Cálculo I - Agr. 4 (2020/21)

1.º Teste - Turma TP4-A1

Resolução:

1. $f(x) := 7 \operatorname{arccos}\left(e^{-(x^{-2})}\right) = 7 \operatorname{arccos}\left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$

(40 pts) a) $D_f = \{ x \in \underbrace{D_{\exp(-\frac{1}{x^2})}}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} : \exp(-\frac{1}{x^2}) \in \underbrace{D_{\operatorname{arccos}}}_{[-1,1]} \}$

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge |\exp(-\tfrac{1}{x^2})| \leq 1 \}$$

Como $\exp(-\frac{1}{x^2}) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \exp(-\tfrac{1}{x^2}) \leq 1 \}$$

Para $x \neq 0$, teremos de garantir que

$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \ln(1) = 0$

condição universal

$$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(130 pts) b) D_f é um conjunto aberto (todos os seus pontos são interiores). f é contínua.

$$f'(x) = 7 \, \frac{-\left(\exp(-\frac{1}{x^2})\right)'}{\sqrt{1-\left(\exp(-\frac{1}{x^2})\right)^2}}$$

$$f'(x) = -7 \, \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \, (-x^{-2})'}{\sqrt{1-e^{-\frac{2}{x^2}}}}$$

$$f'(x) = -7\,\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-(-2)\,x^{-3}\right)}{\sqrt{1-e^{-\frac{2}{x^2}}}}$$

$$f'(x) = -\frac{14}{x^3}\,\frac{\overset{>0}{e^{-\frac{1}{x^2}}}}{\underset{>0 \text{ pois } e^{-\frac{2}{x^2}} \in]0,1[}{\sqrt{1-e^{-\frac{2}{x^2}}}}}$$

$f'(x)=0$ (impossível) $\qquad \mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^-$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$

f é diferenciável em $\mathcal{D}_f$. Trata-se de um problema de estudo da existência de extremos (relativos / absolutos) em pontos interiores. O Teorema de Fermat é aplicável para concluir que se existir algum extremante relativo $\alpha \in \mathcal{D}_f$ então $f'(\alpha)=0$. Ora, como vimos $f'(x)=0$ é impossível. Basta isso para concluir que não há extremos relativos o que implica que não existem extremos absolutos.

alternativa

A mesma conclusão podia tirar-se da seguinte tabela de variações, tendo em conta que f é contínua e diferenciável em $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	N.D.	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	N.D.	$\searrow$	

03.

NOTAS (não necessárias à resolução):

- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 7\arccos\left(e^{-\left(x^{-2}\right)}\right) = \frac{7\pi}{2}$

No entanto, $f(x) < \frac{7\pi}{2}, \forall x \in D_f$. O valor de $\frac{7\pi}{2}$ não é atingido por f em D_f pelo que $\frac{7\pi}{2}$ não é máximo de f.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 7\arccos\left(e^{-\left(x^{-2}\right)}\right) = 0$

$f(x) > 0, \forall x \in D_f$. O valor zero não é atingido por f em D_f, pelo que zero não é mínimo de f.

2. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $b > a$ e $CD_f = D_f = [a,b]$.

f é regular em $[a,b]$ (cont. em $[a,b]$ e dif. em $]a,b[$).

Mostrar que:

«A equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução em $[a,b]$».

Método: Redução ao absurdo (argumentar por contradição).

(15 pts) a) 1.º passo

Supor, por absurdo, que $f(x) = x$ é impossível em $[a,b]$ implica que $\begin{cases} g(a) > 0 \\ g(b) < 0 \end{cases}$, onde $g(x) := f(x) - x$.

Como $CD_f = [a,b]$, $f(x) \in [a,b], \forall x \in [a,b]$.

- Se $f(a) = a \Rightarrow g(a) = f(a) - a = 0$ (absurdo, pois $f(x) = x$ é impossível)
- Se $f(b) = b \Rightarrow g(b) = f(b) - b = 0$ (absurdo, ")
- Se $f(x) \in \,]a,b[\, \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) > a \\ f(b) < b \end{cases} \begin{cases} f(a) - a > 0 \\ f(b) - b < 0 \end{cases} \begin{cases} g(a) > 0 \\ g(b) < 0 \end{cases}$

(10 pts) b) 2.º passo

$g(x) := f(x) - x$ é contínua porque é a soma de funções contínuas. $D_g = D_f = [a,b]$. Pela conclusão da alínea anterior g troca de sinal em $[a,b]$. Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy g teria de ter um zero em $[a,b]$. Isso é absurdo porque é equivalente a afirmar que $f(x) = x$ é possível em $[a,b]$.

(5 pts)

Conclusão por contradição $\Big\langle$ Se é absurdo supor $f(x) = x$ impossível em $[a,b]$ então $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução.