Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $\dfrac{\ln x}{x^3}$

Primitivando por partes, tem-se que, em qualquer intervalo contido no domínio $D=\mathbb{R}^+$ da função,

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \int \frac{1}{x^3}\cdot \ln x\,dx = \int \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' \ln x\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = -\frac{1+2\ln x}{4x^2} + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Repare-se que a (possível!) substituição $x=e^t\in\mathbb{R}^+$, com $t\in\mathbb{R}$, não iria simplificar a resolução, pois também a primitiva $\int te^{-2t}\,dt$, obtida desta forma, se calcula por partes.

(b) $\dfrac{5}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$

Esta alínea é parecida (com uma diferença importante: ver o ponto iii.) com a questão 3 do primeiro teste de 2021/22, cuja resolução contém mais alguns detalhes e observações.

i. O fator $2x^2+2x+1$ do denominador é irredutível, pois não tem raízes reais: $2x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm i}{2}$.

ii. A função racional é própria, com denominador de grau 3, logo existem 3 constantes $A,B,C\in\mathbb{R}$ tais que

$$\frac{5}{(x-1)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1} = \frac{(2A+B)x^2+(2A-B+C)x+A-C}{(x-1)(2x^2+2x+1)},\ \forall x\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+B=0\\ 2A-B+C=0\\ A-C=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1\\ B=-2\\ C=-4\end{cases}$$

sendo, então, $\dfrac{5}{(x-1)(2x^2+2x+1)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{-2x-4}{2x^2+2x+1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x+4}{2x^2+2x+1}$.

iii. Sabe-se que uma primitiva da fração $\frac{2x+4}{2x^2+2x+1}$ (própria, com denominador de segundo grau irredutível) é a combinação linear de $G(x)=\ln(2x^2+2x+1)$, com derivada $G'(x)=\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$, e de H (composição da arco tangente com um polinómio de grau 1 a determinar), que tem derivada $H'(x)=\frac{\beta}{2x^2+2x+1}$, $\beta\in\mathbb{R}$ constante. Portanto,

$$\frac{2x+4}{2x^2+2x+1} = \alpha\frac{4x+2}{2x^2+2x+1} + \frac{\beta}{2x^2+2x+1} = \frac{4\alpha x+2\alpha+\beta}{2x^2+2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\\ \beta=3\end{cases} \text{ logo } \frac{2x+4}{2x^2+2x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4x+2}{2x^2+2x+1} + \frac{3}{2x^2+2x+1}.$$

iv. Para efetuar a primitivação quase imediata, é melhor reescrever $\frac{3}{2x^2+2x+1}$ de uma forma mais adequada:

$$\frac{3}{2x^2+2x+1} = \frac{3}{2(x^2+x+\frac{1}{2})} = \frac{3}{2\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{\frac{2}{4}\left((2x+1)^2+1\right)} = 3\cdot\frac{2}{(2x+1)^2+1} = 3\cdot\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2+1}.$$

v. Pela propriedade da linearidade, as primitivas da função dada são, em intervalos contidos em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{(x-1)(2x^2+2x+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4x+2}{2x^2+2x+1} - \frac{3}{2x^2+2x+1}\,dx\\ &= \int \frac{(x-1)'}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{(2x^2+2x+1)'}{2x^2+2x+1}\,dx - 3\int\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2+1}\,dx\\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+1) - 3\,\mathrm{arctg}(2x+1) + C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

(c) $\dfrac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}}}$

Para *transformar* a função dada numa função racional, cujo algoritmo de primitivação é conhecido, considere-se a mudança de variável $x=t^6\in\mathbb{R}^+$, com $t\in\mathbb{R}^+$. Repare-se que a invertibilidade da função $x=\phi(t)$ é garantida para qualquer $t\geq 0$, mas o valor $t=0$ corresponde a $x=\phi(0)=0$, que não pertence ao domínio da função dada.

Assim, sendo $x^{\frac{1}{6}}=t$, $x^{\frac{1}{3}}=t^2$, $x^{\frac{1}{2}}=t^3$ e $dx=6t^5\,dt$, em qualquer subintervalo de $\mathbb{R}^+$ obtém-se:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}}}\,dx &= \int \frac{t}{t^3+2t^2}6t^5dt = 6\int\frac{t^4}{t+2}\,dt = 6\int t^3-2t^2+4t-8+\frac{16}{t+2}\,dt\\ &= \frac{3}{2}t^4-4t^3+12t^2-48t+96\ln|t+2|+C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}+12x^{\frac{1}{3}}-48x^{\frac{1}{6}}+96\ln(x^{\frac{1}{6}}+2)+C,\ C\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

onde a identidade $t^4=(t+2)(t^3-2t^2+4t-8)+16$, utilizada na terceira passagem, resulta, por exemplo, da divisão dos polinómios t^4 e $t+2$.