

Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a)  $\sqrt{x^3} \ln \sqrt[3]{x}$

A expressão pode ser simplificada, sem alterar o domínio, pois  $\ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \ln x$ . Assim, por partes, temos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^3} \ln \sqrt[3]{x} dx &= \frac{1}{3} \int \left( \frac{2}{5} x^{5/2} \right)' \ln x dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} \ln x - \frac{1}{3} \int \frac{2}{5} x^{5/2} (\ln x)' dx \\ &= \frac{2}{15} x^{5/2} \ln x - \frac{2}{15} \int x^{5/2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2}{15} x^{5/2} \ln x - \frac{2}{15} \int x^{3/2} dx \\ &= \frac{2}{15} x^{5/2} \ln x - \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} + C = \frac{2}{15} \sqrt{x^5} \ln x - \frac{4}{75} \sqrt{x^5} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

em qualquer intervalo de  $\mathbb{R}^+$ .

(b)  $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}, x \in ]0, 3[$

- A substituição  $x = \phi(t) = 3 \sin t \in ]0, 3[$ , invertível e diferenciável em  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , com  $t = \arcsin \frac{x}{3}$  e  $dx = \phi'(t) dt = 3 \cos t dt$ , simplifica a expressão  $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3 \cos t$  (no domínio de  $\phi$ ). É assim possível transformar o integral da expressão dada e obter as suas primitivas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{3 \cos t}{9 \sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1}{\sin^2 t} - 1 dt \\ &= \int \csc^2 t - 1 dt = - \int -\csc^2 t + 1 dt = -(\cotan t + t) + C \\ &= -\cotan(\arcsin \frac{x}{3}) - \arcsin \frac{x}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

em qualquer intervalo contido em  $]0, 3[$ .

**Nota:** não foi exigido pelo enunciado, mas a expressão encontrada pode ser simplificada:

$$\cotan(\arcsin \frac{x}{3}) = \frac{\cos(\arcsin \frac{x}{3})}{\sin(\arcsin \frac{x}{3})} = \frac{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}{\frac{x}{3}} = \frac{3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{x} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

Então,  $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

- Em alternativa, as primitivas podem ser calculadas por partes:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx &= \int \left( -\frac{1}{x} \right)' \sqrt{9-x^2} dx = -\frac{1}{x} \sqrt{9-x^2} - \int -\frac{1}{x} (\sqrt{9-x^2})' dx \\ &= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}} dx \\ \left[ \begin{array}{l} u = \frac{x}{3}, u' = \frac{1}{3} \\ \text{no integral} \end{array} \right] &= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin(u) + C \\ &= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$