Exercício 3

Como a fração dada é imprópria, efetuando a divisão dos polinómios do numerador e denominador,

$$
\begin{array}{rl|l}
& 2x^3+3x^2+4x-1 & x^3+2x^2+2x \\ \cline{3-3}
& -2x^3-4x^2-4x & 2 \\ \cline{1-2}
& -x^2 \qquad -1 &
\end{array}
$$

concluímos que

$$\frac{2x^3+3x^2+4x-1}{x^3+2x^2+2x} = 2 - \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+2x}.$$

Assim, temos que

$$\int \frac{2x^3+3x^2+4x-1}{x^3+2x^2+2x}dx \;=\; \int \left(2 - \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+2x}\right)dx.$$

Para primitivarmos a fração $\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+2x}$, decompomos em fatores o seu denominador:

$$x^3+2x^2+2x = x(x^2+2x+2),$$

e verificamos que o polinómino x^2+2x+2 não tem raízes reais. De facto

$$\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 2 < 0.$$

Tem-se então que

$$\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+2x} = \frac{x^2+1}{x(x^2+2x+2)}.$$

Esta fração pode ser decomposta numa soma de frações simples:

$$\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+2x} \;=\; \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

onde A, B e C são constantes a determinar. Reduzindo as frações simples ao mesmo denominador, obtemos a igualdade dos numeradores

$$x^2+1 = (A+B)x^2 + (2A+C)x + 2A$$

e pelo princípio da identidade de polinómios concluímos

$$\left\{\begin{array}{c} A+B=1 \\ 2A+C=0 \\ 2A=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-1 \end{array}\right. .$$

Assim, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x^3+3x^2+4x-1}{x^3+2x^2+2x}dx &= \int \left(2 - \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+2x}\right)dx \\
&= \int 2\,dx - \int \frac{1/2}{x}dx - \int \frac{\frac{x}{2}-1}{x^2+2x+2}dx \\
&= 2x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx \\
&= 2x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\int \frac{2x-4}{x^2+2x+2}dx \\
&= 2x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\int \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{6}{x^2+2x+2}\right)dx \\
&= 2x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \frac{6}{4}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx \\
&= 2x - \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^2+2x+2| + \frac{3}{2}\arctan(x+1) + C,\ C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$