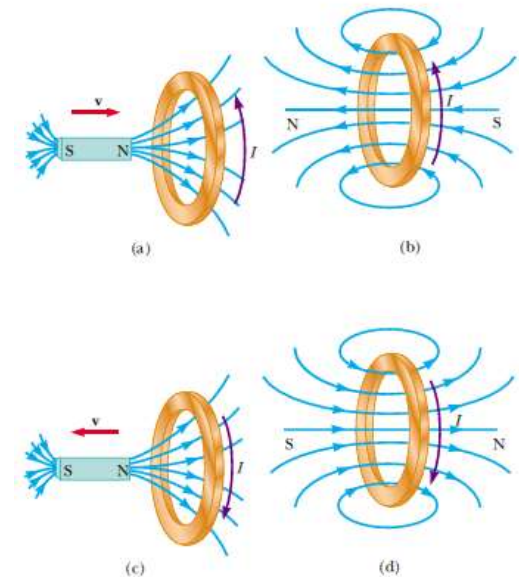
A polaridade da f.e.m. induzida é tal que a corrente induzida produz um campo que contraria sempre a variação do fluxo

Quando o íman se aproxima da espira em repouso o campo aumenta \Rightarrow o fluxo aumenta \Rightarrow a corrente induzida cria um campo induzido que gera um fluxo oposto à variação inicial \Rightarrow campo induzido tem o sentido oposto do campo do íman

Quando o íman se afasta, o campo diminui \Rightarrow o fluxo diminui \Rightarrow a corrente induzida cria um campo induzido que gera um fluxo oposto à variação inicial \Rightarrow o campo induzido tem o mesmo sentido que o campo do íman



Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865)

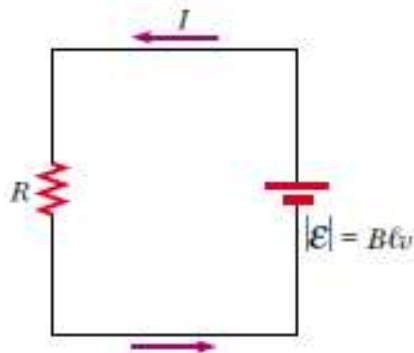
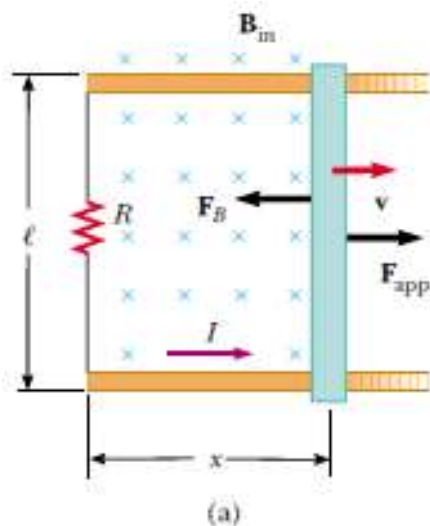


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Lei de Lenz

A polaridade da f.e.m. induzida é dada pela lei de Lenz



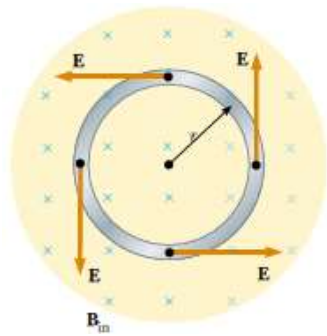
- A força exterior desloca a barra para a direita de modo a aumentar a área do circuito
- O fluxo aumenta $\Phi_B = BLx$ (x cresce)
- Corrente induzida cria um campo induzido que contraria este aumento de fluxo
- Campo induzido tem que ter o sentido oposto ao campo aplicado
- Corrente tem de circular no sentido retrógrado (figura ao lado)
- O circuito eléctrico equivalente é representado com uma f.e.m. com a polaridade que gera a corrente induzida



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

F.E.M. induzida e campos eléctricos



De acordo com a lei de Faraday uma f.e.m. é induzida no interior do condutor devido à variação do fluxo magnético através da área limitada pelo circuito

Como no nosso estudo as correntes são devidas a campos eléctricos, podemos afirmar que a corrente induzida é criada por um campo eléctrico induzido

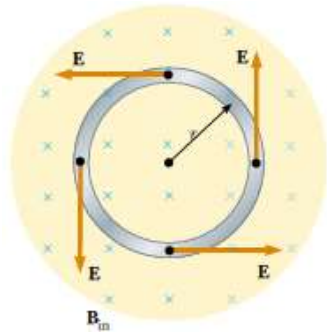
- Consideremos o caso de uma espira fina condutora de raio r situada num campo \vec{B} uniforme \perp ao plano da espira.
- B varia no tempo $B = B(t)$ mas a sua direcção mantém-se
- Então
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$
- É induzido um campo eléctrico \vec{E} que deve ser tangente à espira pois é o sentido do movimento das cargas e igual em todos os pontos do circuito (doutro modo I não seria uniforme)



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

F.E.M. induzida e campos eléctricos



- O trabalho realizado ao mover uma pequena carga q ao longo do circuito é $W = q\mathcal{E}$
- Como $\vec{F}_E = q\vec{E}$
- o trabalho realizado pelo campo eléctrico para mover esta carga ao longo de toda a espira é $q\mathcal{E} = qE(2\pi r)$

donde $E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$

Como $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ e $\Phi_B = B\pi r^2$

$$E 2\pi r = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

ou, de uma forma geral, a lei de Faraday poder escrever-se

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Exemplo:

Campo eléctrico induzido por um campo magnético variável fora e dentro de um solenóide com $L \gg R$

A corrente no solenóide é $I = I_{m\acute{a}x} \cos(\omega t)$, onde ω é a frequência angular da corrente alternada.

