Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 1 **2017/18**

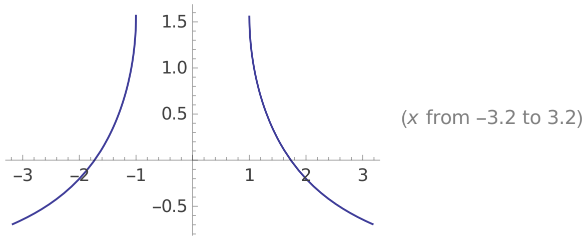
exame de recurso Duração: 3h00

- **Este teste continua no verso e termina com a palavra FIM. No verso encontras também a cotação e formulários.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

1.ª parte

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \arcsin \frac{3-x^2}{x^2+1}$.

   Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).

   Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

   (a) Determina o domínio D_f de definição de f.

   (b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $x \cdot \sin x \cdot \cos x$; (b) $\dfrac{x-1}{x(x^2-4)}$; (c) $\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$, $x \in]0, \pi[$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza a mudança de variável definida por $x = \arccos t$, $t \in]-1, 1[$.

3. Constatou-se que uma população de gatos, introduzida para controlar o número de ratos num certo *habitat*, está a crescer cada vez menos. Neste momento ($t = 0$) essa população tem 637 gatos a crescer a uma taxa de 100 gatos por unidade de tempo. Contudo, tudo leva a crer que nos tempos que se seguem esta taxa de crescimento vai ela própria diminuir a uma taxa de $\frac{200\,t}{(1+t^2)^2}$ por unidade de tempo. Se assim for, e designando por $g(t)$ a função que nos dá o número de gatos nessa população em função do tempo t,

   (a) determina a expressão para $g(t)$;

   (b) verifica se o número de gatos tenderá a estabilizar (e, se sim, à volta de que valor) ou a diminuir no longo prazo (se o π aparecer nas contas considera $\pi = 3{,}14$).

2.ª parte no verso

4. Considera a região $\mathcal{A}$ do plano delimitada pelos gráficos das funções $y = x - 1$ e $y = 2 - (x-1)^2$. Esboça $\mathcal{A}$ e calcula a sua área (não precisas de justificar o esboço analiticamente, mas convém seres rigoroso e explícito o suficiente para se perceber como determinas a área a partir do esboço que fizeres).

5. Considera os seguintes integrais:

   (i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$; (ii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx$.

   (a) Diz, para cada um deles e justificando devidamente, se estamos em presença de um integral de Riemann ou de um integral impróprio (e de que espécie).

   (b) Para cada um dos integrais acima, faz o seguinte: no caso de ser de Riemann, calcula-o; no caso de ser impróprio, determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula-o também.

6. (a) Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\cdot n!)^3}{(3n)!}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{\pi}{2} - \arctan n}$.

   (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+4}\Big)$.

7. Mostra que $\dfrac{\pi}{2}$ é um minimizante local da função F definida por $F(x) := \displaystyle\int_{\sin(x)}^{0} e^{t^2}\,dt$.

FIM

Cotação: 1. 3; 2. 4,5; 3. 2,5; 4. 2; 5. 2,5; 6. 3; 7. 2,5.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ \ m \in \mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ \ n \in \mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\ln_a \lvert u(x)\rvert,\ \ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ \ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x)\ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1+\tan^2 u = \sec^2 u$	$1+\operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1-u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1-u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u-e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	