Questão 1: resolução

Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \arccos\left(\dfrac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2}\right)$.

(a) Determina o domínio D_f de definição de f.

O domínio é determinado pela condição de existência do arco cosseno: $\dfrac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2} \in [-1,1] \Leftrightarrow$

$$-1 \leq \frac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq e^{2x}-2e^{x}-1 \leq 2 \Leftrightarrow e^{2x}-2e^{x}+1 \geq 0 \wedge e^{2x}-2e^{x}-3 \leq 0.$$

A primeira condição é universal, porque $e^{2x}-2e^{x}+1=(e^{x}-1)^2 \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, sendo satisfeita a igualdade para $e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$.

Para resolver a segunda condição, convém considerar a substituição $z=e^{x}$: assim, temos que $e^{2x}-2e^{x}-3 = z^2-2z-3 \leq 0$, cuja solução determina-se a partir das raízes da expressão quadrática $z^2-2z-3=0 \Leftrightarrow z=-1 \vee z=3$. Pela interpretação geométrica (parábola com concavidade virada para cima), segue que $z^2-2z-3 \leq 0 \Leftrightarrow z \in [-1,3]$, ou seja, $e^{2x}-2e^{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq e^{x} \leq 3 \Leftrightarrow e^{x} \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \ln 3$.

Portanto, pela única condição (não universal) encontrada, $D_f =]-\infty, \ln 3]$.

(b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

A expressão da derivada de f é:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2}\right)^2}} \cdot (e^{2x}-e^{x}) = \frac{e^{x}(1-e^{x})}{\sqrt{1-\left(\frac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2}\right)^2}}$$

que, no domínio de f, existe quando tem denominador diferente de zero, ou seja, $\dfrac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2} \neq \pm 1$. No entanto, estas condições já foram analisadas na alínea anterior, sendo

$$\frac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2} \neq -1 \Leftrightarrow x \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{e^{2x}-2e^{x}-1}{2} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \ln 3.$$

Podemos concluir que f' tem domínio $D_{f'} =]-\infty, 0[\cup]0, \ln 3[$ e, dado que $1-e^{x} > 0 \Leftrightarrow e^{x} < 1 \Leftrightarrow x < 0$ e os outros fatores de $f'(x)$ são positivos, que f' é positiva em $]-\infty, 0[$ e negativa em $]0, \ln 3[$.

Assim, pela continuidade, f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, \ln 3]$.

Pela análise da monotonia, f tem máximo absoluto $f(0) = \arccos\left(\dfrac{1-2-1}{2}\right) = \arccos(-1) = \pi$ (com 0 o único maximizante absoluto), mínimo $f(\ln 3) = \arccos\left(\dfrac{9-6-1}{2}\right) = \arccos 1 = 0$ e, pelo teorema de Fermat, não pode ter outros extremos no interior do domínio, onde f' não se anula. Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \arccos\left(\dfrac{0-0-1}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} > 0$ e f cresce até $x=0$, deduz-se que $\ln 3$ é o (único) minimizante absoluto de f.

Repare-se que, neste caso, para justificar que 0 e π são os extremos absolutos de f, é suficiente recordar que o contradomínio do arco cosseno é $[0,\pi]$ e que, portanto, f não pode ter imagens com valor menor que $f(\ln 3)=0$ ou maior que $f(0)=\pi$.