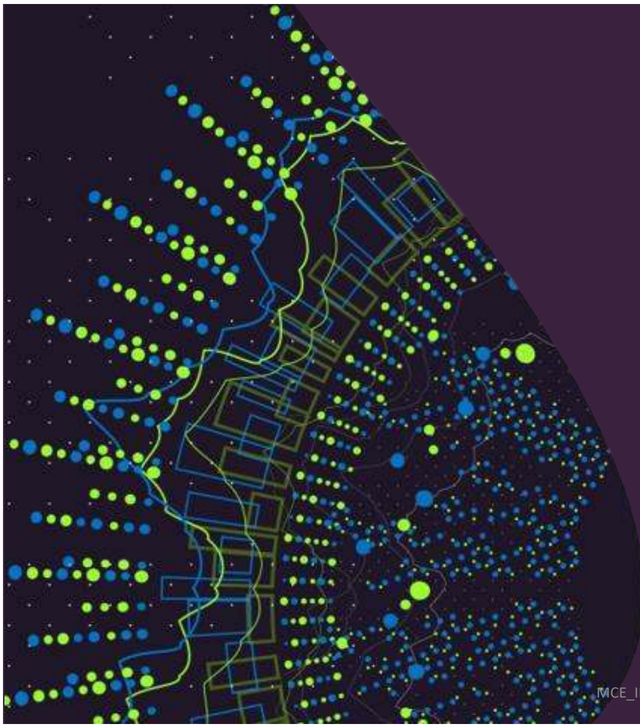


Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 1 – 20 e 26 Set 2022

- Apresentação da UC
- Cap. 1 Cinemática
  - 1.1 Movimento de projécteis
  - 1.2 Movimento curvilíneo

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

1

C.1 – COMPONENTE TEÓRICA

Capítulo 1. Fundamentos de Mecânica Clássica

1.1 Cinemática da partícula

Posição e trajetória. Deslocamento e distância. Velocidade instantânea e média. Aceleração instantânea e média. Aplicações 1-D: queda livre. Aplicações 2-D: projétil e movimento circular. Aplicações 3-D: movimento curvilíneo geral.

1.2 Dinâmica da partícula

Conceito de força. Leis de Newton. Forças de contacto e ligação. Tensões e outras ligações. Força de atrito. Força elástica.

Conceito de força. Leis de Newton. Forças de contacto e ligação. Tensões e outras ligações. Força de atrito. Força elástica.

1.3. Trabalho e Energia

Trabalho realizado por uma força constante e variável. Energia cinética e teorema do trabalho. Potência. Forças conservativas e forças não conservativas. Energia potencial. Conservação da energia.

1.4 Dinâmica de um sistema de partículas

Momento linear do sistema. Conservação do Momento linear. Centro de massa. Colisões. Cinemática e energia cinética de rotação. Momento de inércia. Momento de uma força. Dinâmica de rotação. Momento angular.

Capítulo 2: Sistemas oscilatórios

Oscilador harmónico simples. Oscilador harmónico amortecido. Oscilador harmónico forçado: Ressonância. Oscilações acopladas.

2

Capítulo 3: Campos elétrico e magnético

3.1 Campo elétrico

Propriedades das cargas elétricas. Isoladores e condutores. Lei de Coulomb. Campo elétrico.

3.2 Potencial elétrico

Diferença de potencial. Potencial elétrico. Energia potencial. Cálculo do campo elétrico, a partir do potencial elétrico.

3.3 Lei de Gauss

Lei de Gauss. Aplicações da Lei de Gauss. Condutores em equilíbrio eletrostático. 3.4 Capacidade e condensadores Capacidade de um condensador. Combinação de condensadores. Energia armazenada num condensador.

3.5 Corrente elétrica e resistência

Corrente elétrica. Resistência e a Lei de Ohm. Energia e potência elétricas. Combinação de resistências. Leis de Kirchhoff.

3.6 Campo magnético

Campo magnético. Força magnética. Lei de Biot-Savart. Lei de Ampère.

3.7 Indução eletromagnética

Lei de Faraday. Lei de Lenz. Auto-indutância. Indutância mútua.

3.8 Equações de Maxwell

Conceitos gerais sobre as equações de Maxwell.

3

C.2 – COMPONENTE PRÁTICA

Prática laboratorial (PL) Trabalhos práticos:

Série 1. Mecânica (3 aulas)

1.1. Movimento de projéteis

Série 2. Campo eletromagnético (3 aulas)

2.1. Lei da indução de Faraday

C.3 – BIBLIOGRAFIA

- Dossier pedagógico da Unidade Curricular.
- Apontamentos on-line da Unidade Curricular (http://elearning.ua.pt/) e referências incluídas.
- R.A. Serway, *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, Saunders Golden Sunburst Series.
- P.A. Tipler e G. Mosca, *Física*, Vol. I, 5ª ed, Livros técnicos e Científicos Editora, S.A, Rio de Janeiro, 2006.
- Alonso & Finn, *Física um curso universitário*, Vol. I e II, Edgard Bluecher.
- C. Kittel et al., *Curso de Física de Berkeley: Mecânica*, Vol. 1, Edgard Bluecher.
- H.J. Pain, *The Physics of Vibrations and Waves*, Ed. Wiley.
- R. Resnick e D. Halliday, *Física*, 4ª ed, Livros Técnicos e Científicos Editora.
- R. Kip, *Fundamentals of Electricity and Magnetism*, McGraw Hill.

4

E. AVALIAÇÃO

N_{FINAL} = 30% Nota PL +70% Nota TP

A avaliação pré-definida é a AVALIAÇÃO CONTÍNUA

E.1 – COMPONENTE TEÓRICA/TEÓRICO-PRÁTICA (T/TP)

ACT1+ ACT2+ ACT3 - três momentos de avaliação individual - duração de 15 min e peso relativo total de 15%, (3×5%) – 6 out; 27 out _TP ; 28-29 nov _ Teórica

Teste Final (85%), a realizar no período de exames, no dia do Exame Final; duração de 75 min

E.2 – COMPONENTE PRÁTICA LABORATORIAL (PL)

Trabalho 1.1 (3 aulas, 40 % classificação)
Trabalho 2.1 (3 aulas, 60 % classificação)

Se for por AVALIAÇÃO FINAL
(peso de 100%) deverão inscrever-se até ao dia
30 setembro 2022

Parâmetros de avaliação	Valoração (%)
assiduidade	10
preparação do trabalho	25
desempenho laboratorial	25
relatório sumário/apresentação oral*	40

*Trabalho 2.1

Vectores e Sistemas de coordenadas

- **Módulo dum vector**:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

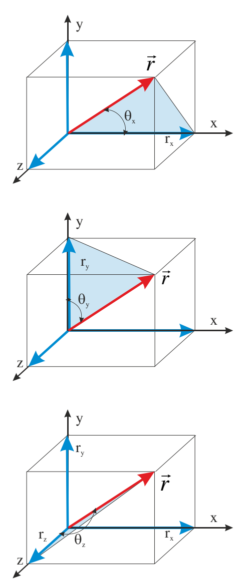
- **Decomposição / Projeção de um vector num referencial cartesiano:**

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_x \\ r\cos\theta_y \\ r\cos\theta_z \end{pmatrix}$$

- **Vector unitário – versor:**

$$|\vec{u}| = 1$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{r_x}{|\vec{r}|} \\ \frac{r_y}{|\vec{r}|} \\ \frac{r_z}{|\vec{r}|} \end{pmatrix}$$

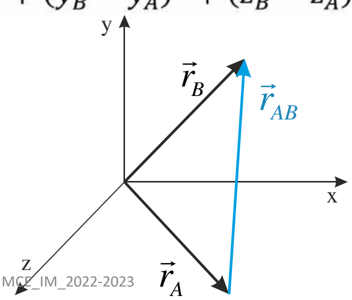


Vectores e Sistemas de coordenadas

- **Distância entre 2 pontos:**

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

$$d(A,B) = |\vec{r}_{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



7

Cylindrical coordinates (r,θ,z):

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\tfrac{y}{x}\right)$$
$$z = z \qquad z = z$$

where $0 \le \theta \le \pi$ if $y \ge 0$ and $\pi < \theta < 2\pi$ if $y < 0$

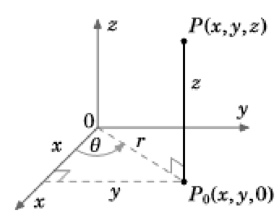


Figure 1.7.2
Cylindrical coordinates

Spherical coordinates (ρ,θ,ϕ):

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\tfrac{y}{x}\right)$$
$$z = \rho\cos\phi \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

where $0 \le \theta \le \pi$ if $y \ge 0$ and $\pi < \theta < 2\pi$ if $y < 0$

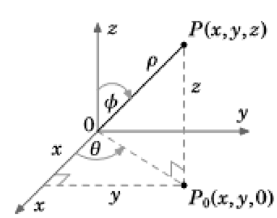


Figure 1.7.3
Spherical coordinates

8

O movimento de uma partícula livre é rectilíneo e de velocidade constante

– movimento rectilíneo e uniforme

$$\vec{v} = const^e$$

$\vec{v}$ - traduz a variação temporal da posição, pois de contrário, a partícula ou o corpo, entendido como uma partícula livre, estaria parado, i. é, com velocidade zero.

Velocidade média

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

A 3D

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = (x' - x)\hat{i} + (y' - y)\hat{j} + (z' - z)\hat{k}$$

Simplificando-se, adequadamente, para 2D e 1D.

No limite, quando Δt tende para zero,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Podemos também fazer uso da operação inversa, que, em cálculo, se designa por *integração*.

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt$$

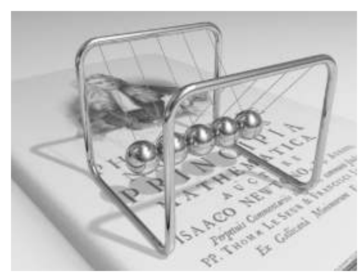
Se a velocidade for constante, podemos ainda escrever

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}\,(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}\,(t - t_0)$$

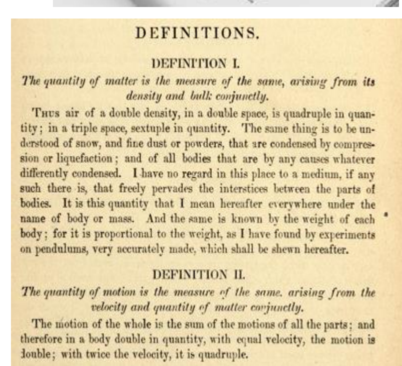
A 1D, obtemos expressões já conhecidas, como

$$x = x_0 + v_x (t - t_0)$$

Momento linear ou Quantidade de movimento



$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$



DEFINITIONS.

DEFINITION I.

The quantity of matter is the measure of the same, arising from its density and bulk conjunctly.

Thus air of a double density, in a double space, is quadruple in quantity; in a triple space, sextuple in quantity. The same thing is to be understood of snow, and fine dust or powders, that are condensed by compression or liquefaction; and of all bodies that are by any causes whatever differently condensed. I have no regard in this place to a medium, if any such there is, that freely pervades the interstices between the parts of bodies. It is this quantity that I mean hereafter everywhere under the name of body or mass. And the same is known by the weight of each body; for it is proportional to the weight, as I have found by experiments on pendulums, very accurately made, which shall be shewn hereafter.

DEFINITION II.

The quantity of motion is the measure of the same, arising from the velocity and quantity of matter conjunctly.

The motion of the whole is the sum of the motions of all the parts; and therefore in a body double in quantity, with equal velocity, the motion is double; with twice the velocity, it is quadruple.

Quanto maior é o momento linear de um corpo, mais difícil é travá-lo e maior será o efeito provocado se for posto em repouso por impacto ou colisão.

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Newtons_cradle_animation_book_2.gif

Dinâmica do movimento

A variação temporal da quantidade de movimento ou momento linear, traduz a actuação de uma força sobre a partícula.

Exº: ocorre uma interacção que obriga a partícula a variar a sua velocidade, admitindo-se que a sua massa não varia.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

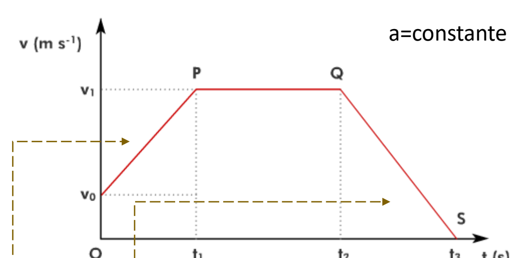
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

A aceleração traduz, portanto, a variação temporal da velocidade

Usando o conceito de integral, podemos verificar que

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt}$$



Se a aceleração for constante, poderemos escrever

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

Também podemos verificar que, se

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

então

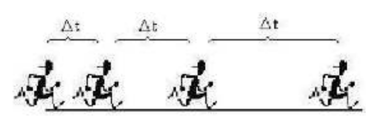
$$\vec{a} = \frac{d(d\vec{r})}{dt(dt)} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

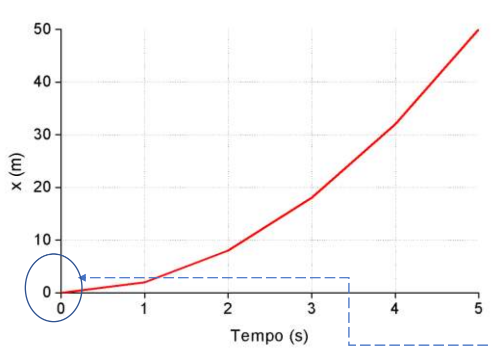
$$\therefore \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

15

Movimento <u>rectilíneo uniformemente acelerado</u> –

- dependência da posição





$$v = \frac{dx}{dt}; \qquad dx = vdt$$

$$x = \int (v_0 + at)\,dt + C_2$$

$$x = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 + C_2$$

$$x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

16

Expressões obtidas para o caso de uma partícula que está sujeita a uma interacção constante

Tem uma **aceleração constante**, podemos caracterizar um pouco melhor o seu movimento:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

Por outro lado, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt$$

pelo que,

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt$$

17

isto é,

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)]dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t - t_0)dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}tdt - \int_{t_0}^{t} \vec{a}t_0dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t^2 - t_0^2) - \vec{a}t_0(t - t_0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t^2 - t_0^2) \quad \vec{a}t_0(t - t_0)$$

...

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

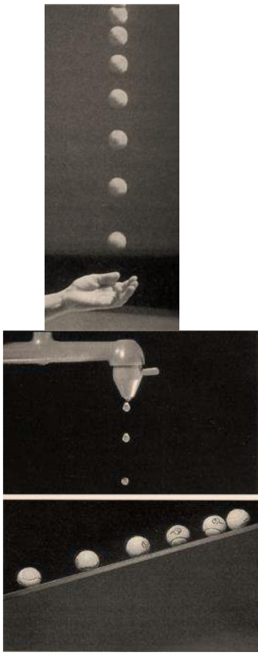
i.é,

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

$se \quad t_0 = 0$

m.u.a.

18

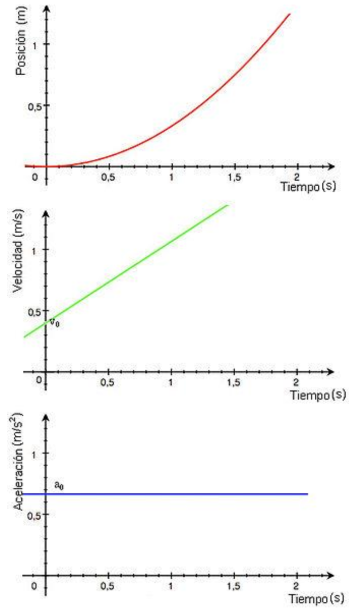


Se o movimento ocorrer a 1D, as expressões simplificam-se:

$$a = const^e$$

$$v_x = v_{0x} + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



MCE_IM_2022-2023

19

A 3D teremos de considerar essa situação para cada uma das expressões anteriores

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z}$$

Situação geral

$$e \quad também$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

$$se \quad t_0 = 0,$$

$$com\ as\ componentes$$

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}$$

MCE_IM_2022-2023

20

Exemplo – Cap.1

5 - A aceleração de um corpo que se move ao longo de uma linha recta é dada por $\vec{a} = \left(4 - t^2\right)\hat{i}$

em que as unidades de **a** (aceleração) são m.s^{-2} e **t** está em segundos.

Determinar a velocidade e a posição em função do tempo, sabendo que, quando t = 3 s, v = 2 m.s^{-1} e x = 9 m.

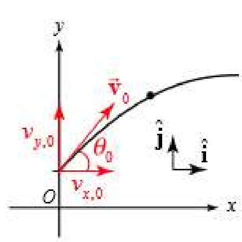
Exemplo - Cap. 1

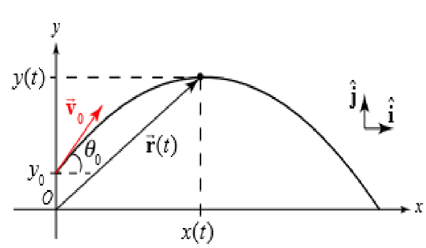
12 - Um projéctil é lançado com uma velocidade de 100 m.s^{-1}, fazendo um ângulo de 60º com a horizontal. Calcule:

a) O alcance do projéctil.

b) A altura máxima.

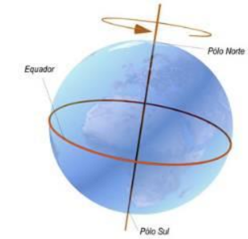
c) A velocidade e a altura, 10 s após o lançamento.





2 dimensões

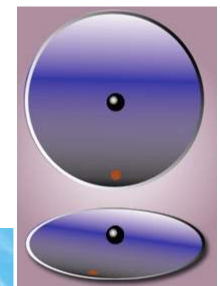
Movimento curvilíneo com a= c^{te}



Pontos de partida:

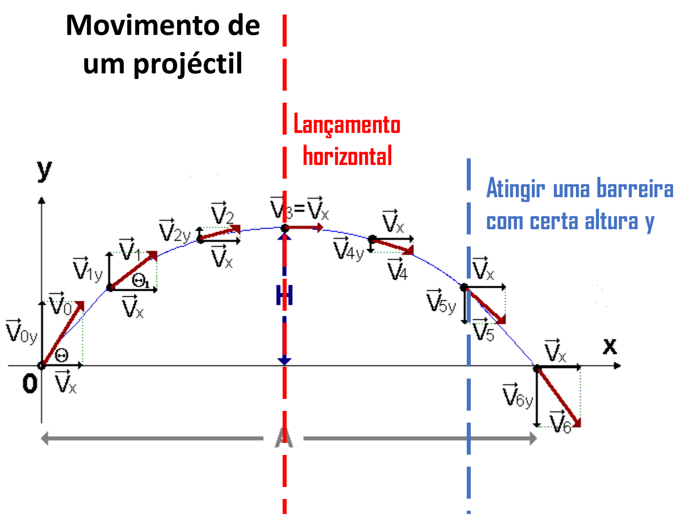
- desprezamos os efeitos da resistência do ar
- desprezamos os efeitos de rotação da Terra
- admitimos que o módulo da aceleração da gravidade não varia com a altitude nem com a latitude do lugar, isto é,

admitimos que g = 9,8 $m.s^{-2}$



23

Movimento de um projéctil



A = alcance

H = altura máxima

Informações úteis que podem obter-se:

i) tempo total de voo do projéctil

ii) alcance máximo

iii) altura máxima

iv) tipo de trajectória

$$\boxed{\vec{v_0} = v_0 cos\theta\hat{\imath} + v_0 sen\theta\hat{\jmath}}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}\,(t - t_o)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_o)^2$$

24

i) tempo total de voo do projéctil

Neste caso, em t= 0 s, $x_0 = y_0 = 0$ m, pelo que

$$y = y_o + v_{oy}(t - t_o) - \frac{1}{2} g (t - t_o)^2$$

$$0 = v_{oy}\ t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$\boxed{t = 0 \quad e \quad t = \frac{2 v_{oy}}{g}}$$

ii) alcance máximo

Continuamos a admitir que, em t= 0 s, $x_0 = y_0 = 0$ m, pelo que

$$x = x_o + v_{ox}(t - t_o)$$

$$x_{máx} = R = v_{ox} t_{voo} = v_{ox} \frac{2 v_{oy}}{g} =$$

$$= \frac{2 v_{ox} v_{oy}}{g} = \frac{2\, v_o^2\, sen\,\theta \cos\theta}{g}$$

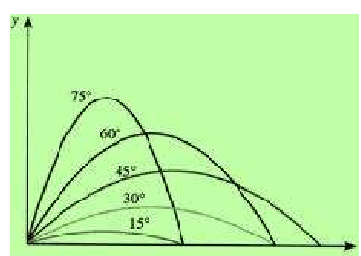
$$\boxed{x_{máx} = R = \frac{v_o^2\ sen\, 2\theta}{g}}$$

O **alcance máximo,** R, é atingido para um ângulo de 45º

sendo $y_{inicial} = y_{final}$

$$\boxed{x_{máx} = R = \frac{v_o^2\ sen\, 2\theta}{g}}$$

$$\boxed{R = \frac{v_o^2}{g}}$$



iii) altura máxima, $y_{máx}$ = h

Considerámos que, em t= 0 s, $x_0 = y_0 = 0$ m, pelo que

$$v_y = v_{oy} - g(t - t_o)$$

$$0 = v_{oy} - g\,t$$

$$t = \frac{v_{oy}}{g}$$

$$y = y_o + v_{oy}(t - t_o) - \frac{1}{2}\,g\,(t - t_o)^2$$

$$y_{máx} = h = v_{oy}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

$$y_{máx} = v_{oy}\left(\frac{v_{oy}}{g}\right) - \frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_{oy}}{g}\right)^2$$

$$\boxed{y_{máx} = \frac{v_{oy}^2}{2g}}$$

iv) tipo de trajectória ?

– parabólica ($y = ax - bx^2$)

Em t= 0 s, $x_0 = y_0 = 0$ m

$$x = v_{ox}\,t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{ox}}$$

$$y = v_{oy}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \Rightarrow y = \left(\frac{v_{oy}}{v_{ox}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{ox}^2}\right)x^2$$

$$\boxed{y = (\mathrm{tg}\,\theta)\,x - \left(\frac{g}{2\,v_o^2\cos^2\theta}\right)x^2}$$

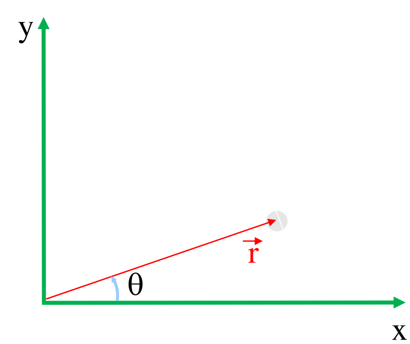
Questão 1

Uma bola de massa 0,5 kg é lançada com uma velocidade, *v*, numa direcção que faz 30° com a horizontal. A bola atinge uma velocidade de 17,7 $m.s^{-1}$, colide com o solo localizado 3,675 m acima do ponto de lançamento no instante t = 1,5 s.

i. Determine a velocidade inicial da bola.
ii. Calcule a que distância do ponto de lançamento a bola atinge o solo.
iii. Calcule o vector velocidade da bola no instante em que esta colide com o solo.

Movimento circular

Trajectória circular



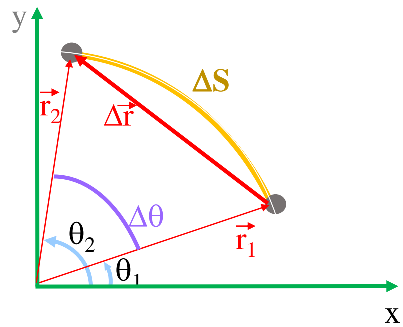
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$$x = |\vec{r}|\cos\theta$$
$$y = |\vec{r}|\sin\theta$$

r e θ são <u>coordenadas polares</u>

θ posição angular

Movimento circular



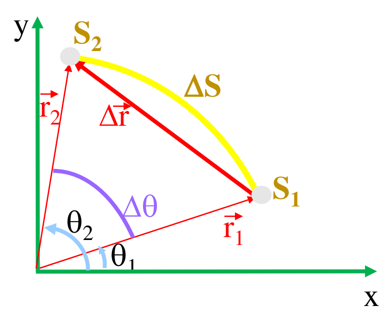
$$\Delta S = r\Delta\theta$$

$$r \equiv |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$$

movimento em sentido retrógrado indica
o sentido positivo do movimento

Movimento circular

S - posição medida sobre a circunferência



As posições podem ser descritas em termos de **r** (cartesiana), **θ** (angular) e **s** (linear), estando relacionados entre si pela relação

$$s = r\theta$$

$$com\ r \equiv |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$$

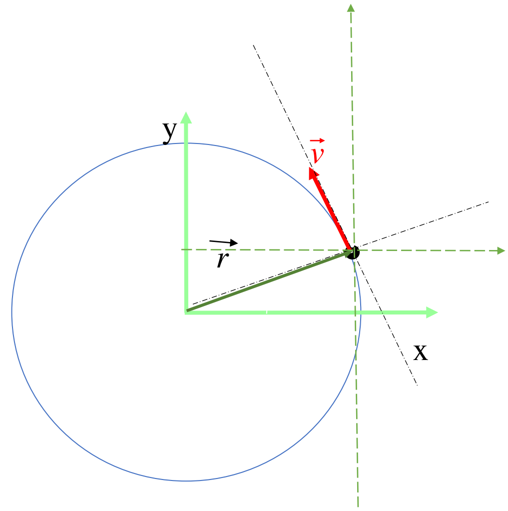
Velocidade no movimento circular

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(|\vec{r}|\sin\theta\right)}{dt}\hat{j} + \frac{d\left(|\vec{r}|\cos\theta\right)}{dt}\hat{\imath}$$

$$\vec{v} = |\vec{r}|\left[\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\hat{j} - \frac{d\theta}{dt}\sin\theta\hat{\imath}\right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r}v$$

$$\vec{v} = v\left[\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{\imath}\right]$$



Velocidade é sempre tangente à circunferência (trajectória)

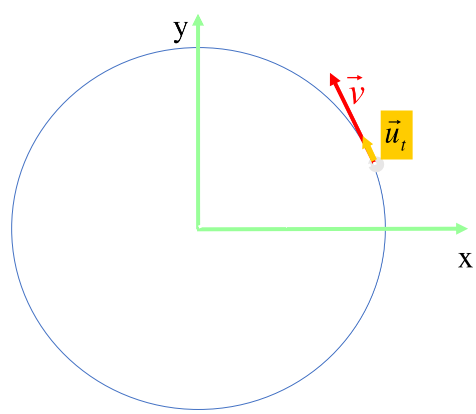
Versor tangencial $\vec{u}_t$

$$\vec{u}_t = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} \neq \vec{0}$$

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = v\left(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{j}\right)$$



$$\vec{v} = v\vec{u}_t$$

Aceleração no movimento circular

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left[v\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\hat{\imath}\right)\right]}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\hat{\imath}\right) + v\left[-\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\hat{j} - \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\hat{\imath}\right]$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\hat{\imath}\right) + v\frac{d\theta}{dt}\left[-\sin\theta\,\hat{j} - \cos\theta\hat{\imath}\right]$$

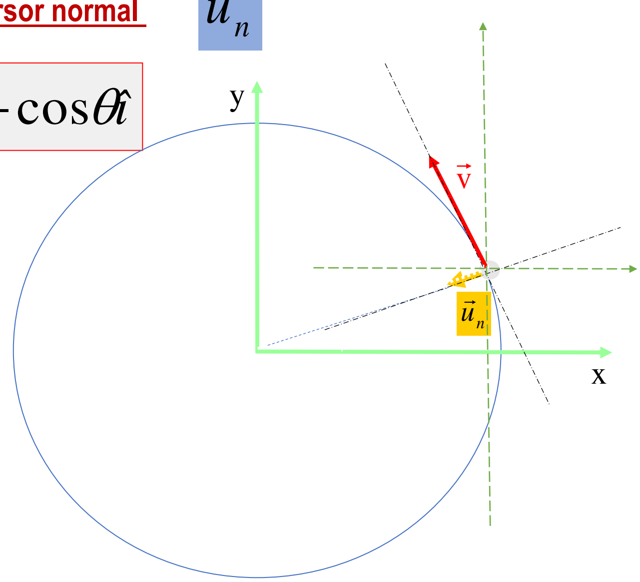
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}v$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\hat{\imath}\right) + \frac{v^2}{r}\left[-\sin\theta\,\hat{j} - \cos\theta\hat{\imath}\right]$$

Versor normal

$$\vec{u}_n$$

$$\vec{u}_n = -\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{\imath}$$



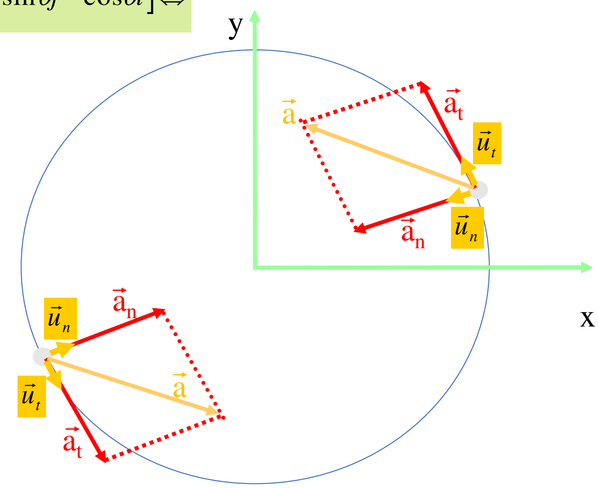
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overbrace{\left(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}\right)}^{\vec{u}_t} + \frac{v^2}{r}\overbrace{\left[-\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}\right]}^{\vec{u}_n} \Leftrightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$$

$$\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n$$

a_t - aceleração tangencial

a_n - aceleração radial



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

aceleração tangencial - traduz a variação temporal do módulo da velocidade

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

aceleração normal (centrípeta ou radial) - traduz a variação temporal da direcção da velocidade

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$$

Questão 2

Uma partícula de massa m=1kg, inicialmente em repouso, parte da origem do referencial em t=0s, sujeita à ação de uma força dada por: $\vec{F}(t) = t\,\hat{x} + 4t\,\hat{y}$ (N). Determine:

a) O vetor posição, $\vec{r}(t)$.

b) A componente tangencial do vetor aceleração.

39

Movimento Circular – Relação entre grandezas lineares e angulares

$$\boxed{s = R\,\theta}$$

R = constante no movimento circular

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow v = \frac{rd\theta}{dt} \Leftrightarrow v = r\omega$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\boxed{v = R\,\omega}$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$\boxed{a = R\alpha}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$$

40

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a_t = \frac{d(\omega r)}{dt} \Leftrightarrow a_t = r\frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow$$

$$a_t = r\alpha$$

NB: no movimento circular, r é constante

a_t – aceleração tangencial (linear)

α - aceleração angular rad/s²

Exemplos

→ Pêndulo
→ Movimento curvilíneo

41

Movimento circular uniforme (m.c.u.)

$$|\vec{v}| = \text{constante}; \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{constante}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \overset{\vec{0}}{\cancel{\frac{dv}{dt}}}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow a_t = 0$$

$$\frac{d\vec{u}_n}{dt} \neq \vec{0} \Rightarrow a_n \neq 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

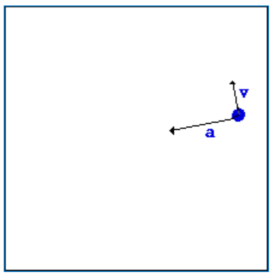
- A aceleração normal é constante no m.c.u.
- Não há aceleração tangencial

42

$$a_t = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{a_t}{r} = 0$$

$$v = cte \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = cte$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$ 1 volta $\longrightarrow$ $\Delta\theta = 2\pi$ $$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \equiv T$$



http://surendranath.tripod.com/CirclePlus/CirclePlus.html

T – período (s)

$$T = \frac{1}{f}$$

f **- frequência (Hz ou s^{-1})**

MCE_IM_2022-2023

43

Movimento Circular - Equações cinemáticas

$$\Delta s = \int_0^t v dt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$$

$$\Delta v = \int_0^t a_t dt$$

$$v = v_0 + a_t t$$

$$\Delta\theta = \int_0^t \omega dt$$

$$\Delta\omega = \int_0^t \alpha dt$$

se α = cte $\longrightarrow$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

MCE_IM_2022-2023

44

Questão 3

Um ponto descreve uma circunferência de acordo com a lei s=t³+2t², onde *s* é medido em metro ao longo da circunferência e *t* vem em segundo.
Em t=2s, a aceleração total do ponto é 16√2 ms⁻². Calcule o raio da circunferência.

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d\left(t^3+2t^2\right)}{dt}=3t^2+4t$$

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d\left(3t^2+4t\right)}{dt}=6t+4$$

Em t=2s

$$v(t=2)=3\times 2^2+4\times 2=20ms^{-1}$$

$$a_t\left(t=2s\right)=6\times 2+4=16ms^{-2}$$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_n^2+a_t^2}$$

Em t=2s

$$16\sqrt{2}=\sqrt{16^2+a_n{}^2}$$

$$a_n=\frac{v^2}{r}\Leftrightarrow 16=\frac{20^2}{r}\Leftrightarrow r=25m$$