

# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## Hoje

### **3.1 Campo eléctrico**

*Propriedades das cargas eléctricas. Isoladores e condutores. Lei de Coulomb. Campo eléctrico.*

### **3.2 Lei de Gauss**

*Lei de Gauss. Condutores em equilíbrio electrostático. Aplicações da Lei de Gauss.*

### **3.3 Potencial eléctrico**

*Diferença de potencial. Potencial eléctrico. Energia potencial. Cálculo do campo eléctrico a partir do potencial.*

### **3.4 Capacidade e condensadores**

*Capacidade eléctrica. Energia armazenada num condensador.*

### **3.5 Corrente eléctrica e resistência**

*Corrente eléctrica. Resistência e a Lei de Ohm. Energia e potência eléctricas. Leis de Kirchhoff.*

### **3.6 Campo magnético**

*Campo magnético. Força magnética. Lei de Biot-Savat. Lei de Ampère.*

### **3.7 Indução electromagnética**

*Lei de Faraday. Lei de Lenz. Auto-inductância. Inductância mútua.*

### **3.8 Equações de Maxwell**



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.2 Potencial Eléctrico

*O que é que significa dizermos  
que uma pilha é de 1,5 ou 9,0 Volt*



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.2 Energia Potencial Eléctrica

- *A integração espacial de uma força define o conceito de trabalho realizado pela força num dado trajecto*
- *O trabalho elementar realizado pela força devido a um deslocamento elementar é*

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

*onde  $d\vec{s}$  é o deslocamento do ponto de aplicação da força  $\vec{F}$  (ou da resultante de um sistema de forças) que actua sobre o corpo*

- *O trabalho total realizado pela força entre os pontos  $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$  é*

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.2 Energia Potencial Eléctrica

Uma partícula carregada com carga eléctrica  $q$  num campo eléctrico  $\vec{E}$  fica sujeita à acção de uma força

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

O trabalho realizado pela força eléctrica em mover a carga entre os pontos  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  é

$$W = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- *onde  $d\vec{s}$  é o deslocamento do ponto de aplicação da força  $\vec{F}$  (ou da resultante de um sistema de forças) que actua sobre um corpo entre os pontos  $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$*



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.3 Energia Potencial

*Dado que o campo eléctrico é conservativo, podemos definir uma energia potencial ou melhor a variação da energia potencial de uma carga  $q$  quando sujeita à acção de um campo eléctrico num deslocamento finito entre dois pontos  $A$  e  $B$  escrevendo*

$$\Delta U = U(B) - U(A) = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- *onde  $d\vec{s}$  é o deslocamento do ponto de aplicação do vector campo  $\vec{E}$  que actua sobre a carga  $q$*



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.3 Energia Potencial

*Dividindo a energia potencial pela carga obtemos*

$$\frac{\Delta U}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

*uma grandeza física que depende apenas da distribuição de carga da fonte e tem um valor bem definido em todos os pontos do campo*

*Esta quantidade chamamos **Potencial Eléctrico** ( ou simplesmente Potencial)  $V$*

$$V = \frac{U}{q}$$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.3 Energia Potencial

*Aqui o deslocamento  $d\vec{r}$  é entre dois pontos do espaço e NÃO o deslocamento de qualquer carga*

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

*e tal como na energia potencial, apenas diferenças de potencial têm significado*

*Geralmente consideramos o potencial nulo num ponto conveniente do campo, tal como fazemos para a energia potencial gravítica em Dinâmica*



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.2 Potencial eléctrico

Unidades S.I. do potencial eléctrico

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$Potencial = \frac{Energia}{Carga} \text{ (J/C)}$$

*A diferença de potencial  $V_B - V_A$  é igual ao trabalho por unidade de carga que um acção externa realizaria para deslocar uma carga de prova de A para B sem variação da energia cinética*





# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.2 Potencial eléctrico

Unidades S.I. do potencial eléctrico chama-se Volt

$$1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}}$$

Uma pilha é de “1,5 Volt” significa que fornece 1,5 Joule de energia a cada carga de 1 Coulomb que é deslocada de um terminal para o outro



Alessandro Giuseppe  
Antonio Anastasio Volta  
(1745 – 1827)



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.2 Potencial Eléctrico

Unidades S.I. do campo eléctrico expressas em termos de potencial

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Newton} \times 1 \text{ metro} = 1 \text{ Nm}$$

$$1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}} = \frac{1 \text{ Nm}}{1 \text{ C}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} \times 1 \text{ m}$$

$$1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Volt}}{\text{metro}}$$

Obs

Em física nuclear e das partículas usa-se a unidade 1eV (electrão-Volt) que representa a energia que um electrão adquire quando é acelerado por uma diferença de potencial de 1V

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial em campo uniforme

Consideremos o campo uniforme

$$\vec{E} = -E_y \hat{j}$$

a diferença de potencial entre os pontos A e B é

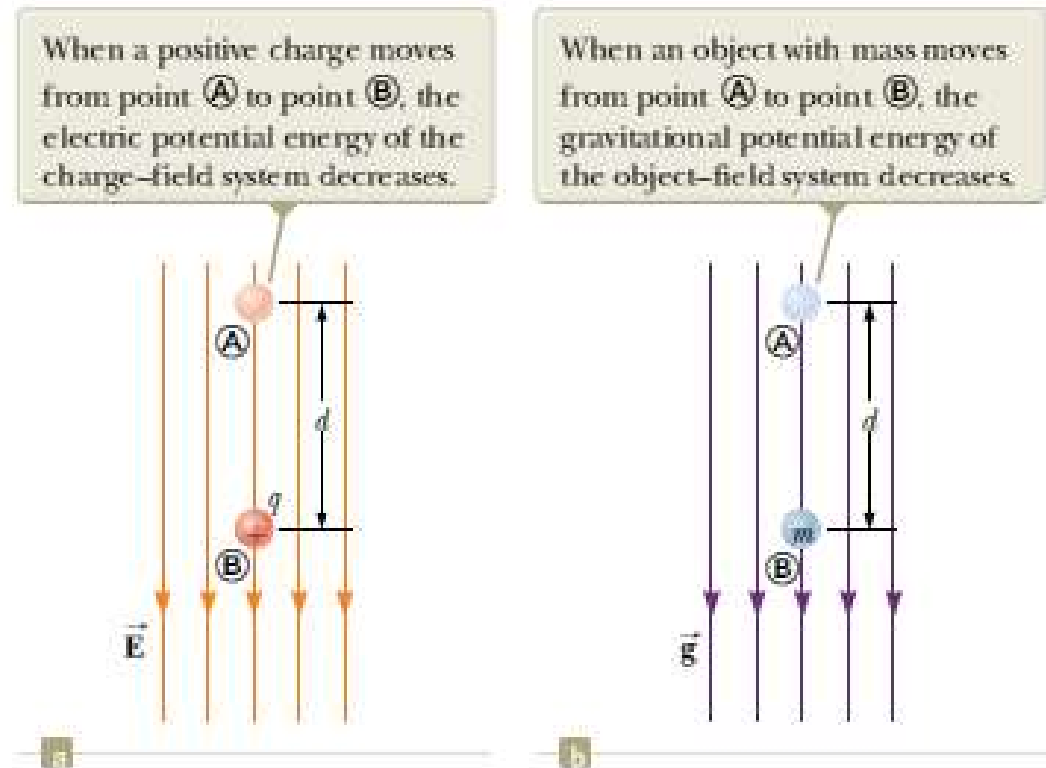
$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= - \int_A^B E \cdot dr \cdot \cos 0$$

$$V_B - V_A = -Ed$$

onde o sinal menos significa que o potencial em B é inferior ao potencial em A  $\rightarrow V_B < V_A$

- As linhas de campo eléctrico apontam sempre no sentido dos potenciais decrescentes
- uma carga  $+q$  move-se de A para B  $\rightarrow$  a sua Energia potencial variou  
$$\Delta U = q\Delta V = -qEd$$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial em campo uniforme

Consideremos o campo uniforme  $\vec{E} = E_x \hat{i}$   
a diferença de potencial entre os pontos A e B é

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= - \left( \int_A^C E \cdot ds \cdot \cos 0 + \int_C^B E \cdot ds \cdot \cos 90 \right) = -Ed \\ V_B - V_A &= -Ed \end{aligned}$$

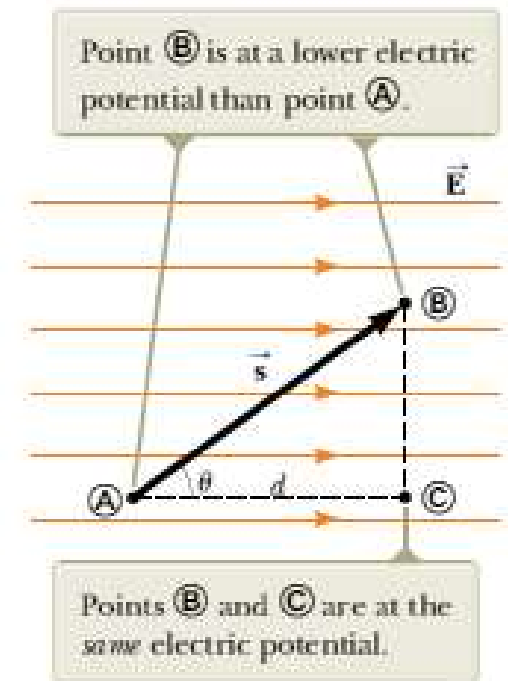
*Todos os pontos que se situam num plano perpendicular ao campo têm o mesmo potencial  $\rightarrow V_C = V_B$*

Chamamos **superfície equipotencial** a uma superfície formada por uma distribuição contínua de pontos com o mesmo potencial

Agora, se o campo é um vector constante temos

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s}$$

e a variação da energia potencial da carga é  $\Delta U = q\Delta V = -q\vec{E} \cdot \vec{s}$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial em campo uniforme

Consideremos agora duas placas planas colocadas paralelamente uma à outra, ligadas a uma bateria de 12 V e distanciadas de 0,30 cm.

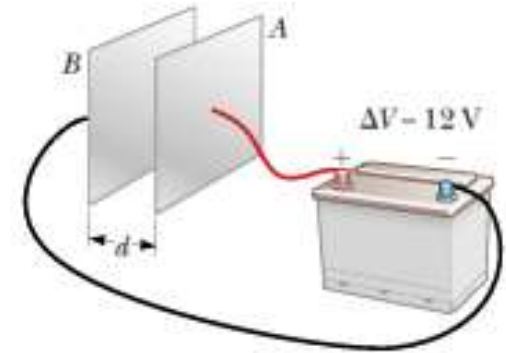
A d.d.p. entre as placas é

$$V_B - V_A = -Ed$$

*assumindo que o campo é uniforme entra as placas.*

*Podemos calcular o campo entre as placas*

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12}{0,3 \times 10^{-2}} = 4 \text{ kV/m}$$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial em campo uniforme

Exemplo:

Um protão parte do repouso sob a acção de um campo uniforme  $E = 8,0 \times 10^4 \text{ V/m}$  e percorre uma distância  $d = 0,50 \text{ m}$  na direcção do campo. Calcular

- a) a d.d.p. entre os pontos A e B
- b) a variação da Energia potencial do protão
- c) a velocidade em B

Resolução

- a)  $V_B - V_A = -Ed = -8,0 \times 10^4 \times 0,5 = -4,0 \times 10^4 \text{ V}$
- b)  $\Delta U = q\Delta V = 1,6 \times 10^{-19} \times (-4,0 \times 10^4) = -6,4 \times 10^{-15} \text{ J}$
- c) A força eléctrica é uma força conservativa  $\Rightarrow \Delta E_c + \Delta U = 0$

$$\left( \frac{1}{2} m_p v_B^2 - 0 \right) + q\Delta V = 0 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2eEd}{m_p}} = 2,8 \times 10^6 \text{ m/s}$$

obs:  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

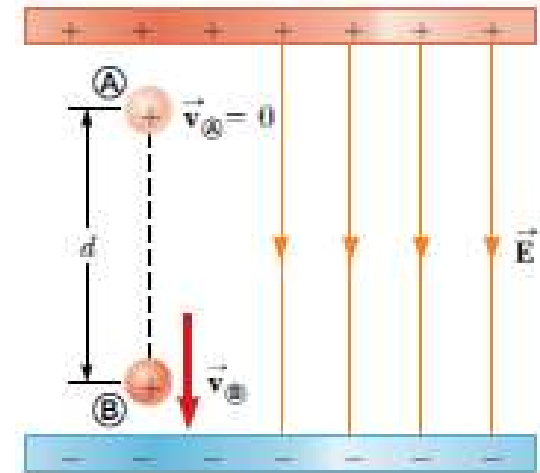


Figure 25.6 (Example 25.2) A proton accelerates from A to B in the direction of the electric field.



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de cargas pontuais

Consideremos uma carga pontual isolada

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

A d.d.p. entre os pontos A e B é

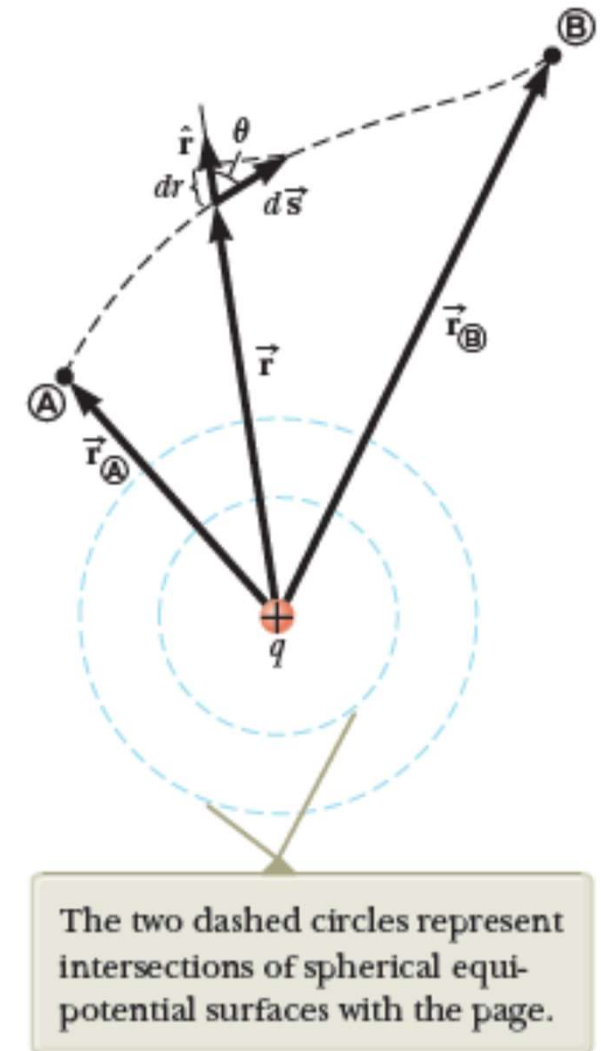
$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

mas  $\hat{r} \cdot d\vec{s} = ds \cos \theta$

e  $ds \cos \theta = dr$

$$V_B - V_A = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de cargas pontuais

Fazendo  $V_A(R_A \rightarrow \infty) = 0$  resulta  $V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B}$

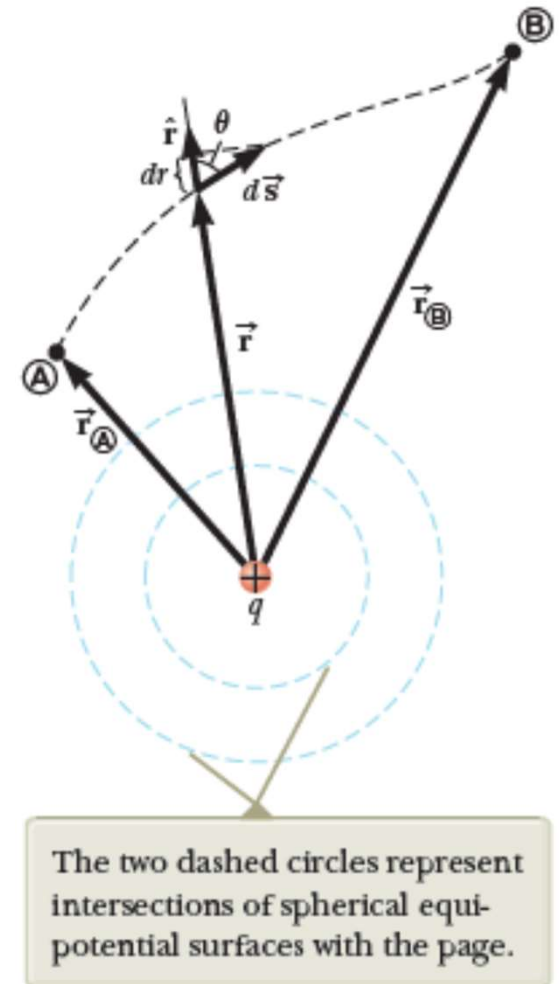
ou seja 
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

o que representa o potencial criado por uma carga pontual

De acordo com o princípio da sobreposição

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

o potencial num ponto é igual à soma algébrica dos potenciais devidos a todas as cargas presentes





# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Energia Potencial

Se  $V_1$  é o potencial eléctrico num ponto  $P$  devido à carga  $q_1$ , então o trabalho necessário para trazer uma outra carga  $q_2$  desde o infinito até ao ponto  $P$  é

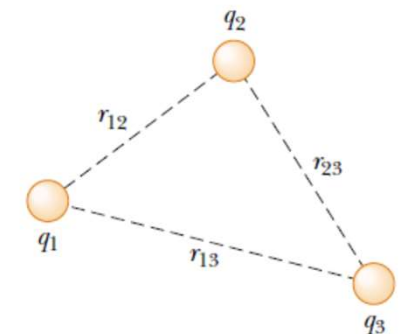
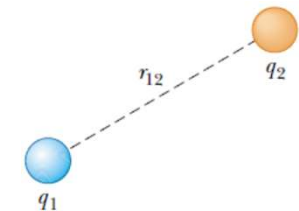
$$W_{\infty \rightarrow P} = q_2 V_1 = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

ou seja 
$$W_{\infty \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Por definição este trabalho é igual à energia potencial  $U$  do sistema de duas caragas separadas pela distância  $r_{12}$

A energia total de um sistema de três cargas é

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$



**Figure 25.10** Three point charges are fixed at the positions shown. The potential energy of this system of charges is given by Equation 25.14.

*Obs*

- Se  $q_1 q_2 > 0$  as cargas repelem-se  $\Rightarrow$  é necessário realizar trabalho sobre as cargas para as aproximar uma da outra
- Se  $q_1 q_2 < 0$  as cargas atraem-se  $\Rightarrow$  é necessário realizar trabalho para manter as cargas afastadas



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Energia Potencial

- Fixamos  $q_1$  e consideramos  $q_2$  e  $q_3$  muito afastadas (infinito)
- O trabalho requerido para colocar  $q_2$  em  $r_{12}$  é o primeiro termo de  $U$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

- Os outros dois termos representam o trabalho requerido para colocar  $q_3$  junto de  $q_1$  e  $q_2$

*Generalizando*

*A Energia Electrostática de um conjunto de cargas é a energia necessária para formar esse conjunto (configuração final)*



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Relação entre campo e potencial

Partindo da definição de potencial

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

sendo

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$$
$$d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

resulta

$$dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

mas do cálculo infinitesimal sabemos que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Então

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} ; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Relação entre campo e potencial

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} ; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

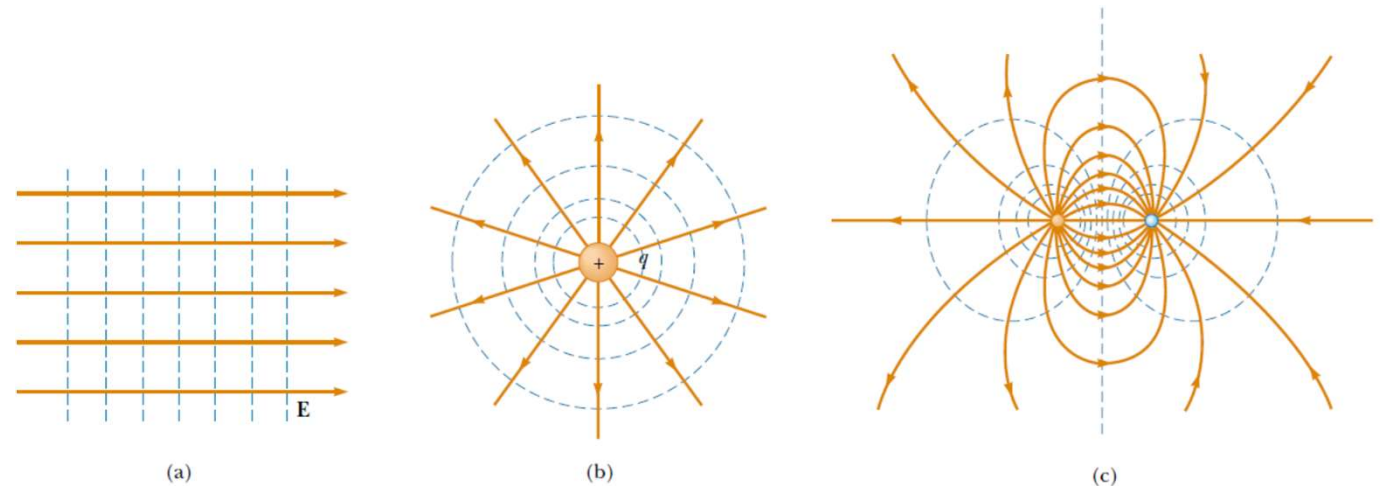
Em notação vectorial (s.c. cartesiano)

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)V$$

onde  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$  é o operador gradiente (derivada direccional).

As superfícies equipotenciais são sempre perpendiculares ao campo, pois

$$dV = 0 \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



**Figure 25.12** Equipotential surfaces (dashed blue lines) and electric field lines (red lines) for (a) a uniform electric field produced by an infinite sheet of charge, (b) a point charge, and (c) an electric dipole. In all cases, the equipotential surfaces are *perpendicular* to the electric field lines at every point. Compare these drawings with Figures 25.2, 25.7b, and 25.8b.

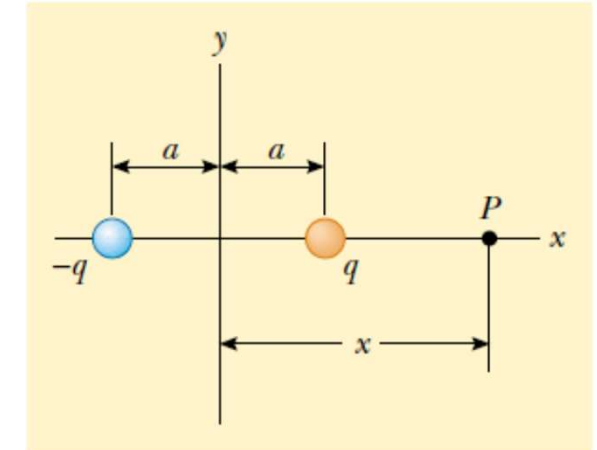
# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Relação entre campo e potencial

Potencial e Campo de um dipolo

- a) calcular o potencial no ponto P
- b) Calcular  $V$  e  $E_x$  num ponto muito afastado
- c) Calcular  $V$  e  $E_x$  num ponto entre as cargas

Resolução



$$\begin{aligned} \text{a)} \quad V_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-q}{x+a} + \frac{q}{x-a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-(x-a) + (x+a)}{x^2 - a^2} \right) \\ V_P &= \frac{qa}{2\pi\epsilon_0(x^2 - a^2)} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad x \gg a \rightarrow V_P \cong \frac{qa}{2\pi\epsilon_0 x^2} ; \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \cong \frac{qa}{\pi\epsilon_0 x^3}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad V_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-q}{x+a} + \frac{q}{x-a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-(x-a) + (x+a)}{x^2 - a^2} \right) = -\frac{qx}{2\pi\epsilon_0(x^2 - a^2)} \\ E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-x^2 - a^2}{(x^2 - a^2)^2} \right] \end{aligned}$$

Obs

verificação em  $x = 0$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de distribuições contínuas

Podemos calcular o potencial devido a distribuições contínuas de carga de duas maneiras

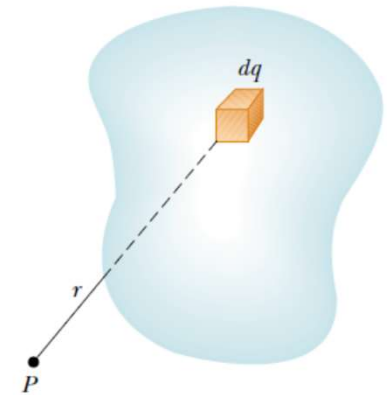
1. Se conhecermos a distribuição de carga, o potencial total pode ser obtido pela integração dos elementos de carga

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

2. Se o campo é conhecido (p.ex. usando a lei de Gauss) o potencial total pode ser obtido pela integração do integral de linha do campo

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

ou calculando a diferença de potencial entre dois pontos no campo e assumindo o potencial nulo num ponto conveniente



**Figure 25.14** The electric potential at the point  $P$  due to a continuous charge distribution can be calculated by dividing the charged body into segments of charge  $dq$  and summing the electric potential contributions over all segments.

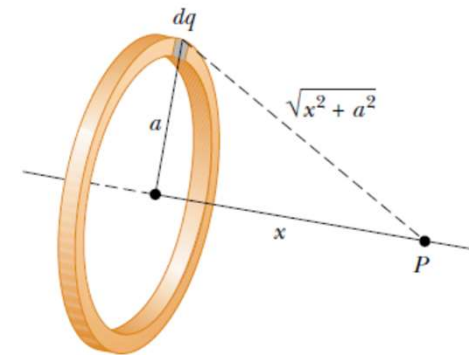
# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial e campo de um anel de carga uniformemente carregado ao longo do seu eixo. A carga total é  $Q$  e o raio do anel é  $a$ .

Orientamos o anel de modo que o seu plano é perpendicular ao eixo- $xx$  que passa no seu centro onde colocamos a origem.

O elemento de carga  $dq$  situa-se à distância  $\sqrt{a^2 + x^2}$  do ponto  $P$ . Então fica



**Figure 25.15** A uniformly charged ring of radius  $a$  lies in a plane perpendicular to the  $x$  axis. All segments  $dq$  of the ring are the same distance from any point  $P$  lying on the  $x$  axis.

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq \rightarrow V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

A única variável nesta expressão é  $x$

O campo obtém-se do potencial por derivação

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \rightarrow E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$E_y = E_z = 0$  (só tem componente segundo  $xx$ )

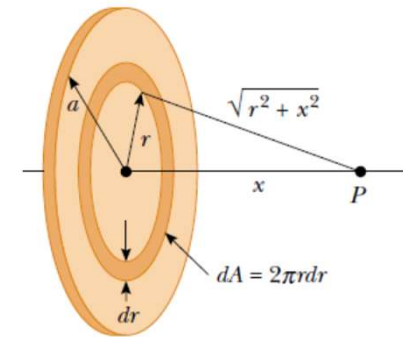
# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial e campo e um disco uniformemente carregado com densidade uniforme  $\sigma$  (C/m<sup>2</sup>) em pontos do seu eixo.

Resolução

Escolhemos o ponto P a uma distância  $x$  do centro do disco e colocamos o plano do disco perpendicular ao eixo- $xx$ . Consideramos que o disco é formado por uma infinidade de anéis carregados de espessura infinitesimal  $dr$



**Figure 25.16** A uniformly charged disk of radius  $a$  lies in a plane perpendicular to the  $x$  axis. The calculation of the electric potential at any point  $P$  on the  $x$  axis is simplified by dividing the disk into many rings each of area  $2\pi r dr$ .

Então a área elementar é  $dA = 2\pi r dr$  e a carga elementar é  $dq = \sigma dA$  e cada anel elementar contribui com o potencial

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

no ponto P



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial e campo e um disco uniformemente carregado com densidade uniforme  $\sigma$  (C/m<sup>2</sup>) em pontos do seu eixo.

Resolução

Integrando entre  $r = 0$  e  $r = a$  obtemos o potencial total do disco no ponto P

$$V = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^a \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

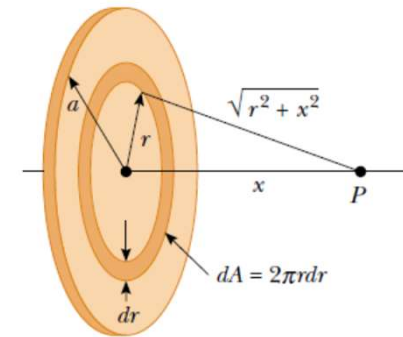
$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + a^2} - x)$$

O campo eléctrico no ponto P é

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{r^2 + a^2} - x) \rightarrow E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right]$$

$E_y = E_z = 0$  (só tem componente segundo  $xx$ )

No limite  $a \rightarrow \infty$  resulta  $E_x \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  (plano infinito)



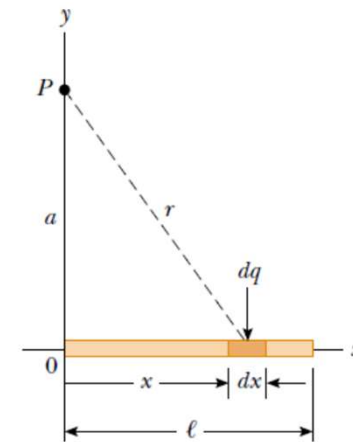
**Figure 25.16** A uniformly charged disk of radius  $a$  lies in a plane perpendicular to the  $x$  axis. The calculation of the electric potential at any point  $P$  on the  $x$  axis is simplified by dividing the disk into many rings each of area  $2\pi r dr$ .

# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: potencial e campo criado por um fio uniformemente carregado.

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$



**Figure 25.17** A uniform line charge of length  $\ell$  located along the  $x$  axis. To calculate the electric potential at  $P$ , the line charge is divided into segments each of length  $dx$  and each carrying a charge  $dq = \lambda dx$ .

# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial dentro e fora de uma esfera de raio  $R$  uniformemente carregada com densidade volúmica  $\rho$  e carga total positiva  $Q$ .

Resolução

No exterior da esfera  $r > R$

Este é um caso em que a simetria da distribuição convida ao uso da lei de Gauss para calculamos o

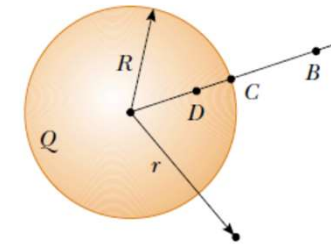
campo  $E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$  e o

potencial  $V_B = - \int_{\infty}^r E_r dr = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r}$

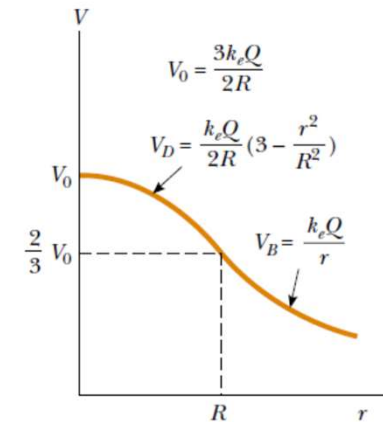
→ potencial de uma carga pontual

Na superfície da esfera  $r = R$

$$V_C = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R}$$



**Figure 25.18** A uniformly charged insulating sphere of radius  $R$  and total charge  $Q$ . The electric potentials at points  $B$  and  $C$  are equivalent to those produced by a point charge  $Q$  located at the center of the sphere, but this is not true for point  $D$ .



**Figure 25.19** A plot of electric potential  $V$  versus distance  $r$  from the center of a uniformly charged insulating sphere of radius  $R$ . The curve for  $V_D$  inside the sphere is parabolic and joins smoothly with the curve for  $V_B$  outside the sphere, which is a hyperbola. The potential has a maximum value  $V_0$  at the center of the sphere. We could make this graph three dimensional (similar to Figures 25.7a and 25.8a) by spinning it around the vertical axis.

# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial dentro e fora de uma esfera de raio  $R$  uniformemente carregada com densidade volúmica  $\rho$  e carga total positiva  $Q$ .

Resolução

No interior da esfera  $r < R$

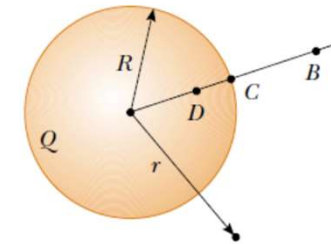
Usamos a lei de Gauss para calcularmos o campo

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

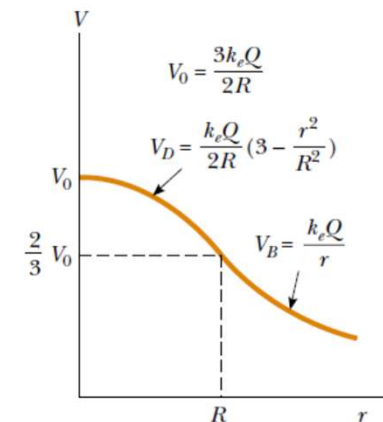
$$V_D - V_C = - \int_R^r E_r dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_R^r r dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

como  $V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$  resulta

$$V_D = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$



**Figure 25.18** A uniformly charged insulating sphere of radius  $R$  and total charge  $Q$ . The electric potentials at points  $B$  and  $C$  are equivalent to those produced by a point charge  $Q$  located at the center of the sphere, but this is not true for point  $D$ .



**Figure 25.19** A plot of electric potential  $V$  versus distance  $r$  from the center of a uniformly charged insulating sphere of radius  $R$ . The curve for  $V_D$  inside the sphere is parabolic and joins smoothly with the curve for  $V_B$  outside the sphere, which is a hyperbola. The potential has a maximum value  $V_0$  at the center of the sphere. We could make this graph three dimensional (similar to Figures 25.7a and 25.8a) by spinning it around the vertical axis.

# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de distribuições contínuas

Exemplo: Potencial dentro e fora de uma esfera de raio  $R$  uniformemente carregada com densidade volúmica  $\rho$  e carga total positiva  $Q$ .

Resolução

No interior da esfera  $r < R$

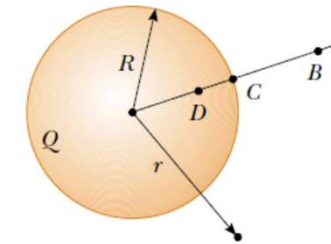
Usamos a lei de Gauss para calcularmos o campo

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

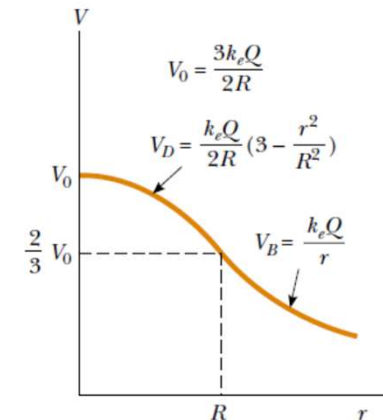
$$V_D = - \int E_r dr + Cte = - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r^2 + Cte$$

como para  $r = R$ ,  $V_D = V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$  resulta

$$V_D = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$



**Figure 25.18** A uniformly charged insulating sphere of radius  $R$  and total charge  $Q$ . The electric potentials at points  $B$  and  $C$  are equivalent to those produced by a point charge  $Q$  located at the center of the sphere, but this is not true for point  $D$ .



**Figure 25.19** A plot of electric potential  $V$  versus distance  $r$  from the center of a uniformly charged insulating sphere of radius  $R$ . The curve for  $V_D$  inside the sphere is parabolic and joins smoothly with the curve for  $V_B$  outside the sphere, which is a hyperbola. The potential has a maximum value  $V_0$  at the center of the sphere. We could make this graph three dimensional (similar to Figures 25.7a and 25.8a) by spinning it around the vertical axis.

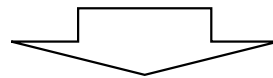
# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de condutores carregados

Num condutor sólido em equilíbrio

- A carga reside na superfície exterior do condutor
- O campo eléctrico no interior do condutor é nulo
- O campo eléctrico à superfície é perpendicular à superfície do condutor

Vamos ver que todos os pontos da superfície de um condutor carregado em equilíbrio electrostático têm o mesmo potencial



*A superfície de um condutor em equilíbrio electrostático é uma superfície equipotencial*

Entre dois pontos quaisquer na superfície de um condutor em equilíbrio  $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$  pois  $\vec{E} \perp d\vec{s}$



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de condutores carregados

Entre dois pontos quaisquer na superfície de um condutor em equilíbrio

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \text{ pois } \vec{E} \perp d\vec{s}$$

Como o campo é nulo em todos os pontos no interior do condutor (ôco ou sólido) em equilíbrio, o potencial tem de ser constante e, portanto, igual ao seu valor na superfície

Obs

- Não é necessário realizar trabalho para trazer uma pequena carga do interior para a superfície
- O potencial no interior é constante NÃO É NULO (no caso geral)  
O campo é que é nulo





# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de condutores carregados

Exemplo: Condutor esférico com raio  $R$  carregado com carga  $+Q$

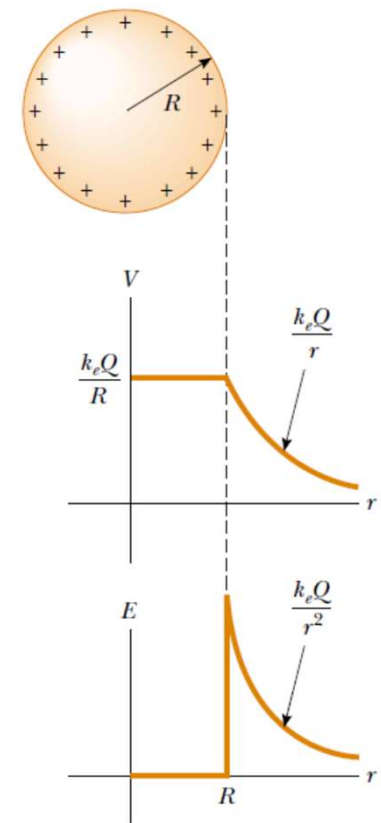
Quando o condutor esférico é carregado, o excesso de carga distribui-se uniformemente na superfície com densidade superficial de carga uniforme

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

- O campo no interior é nulo
- O potencial tem de ser constante no interior e, portanto, igual ao da superfície

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

E se o condutor não for esférico? como se distribui a carga?





# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de condutores carregados

Exemplo: Dois condutores esféricos de raios  $R_1$  e  $R_2$  estão separados de uma distância  $d \gg R_1$  e  $d \gg R_2$ . As esferas são ligadas por um fio condutor e as cargas das esferas em equilíbrio são  $q_1$  e  $q_2$ . Qual a relação entre os campos eléctricos na superfície dos condutores?

Resolução

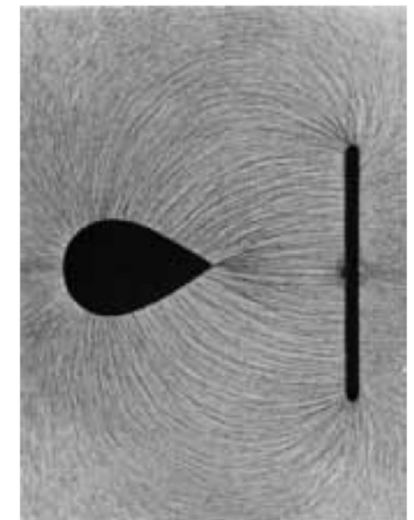
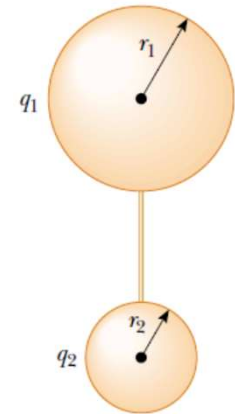
Se as esferas estão em equilíbrio então a superfície dos condutores é uma superfície equipotencial e

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

Como as esferas estão muito afastadas, a carga está uniformemente distribuída na superfície e

$$\begin{cases} E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \\ E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \end{cases} \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

- o campo é mais intenso na superfície da esfera mais pequena
- o potencial das duas esferas é igual
- a densidade de carga não é uniforme



# 3. Campos Eléctrico e Magnético

## 3.4 Potencial de condutores carregados

Exemplo: Dois condutores esféricos de raios  $R_1$  e  $R_2$  estão separados de uma distância  $d \gg R_1$  e  $d \gg R_2$ . As esferas são ligadas por um fio condutor e as cargas das esferas em equilíbrio são  $q_1$  e  $q_2$ . Qual a relação entre os campos eléctricos na superfície dos condutores?

Resolução

Se as esferas estão em equilíbrio então a superfície dos condutores é uma superfície equipotencial e

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

Como as esferas estão muito afastadas, a carga está uniformemente distribuída na superfície e

$$\begin{cases} E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \\ E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \end{cases} \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

- o campo é mais intenso na superfície da esfera mais pequena
- o potencial das duas esferas é igual
- a densidade de carga não é uniforme