Resolução

Consideremos um ponto externo ao solenóide e o caminho de integração circular de raio r centrado com o solenóide. Como o campo \vec{B} é perpendicular à área limitada pelo caminho, temos

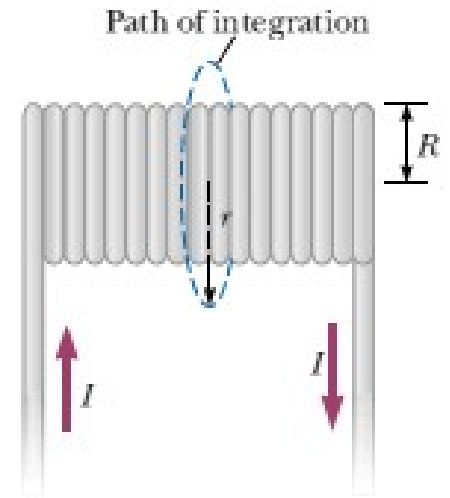
$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

B é o campo criado pelo solenóide $B = \mu_0 n I = -\mu_0 n I_{m\acute{a}x} \cos(\omega t)$

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi R^2 \mu_0 n \frac{d}{dt}[I_{m\acute{a}x} \cos(\omega t)] = \pi R^2 \mu_0 n I_{m\acute{a}x} \omega \sin(\omega t)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \rightarrow E 2\pi r = \pi R^2 \mu_0 n I_{m\acute{a}x} \omega \sin(\omega t)$$

$$E = \frac{R^2 \mu_0 n I_{m\acute{a}x} \omega}{2r} \sin(\omega t) \quad (r > R)$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Exemplo:

Campo eléctrico induzido por um campo magnético variável fora e dentro de um solenóide com $L \gg R$

A corrente no solenóide é $I = I_{máx} \cos(\omega t)$, onde ω é a frequência angular da corrente alternada.

Resolução

O caminho de integração é agora interior ao solenóide

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

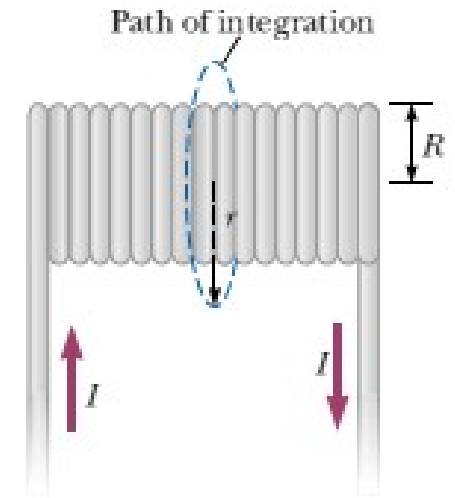
B é o campo criado pelo solenóide $B = \mu_0 n I = -\mu_0 n I_{máx} \cos(\omega t)$

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{d}{dt}[I_{máx} \cos(\omega t)] = \pi r^2 \mu_0 n I_{máx} \omega \sin(\omega t)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \rightarrow E 2\pi r = \pi r^2 \mu_0 n I_{máx} \omega \sin(\omega t)$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_{máx} \omega}{2} r \sin(\omega t) \quad (r < R)$$

O campo eléctrico é nulo ao longo do eixo do solenóide

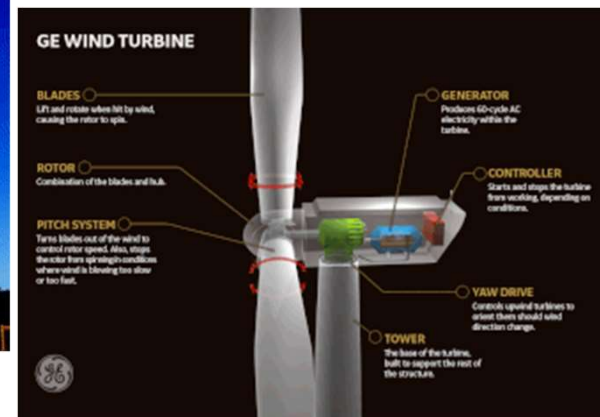
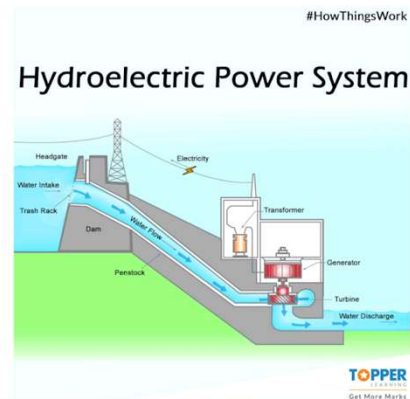


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

O nosso modo de vida necessita de muita energia eléctrica

Onde a vamos buscar? Conseguimos armazená-la?

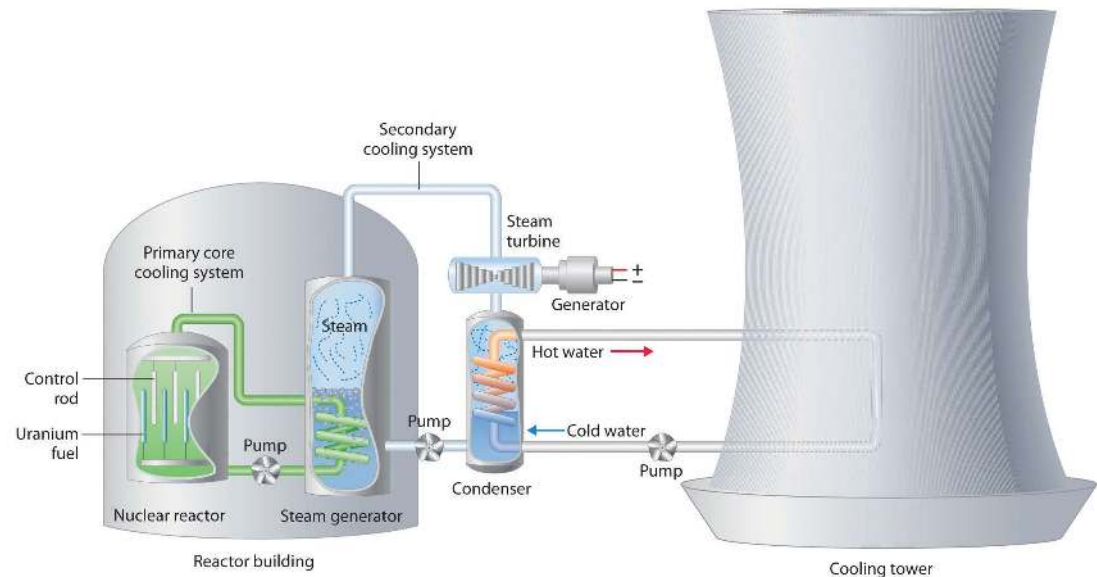
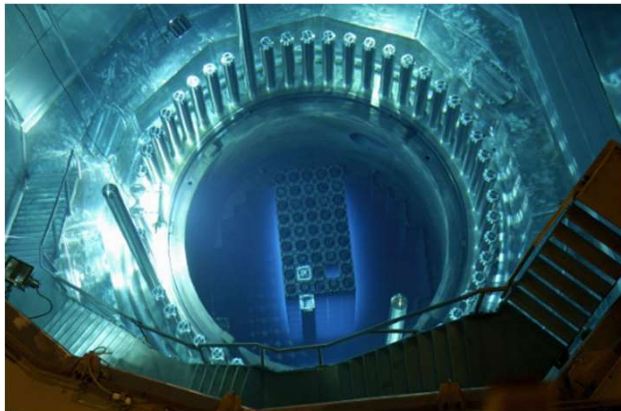


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

O nosso modo de vida necessita de muita energia eléctrica

Onde a vamos buscar? Conseguimos armazená-la?

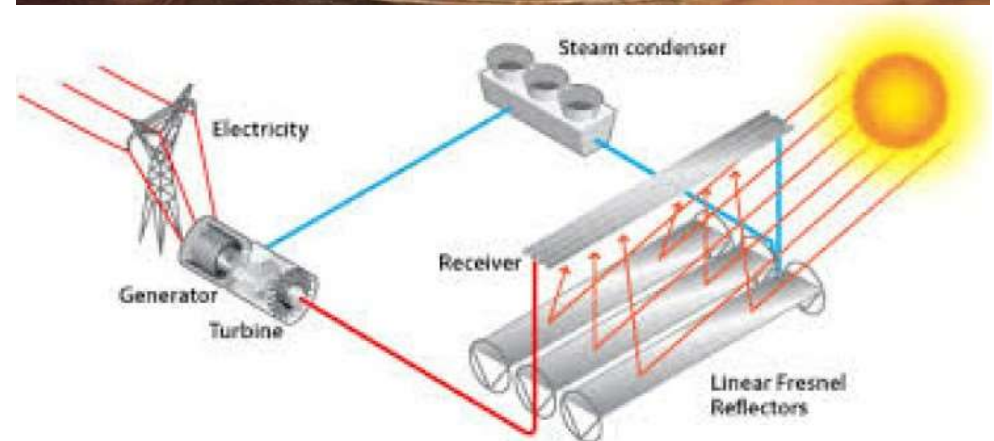
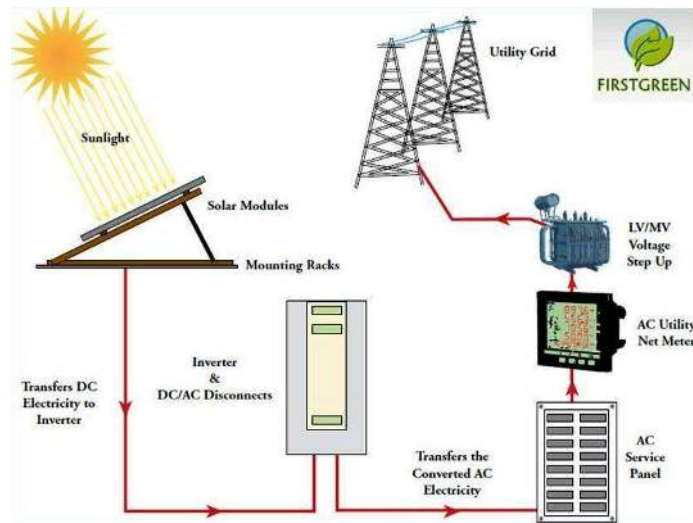


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

O nosso modo de vida necessita de muita energia eléctrica

Onde a vamos buscar? Conseguimos armazená-la?



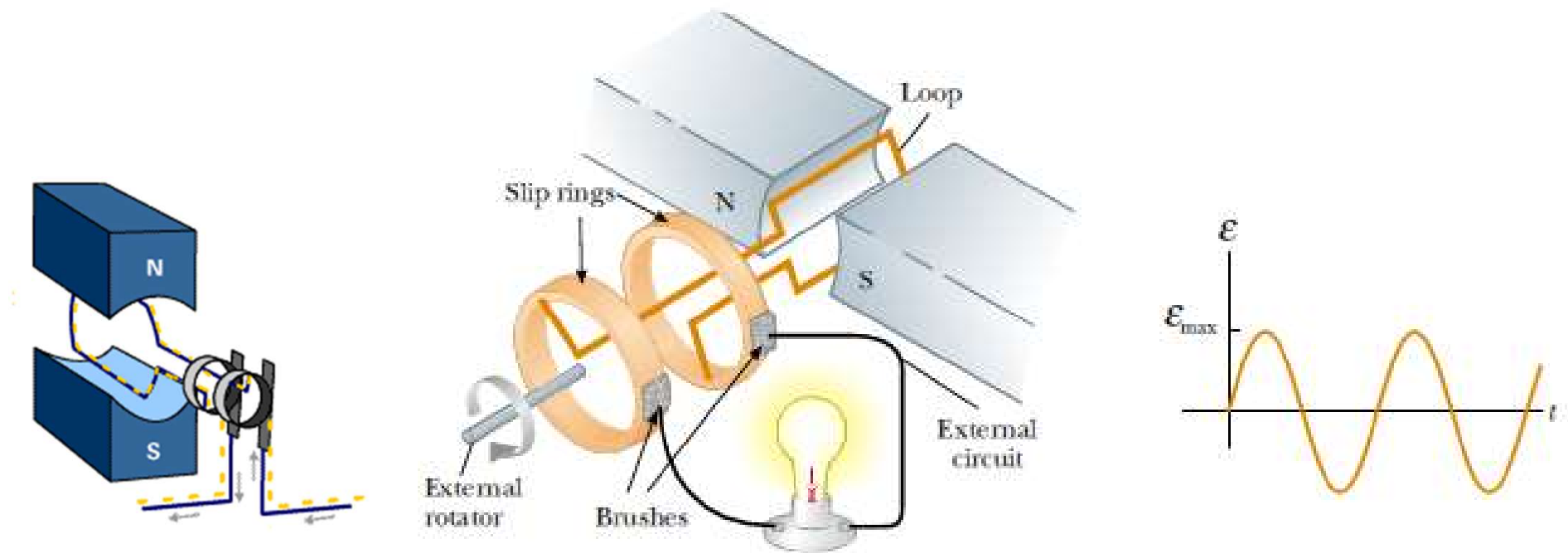
3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Geradores e Motores a.c.

Geradores são dispositivos que transformam energia de diversas fontes em energia eléctrica

Uma espira condutora roda num campo magnético → o fluxo do campo magnético através da área da espira varia no tempo → esta variação induz uma f.e.m. e uma corrente de acordo com a lei de Faraday



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Geradores e Motores a.c.

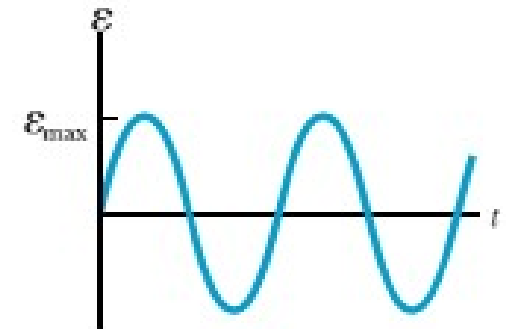
Em vez de uma única espira usamos bobines com N espiras com a mesma área e roda num campo uniforme com velocidade angular constante ω

O fluxo magnético através da bobine é, com $\theta = \omega t$

$$\Phi_B = BA \cos(\theta) \quad \Phi_B = BA \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -NBA \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = NBA\omega \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = NBA\omega$$



Obs:

$$\omega = 2\pi f$$

Na Europa a frequência dos geradores comerciais é $f = 50$ Hz

Nos E.U.A. e Canadá é $f = 60$ Hz

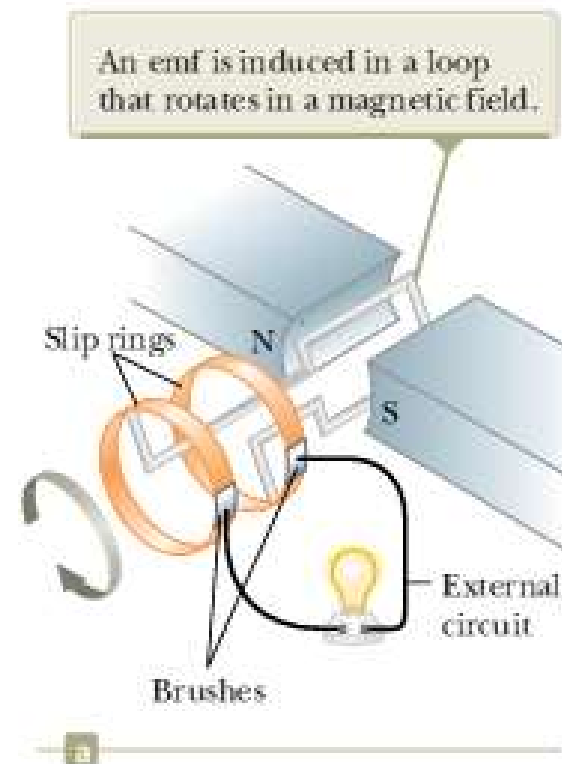
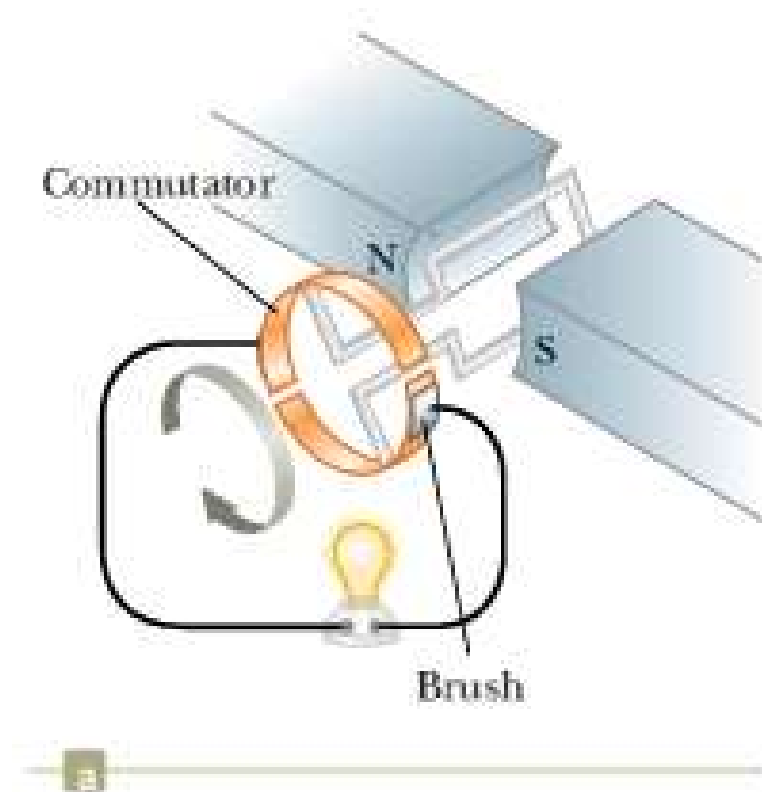


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Geradores d.c

Os componentes são essencialmente os mesmos que nos geradores a.c. excepto no contactos da bobine rotativa

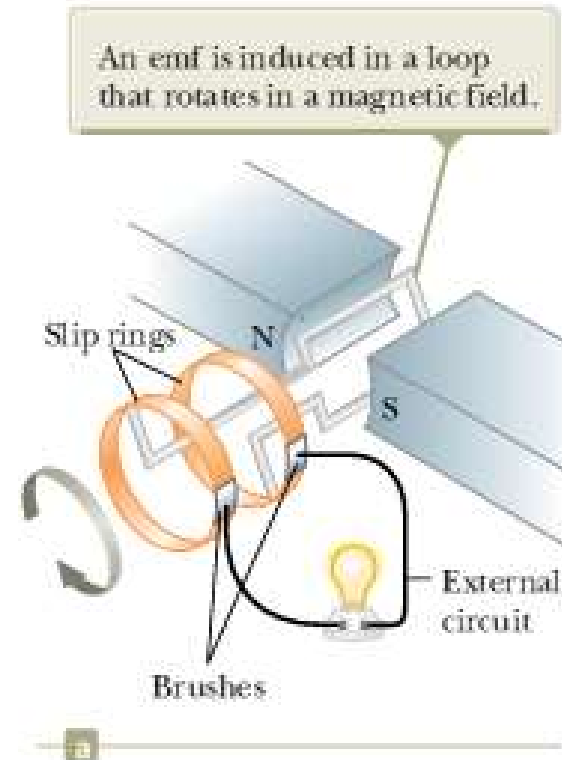
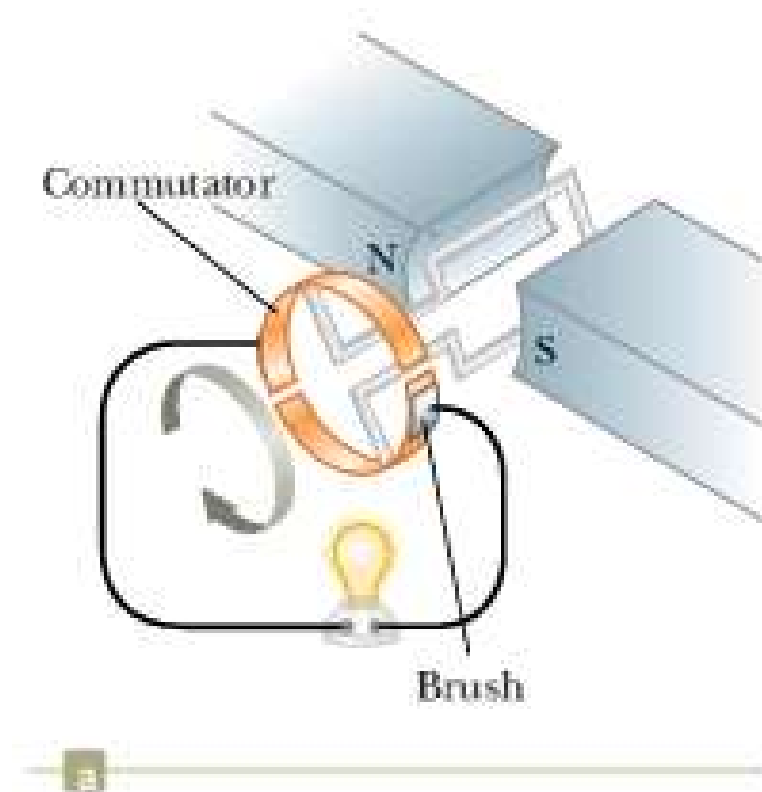


