Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I **2022/23**

1.º teste Duração: 1h30

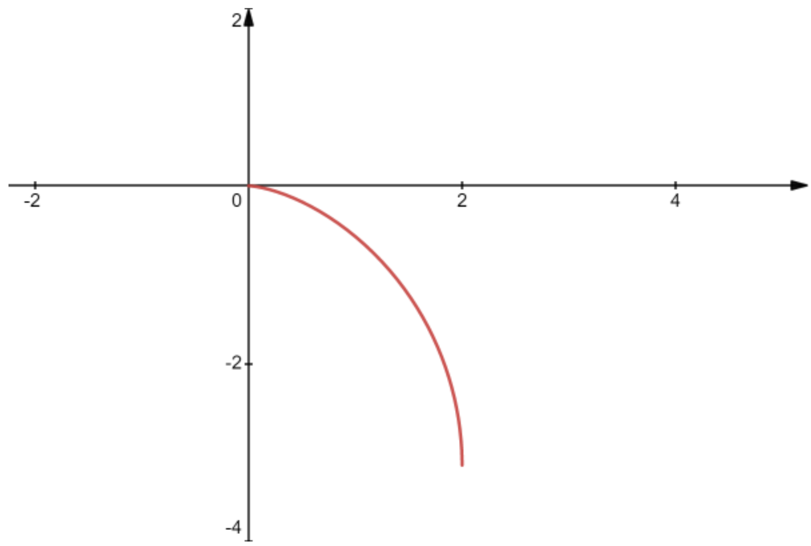
- **Este teste continua no verso e termina com a palavra FIM. No verso encontras também a cotação e formulários.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \sqrt{2x - x^2} - \arccos(1 - x).$$

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido software gráfico.



Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

(a) Determina o domínio D_f de definição de f.

(b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $e^{6x}\cos(2x)$; (b) $\dfrac{1}{x^4 - 1}$; (c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Sugestão: Na alínea (a) usa primitivação por partes e na alínea (c) faz a mudança de variável definida por $x = 2\sin t,\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := e^{\tan x}x.$$

(a) Mostra que f é diferenciável e que é invertível pelo menos nalgum intervalo aberto contendo $-\frac{\pi}{4}$. Designa por f^{-1} a inversa da restrição de f a esse intervalo.

(b) Caso exista, calcula o valor da derivada de f^{-1} em $f(-\frac{\pi}{4})$, justificando o teu raciocínio.

FIM

Cotação:

1.(a) 2; 1.(b) 5; 2.(a) 3; 2.(b) 3; 2.(c) 4; 3.(a) 1; 3.(b) 2.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ m \in \mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ n \in \mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\log_a \lvert u(x)\rvert,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x)\ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1+\tan^2 u = \sec^2 u$	$1+\operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1-u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1-u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u-e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	