

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 3 - 4 e 10 Out 10 22

1.3. Trabalho e Energia

Trabalho realizado por uma força constante e variável. Energia cinética e teorema do trabalho. Potência. Forças conservativas e forças não conservativas. Energia potencial. Conservação da energia.

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
 Gab. 13.3.16

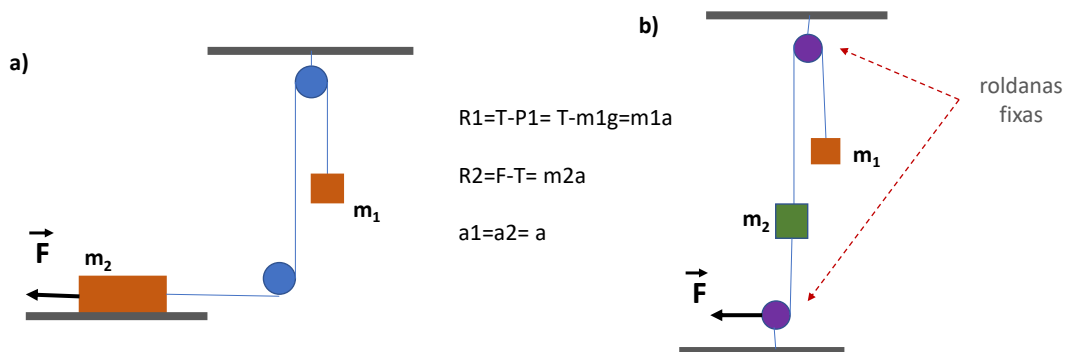
MCE_IM_2022-2023

1

1

Problemas de Mecânica Cap. 2

2 - Calcule a aceleração dos corpos da figura e a tensão nas cordas. Aplique ao caso em que $m_1 = 50 \text{ g}$, $m_2 = 80 \text{ g}$ e $F = 1 \text{ N}$.



NB: As roldanas fixas servem para mudar a direcção e sentido das forças aplicadas; não diminuem a intensidade das forças aplicadas

Sugestão: Fazer o diagrama de forças em cada corpo e depois aplicar a 2ª lei de Newton a cada um deles

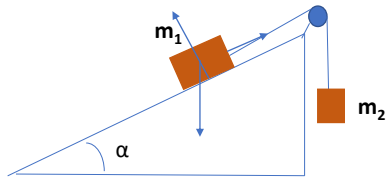
MCE_IM_2022-2023

2

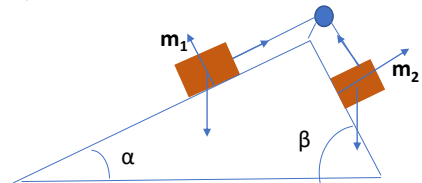
Problemas de Mecânica Cap. 2

3 - Determine a aceleração com que os corpos na figura se movem e as tensões nas cordas.

a)



b)

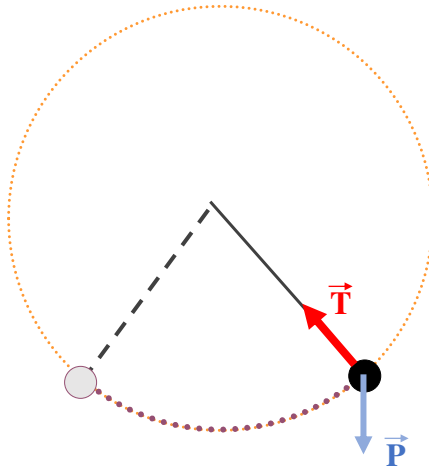


NB : Considerem os valores anteriormente disponibilizados para o problema 2

MCE_IM_2022-2023

3

PÊNDULO SIMPLES (movimento no plano vertical)



Trajectória circular

Forças: \vec{P} e \vec{T}

Em qualquer posição:

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

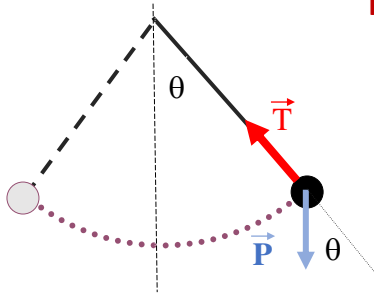
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/Pendulum/Pendulum.html>

MCE_IM_2022-2023

4

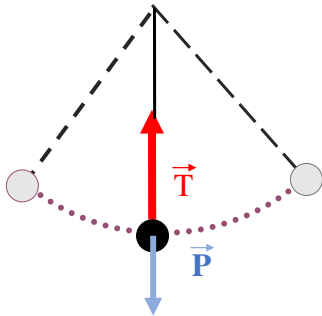
PÊNDULO SIMPLES



Posição extrema ($v=0$)

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\begin{cases} |\vec{T}| - |\vec{P}| \cos \theta = m|\vec{a}_n| & |\vec{T}| - |\vec{P}| \cos \theta = m \frac{v^2}{L} = 0 \\ |\vec{P}| \sin \theta = m|\vec{a}_t| & |\vec{P}| \sin \theta = m|\vec{a}_t| \end{cases}$$



Posição de equilíbrio ($\theta=0$)

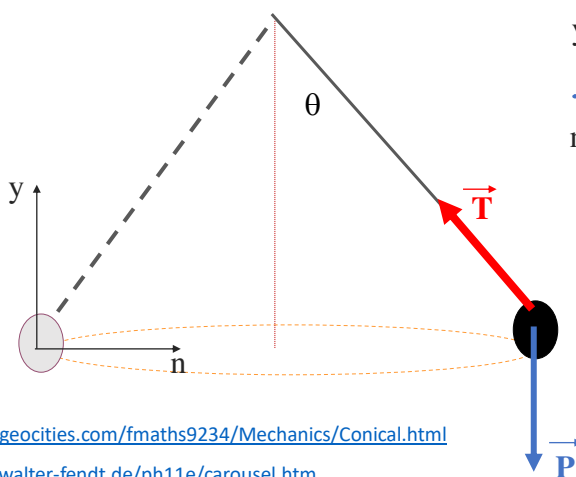
$$\begin{aligned} |\vec{T}| - |\vec{P}| &= m \frac{v^2}{L} \\ |\vec{a}_t| &= 0 \end{aligned}$$

Valor máximo da tensão!

MCE_IM_2022-2023

5

PÊNDULO CÔNICO (movimento circular no plano horizontal)



$$\begin{cases} y & |\vec{T}| \cos \theta = |\vec{P}| \\ n & |\vec{T}| \sin \theta = m|\vec{a}_n| \end{cases}$$

Quanto vale a aceleração tangencial?

<http://www.geocities.com/fmaths9234/Mechanics/Conical.html>

<http://www.walter-fendt.de/ph11e/carousel.htm>

MCE_IM_2022-2023

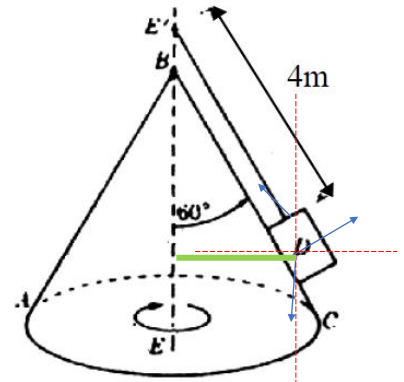
6

Problemas de Mecânica Cap. 2

10 - Um corpo D cuja massa é de 6 kg esta sobre uma superfície cônica A B C e está rodando em torno do eixo EE' com uma velocidade angular de 10 rev/min. Calcule:

- a) a velocidade linear do corpo
- b) a reacção da superfície do corpo
- c) a tensão no fio
- d) a velocidade angular necessária para reduzir a reacção do plano a zero.

$$r = L \sin 60$$



NB: o pêndulo move-se sobre o cone, descrevendo uma trajectória circular. Identificar as forças que actuam sobre o pêndulo e não esquecer que há aceleração centrípeta. Sendo a velocidade angular constante, também a velocidade linear é.

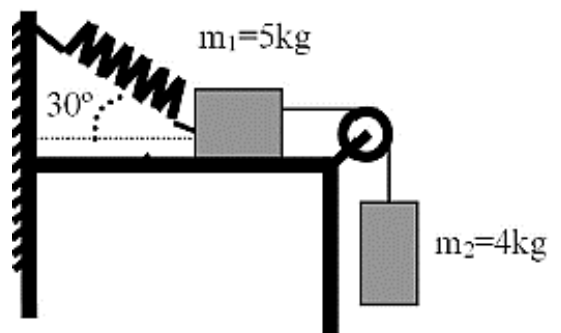
Reacção do plano zero significa que o pêndulo deixa de estar apoiado

MCE_IM_2022-2023

7

Cap. 2

- 19 - Considere o esquema da figura. A mola tem uma constante de força $k = 400\text{N/m}$. Estando o sistema em repouso, e na iminência de se movimentar, **qual o alongamento da mola** (o ângulo mantém-se constante):
- a) Se não houver atrito.
 - b) Se o coeficiente de atrito entre m_1 e a mesa for 0,4.



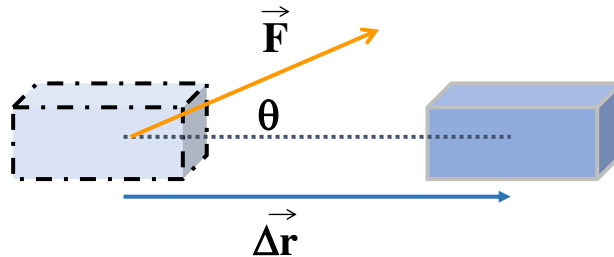
Mec_IM - 2021/22

8

8

Trabalho realizado por uma força constante

Um corpo sofre um deslocamento, estando sob a acção duma força F constante (entre outras)



O trabalho W realizado pela força F durante o deslocamento Δr é dado pelo produto

Ou seja, pelo

produto interno (produto escalar)

$$W = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \theta$$

$$W = \vec{F} \bullet \Delta \vec{r}$$

Mec_IM - 2021/22

10

10

Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando a força F depende da posição x?

Suponhamos um deslocamento segundo x e $F = F_x(x)$

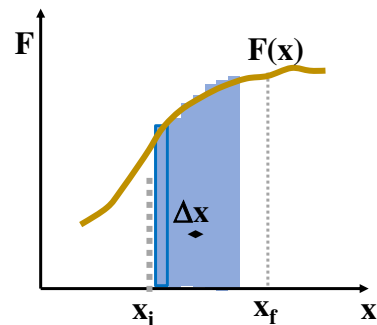
Para um deslocamento infinitesimal Δx

$$\Delta w = F_x(x) \cdot \Delta x$$

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x) \cdot \Delta x$$

No limite $\Delta x \rightarrow 0$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx$$



Mec_IM - 2021/22

13

13

Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando o deslocamento não é rectilíneo?

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \bullet d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz$$

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F_x(x, y, z)dx + \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F_y(x, y, z)dy + \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F_z(x, y, z)dz$$

Integral de caminho

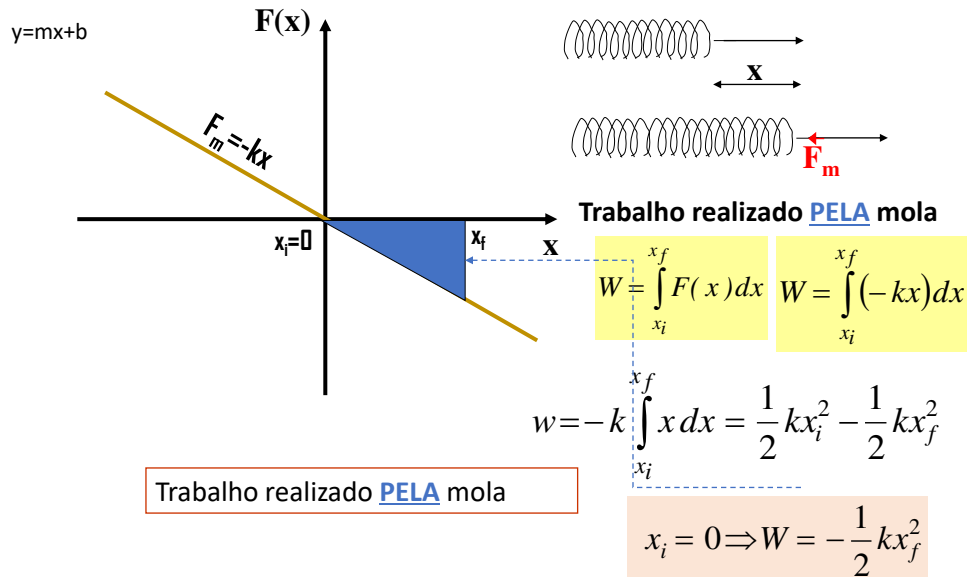
O trabalho será dado pela soma de 3 integrais, um para cada componente. Em cada um, as coordenadas têm que ser reescritas à custa de (cada) variável de integração, usando a equação que descreve a trajectória.

Mec_IM - 2021/22

14

14

Exemplo - Trabalho realizado por uma mola



Mec_IM - 2021/22

15

15

Trabalho e Energia

Em muitos casos, é possível descrever o movimento de um corpo, relacionando directamente a velocidade e o deslocamento, sem explicitar o tempo.

A partir do trabalho da força resultante num dado deslocamento, é possível calcular a variação de velocidade correspondente

Suponhamos que uma partícula está sujeita a um conjunto de forças, de resultante F . Para um deslocamento seg^o xx' , tem-se:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} ma dx$$

Usando a 2ª Lei de Newton
pois F é resultante

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx} \right) \times \left(\frac{dx}{dt} \right) = \left(\frac{dv}{dx} \right) \times v$$

Eliminando t e explicitando a
velocidade

Mec_IM - 2021/22

16

16

Trabalho e Energia

$$W = \int_{x_i}^{x_f} mv \left(\frac{dv}{dx} \right) dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right) dx$$

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mv dv$$

$$W_{RES} = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

**TEOREMA DO TRABALHO
E ENERGIA**

$$W_{RES} = E_{cf} - E_{ci} = \Delta E_c$$

Este resultado é válido, de forma geral, para uma qualquer trajectória

Mec_IM - 2021/22

17

17

Potência de uma força

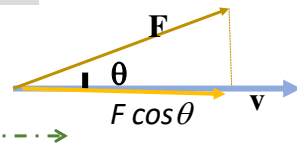
Potência é a taxa temporal com que se realiza trabalho

Realizando um trabalho ΔW num intervalo de tempo Δt

$$P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = |\vec{F}| v \cos \theta$$



Mec_IM - 2021/22

18

18

Potência de uma força

A unidade S.I. de potência é o watt = joule.segundo⁻¹

isto é, $W = J.s^{-1}$

O quilowatt-hora (kwh) é uma unidade de energia e **NÃO** de potência

$$1 \text{ kwh} = 1000 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3,6 \text{ MJ (mega joule)}$$

Mec_IM - 2021/22

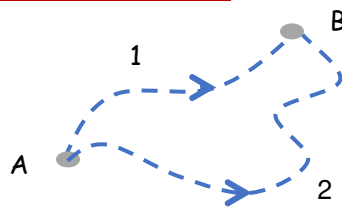
19

19

Forças Conservativas

Uma força é **CONSERVATIVA** se o trabalho realizado num deslocamento entre dois pontos arbitrários for **INDEPENDENTE** do caminho seguido entre esses pontos

Nestas condições, o trabalho é apenas função das coordenadas final e inicial do deslocamento



F conservativa



$$W_{AB}(\text{caminho 1}) = W_{AB}(\text{caminho 2})$$

Por outro lado, o trabalho realizado ao longo dum trajeto **FECHADO** é **NULO**

Mec_IM - 2021/22

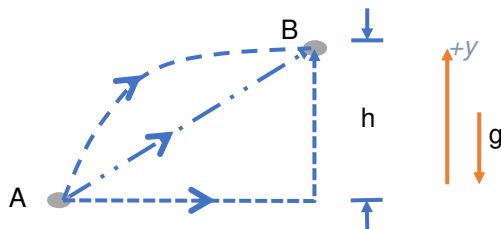
20

Exemplos de forças conservativas

- Gravítica
- Electrostática
- Elástica duma mola

No caso em que a força gravítica é constante (junto à superfície da Terra), o trabalho só depende da diferença de alturas entre os pontos final e inicial

Porquê?



$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_y dy = \\ &= \int_A^B -mg dy = -mg(y_B - y_A) \end{aligned}$$

Para qualquer trajeto de A até B

$$W_{AB} = -mg(y_B - y_A)$$

Mec_IM - 2021/22

21

Exemplos de forças conservativas

Força Gravítica

$$F = -G \frac{mM}{r^2}$$

Força Electrostática

$$F = \pm k \frac{qQ}{r^2}$$

Força Elástica

$$F = -K \Delta x$$

Mec_IM - 2021/22

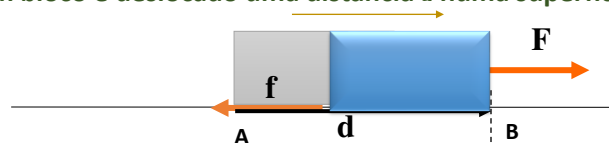
22

22

Forças não-conservativas: atrito

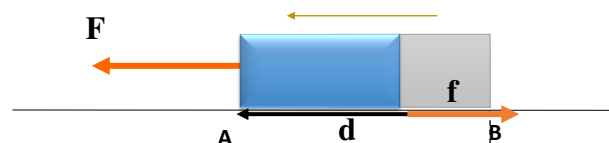
Neste caso, **o trabalho realizado num trajecto fechado não é nulo**, como podemos ver com a força de atrito cinético

Um bloco é deslocado uma distância d numa superfície com atrito f



Trabalho da força de atrito A → B

$$W_{AB} = -fd$$



Trabalho da força de atrito B → A

$$W_{BA} = -fd$$

$$W_{AA}(\text{ida e volta}) = -2fd \neq 0$$

Mec_IM - 2021/22

23

23

Forças Conservativas e Energia Potencial

Como o trabalho realizado por uma força conservativa é apenas função das posições inicial e final, podemos definir uma função (de ponto): a **ENERGIA POTENCIAL**:

$$W_{fcons} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$= \Delta EC$

$E_{\text{potencial no ponto inicial}}$ $E_{\text{potencial no ponto final}}$

O trabalho realizado por uma força conservativa de uma posição inicial para uma posição final corresponde ao **simétrico da variação da ENERGIA POTENCIAL** nesse trajecto

Mec_IM - 2021/22

24

24

Exemplos - Energia Potencial Gravítica

Para o caso do peso, considerado constante junto à superfície da Terra, temos:

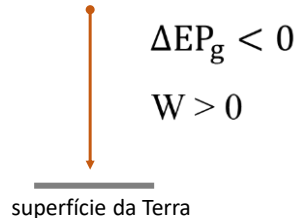
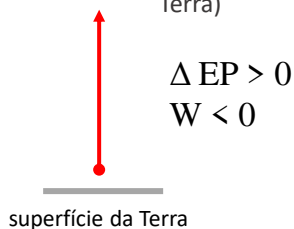
$$W_{peso} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{P} \cdot d\vec{r} = mgy_i - mgy_f$$

Energia potencial gravítica

(junto à superfície da Terra)

$$EP_g = mgy$$

A menos de uma constante, que define a origem, i.é, o zero da E_{Pg}



Mec_IM - 2021/22

25

25

Exemplos - Energia Potencial Elástica

Para a mola elástica, em que $F = -kx$
o trabalho de x_i até x_f é dado por:

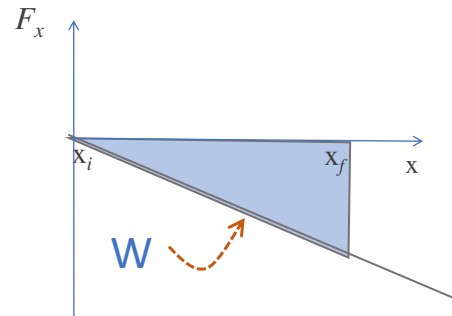
$$W_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2$$

Define-se a **energia potencial elástica** da mola como:

$$E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2$$

Nota:

$x = 0$ é a posição de equilíbrio; não é arbitrária.



Mec_IM - 2021/22

26

26

Lei de conservação da Energia Mecânica

Se uma partícula sofre apenas a acção de uma força conservativa \mathbf{F} num deslocamento duma posição P_i para P_f

Do **teorema do Trabalho-Energia**, obtém-se:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$$

Como F é conservativa:

$$E_{Pi} - E_{Pf} = E_{cf} - E_{ci}$$

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

$$E_M = E_c + E_p$$

$$W_{i \rightarrow f} = -\Delta E_p = E_{Pi} - E_{Pf}$$

A soma é constante!

Então a **ENERGIA MECÂNICA É CONSTANTE !**

Mec_IM - 2021/22

27

27

Lei de conservação da Energia Mecânica

Sob a acção de uma força conservativa \vec{F} , a energia mecânica é conservada:

$$E_M = E_c + E_P$$

$$E_{Mi} = E_{Mf} \iff \Delta E_M = 0$$

Havendo várias forças conservativas aplicadas ao corpo, a cada uma está associada uma energia potencial, pelo que a energia mecânica é dada por:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{\text{varias } Ep} \vec{F}_{cons} \implies E_M = E_c + \sum_{\text{varias } Ep} E_P$$

Mec_IM - 2021/22

28

28

Energia Mecânica

Em geral, numa partícula estarão aplicadas forças conservativas (F_{cons}) e forças não-conservativas (F_{NC})

A resultante das forças será:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{\text{varias } Ep} \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{NC}$$

Num deslocamento de P_i para P_f

$$W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_{res}) = \Delta E_C$$

Por outro lado,

$$W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_{res}) = W_{i \rightarrow f}(\sum \vec{F}_C) + W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_{NC})$$

$$W_{i \rightarrow f}(\sum \vec{F}_C) = -\sum \Delta E_P$$

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_{NC}) &= W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_{res}) - W_{i \rightarrow f}(\sum \vec{F}_C) = \\ &= \Delta E_C - (-\sum \Delta E_P) = \\ &= \Delta E_C + \sum \Delta E_P = \Delta E_M \end{aligned}$$

$$W_{i \rightarrow f}(\vec{F}_{NC}) = \Delta E_M$$

Mec_IM - 2021/22

29

29

Energia Mecânica

Deste modo, num deslocamento de P_i para P_f

$$W_{i \rightarrow f}(F_{res}) = \Delta E_C$$

$$EM_i = EM_f + W_{Fnc}$$

$$W_{i \rightarrow f}(\sum F_C) = -\sum \Delta E_P$$

$$EM_f - EM_i = W_{Fnc}$$

$$W_{i \rightarrow f}(F_{NC}) = \Delta E_M$$

Há variação da energia mecânica,
se as forças não conservativas realizarem trabalho

Mec_IM - 2021/22

30

30

Lei de Conservação da Energia

Quando temos forças não-conservativas a realizar trabalho, a energia inicial vai transformar-se noutras formas não mecânicas, por exemplo, calor devido ao atrito. Genericamente, designamo-la por energia interna U.

$$\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U = 0$$

Energia convertida
noutras formas

A energia total dum sistema isolado é constante.

Há apenas transformações em diversas formas de energia

Se incluirmos os efeitos relativistas, teremos que considerar a contribuição da energia em repouso (massa)

Mec_IM - 2021/22

31

31