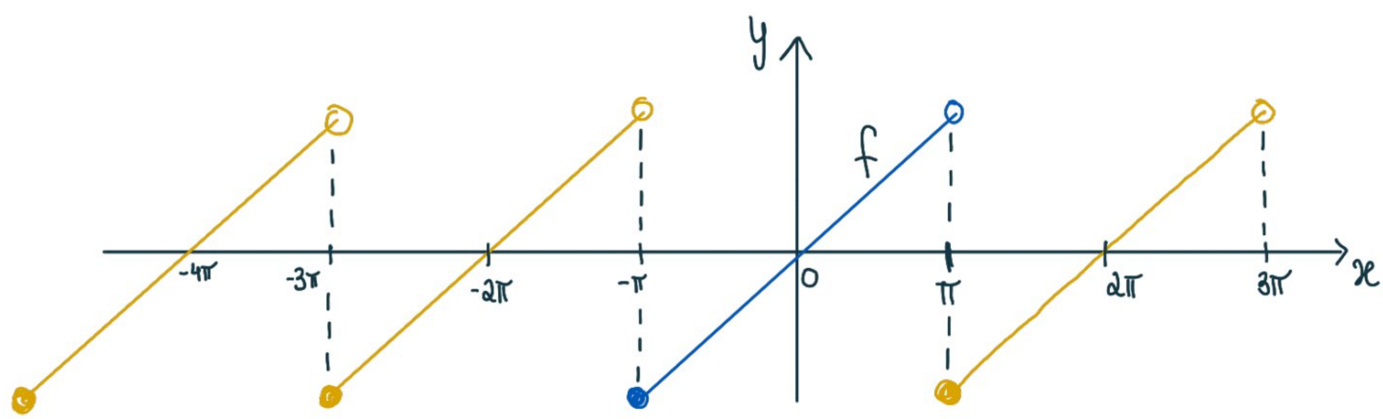
Temas: Extensão 2π-periódica da função f.
Convergência da série de Fourier (Teorema de Dirichlet).

Extensão 2π- periódicas de f

Atendendo à periodicidade das funções que que vamos trabalhar, é suficiente conhecer o seu comportamento em intervalos de amplitude 2π (tipicamente em [−π, π]).
Muitas vezes, conhecemos a função apenas num certo intervalo com essa amplitude, sendo importante "estendê-la ", de forma periódica, a todo o IR.
Repara que toda a função definida num intervalo da forma [a, a + 2π[(a ∈ IR) pode ser estendida de forma única a IR, por forma a obter-se uma função 2π-periódica.
O mesmo é válido para funções definidas inicialmente num intervalo da forma]a, a + 2π].

Exemplo 1:

$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi[$



Extensão 2π-periódica de f a IR

Em certas situações práticas poderá ser útil o facto da série de Fourier de uma função conter apenas senos ou cossenos.
Por exemplo, na resolução de certas equações diferenciais (vamos conhecer mais à frente) necessitamos por vezes de “estender” ao intervalo [−π, π] uma função inicialmente definida apenas em [0, π], por forma a tirar partido da simetria.

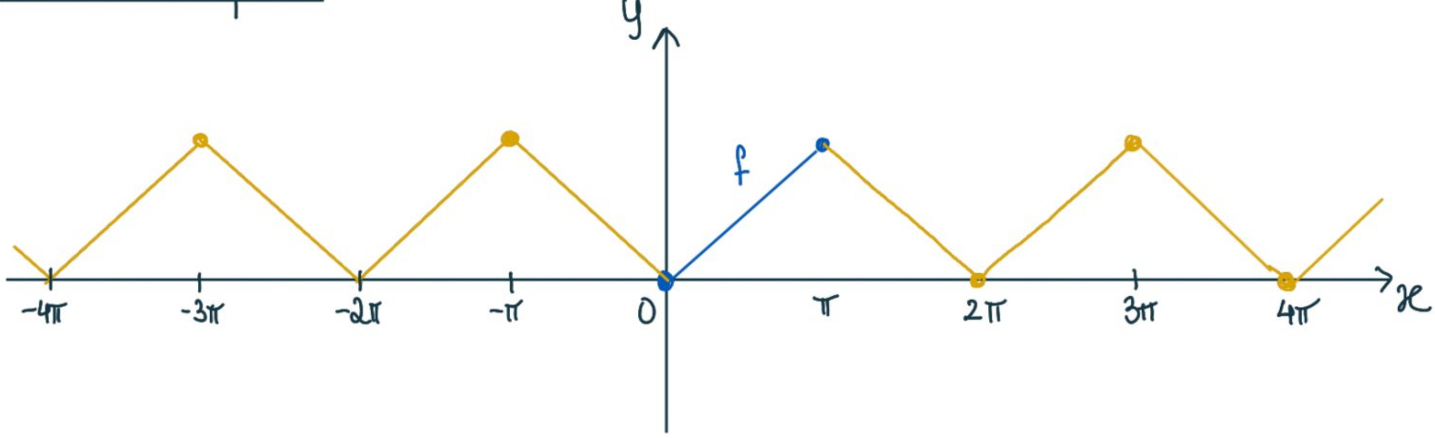
Extensão par → Série de Fourier contendo apenas cossenos

Extensão ímpar → Série de Fourier contendo apenas senos

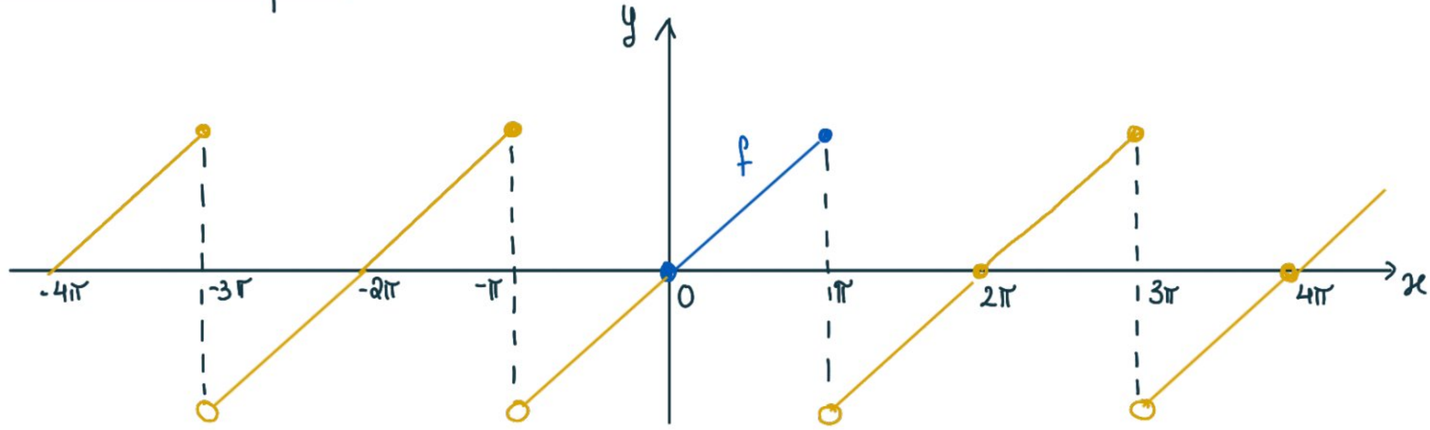
Exemplo 2

$$f(x) = x \qquad x \in [0, \pi]$$

<u>Extensão par:</u>



Extensão impar:

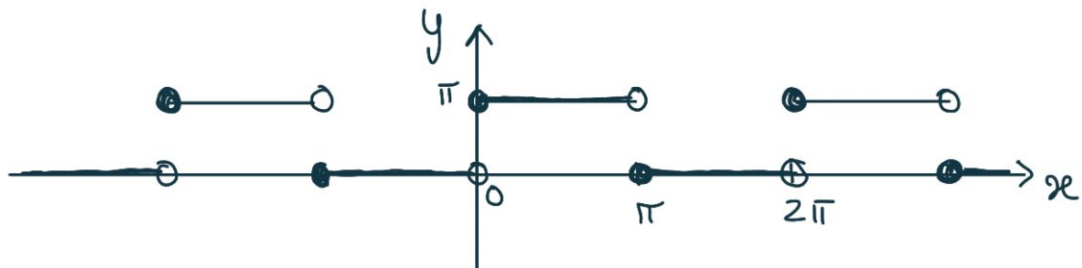


Convergência da série de Fourier

Exemplo 3

Vejamos o exemplo: $f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x]$$ (Vamos verificar!)



extensão de f a $\mathbb{R}$

f ñ é par, nem impar! ⟶ Temos de calcular todos os coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \, dx = \frac{1}{\pi} [\pi x]_0^{\pi} = \pi \;//$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} n\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}(nx)\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} n\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\left[-\cos(n\pi) + 1\right]$$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$-\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$

$$= \frac{1}{n}\left[(-1)^{n+1} + 1\right]$$

$$= \frac{2}{2k-1}$$

$$(-1)^{n+1} + 1$$

n par $\boxed{n = 2k}$ $\rightarrow 0$

n impar $\boxed{n = 2k-1}$ $\rightarrow 2$

$$f(x) \sim S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1}\operatorname{sen}[(2k-1)x]$$

Em $\boxed{x=0}$ $\quad S(0)=\frac{\pi}{2}$ mas $f(0)=\pi$

diferentes

Assim podemos ver que a série de Fourier nem sempre converge para a própria função.

Mas quais são as condições para que a soma da série de Fourier coincida com a função f ?

Teorema de Dirichlet: Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Então a série de fourier converge no ponto c para:

$$\boxed{\frac{f(c^+)+f(c^-)}{2}}$$

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$

Quando existe uma partição do intervalo $[a,b]$ em que a função derivada se verifica contínua em todos os subintervalos abertos da partição $]a_{j-1},a_j[$ $(j=0,1,\cdots,n)$ e ainda se existem e são finitos os limites laterais:

$$f(a_{j-1}^+)=\lim_{x \to a_{j-1}^+} f(x)$$

e

$$f(a_j^-)=\lim_{x \to a_j^-} f(x)$$

- Se f é contínua em $x=c$, então:

$$S(c)=\frac{f(c^+)+f(c^-)}{2}=\frac{2f(c)}{2}=f(c)$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x)=\lim_{x \to c^-} f(x)=f(c)$$

- Se f ñ é contínua em $x=c$, então:

$$S(c)=\frac{f(c^+)+f(c^-)}{2}= \text{valor médio dos limites laterais}$$

Exemplo 4

$f(x) = |x| \quad x \in [-\pi, \pi]$ Aula anterior

Vimos que $f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

Mas como f é seccionalmente diferenciável e como f é contínua então temos que, de acordo com o Teorema de Dirichlet,

$S(x) = f(x), \; \forall x \in \mathbb{R}$

Então podemos escrever:

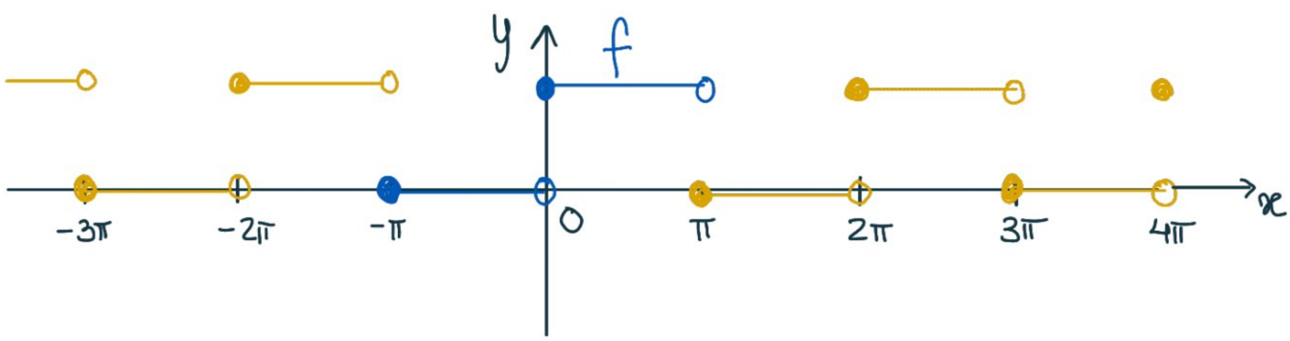
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

nestas condições podemos usar o "="

Voltando ao exemplo 3

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) \sim S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x]$$



Neste caso, temos pontos onde:

- f é contínua ⇝ $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$
  nesses pontos $S(x) = f(x)$

- f é descontínua ⇝ $\boxed{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}}$
  nesses pontos $S(x) = \dfrac{0 + \pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

Então,

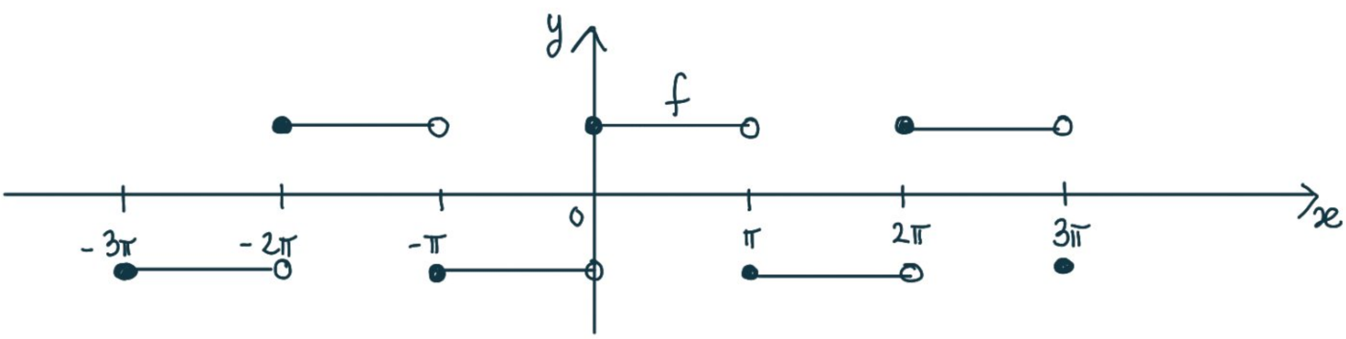
$$S(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in \left]\,(2k-1)\pi, 2k\pi\,\right[\\ \pi & , \ x \in \left]\,2k\pi, (2k+1)\pi\,\right[\\ \dfrac{\pi}{2} & , \ x = k\pi \end{cases} \qquad \boxed{k \in \mathbb{Z}}$$

Exemplo 5

13. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respetivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Série de Fourier de senos:

↳ Extensão ímpar de f a $\mathbb{R}$



Extensão ímpar $\Rightarrow a_0 = 0$ e $a_n = 0$

$$b_n = 2 \times \frac{1}{\pi} \times \int_0^{\pi} 2 \times \operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \times \frac{2}{n} \int_0^{\pi} n \operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[-\cos(n\pi) + \cos(0)\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[(-1)^{n+1} + 1\right]$$

$$= \frac{8}{(2k-1)\pi}$$

$(-1)^{n+1} + 1$

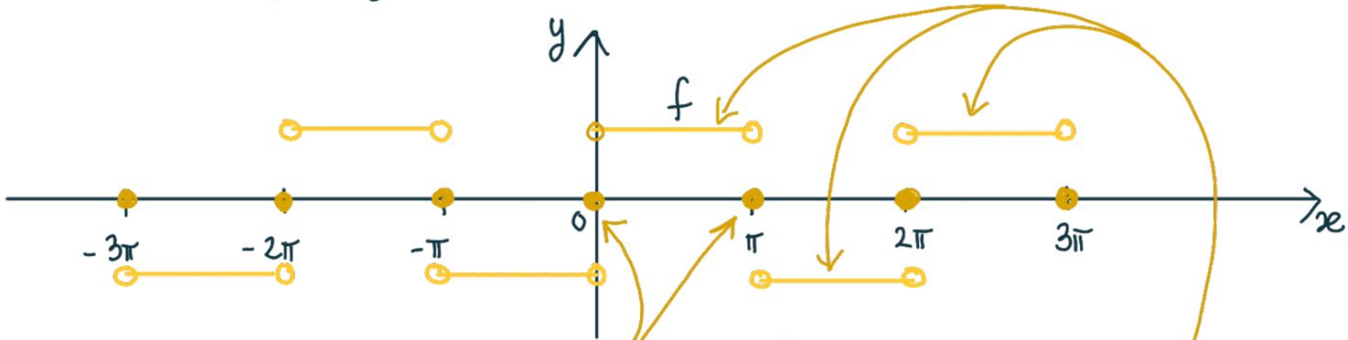
$\to 2$, n ímpar, $\boxed{n = 2k-1}$

$\to 0$, n par

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}\left[(2k-1)x\right]$$

Série de Fourier de Senos de f

Representação gráfica da soma:

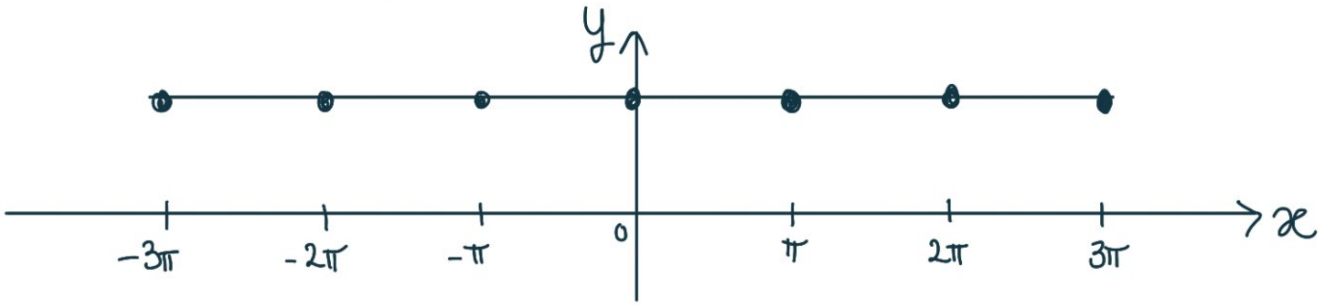


Teorema de Dirichlet $\to$ $S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ é ponto de continuidade} \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & x \text{ é ponto de descontinuidade} \end{cases}$

$$S(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x \in \,]2k\pi, (2k+1)\pi[\\ -2 & , \quad x \in \,](2k-1)\pi, 2k\pi[\qquad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \quad x = k\pi \end{cases}$$

<u>Série de Fourier de Cossenos</u>

↳ Extensão Par:



$b_n = 0$

$$a_0 = 2 \times \frac{1}{\pi} \times \int_0^{\pi} 2\,dx = \frac{2}{\pi}[2x]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}[2\pi] = 4$$

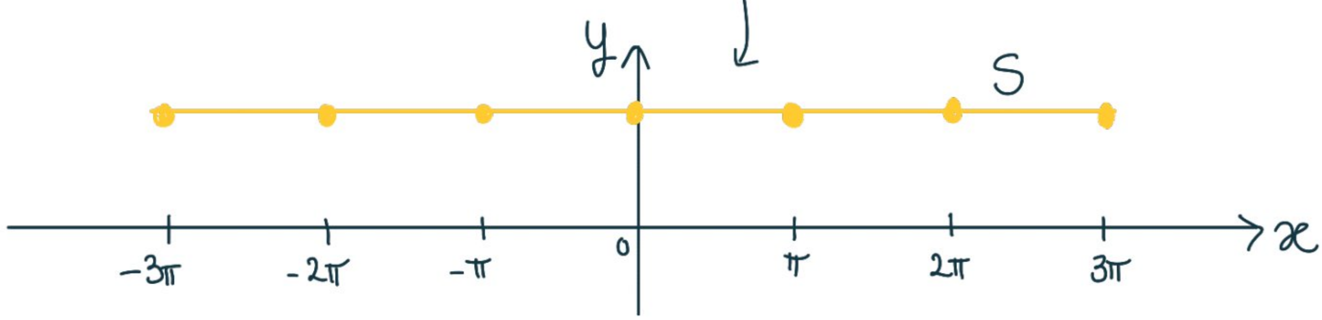
$$a_n = 2 \times \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(nx)\,dx = \frac{4}{\pi n}[\operatorname{sen}(nx)]_0^{\pi} = 0$$

$$f(x) \sim \frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 2$$

Como f é contínua e seccionalmente diferenciável, o teorema Dirichlet diz-nos que, $S(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore S(x) = f(x)$

Graficamente



Exemplo 6

15. Considere a função f, 2π-periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Mostre que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(c) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(d) Verifique que a série de Fourier de f é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

(e) Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx), \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

a) Desafio

b) Extendendo f a $\mathbb{R}$ temos f seccionalmente diferenciável e contínua, então, pelo T. Dirichlet, $S(x) = f(x)$ e podemos escrever

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

c) Se considerarmos $x = 0$ temos:

$$0^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Se considerarmos $x=\pi$ temos

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \qquad (-1)^{2n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2\pi^2}{3 \times 4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

d) Para provar convergência uniforme vamos usar Crit. de Weierstrass:

$$\left| (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{4}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \longrightarrow$ Série Dirichlet absolutamente convergente

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 4 \times \frac{1}{n^2}$ também converge absolutamente

$\downarrow$

Pelas prop. das séries numéricas

$\therefore$ A série de Fourier converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

e) Uma vez que a série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ então, pelas prop. da conv. uniforme de séries de funções, é válida a derivação e integração termo a termo.

integ. termo a termo

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \int_0^x \cos(nx)\, dx$$

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx)$$

C. Aux: $\int_0^x x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$ $\quad \int_0^x \frac{\pi^2}{3}\, dx = \frac{\pi^2 x}{3}$