

Lista de Exercícios 3

Cálculo I

Exercício 1 Determine as seguintes primitivas, usando a técnica de primitivação por partes:

- (a) $\int \sin(2x)\sin(7x)dx$
- (b) $\int x \arctan(x)dx$
- (c) $\int x \cdot 3^x dx$
- (d) $\int \cos(\ln(x))dx$
- (e) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$
- (f) $\int e^{-3x}(2x+3)dx$
- (g) $\int x^3 \ln x dx$
- (h) $\int \ln^2(x)dx$

Exercício 2 Determine as seguintes primitivas:

- (a) $\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)} dx$
- (b) $\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} dx$
- (c) $\int \frac{x+1}{x^3-1} dx$
- (d) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx$
- (e) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$
- (f) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$

Exercício 3 Calcule as primitivas das seguintes funções:

- (a) $\frac{\cos(\cos(\tan x))\sin(\tan(x))}{\cos^2(x)}$
- (b) $\frac{x-9}{(x^2+3)(x-2)}$

Sugestão: na alínea a) use a primitivação quase imediata

(1º teste SE 2021/22)

Exercício 4 Seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural qualquer superior a 1.

- (a) Mostre que a seguinte igualdade é verdadeira

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

(b) Calcule $\int (\ln x)^2 dx$, usando a fórmula anterior, sabendo que a mesma também é válida para $n = 1$.

(1º teste SE 2021/22)

Respostas

- 1a. $\frac{1}{10}\text{sen}(5x) - \frac{1}{18}\text{sen}(9x) + c, c \in \mathbb{R}$
- 1b. $\frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2}x + c, c \in \mathbb{R}$
- 1c. $\frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2} + c, c \in \mathbb{R}$
- 1d. $\frac{1}{2} (x \cos(\ln x) + x \text{sen}(\ln x)) + c, c \in \mathbb{R}$
- 1e. $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}$
- 1f. $-\frac{e^{-3x}(6x+11)}{9} + c, c \in \mathbb{R}$
- 1g. $\frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + c, c \in \mathbb{R}$
- 1h. $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + c, c \in \mathbb{R}$
- 2a. $-\ln|x-2| + \frac{5}{4} \ln|x-3| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + c, c \in \mathbb{R}$
- 2b. $-\frac{3}{4} \ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{13}{16} \ln|x-2| + \frac{15}{16} \ln|x+2| + c, c \in \mathbb{R}$
- 2c. $\frac{1}{3} (2 \ln|x-1| - \ln(x^2 + x + 1)) + c, c \in \mathbb{R}$
- 2d. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) - \arctan(x+2) + c, c \in \mathbb{R}$
- 2e. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + 5 \ln|x-2| - 3 \ln|x+2| + c, c \in \mathbb{R}$
- 2f. $\frac{1}{4} (4x + \ln|x-1| - \ln|x+1| - 2 \arctan(x)) + c, c \in \mathbb{R}$
- 3a. $-\text{sen}(\cos(\tan x)) + c, c \in \mathbb{R}$
- 3b. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \ln|x-2| + c, c \in \mathbb{R}$
- 4b. $x(\ln x)^2 - 2x \ln(x) + 2x + c, c \in \mathbb{R}$