Resolução da questão 4

(a) [**Aparte:** Aceita-se uma resolução informal desta alínea, já que em princípio os alunos não possuem os conhecimentos para fazerem uma resolução formal; aqui apresentamos os dois tipos de resolução, mesmo a formal, esta última para benefício dos alunos curiosos.]

Resolução informal:

Como f é crescente no domínio $\mathbb{R}_0^+$, então tem de certeza um limite quando $x \to +\infty$, que será $+\infty$ se f não for limitada superiormente e será um valor finito (positivo, atendendo a que f se assume também positiva) se for limitada superiormente.

Resolução formal, usando a noção de limite segundo Cauchy:

Das duas, uma: ou f é limitada superiormente ou não:

Se é, então existe um número real S que é o supremo do contradomínio de f e, por propriedades do supremo e pela hipótese de f ser crescente,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}_0^+, x > \delta \Rightarrow S - \varepsilon < f(\delta) \leq f(x) \leq S < S + \varepsilon,$$

de onde sai, por definição, que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = S$.

Se f não é limitada superiormente, então, e usando novamente a hipótese de f ser crescente,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}_0^+, x > \delta \Rightarrow f(x) \geq f(\delta) > \varepsilon,$$

de onde sai, por definição, que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Sendo f contínua em $\mathbb{R}_0^+$, é integrável em todos os intervalos $[x, 2x]$, para $x \in \mathbb{R}_0^+$. Pela propriedade de limitação do integral e da hipótese de f ser crescente, sai que $\int_x^{2x} f(t)\,dt \geq f(x)(2x - x) = f(x)\,x$ para $x \in \mathbb{R}_0^+$, de onde sai, atendendo também a que $f(x) > 0$ para aqueles valores de x,

$$\frac{\int_x^{2x} f(t)\,dt}{f(x)} \geq \frac{f(x)\,x}{f(x)} = x.$$

Como $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, então obrigatoriamente também

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{2x} f(t)\,dt}{f(x)} = +\infty.$$