

1a)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1 \wedge 4(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x \geq 0\}$$

Em  $[-1, 1]$  temos:

$$4(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x \geq 0 \Leftrightarrow \arcsin x \cdot (4\arcsin x - \pi) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\arcsin x \geq 0 \wedge \arcsin x \geq \frac{\pi}{4}) \vee (\arcsin x \leq 0 \wedge \arcsin x \leq -\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}) \vee (x \leq 0 \wedge x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\therefore D_f = [-1, 0] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$$

b) Em  $]-1, 0[ \cup ]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$ ,

$$f'(x) = \frac{8 \arcsin x - \pi}{2\sqrt{1-x^2} \sqrt{4(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8 \arcsin x - \pi = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sin \frac{\pi}{8}$$

Como  $\sin \frac{\pi}{8} \notin ]-1, 0[ \cup ]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$ , então a derivada de  $f$  nunca se anula no interior de  $D_f$ , portanto existe em sempre.

O teorema de Weierstrass é aplicável a

$f|_{[-1,0]}$  e a  $f|_{[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]}$ , já que as funções são contínuas aí, logo estas funções têm máximo e mínimo absolutos.

Tendo em conta o que vimos sobre  $f'$ , os extremos absolutos teras que ser atingidos nos extremos dos dois intervalos  $[-1,0]$  e  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ .

$$f(-1) = \sqrt{4(\arcsin(-1))^2 - \pi \arcsin(-1)} = \sqrt{\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}} = \pi \sqrt{\frac{3}{2}} \leftarrow \text{MAX}$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$f(1) = \sqrt{4(\arcsin(1))^2 - \pi \arcsin(1)} = \sqrt{\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}} = \pi \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Em conclusão, o mínimo absoluto é 0 e os

maximizantes absolutos são  $0 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

o máximo absoluto é  $\pi \sqrt{\frac{3}{2}}$  e o

maximizante absoluto é  $-1$ .

**2 (a)** (2,0 val.)

Utilizamos primitivação por partes duas vezes:

$$\begin{aligned}\int \cos(\ln x) dx &= \cos(\ln x) \cdot x - \int x d(\cos(\ln x)) = \cos(\ln x) \cdot x - \int x (-\sin(\ln x)) \frac{1}{x} dx \\ &= \cos(\ln x) \cdot x + \int \sin(\ln x) dx = \cos(\ln x) \cdot x + \sin(\ln x) \cdot x - \int x d(\sin(\ln x)) \\ &= \cos(\ln x) \cdot x + \sin(\ln x) \cdot x - \int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx = \cos(\ln x) \cdot x + \sin(\ln x) \cdot x - \int \cos(\ln x) dx.\end{aligned}$$

Desta forma,

$$2 \int \cos(\ln x) dx = \cos(\ln x) \cdot x + \sin(\ln x) \cdot x$$

e portanto

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**2 (b)** (2,0 val.)

A função racional imprópria dada pode ser representada na forma da soma de um polinómio e uma função racional própria,

$$\frac{2x^4 + x}{x^3 - x^2 + x - 1} = 2x + 2 + \frac{x + 2}{(x - 1)(x^2 + 1)}.$$

Representando a função própria na forma

$$\frac{x + 2}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

e usando o método de coeficientes indeterminados, obtemos  $A = \frac{3}{2}$ ,  $B = -\frac{3}{2}$ ,  $C = -\frac{1}{2}$ . Desta forma, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4 + x}{x^3 - x^2 + x - 1} dx &= \int \left( 2x + 2 + \frac{3}{2} \frac{1}{x - 1} - \frac{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= x^2 + 2x + \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{3}{4} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= x^2 + 2x + \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{3}{4} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**2 (c)** (2,0 val.)

Fazendo a mudança de variável  $x = \frac{1}{t}$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e tomando em conta que  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ , temos

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2} \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt = - \int \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} dt = - \int \frac{|t|}{\sqrt{1 + t^2}} dt.$$

No intervalo  $t \in ]0, +\infty[$  temos  $|t| = t$ , logo o integral é igual a

$$- \int (1 + t^2)^{-1/2} t dt = -\frac{1}{2} \int (1 + t^2)^{-1/2} (1 + t^2)' dt = -\frac{1}{2} \frac{(1 + t^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\sqrt{1+t^2} + C = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

No intervalo  $t \in ]-\infty, 0[$  temos  $|t| = -t$ , logo o integral é igual a

$$\begin{aligned} \int (1+t^2)^{-1/2} t \, dt &= \frac{1}{2} \int (1+t^2)^{-1/2} (1+t^2)' \, dt \\ &= \sqrt{1+t^2} + C = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|} + C = \frac{\sqrt{x^2+1}}{-x} + C. \end{aligned}$$

Desta forma, a resposta é igual em ambos os intervalos.

A resposta final é

$$-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Obs.: O  $C$  usado num intervalo não tem de ser o mesmo  $C$  usado no outro.