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Motores

Os componentes são essencialmente os mesmos que nos geradores a.c. excepto no contactos da bobine rotativa

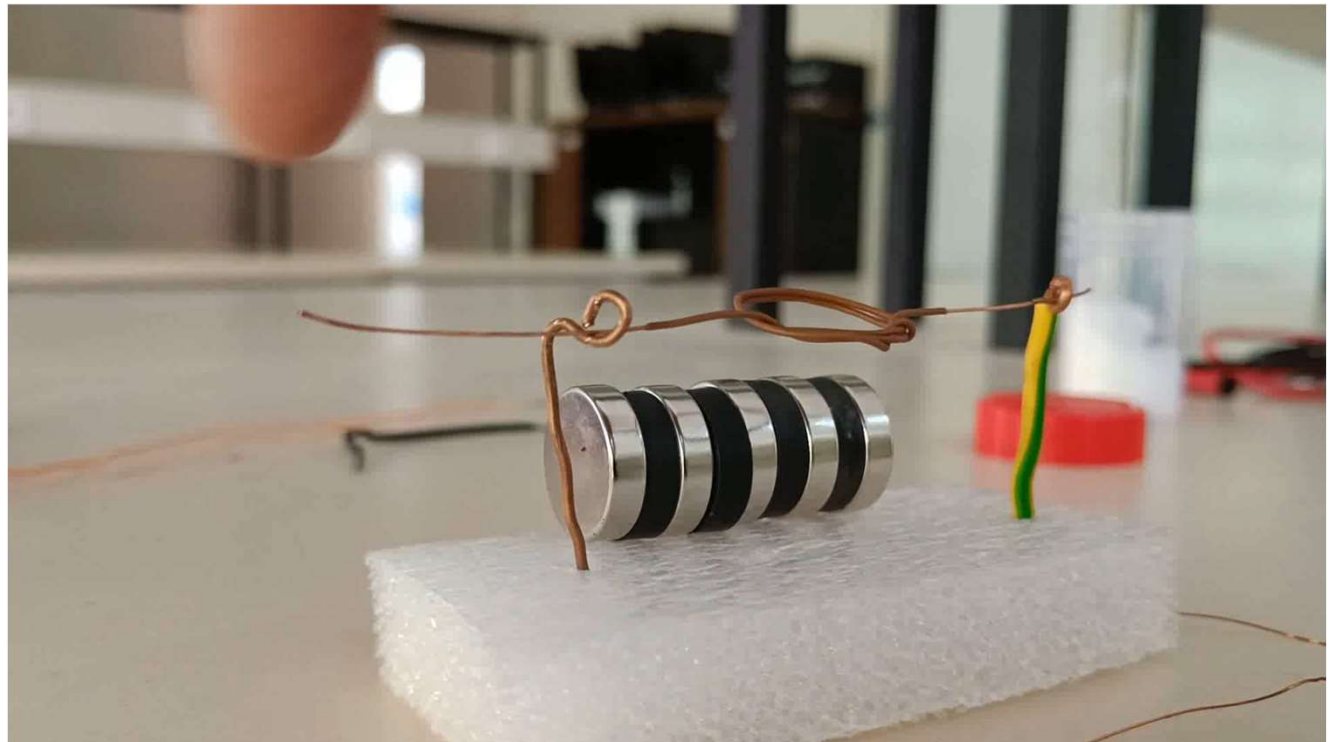


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Motores

Um motor é essencialmente um gerador a operar em sentido inverso. Em vez de gerar uma corrente através de uma bobine rotativa, a corrente é fornecida à bobine pela bateria. A bobine que transporta a corrente é posta em rotação pelo torque que actua na corrente.

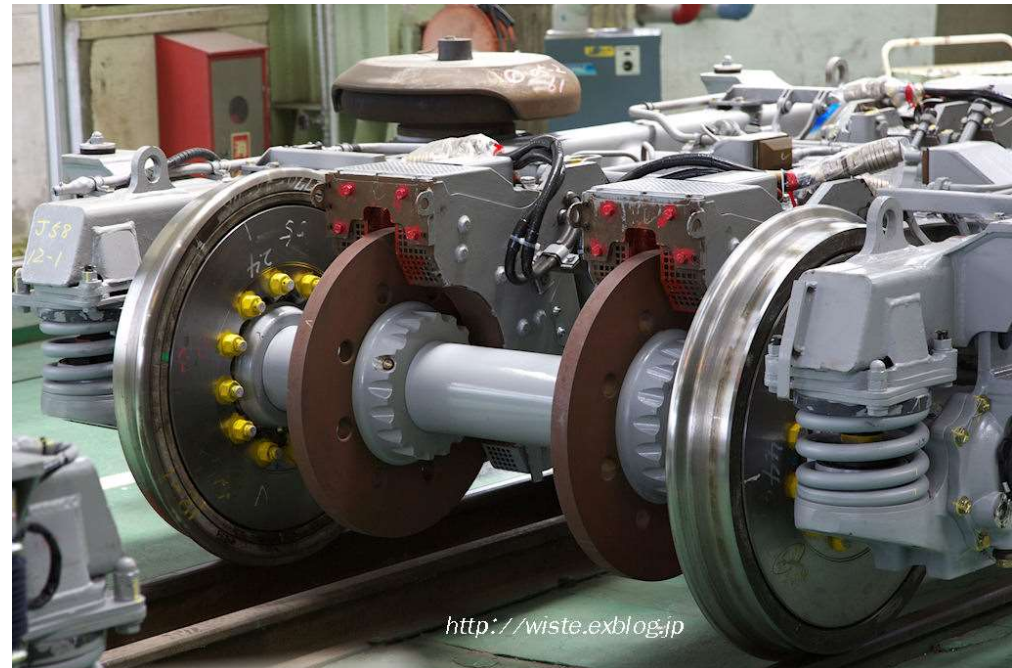
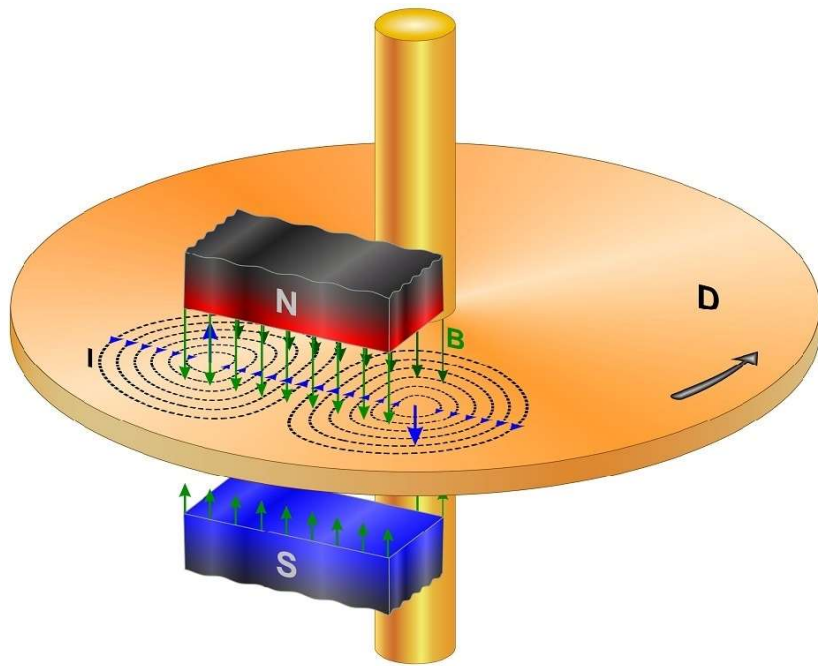


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Correntes parasitas (eddy currents)

São correntes fechadas induzidas em placas condutoras que se movem em campos magnéticos

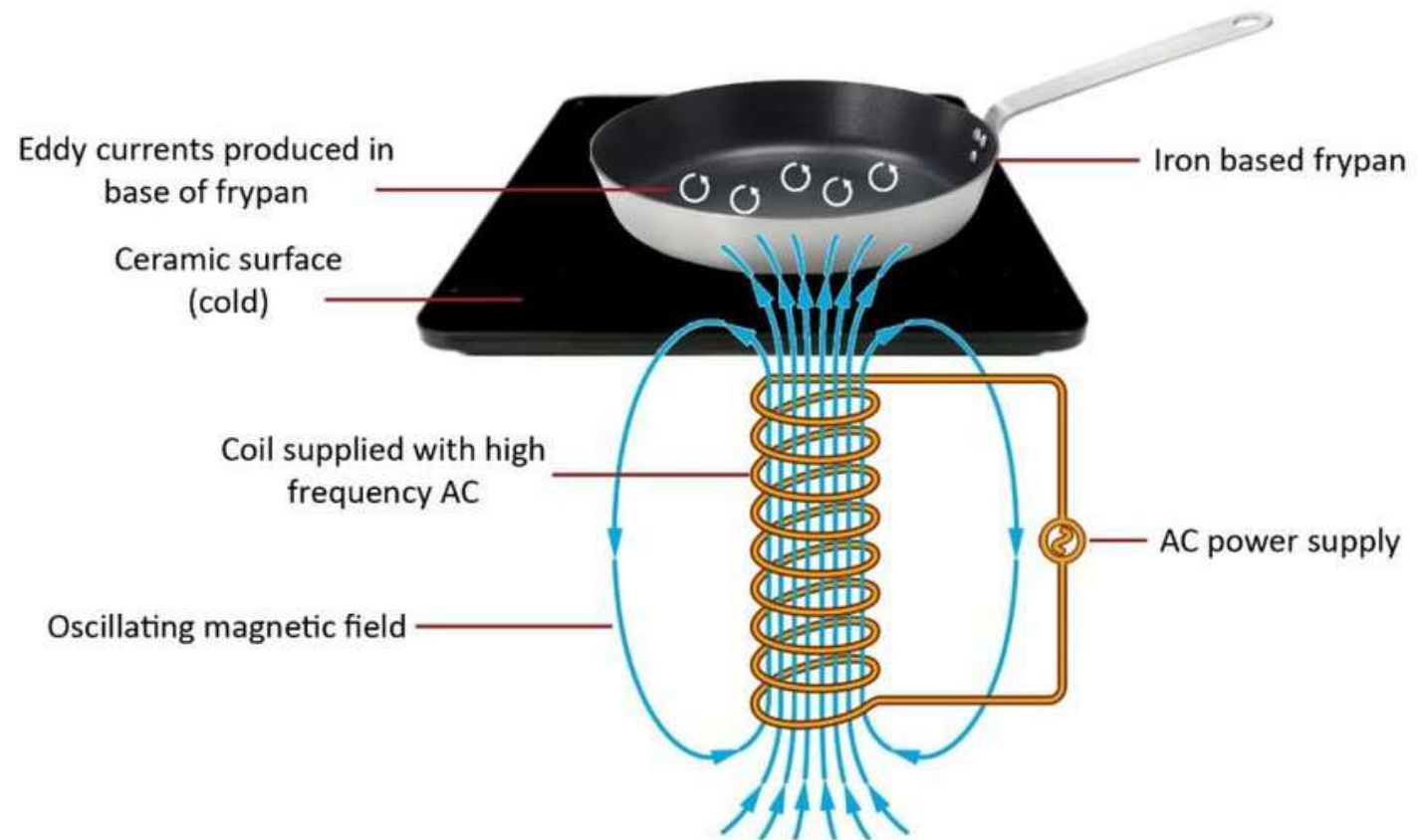


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Correntes parasitas (eddy currents)

São correntes fechadas induzidas em placas condutoras que sofrem a acção de campos magnéticos variáveis no tempo



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Auto-indução e indutância

After the switch is closed, the current produces a magnetic flux through the area enclosed by the loop. As the current increases toward its equilibrium value, this magnetic flux changes in time and induces an emf in the loop.

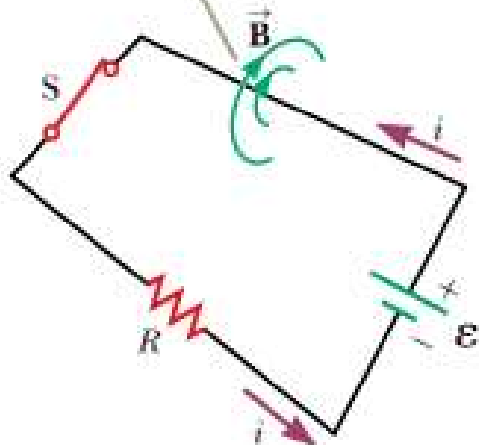


Figure 32.1 Self-induction in a simple circuit.

- Quando ligamos o interruptor, criamos uma variação do fluxo no próprio circuito, o que gera uma f.e.m. induzida que contraria a variação inicial, lei de Lenz
- Esta auto-induzida f.e.m. tem polaridade oposta à da fonte, o que implica que o aumento da corrente que circula no circuito seja gradual e não instantâneo
- Este efeito é designado **auto-indução** porque a variação do fluxo através do circuito e a resultante f.e.m. induzida têm origem no próprio circuito

3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Auto-indução e indutância

After the switch is closed, the current produces a magnetic flux through the area enclosed by the loop. As the current increases toward its equilibrium value, this magnetic flux changes in time and induces an emf in the loop.

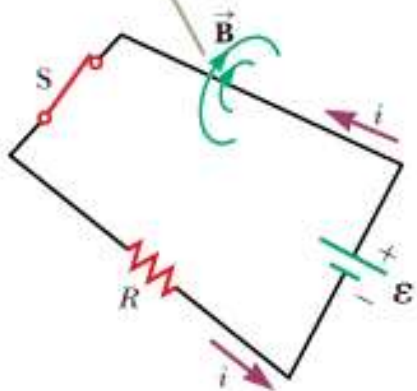


Figure 32.1 Self-induction in a simple circuit.

A f.e.m. auto-induzida obtém-se através da lei de Faraday

$$\begin{cases} \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B \propto B \\ B \propto i \end{cases} \rightarrow \mathcal{E} \propto \frac{di}{dt}$$

Para qualquer circuito fechado escrevemos

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$$

onde L é a constante de proporcionalidade chamada **coeficiente de auto-indução** ou **indutância**

- L depende da geometria e de outras características físicas do circuito

3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Auto-indução e indutância

After the switch is closed, the current produces a magnetic flux through the area enclosed by the loop. As the current increases toward its equilibrium value, this magnetic flux changes in time and induces an emf in the loop.

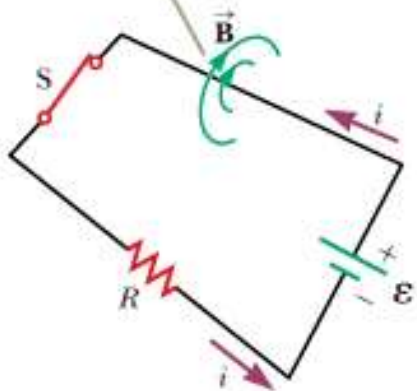


Figure 32.1 Self-induction in a simple circuit.

Se considerarmos um enrolamento compacto com N espiras (solenóide ideal)

$$\begin{cases} \mathcal{E}_L = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \\ \mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \end{cases} \rightarrow L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

A unidade de indutância no S.I. chama-se henry (H) e

$$\text{como } L = -\frac{\mathcal{E}_L}{\frac{di}{dt}} \rightarrow 1\text{H} = \frac{\text{Volt}}{\frac{\text{Ampere}}{\text{segundo}}} = \text{VsA}^{-1}$$

Tal como no caso da capacidade, a indutância depende da geometria

3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Auto-indução e indutância

Indutância de um solenoide com N espiras, raio R e comprimento $\ell \gg R$ com núcleo de ar.

Resolução

$$\begin{cases} \Phi_B = BA = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \pi R^2 \\ L = \frac{N \Phi_B}{i} \end{cases} \rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi R^2$$

Se $N = 300$ espiras, $\ell = 25$ cm e $A = 4$ cm²

$$L = \frac{4\pi}{10^7} \frac{300^2}{0,25} (4 \times 10^{-4}) = 1,81 \times 10^{-4} \text{ H}$$

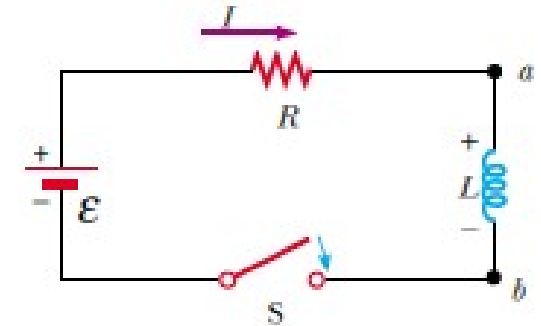


3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Circuitos RL

Se um circuito contém uma bobine, a indutância da bobine impede que a corrente no circuito aumente ou diminua instantaneamente – lei de Faraday



Consideremos o circuito que contém uma bateria (com resistência interna desprezável) ligada a uma resistência R e a uma bobine L – circuito RL .

