Nome: nº de estudante:

Declaro que desisto:

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2021/22**

2.º teste em recurso Duração: 1h30

- Este exame contém **4 questões** no total, com uma questão por folha. O enunciado do exame contém no total 5 folhas numeradas de 0 até 4. Na página inicial (esta página, pág. 0) encontras também a cotação e formulários.
- Cada pergunta deve ser respondida na **respetiva folha do enunciado** — começa na frente e, se necessário, continua no verso. Se for preciso podes ainda continuar em folhas de continuação mas tens de dizer qual é a questão a que estás a continuar a responder.
- **Não podes misturar respostas a diferentes perguntas** na mesma folha. Por exemplo, não podes responder a parte da pergunta 2 na mesma folha da questão 1, e vice-versa.
- Deves identificar todas as folhas que usares com o teu **nome e nº de estudante**. Deves indicar no enunciado de cada pergunta **quantas folhas de continuação** usaste para essa pergunta.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente **justificados** e todas as respostas devem ser **cuidadosamente redigidas**.

Cotação:

1. 6; 2. 5; 3. 6; 4. 3.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ m \in \mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ n \in \mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\log_a \lvert u(x)\rvert,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x)\ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1+\tan^2 u = \sec^2 u$	$1+\operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1-u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1-u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u-e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: ☐ (Questão 1).

1. Seja $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = \frac{x^2}{2}$ e de $y = \frac{1}{1+x^2}$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1, \frac{1}{2})$ e $(1, \frac{1}{2})$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

Resposta à questão 1:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: ☐ (Questão 2).

2. (a) Considera o seguinte integral impróprio. Determina a sua natureza e, no caso de convergência, o seu valor.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\, dx.$$

(b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{99}{10^{2n+2}} - \frac{3/2}{(n+1)(n+2)} + \frac{2^{n-1}}{3^n} \Big).$$

Resposta à questão 2:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 3).

3. Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+(-1)^n 2^n}{n2^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+\ln n)^n}{2^n n^{n+1}}$.

Sugestão: Para estudares a natureza da série dos módulos na alínea (a), se for útil podes tirar partido do facto de $|n+(-1)^n 2^n|$ ser igual a $2^n+(-1)^n n$.

Resposta à questão 3:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 4).

4. Considera a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

   (a) Explica porque é que não é possível determinar a sua natureza através do Critério de Cauchy.

   (b) Calcula
   $$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^x.$$

   (c) Diz, justificando, se com base no resultado da alínea anterior podes dizer qual é a natureza da série.

Resposta à questão 4: