

Resolução

1. $f(x) := 10 \arctan(3x^{-2}-1)$

(a) $D_f = \left\{ x \in D_{3x^{-2}-1} : 3x^{-2}-1 \in \underbrace{D_{\arctan}}_{\mathbb{R}} \right\}$
(40 pontos)

Logo, a única restrição é $x \in D_{3x^{-2}-1}$, ou seja, $x \neq 0$.

$\therefore D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) $f'(x) = 10 \cdot \frac{(3x^{-2}-1)'}{1+(3x^{-2}-1)^2} = \frac{-60x^{-3}}{1+(3x^{-2}-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(130 pontos)

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -60x^{-3} > 0 \Leftrightarrow x^{-3} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		+	nd.	-	
f		\nearrow	nd.	\searrow	

Não existem máximos: apesar de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5\pi$, que excede todos os valores de f , não é máximo porque não é atingido em nenhum valor do domínio de f .

Não existem mínimos: apesar de $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\frac{5\pi}{2}$, que é menor que todos os valores de f , não é mínimo porque não é atingido em nenhum valor do domínio de f .

Nota: Em alternativa, também é possível concluir invocando o T. Fermat.

2. $f(x) := \sqrt{1+x}$ em $[0, b]$, com $b > 0$.

- (a) (15 pontos) Como f é contínua em $[0, b]$ e diferenciável em $]0, b[$ (ou seja, f é regular em $[0, b]$), então podemos aplicar o T. Lagrange e afirmar que

$$\exists c \in]0, b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+c}} = \frac{\sqrt{1+b} - 1}{b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+b} - 1 = \frac{b}{2\sqrt{1+c}} \Leftrightarrow \sqrt{1+b} = 1 + \frac{b}{2\sqrt{1+c}}, \text{ c.q.d..}$$

- (b) (15 pontos) A partir da última anterior, com $c > 0$ então $2\sqrt{1+c} > 2$; com $b > 0$, então $\frac{b}{2\sqrt{1+c}} < \frac{b}{2}$; conjugando com o resultado da última anterior, vem então que

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{b}{2\sqrt{1+c}} < 1 + \frac{b}{2}, \text{ c.q.d..}$$

Nota: Alternativa para a última (b):

$$\sqrt{1+b} < 1 + \frac{b}{2} \Leftrightarrow 1+b < \left(1 + \frac{b}{2}\right)^2$$

$\uparrow b > 0$

$$\Leftrightarrow 1+b < 1+b + \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{b^2}{4}, \text{ que é uma}$$

condição universal (também entendendo o que, por hipótese, b não é zero); devido às equivalências, a condição inicial também é universal (por universo dos b positivos).