

Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4

2021/22

Folha 2: Séries de Funções (em geral) — Série de Taylor (rev.) — Série de Fourier

1. Considere a série de funções

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

- (a) Mostre que a série converge uniformemente em \mathbb{R} .
(b) Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em \mathbb{R} .
(c) Mostre que

$$\int_0^{\pi} S(x) dx = 0.$$

2. Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

(a) e^{-x^2} ; (b) $\cosh x$; (c) $\sinh(3x)$; (d) $2\cos^2 x$; (e) $\frac{1}{4+x^2}$.

3. Calcule a (função) soma das séries seguintes:

(a) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$
(b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\ln(x+1)$.
(Sugestão: desenvolva primeiro a função $\frac{1}{x+1}$ em série de MacLaurin).
(b) Calcule a soma da série

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

5. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

6. (a) Verifique que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$, $-2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.

(Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

7. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

8. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

(a) Determine o maior subconjunto de \mathbb{R} no qual a série é absolutamente convergente.

(b) Calcule $f'(4)$, onde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ (f definida no domínio de convergência da série).

9. Sabendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

(a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de \mathbb{R} em que esta representação é válida;

(b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\int_0^1 xe^{x^3} dx$.

10. Usando a representação em série de MacLaurin da função exponencial, justifique a igualdade

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Seja $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Desenvolva $f(x)$ em série de MacLaurin.

(b) Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)2^n}{n!}$

(Sugestão: Começar por derivar a série obtida em (a)).

(c) Usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, obtenha um majorante para o erro cometido ao aproximar $f(x)$ por $T_0^2 f(x)$ no intervalo $]0, 0.1]$.

12. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

(a) $f(x) = x + x^2$, $x \in [-\pi, \pi[$;

(b) $g(x) = e^x$, $x \in [-\pi, \pi[$;

(c) $h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

13. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respectivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

14. Determine a série de Fourier de senos da função f dada $f(x) = \cos x$ em $[0, \pi]$. Qual será a sua série de Fourier de cossenos?

15. Considere a função f , 2π -periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Determine a série de Fourier de f .

(b) Mostre que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(c) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(d) Verifique que a série de Fourier de f é uniformemente convergente em \mathbb{R} .

(e) Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \sin(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

16. Seja f a função 2π -periódica tal que $f(x) = |\sin x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Mostre que a série de Fourier associada é

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

(b) Verifique que a série da alínea anterior é uniformemente convergente em \mathbb{R} e identifique a sua soma, $s(x)$.

(c) Esboce o gráfico da soma $s(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

(d) Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.