Trabalho de Grupo - revisões

Grupo 1

Ex 1

Calcula o raio de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$$

Ex 2

Calcula o domínio e intervalo de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$$

Ex 3

Considere a função $f(x) = e^{-2x}$.

(a) Determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função f.

(b) Usando o polinómio da alínea anterior, obtenha um valor aproximado de e^{-1} e indique um majorante para o erro cometido na aproximação, com base no resto de Lagrange.

Ex. 4

Determine os polinómios de Taylor seguintes:

$T_a^3(f)$

a) $f(x) = e^x, \quad a = 1$

b) $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

Ex. 5

Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \qquad\qquad f(x) = \frac{x}{1+x}$$

Ex. 6

Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

Ex. 7

Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x-3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

Trabalho de Grupo - revisões

Grupo 2

Ex 1

Calcula o raio de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$$

Ex 2

Calcula o domínio e intervalo de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$$

Ex 3

Determine o menor valor de n tal que o polinómio de MacLaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$ aproxime $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

Ex. 4

Determine os polinómios de Taylor seguintes:

$T_a^3(f)$

a) $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/6$

b) $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

Ex. 5

Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad\qquad f(x) = \frac{5}{1-4x^2}$$

Ex. 6

Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

Ex. 7

Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x-1$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

Trabalho de Grupo - revisões

Grupo 3

Ex 1

Calcula o raio de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$$

Ex 2

Calcula o domínio e intervalo de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$$

Ex 3

Considere a função $f(x) = e^{-2x}$.

(a) Determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função f.

(b) Usando o polinómio da alínea anterior, obtenha um valor aproximado de e^{-2} e indique um majorante para o erro cometido na aproximação, com base no resto de Lagrange.

Ex.4

Determine os polinómios de Taylor seguintes:

$T_a^3(f)$

a) $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

b) $f(x) = x\cos x, \quad a = 0$

Ex.5

Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

$$f(x) = \frac{2}{3-x} \qquad\qquad f(x) = \frac{4}{2x+3}$$

Ex.6

Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\pi^{2n}}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(n+1)}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n n!}$.

Ex.7

Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x-3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

Trabalho de Grupo - revisões

Grupo 4

Ex 1

Calcula o raio de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n^2+1)} x^n$$

Ex 2

Calcula o domínio e intervalo de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$$

Ex 3

[20] Usando o resto na forma de Lagrange, mostre que o erro (absoluto) cometido ao aproximar $f(x) = \text{sen}\,(2x)$ pelo polinómio de MacLaurin $T_0^3 f(x)$, no intervalo $]-0.1, 0.1[$, é inferior a $\frac{2}{3} \times 10^{-4}$.

Ex. 4

Determine os polinómios de Taylor seguintes:

$T_a^3(f)$

a) $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

b) $f(x) = x \cdot \cos x, \quad a = 0$

Ex. 5

Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

4. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

Ex. 6

Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

Ex. 7

Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x+3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

Trabalho de Grupo - revisões

Grupo 5

Ex 1

Calcula o raio de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n} x^n$$

Ex 2

Calcula o domínio e intervalo de convergência da serie seguinte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$$

Ex 3

[20] Considere a função $f(x) = e^{-2x}$.

(a) Determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função f.

(b) Usando o polinómio da alínea anterior, obtenha um valor aproximado de e^{-3} e indique um majorante para o erro cometido na aproximação, com base no resto de Lagrange.

Ex. 4

Determine os polinómios de Taylor seguintes:

$T_a^3(f)$

a) $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/6$

b) $f(x) = x \cos x, \quad a = 0$

Ex. 5

Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

6. $f(x) = \dfrac{5}{1-4x^2}$

Ex. 6

Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} 3^{-2n}}{(2n)!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

Ex. 7

Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x-5$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.