### Questão 3

$$a) |x-1| = \begin{cases} x-1 & , x \geq 1 \\ -x+1 & , x < 1 \end{cases}$$

Para  $x \geq 1$ :

$$x-1 = \sqrt{x}+1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \text{ ou } \sqrt{x} = -1$$

↑  
impossível

$$\Leftrightarrow x = 4$$

$$\hookrightarrow P(4, 3)$$

Para  $x < 1$

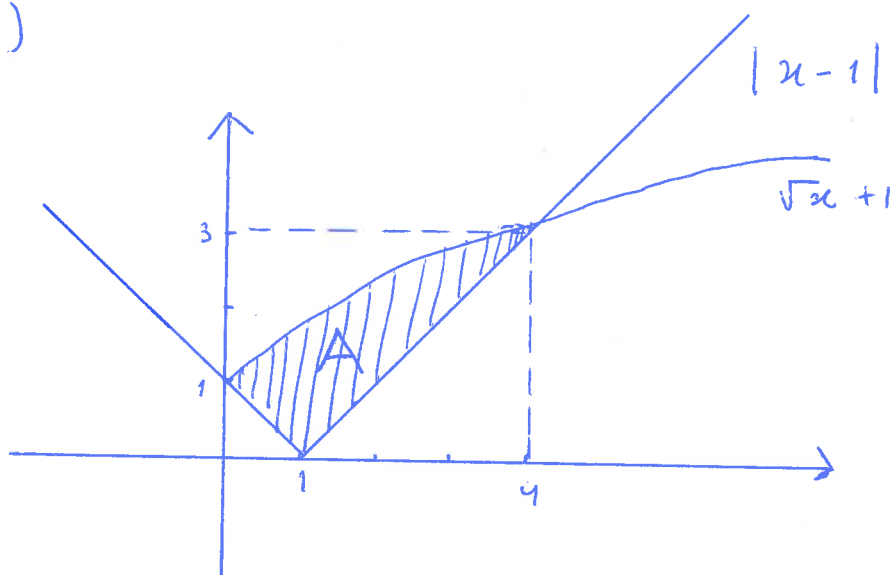
$$-x+1 = \sqrt{x}+1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-x}_{\leq 0} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$\hookrightarrow P(0, 1)$$

b)



$$c) A = \int_0^4 \sqrt{x}+1 - |x-1| dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{x}+1 dx - \int_0^4 |x-1| dx = \int_0^4 \sqrt{x}+1 - \left( \int_0^1 -(x-1) dx + \int_1^4 (x-1) dx \right)$$

$$= \left[ \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + x \right]_0^4 - \left( \left[ -\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_1^4 \right)$$

$$= \frac{16}{3} + 4 - \left( -\frac{1}{2} + 1 + 8 - 4 - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{16}{3} - 1 = \frac{13}{3}$$

## Uma proposta de resolução do Exercício 4 do Exame de Recurso

### Exercício 4

(a) Estude a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta das seguintes séries numéricas

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3n};$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$$

### Resolução

(i) Comparamos com a série divergente  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Sendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2+2}{n^3+3n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n}{n^3+3n} = 1 \in ]0, \infty[$$

resulta que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3n}$  também é divergente.

(ii) Tem-se uma série de termos não negativos e a forma do termo geral sugere a utilização do critério de D'Alembert. Por isso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{2^n}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} \right] = 0$$

e sendo o limite inferior a 1 concluímos que a série é absolutamente convergente.

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left( \frac{1+e^{-n}}{1+e^{-(n+2)}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \ln(1+e^{-n}) - \ln(1+e^{-(n+2)}) \right).$$

Série de Mengoli: de termo geral  $a_n = u_n - u_{n+p}$ , com  $p=2$  e  $u_n = \ln(1+e^{-n})$  (a começa em  $n=0$ ).

Então a soma (já nos dizem que é convergente) é

$$\begin{aligned} & \ln(1+e^{-0}) + \ln(1+e^{-1}) - \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \ln(1+e^{-N}) + \ln(1+e^{-(N+1)}) \right), \\ &= \ln 2 + \ln \left( 1 + \frac{1}{e} \right) - \ln 1 - \ln 1 = \ln \left( 2 + \frac{2}{e} \right). \end{aligned}$$

6.  $f$  sendo contínua em  $\mathbb{R}$ ,  $F$  é diferenciável e

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \left( - \int_0^{x^2+x} f(t) dt + \int_0^{x^2+x+2} f(t) dt \right) \\ &= -f(x^2+x) \cdot (2x+1) + f(x^2+x+2) \cdot (2x+1) \\ &= (2x+1) \cdot \underbrace{\left( f(x^2+x+2) - f(x^2+x) \right)} \end{aligned}$$

Teorema  
fundamental  
de Cálculo  $\rightarrow$

$> 0$ , pela hipótese de  $f$  ser  
estritamente crescente, já que  
 $x^2+x+2 > x^2+x$

Então o sinal de  $F'$  é dado por  $2x+1$ . Como  $2x+1 > 0$  em  $]0, 2[$  e  $F$  é contínua em  $[0, 2]$ , então  $F$  cresce estritamente em  $[0, 2]$ .

Em conclusão,  $\forall x \in ]0, 2[, F(0) < F(x) < F(2)$ , de onde se confirma o que é anunciado no enunciado:  $F(0)$  é o mínimo absoluto e  $F(2)$  é o máximo absoluto.