Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2021/22**

Resolução - Questão 3 no exame de recurso (Questão 1 no segundo teste)

---

a) Para calcular os pontos de intersecção dos gráficos de $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = \frac{1}{1+x^2}$ temos que resolver a equação

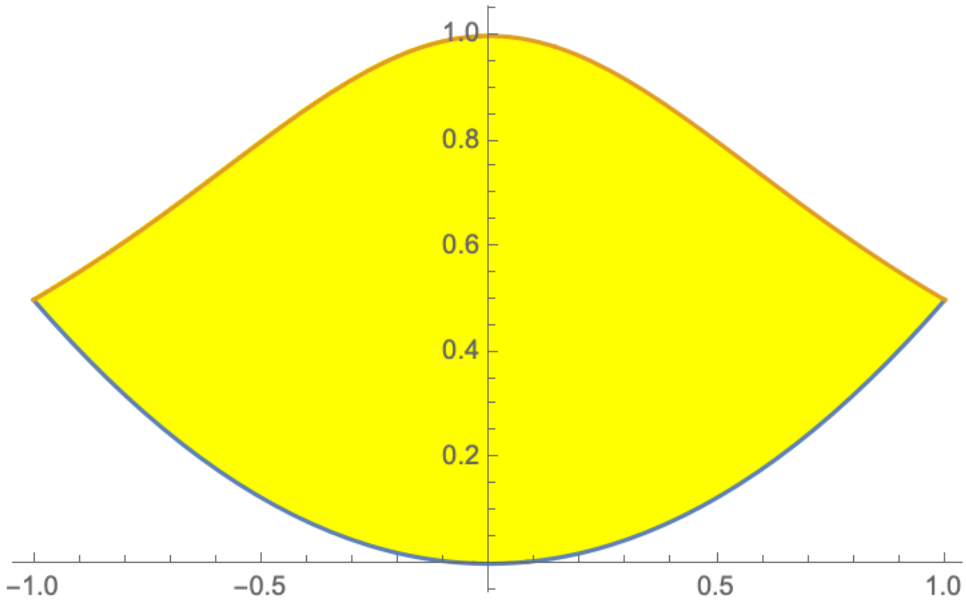
$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2},$$

Dado que $1 + x^2 \neq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ esta condição é equivalente à equação bi-quadrática

$$x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Substituindo $t = x^2$ obtemos a equação quadrática $t^2+t-2 = 0$ cujas duas soluções são $t_1 = 1$ e $t_2 = -2$. No caso de $x^2 = t_2 = -2$ obtemos as raízes imaginárias $x_3 = \sqrt{2}i$ e $x_4 = -\sqrt{2}i$ enquanto no caso de $x^2 = t_1 = 1$ obtemos as raízes reais $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. Assim, os pontos de intersecção são $(1, \frac{1}{2})$ e $(-1, \frac{1}{2})$.

b) Representar geométricamente a região $\mathcal{A}$ (em amarelo):



Notar que se tem $\frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ se e só se $-1 \leq x \leq 1$. O gráfico de $y = \frac{x^2}{2}$ é conhecido. Para a segunda função, a primeira derivada $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ indica esta cresce até $x = 0$ e decresce a partir daí. A segunda derivada $y'' = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$ resulta em dois pontos de inflexão, de abcissa $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, e temos concavidade voltada para baixo se $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, e concavidade voltada para cima nos restantes valores de x.

c) Dada a simetria da região relativamente ao eixo dos $y's$ temos para a área

$$A = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\left(\arctan(x)\Big|_0^1 - \frac{x^3}{6}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$