

Resoluções e comentários

1. (i)  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ ;  $\int_4^6 \frac{1}{x^2-6x+5} dx$

(a) No 1º caso trata-se de um integral de Riemann, pois em  $[0,3]$  a função  $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$  é contínua (o domínio de definição desta expressão é  $] -1, \infty[$ , donde segue-se que a função é contínua aí). Usou-se o resultado que diz que função contínua num intervalo limitado e fechado é integrável nesse intervalo.

No 2º caso trata-se de um integral impróprio de 2ª espécie:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5.$$

Como  $5 \in [4,6]$  e  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x^2 - 6x + 5} =$

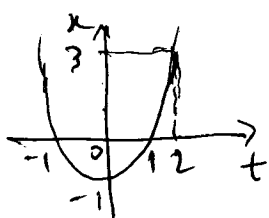
$$= \lim_{x \rightarrow 5^\pm} \frac{1}{(x-1)(x-5)} = \pm \infty, \text{ para além de não estar}$$

definida no ponto 5 do intervalo  $[4,6]$ , a função também se torna ilimitada junto a 5.

(b) Caso (i): Integremos por mudança de variável definida por  $x+1 = t^2$ ,  $\Leftrightarrow x = t^2 - 1$ :

$x$	$t$
0	1
3	2

Escolhendo  $\varphi(t) = t^2 - 1$ ,  $t \in [1,2]$ , tem-se que  $\varphi([1,2]) = [0,3]$ , onde  $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$  é contínua.



Além disso,  $q'(t) = 2t$  é também contínua.

$$\text{Então } \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \underset{\substack{\text{pois } t > 0 \\ p}}{=} \int_1^2 \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t dt =$$

$$= 2 \left[ \frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 = 2 \left( \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right) = 2 \left( \frac{7}{3} - 1 \right) = \frac{8}{3}.$$

Corr (ii): De acordo com a definição, o integral impróprio aqui em causa não converge nem não o mesmo acontece.

ver linha (a)  $\int_4^5 \frac{1}{x^2-6x+5} dx$  e  $\int_5^6 \frac{1}{x^2-6x+5} dx$

$$\lim_{b \rightarrow 5^-} \int_4^b \frac{1}{(x-1)(x-5)} dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow 5^-} \int_4^b \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-5} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow 5^-} \frac{1}{4} \left[ \ln|x-5| - \ln|x-1| \right]_4^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow 5^-} \frac{1}{4} \left( \ln \left| \frac{b-5}{b-1} \right| - \ln \left| \frac{-1}{3} \right| \right)$$

$$= -\infty$$

$\therefore$  O integral dado diverge.

C.A.:

$$\frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-5) + B(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \underline{A}x - \underline{5A} + \underline{B}x - \underline{B}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -5A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ -5A+A=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

2. Ver a resolução de questões 1 de 2º teste de Cálculo II de ano lectivo 2015/16 (aceder via reanuns) - Outros reanuns em <http://calculo.wikidot.com>; procurar por parte de Cálculo II, etc.)

3. Ver a resolução da questão 4 do 2º teste de Cálculo I do ano letivo 2015/16.

4. } As questões 4 e 5 têm a ver com resultados teóricos  
 5. } provados durante as aulas e com exercícios de aplicação da matéria dada que podem não ter sido exemplificados nas aulas. Pelo menos no que diz respeito à matéria sobre integrais, há vários exemplos em testes dos anos anteriores.

### Mais comentários:

Atendendo à alteração do programa de Cálculo I, não encontramos em testes dos anos anteriores questões exatamente como a questão 1 deste teste modelo.

Informar, no entanto, que o 1º integral aparece num exercício da secção 2.2 - parte 4 no Wikidat e o 2º integral é inspirado num exercício da secção 2.3 - parte 1 no Wikidat.

Questões como a 2 podem ser encontradas no 2º teste de Cálculo II (ou parte correspondente no Moodle) dos anos letivos anteriores. Questões como a 3 podem ser encontradas no 2º teste de Cálculo I dos anos letivos anteriores.

Relativamente às questões a serem usadas em 4 e 5, para além do que se escrevem acima, no que diz respeito à matéria sobre séries poderá encontrar alguma coisa em <http://calculo.wikidat.com/forum/t-1178675/3-t-p-c>.

Alcides  
 16-12-2016