

1.  $f(x) := \cos(\arctan(1-x^2))$ .

(a) Dominio e definição  $D_f$  de  $f$ :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \in \underbrace{D_{\arctan}}_{\mathbb{R}} \wedge \arctan(1-x^2) \in \underbrace{D_{\cos}}_{\mathbb{R}}\} \\ = \mathbb{R}.$$

(b)  $f'(x) = -\sin(\arctan(1-x^2)) \cdot \frac{1}{1+(1-x^2)^2} \cdot (-2x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  
usando a regra da cadeia.

$\sin(\arctan(1-x^2)) > 0$  se  $\arctan(1-x^2) \in ]0, \frac{\pi}{2}[$   
se  $1-x^2 > 0$  se  $x^2 < 1$  se  $x \in ]-1, 1[$ .

	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$2x$	-	-	0	+	+
$\sin(\arctan(1-x^2))$	-	0	+	+	0
$f'$	+	0	-	+	0
$f$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\nearrow$	0

(pel critério de monotonicidade)

$$f(0) = \cos(\arctan 1) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f(1) = \cos(\arctan 0) = \cos 0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Como  $f$  é par,  $f(-1) = f(1) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Existe máximo absoluto, que é 1, sendo -1 e 1, máximos  
em repetição

2. Não há outros máximos.

Existe um mínimo relativo, que é  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , sendo o  
o repetido minimizante.

Não existe mínimo absoluto: os valores da função  
estão todos acima de zero, aproximando-se de zero  
arbitrariamente quando a variável tende para  $+\infty$  ou  
para  $-\infty$ , mas o valor zero nunca é atingido.

2. (a)  $\int x^3 \cdot e^{x^2} dx$

É dada a sugestão de primitivação por partes.

Claramente, a função a escolher para primitivar  
não deve ser  $x^3$ , pois isso transformaria a expressão em  
algo mais complicado.

Por outro lado,  $e^{x^2}$  não tem primitiva fácil de  
calcular, a menos que esteja junto com o fator  $x$ .

Assim, escrevemos

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} dx = \int \underbrace{(x^2)}_{f(x)} \underbrace{(x e^{x^2})}_{g'(x)} dx =$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} - \int 2x \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad (\text{em intervalos})$$

(b)  $\int \frac{5x+3}{x^4+2x^3+3x^2} dx$

A função e primitiva é racional, logo segue-se o procedimento estabelecido para primitivas tais funções.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{C.A.: } x^4 + 2x^3 + 3x^2 = x^2(x^2 + 2x + 3), \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} : \text{raízes complexas} \end{array} \right.$$

$$\frac{5x+3}{x^2(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

$$\Rightarrow 5x+3 = \underbrace{Ax^2 + 2Ax + 3A}_{\text{}} + \underbrace{Bx^3 + 2Bx^2 + 3Bx}_{\text{}} + \underbrace{Cx^3 + Dx^2}_{\text{}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A+2B+D=0 \\ 2A+3B=5 \\ 3A=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ 3B=5-2=3 \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \\ D=-1-2=-3 \end{cases}$$

$$\int \frac{5x+3}{x^4+2x^3+3x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x+3}{x^2+2x+3} dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \ln|x| - \int \frac{x+3}{x^2+2x+3} dx$$

Calcular as restantes primitivas acima:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+2x+3} dx + \int \frac{3}{x^2+2x+3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - \int \frac{2}{x^2+2x+3} dx \right) + \int \frac{3}{x^2+2x+3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| + 2 \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx$$

Calcular as restantes primitivas acima:

$$\text{C.A.: } x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 3 = (x+1)^2 + 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{1}{\sqrt{2}} dx \end{array} \right\} \rightarrow \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Assim, finalmente,

$$\int \frac{5x+3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2} dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 3|$$

$$- \sqrt{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \quad (\text{em intervalos})$$

$$(c) \int \frac{\ln x + 1}{x(1 + (\ln x)^2)} dx$$

É dada a sugestão de se fazer uma mudança de variável.

Considere-se  $\ln x = t$ , ou seja,  $x = e^t$ , para  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{dx}{dt} = e^t > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Então} \quad \int \frac{\ln x + 1}{x(1 + (\ln x)^2)} dx = \int \frac{t + 1}{e^{\frac{t}{2}}(1 + t^2)} e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + \arctan t + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1 + (\ln x)^2) + \arctan(\ln x) + C \quad (\text{em intervalos}).$$

3.  $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$ .

(a)  $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , definido em todo  $\mathbb{R}$ , sendo  $> 0$ .

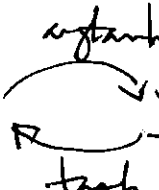
$$(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Regra da derivada  
do quociente = regra  
da derivada de  $\sinh x$  e  $\cosh x$

Fórmula fundamental  
da função hiperbólica

Como  $(\tanh x)' > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , pela Critério de monotonia temos que  $\tanh x$  é estritamente crescente, logo injetiva, logo invertível.

(b)  $\operatorname{arctanh} :=$  "função inversa de  $\tanh$ "

$\tanh y = x$    $y = \operatorname{arctanh} x$

Pela regra da derivada de funções inversas, e sabendo-se que  $(\tanh x)' \neq 0$  (cf. alínea anterior),

temos que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \tanh y} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} =$$

$$= \cosh^2(\operatorname{arctanh} x), \quad \forall x \in D_{\operatorname{arctanh}}.$$

Como, pela fórmula fundamental referida na alínea (a),  $\cosh^2(\operatorname{arctanh} x) - \sinh^2(\operatorname{arctanh} x) = 1$ , então (dividindo por  $1^{\circ}$  parcelas)  $1 - \tanh^2(\operatorname{arctanh} x) = \frac{1}{\cosh^2(\operatorname{arctanh} x)}$ , logo  $\cosh^2(\operatorname{arctanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$ , e portanto  $\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$  no seu domínio.

Aparte: Não se exige, mas não é difícil verificar que  $\text{Dom} \tanh = ]-1, 1[$ , i.e., que  $\text{CD} \tanh = ]-1, 1[$ .

De facto, pelo gráfico ( $x$ ) já sabemos que  $\tanh$  é estritamente crescente em  $\mathbb{R}$ , logo basta agora mostrar que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh x = \pm 1$ .

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Quando  $x \rightarrow -\infty$  obtém-se limite  $-1$  imediatamente.

Quando  $x \rightarrow +\infty$  levanta-se a indeterminação  $\frac{\infty}{\infty}$  obtida através da Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

[Em alternativa, no caso  $x \rightarrow +\infty$  também se pode escrever  $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ .]