Questão 2(c): resolução

Calcula as primitivas da seguinte função: $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$.

A função está definida no intervalo $I =]-2,2[$ (onde $4 - x^2 > 0$) e, sendo contínua, é primitivável. As suas primitivas podem ser calculadas (principalmente) de duas formas diferentes.

- Através da seguinte substituição, realizada pela função φ, diferenciável e invertível no intervalo indicado,

$$x = \varphi(t) = 2\sin t, \quad t \in J =]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\qquad dx = \varphi'(t)\,dt = 2\cos t\,dt$$
$$t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin\frac{x}{2}, \quad x \in]-2,2[\qquad \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\cos t$$

  (visto que $\cos t > 0$ no intervalo J), em intervalos contidos em I obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{(2\sin t)^2}{2\cos t}\,2\cos t\,dt \\
&= \int 4\sin^2 t\,dt \\
&= \int 2 - 2\cos(2t)\,dt && (1)\\
&= 2t - \sin(2t) + C \\
&= 2t - 2\sin t\cos t + C && (2)\\
&= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}, && (3)
\end{aligned}$$

  usando $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ na (1), $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$ na (2) e as substituições $\sin t = \frac{x}{2}$ e $2\cos t = \sqrt{4-x^2}$ na (3).

- Primitivando por partes, sempre em intervalos contidos em I, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int -x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= -x\sqrt{4-x^2} - \int -\sqrt{4-x^2}\,dx && (4)\\
&= -x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= -x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx
\end{aligned}$$
$$\Updownarrow$$
$$2\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\,dx$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= -\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\,dx \\
&= -\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}. && (5)
\end{aligned}$$

  Em (4) e em (5), a primitiva é quase imediata: $\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}dx = \sqrt{u} + C$, com $u = 4 - x^2$ e $u' = -2x$, no primeiro caso e $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = \arcsin u + C$, com $u = \frac{x}{2}$ e $u' = \frac{1}{2}$, no segundo, sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária.