3. $f(x) = \int_0^x (x^2 - 2xt + t^2)\, g(t)\,dt = x^2 \int_0^x g(t)\,dt - 2x \int_0^x t g(t)\,dt + \int_0^x t^2 g(t)\,dt$. As funções $g(x)$, $x g(x)$ e $x^2 g(x)$ são contínuas, logo pelo Teorema fundamental do Cálculo, as funções $\int_0^x g(t)\,dt$, $\int_0^x t g(t)\,dt$, $\int_0^x t^2 g(t)$ são diferenciáveis e $\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)' = g(x)$, $\left(\int_0^x t g(t)\,dt\right)' = x g(x)$, $\left(\int_0^x t^2 g(t)\,dt\right)' = x^2 g(x)$.

Logo f é diferenciável e $f'(x) = \left(x^2 \cdot \int_0^x g(t)\,dt\right)' - \left(2x \cdot \int_0^x t g(t)\,dt\right)' + \left(\int_0^x t^2 g(t)\,dt\right)' = 2x \cdot \int_0^x g(t)\,dt + \cancel{x^2 g(x)} - \left(2 \cdot \int_0^x t g(t)\,dt + \cancel{2x \cdot x g(x)}\right) + \cancel{x^2 g(x)} = 2x \cdot \int_0^x g(t)\,dt - 2 \cdot \int_0^x t g(t)\,dt$. Desta forma, $f'(x)$ é contínua. Como ambas as funções $\int_0^x g(t)\,dt$ e $\int_0^x t g(t)\,dt$ são diferenciáveis, $f'(x)$ também é diferenciável e

$$f''(x) = 2 \cdot \int_0^x g(t)\,dt + \cancel{2x \cdot g(x)} - \cancel{2 \cdot x g(x)} = 2 \int_0^x g(t)\,dt.$$

Vê-se que $f''(x)$ é diferenciável e $f'''(x) = 2g(x)$ – é função contínua.

(b) $f''(1) = 2 \int_0^1 g(t)\,dt = 4$, $f'''(1) = 2g(1) = 10$.