1 Conjuntos – microrevisão

- Seja $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{3\}\}$. Indique se é verdadeiro ou falso:

  (a) $1 \in A$ (b) $3 \in A$ (c) $\{1\} \in A$
  (d) $\{1, 2\} \in A$ (e) $\{1, 2\} \subseteq A$ (f) $\{1, 3\} \subseteq A$

- Um desafio:

  Num escritório trabalham 20 pessoas: homens e mulheres, portugueses e estrangeiros.

  O número de homens é igual ao número de estrangeiros e também é igual ao número de mulheres portuguesas.

  Sabendo que 7 homens são estrangeiros, quantas mulheres trabalham no escritório?

2 E, Ou, Não – Os conectivos lógicos

- "E" ($\wedge$) é como em Português: "bom E barato"
- "OU" ($\vee$) na lógica é inclusivo: "bom OU barato" inclúi o caso "bom E barato"
- "NÃO" ($\overline{\cdot}$) cuidado com a dupla negação: "NÃO vi NADA" ≠ "vi TUDO"!
- A negação de E é OU e vice-versa: NÃO "bom E barato" é "mau OU caro"
- Leis de De Morgan: $\overline{P \wedge Q} \leftrightarrow \overline{P} \,\overline{\wedge}\, \overline{Q} \leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ e $\overline{P \vee Q} \leftrightarrow \overline{P} \,\overline{\vee}\, \overline{Q} \leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- Tabelas de verdade:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \leftrightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**

- Desafio: determina uma fórmula para o "OU" exclusivo ($\veebar$ ou $\vee\!\!\!\vee$)

3 Quantificadores – universal e existencial

1. Todos os alunos tiram boas notas

- Para todo o $x \in \{\text{estudantes}\}$, x tira boas notas $\qquad \forall x \in E, P(x)$
- "Para todo" é parecido com "E": $\qquad \forall x \in \{1, 2, 3\}, x < 5 \;\leftrightarrow\; 1 < 5 \wedge 2 < 5 \wedge 3 < 5$
- A negação de 1. é: Alguns alunos tiram más notas

$$\overline{\forall x \in E, P(x)} \;\leftrightarrow\; \overline{\forall x \in E}\ \overline{,}\ \overline{P(x)} \;\leftrightarrow\; \exists x \in E : \overline{P(x)}$$

2. Alguns alunos tiram boas notas $\qquad$ (":" = "tal que")

- Existe $x \in \{\text{estudantes}\}$ tal que x tira boas notas $\qquad \exists x \in E : P(x)$
- "Existe" é parecido com "OU": $\qquad \exists x \in \{4, 5, 6\} : x < 5 \;\leftrightarrow\; 4 < 5 \vee 5 < 5 \vee 6 < 5$
- A negação de 2. é: Todos os alunos tiram más notas

$$\overline{\exists x \in E : P(x)} \;\leftrightarrow\; \overline{\exists x \in E}\ \overline{:}\ \overline{P(x)} \;\leftrightarrow\; \forall x \in E\, , \overline{P(x)}$$

4 Implicação

Umas cartas especiais têm uma letra numa face e um número na outra

Deviam ter um número par atrás de cada vogal

Há quatro cartas na mesa: A B 1 2

Que carta(s) tenho de virar para verificar se o maço tem defeitos?

Vogal $\Longrightarrow$ Par

equivalente a: Ímpar (não Par) $\Longrightarrow$ Consoante (não Vogal)

e também (!) a: nas faces há Consoante (não Vogal) ou Par

(verifica esta afirmação!)

V	P	$V \Rightarrow P$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

5 In/Equações – uma pequena divagação

- Equações:

  (a) $3-2x=7$ (b) $x^2-x-6=0$ (c) $x-x^2=0$ (d) $x^2=4$ (e) $x(x-1)=6$

- Inequações:

  (f) $3-2x>7$ (g) $x^2-x-6\leq 0$ (h) $x-x^2>0$ (i) $x^2\geq 4$ (j) $x(x-1)<6$

- Inequações++:

  (k) $x(1-x)(x-2)\geq 0$ (l) $\dfrac{x(1-x)}{x-2}\geq 0$ (m) $\dfrac{1}{x}<1$

6 Soluções: lógica e conjuntos

$$\boxed{x\in A\wedge x\in B \Longleftrightarrow x\in A\cap B}$$

Domínio de $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$:

$$\begin{aligned} x\in D_f &\Longleftrightarrow x>0\wedge 1-\ln x\geq 0 \Longleftrightarrow x>0\wedge \ln x\leq 1\\ &\Longleftrightarrow x>0\wedge x\leq e \Longleftrightarrow x\in]0,+\infty[\wedge x\in]-\infty,e]\\ &\Longleftrightarrow x\in]0,+\infty[\cap]-\infty,e] \Longleftrightarrow D_f=]0,e]\end{aligned}$$

$$\boxed{x\in A\vee x\in B \Longleftrightarrow x\in A\cup B}$$

Solução de

$$\begin{aligned} 4x^2+9x-8\leq 5|x| &\Longleftrightarrow 4x^2+9x-8\leq 5x \vee 4x^2+9x-8\leq -5x \text{ (porquê?)}\\ &\Longleftrightarrow x\in[-2,1]\vee x\in[-4,\tfrac{1}{2}] \text{ (verifica!)}\\ &\Longleftrightarrow x\in[-2,1]\cup[-4,\tfrac{1}{2}] \Longleftrightarrow x\in[-4,1]\end{aligned}$$

$$\boxed{(x\in A\Rightarrow x\in B)\Longleftrightarrow A\subseteq B}$$

$$(x+6\geq x^2 \Rightarrow \sqrt{x+6}<3) \Longleftrightarrow (x\in[-2,3]\Rightarrow x\in[-6,3[) \Longleftrightarrow [-2,3]\subseteq[-6,3[\text{ FALSO!}$$

7 Teoremas, demonstrações, contraexemplos

$$\text{Se } x > 1 \text{ então } x^2 > x$$

- Nos *teoremas* há, explicita ou implicitamente, um quantificador universal:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x^2 > x$$

- As técnicas de demonstração baseiam-se nas equivalências de:

▷ $H \Rightarrow T$ “direta”: $x > 1 \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow\; x^2 > x$

▷ $\overline{T} \Rightarrow \overline{H}$ “contrapositiva”: $x^2 \leq x \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow\; x \leq 1$

▷ $\overline{H} \vee T$ “redução ao absurdo”: a negação tem consequências impossíveis

$$\overline{\overline{H} \vee T} \;\leftrightarrow\; H \wedge \overline{T} \;\leftrightarrow\; x > 1 \;\wedge\; x^2 \leq x \;\Rightarrow\; \text{algo “absurdo”}$$

- Para provar que uma implicação é falsa, é suficiente um contraexemplo!

Neste caso, a recíproca $(T \Rightarrow H)$ é falsa (logo, H e T não são equivalentes):

$$\overline{\forall x \in E, T \Rightarrow H} \;\leftrightarrow\; \overline{\forall x \in E, \overline{T} \vee H} \;\leftrightarrow\; \exists x \in E : T \wedge \overline{H} \;\leftrightarrow\; \exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x \;\wedge\; x \leq 1$$

8 Lógica: exercícios (ou mais desafios?)

1. Escreve em maneira formal e demonstra o seguinte teorema:

   $$n \text{ é ímpar se e só se } n^2 = 8k + 1 \text{ por algum } k \in \mathbb{N}_0$$

   [Sugestão: prova ‘⇒’ e ‘⇐’ separadamente, com técnicas diferentes]
2. Demonstra que a recíproca do teorema de Pitágoras é verdadeira
3. Determina o valor lógico das seguintes proposições:

   (a) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ y \leq |x|$,

   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : y \leq |x|$,

   (c) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} : y \leq |x|$,

   (d) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\ y \leq |x|$.

   [basta indicar um exemplo para o quantificador existencial da proposição, caso seja verdadeira, ou da sua negação, caso seja falsa]

wiki dot | em [*Linguagem, lógica matemática e limites*] ver Funções regulares, Teoremas de Rolle e de Lagrange e Exercícios I

9 Teorema de Lagrange e monotonia

$I \subseteq D_f$ é um intervalo de monotonia de f se

- f é contínua em I e
- f' existe e não se anula no *interior* de I (ou seja, $I \setminus \{\text{extremos}\}$)

Num intervalo de monotonia, o sinal de f' determina a monotonia de f:

f' positiva/negativa $\Rightarrow f$ estritamente crescente/decrescente

Demonstração: (vamos supor f' positiva no interior de I)

▷ (T. de Lagrange) $\forall a, b \in I$, com $b > a$, existe $c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

▷ c pertence ao interior de I, logo $f'(c) > 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(b) > f(a)$

10 Imagem de intervalos de monotonia

- Seja $I = [a, b]$ um intervalo de monotonia de f. Então

$$f \text{ cr. } \Rightarrow f([a,b]) = [f(a), f(b)] \qquad f \text{ decr. } \Rightarrow f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$

▷ Considere-se o caso de f cr. e seja $J = [f(a), f(b)]$: então, $f(I) = J$, porque $f(I) \subseteq J$, pela monotonia, e $J \subseteq f(I)$, pela continuidade (teorema do valor intermédio)

- Se $I =]a, b[$, sejam $f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ e $f(b^-) = \lim_{x \to b^-} f(x)$

$$f \text{ cr. } \Rightarrow f(]a,b[) =]f(a^+), f(b^-)[\qquad f \text{ decr. } \Rightarrow f(]a,b[) =]f(b^-), f(a^+)[$$

- Para $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$, $f(I)$ deduz-se a partir dos casos anteriores.

Exemplo: seja f definida por $f(x) = \ln(e - x) - \sqrt{x}$. O seu domínio é $D_f = [0, e[$ e, como $f'(x) = \frac{1}{x-e} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ em $]0, e[$, é estritamente decrescente.
Assim, tem contradomínio $CD_f =]f(e^-), f(0)] =]-\infty, 1]$.

wiki dot em [*1.1 Ponto de partida*/*Limites e continuidade - parte 2 (revisão)*] ver Algumas propriedades elementares
em [*Linguagem, lógica matemática e limites*] ver Exercícios II, Cálculo de limites e Exercícios III

11 Limites notáveis, regra de Cauchy e outros truques

1. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$
3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$
4. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$
6. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$
7. $\lim_{x \to 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$
8. $\lim_{x \to 0^+} x^x$
9. $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$
10. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$
11. $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad A^B = e^{B \ln A}, A > 0 \text{ e } B \in \mathbb{R}$$

12 Exercícios: domínios e contradomínios

Determina domínio (D_f) e contradomínio (CD_f) da função f definida por:

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$
2. $f(x) = 2\cos(x) - \operatorname{sen}(2x)$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{1 + x}}{1 - \sqrt{x}}$
5. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
7. $f(x) = \ln(1 + e^x)$
8. $f(x) = x \ln x$
9. $f(x) = xe^{-x}$
10. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

$$D_f = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n \text{ (intervalos de monotonia)} \Rightarrow CD_f = f(I_1) \cup f(I_2) \cup \cdots \cup f(I_n)$$