Questão 3: Resolução

$$\text{Calcula } \int \frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}dx.$$

a) Análise do denominador: x^2 é (obviamente!) um fator com raiz real 0 de multiplicidade 2; x^2+x+1 é um fator irredutível de grau 2, pois não tem raízes reais:

$$x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

b) Decomposição da fração: como a função racional é própria, pela análise do denominador sabe-se que existem 4 constantes $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ tais que, para todo o $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=\frac{(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+x+1)}\\
&= \frac{(A+C)x^3+(A+B+D)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x^2+x+1)}\\
\Leftrightarrow \quad & x+1=(A+C)x^3+(A+B+D)x^2+(A+B)x+B \qquad (1)\\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} A+C=0\\ A+B+D=0\\ A+B=1\\ B=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=0\\ D=-1\\ A=0\\ B=1\end{cases}
\end{aligned}$$

sendo, portanto, $\dfrac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Observação: *também é possível deduzir o valor das 4 constantes a partir do sistema das 4 condições, que são obtidas pela substituição, na igualdade (1), da variável x por 4 valores distintos quaisquer. Este método simplifica as contas quando os valores escolhidos são (todos ou a maioria deles) raízes do denominador que, neste caso, tem apenas uma raiz real $x=0$.*

c) Completamento do quadrado: Para conseguir primitivar mais facilmente a função racional com denominador x^2+x+1, convém primeiro *completar o quadrado* deste polinómio:

$$x^2+x+1=x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Isto justifica, de forma equivalente à alínea a), que x^2+x+1, sendo soma de um termo não negativo e de um termo positivo, não pode anular-se: logo, é irredutível.

d) Transformação para a primitivação quase-imediata: depois de completar o quadrado do seu denominador, é necessário reescrever a fração para poder aplicar diretamente a fórmula de primitivação quase-imediata.

$$\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{3}\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2x+1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

e) Primitivação: pela linearidade e por primitivação (quase) imediata, em intervalos contidos em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tem-se que

$$\int\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}dx=\int\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{1}{x^2}dx-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx=-\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$