



FICHA DE EXERCÍCIOS 5
SÉRIES NUMÉRICAS

1. Determine o termo geral da sucessão das somas parciais, S_n e a soma S (se possível) de cada uma das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n;$

(d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1};$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n;$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right);$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n+3};$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$

2. Calcule, se possível, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + b_n \right]$, sabendo que a sucessão das somas parciais associadas à série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é dada por $S_n = \sqrt[n]{\frac{e}{n^n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica, convergente e de soma igual a S . Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[3a_n + \frac{2}{3^n} \right]$.

4. Determine, se existir, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, onde $u_n = \begin{cases} 1 + 2(n-1) & \text{se } n < 4 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$.

5. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(a+1)^n}$ (onde a é um parâmetro real, com $a \neq -1$).

(a) Determine os valores de a para os quais a série dada é convergente.

(b) Para um dos valores encontrados na alínea anterior, determine a soma da série.

6. Escreva na forma de fração as seguintes dízimas periódicas:

(a) $0,555\ldots = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \ldots$

(c) $1,345345\ldots = 1,\overline{345}$

(b) $0,343434\ldots = 0,\overline{34}$

(d) $0,324101101101\ldots = 0,324\overline{101}$

7. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais.

i) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então a série converge.

ii) Se a série converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

iii) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$, então a série diverge.

(b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e só se:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = 0$;

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k < 1$;

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S \in \mathbb{R}$.

8. Estude a natureza das séries seguintes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n^2 \pi}{2} \right)$

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{n^3}$

(q) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$

(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n} \quad (0 < b < 1)$

(r) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n! + n - 1}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

(k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n} \quad (d > 0)$

(s) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n + 1}{2^n - 1}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5 + n^3}}$

(l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$

(t) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n \cos(n\alpha)}{n^{2n}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

(m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$

(u) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[(-1)^n + 5]^n}$

(n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(v) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! + 3n}{((n+1)!)^2}$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$

(o) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

(w) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

(p) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{50} \right)}{2^n}$

(x) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$

9. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos, tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3}$ e $a_n = b_n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$.

10. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso afirmativo, indique se são absolutamente ou simplesmente convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^2$

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{e^n + 1}$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

11. Verifique que as seguintes séries são alternadas convergentes. Indique, justificando em cada caso, se a convergência é simples ou absoluta.

(a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^n)}$ (*Sugestão: tenha em conta o 1.º exercício resolvido desta ficha.*)

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n!)}$ (*Sugestão: $n! < n^n$, $n = 2, 3, 4, \dots$*)

(c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^\alpha}$, sendo $\alpha \in]-\infty, 1[$

(d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^\alpha}$, sendo $\alpha \in]1, +\infty[$

12. Sabendo que as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são tais que

$$\sum_{n=1}^8 a_n = 15, \quad a_n = \left(\frac{3}{2} \right)^n, \quad \text{para } n \geq 9 \quad \text{e} \quad b_n > a_n, \quad \text{para } n > 20,$$

estude a natureza das séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

13. Uma bola de borracha cai de uma altura de 10 metros. Sempre que bate no chão, a bola sobe $\frac{2}{3}$ da distância percorrida anteriormente. Qual é a distância total percorrida pela bola (até ficar em repouso)?

14. Considere as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2 + 1}$.
- (a) Estude a natureza de cada uma das séries.
- (b) Indique o limite do termo geral das séries.
- (c) Sendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{n!}{n^n} + b_n \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2 + 1}$, indique a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Justifique.
15. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_1 \neq 0$ e $a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
16. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^2}{3^n n^2}$ sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
17. Estude a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indique se a convergência é simples ou absoluta.
- (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$
- (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}$
- (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3 + 3n^2 + 4}$
- (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n+1}}$

Exercícios Resolvidos

1. Estude a natureza da série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ usando o Critério do Integral.

Resolução: Seja $f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Notando que $u_n = f(n)$, $n = 2, 3, 4, \dots$ e que:

- f é contínua em $[2, +\infty[$;
- $f(x) > 0$, $\forall x \in [2, +\infty[$;
- f é decrescente em $[2, +\infty[$, pois

$$f'(x) = -\frac{(x \ln x)'}{x^2 \ln^2 x} = -\frac{\ln x + x \frac{1}{x}}{x^2 \ln^2 x} = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} < 0, \quad \forall x \in]2, +\infty[.$$

Estamos em condições de aplicar o Critério do Integral, pelo que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ e o integral

impróprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}$ têm a mesma natureza. Estudemos a natureza do integral impróprio.

Para isso, calcule-se o limite:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \frac{1/t}{\ln t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\ln t)]_2^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)] = +\infty.$$

Como L não é finito, o integral $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ diverge. Concluimos que a série dada é divergente.

2. Use o Critério do Limite para estudar a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{n^2}$.

Resolução: Como a série dada é de termos não negativos podemos usar o Critério do Limite. Vamos usar como referência a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ que é uma série de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$, logo convergente.

Analisemos o limite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(1/n) = \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Como $L = 0$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, podemos afirmar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.

3. Use o Critério de Cauchy para estudar a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Resolução: A série em estudo é divergente. Na verdade,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

4. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, com $a_n = \sin(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, é uma série alternada convergente.

Resolução: Começemos por verificar que se trata de uma série alternada. Tendo em conta que $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, o número real $x = 1/n \in]0, \pi/2[$, portanto $\sin x$ é positivo, ou seja, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ é alternada. Podemos agora aplicar o Critério de Leibniz. Facilmente se verifica que

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$;
- a sucessão (a_n) é monótona decrescente:

$$n+1 > n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

e como a função $\sin x$ é estritamente crescente quando $x \in]0, \pi/2[$:

$$\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) < \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.