O interruptor é fechado em $t = 0$

- a corrente aumenta e uma f.e.m. que se opõe ao aumento de corrente é induzida na indutância
- A lei das malhas de Kirchhoff é, no sentido $a \rightarrow b$, é

$$-\mathcal{E} + iR + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad i - \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{L}{R} \frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{di}{i - \frac{\mathcal{E}}{R}} = -\frac{R}{L} dt$$

onde consideramos as quedas de tensão positivas. Integrando

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Circuitos RL

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

- $\tau = \frac{L}{R}$ é a constante de tempo do circuito RL
- Após um tempo muito longo $t \rightarrow \infty$ a corrente estacionária no circuito é $i = \frac{\mathcal{E}}{R}$

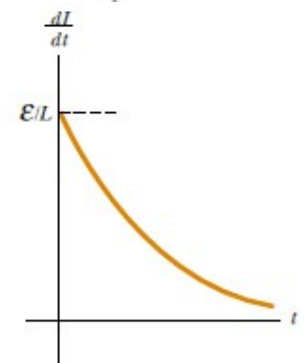
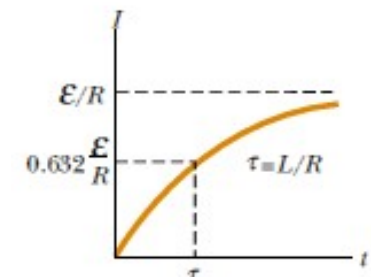
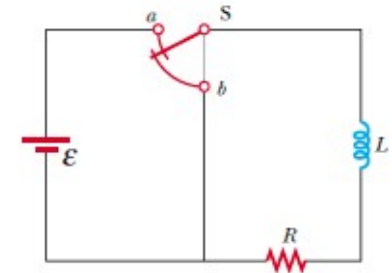
Se o interruptor comutar de a para b a bateria é desligada do circuito e a equação da malha passa a ser

$$iR + L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow i = -\frac{L}{R} \frac{di}{dt} \rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

onde consideramos as quedas de tensão positivas. Integrando

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = I_i e^{-\frac{R}{L}t}$$

onde \mathcal{E} é a f.e.m. da bateria e $I_i = \mathcal{E}/R$ é a corrente estacionária no circuito no instante em que o comutador é ligado para a posição b



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Energia do campo magnético

Multiplicando por i ambos os membros da equação da malha obtemos

$$-\mathcal{E} + iR + L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow i\mathcal{E} = i^2R + iL \frac{di}{dt}$$

- $i\mathcal{E}$ é a potência fornecida pela bateria
- i^2R é a potência fornecida à resistência
- $iL \frac{di}{dt}$ é a potência fornecida à bobine

Se for U a energia interna na bobine num instante qualquer a potência na bobine isto é a taxa de fornecimento de energia à bobine

$$\frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt}$$

A energia total fornecida à bobine é

$$U = \int dU = \int_0^i Li \, di \rightarrow U = \frac{1}{2} Li^2$$

Esta é a energia armazenada no campo magnético da bobine quando a corrente é igual a i



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Energia do campo magnético

Tal como no caso do condensador é necessário fornecer energia para estabelecer um campo eléctrico $U = \frac{1}{2} CV^2$

A densidade de energia do campo magnético pode ser estabelecida de um modo simples considerando o caso do solenóide, onde a indutância e o campo são bem conhecidos

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A = \mu_0 \left(\frac{N}{\ell} \right)^2 \ell A \quad ; \quad B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \quad \rightarrow \quad i = \frac{B}{\mu_0 \frac{N}{\ell}}$$

Então

$$U = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{N}{\ell} \right)^2 \ell A \left(\frac{B}{\mu_0 \frac{N}{\ell}} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \ell A$$

donde

$$u_B = \frac{U}{\ell A} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Esta expressão é válida para qualquer região do espaço onde existe um campo magnético



3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Energia do campo electromagnético

A densidade de energia do campo electromagnético é igual à soma da densidade do campo eléctrico com a densidade de energia do campo magnético

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

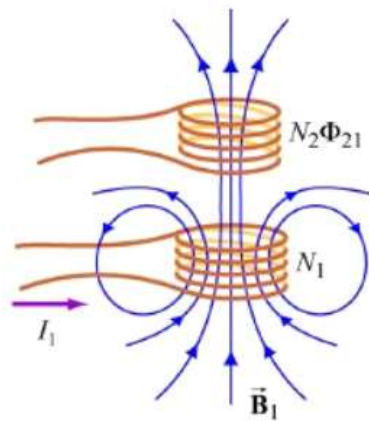
Numa onda electromagnética propagar-se no vazio a energia total divide-se em partes iguais pelo campo eléctrico e pelo campo magnético pois $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ e $B = \frac{E}{c}$



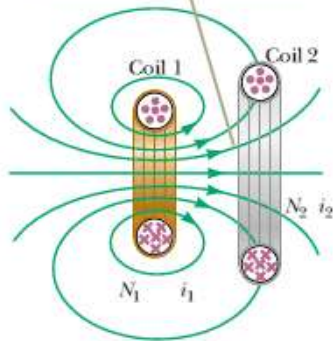
3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Indução mútua



A current in coil 1 sets up a magnetic field, and some of the magnetic field lines pass through coil 2.



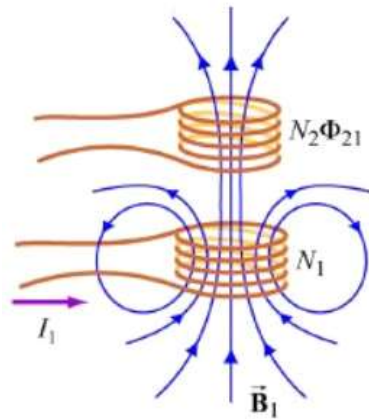
Fenómeno que ocorre quando a variação do fluxo de um circuito influencia outro circuito

- Duas bobines próximas uma da outra
 - A bobine 1 com N_1 espiras transporta a corrente i_1
 - A bobine 2 com N_2 espiras
 - o fluxo magnético da corrente na bobine 1 que atravessa a bobine 2 é $\Phi_{1 \rightarrow 2}$
 - Usando a definição de auto-indução, definimos o coeficiente de indução mútua $M_{1 \rightarrow 2}$
- $$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1}$$
- O coeficiente de indução mútua depende da geometria de ambos os circuitos e da sua orientação relativa
 - A unidade S.I. da indução mútua é o henry (H)

3. Campos Eléctrico e Magnético

7. Indução electromagnética

Indução mútua



Se a corrente i_1 variar com o tempo, a f.e.m. induzida na bobine 2 é

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{M_{12} i_1}{N_2} \right) = -M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

De um modo análogo obtemos para a bobine 1

$$\mathcal{E}_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt}$$

Os coeficientes são iguais

$$M_{21} = M_{12} = M$$

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

em acordo com $\mathcal{E} = -L(di/dt)$

A current in coil 1 sets up a magnetic field, and some of the magnetic field lines pass through coil 2.

