

2º teste - turma TP B-3

Resolução

1.(a) $\int x^2 \ln \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \ln x$
 (30 pontos) $-\frac{1}{2} \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3 \ln x}{6} - \frac{1}{6} \int x^2 dx$
 $= \frac{x^3 \ln x}{6} - \frac{x^3}{18} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

(b)
 (40 pontos) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^4 + 4x^2} dx$

$= \int \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+4} dx$
 $= -\frac{1}{x} + \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx$
 $= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \int \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right]} dx$
 $= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+4)$
 $+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

C.A.: $\frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2(x^2+4)}$
 $= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \Rightarrow$
 $x^3 + 2x^2 + 4 = Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)x^2$
 $\Leftrightarrow \underline{x^3} + \underline{2x^2} + \underline{4} = \underline{Ax^3} + \underline{4Ax} + \underline{Bx^2} + \underline{4B} + \underline{Cx^3} + \underline{Dx^2}$
 $\begin{cases} 1 = A + C \\ 2 = B + D \\ 0 = 4A \\ 4 = 4B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = 1 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$

(c)
 (30 pontos) $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
 $= \int \frac{e^{t+1}}{t^2} \cdot 3t^2 dt = 3 \int e^{t+1} dt$
 $= 3e^{t+1} + c = 3e^{\sqrt[3]{x}+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

C.A.: $\sqrt[3]{x} = t$
 $x = t^3, \quad \frac{dx}{dt} = 3t^2 > 0$
 ($t \neq 0$)

$$2. A = \{(x, y) : 1 \leq y \leq \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}, x \geq 0\}$$

2 de 3

$$(a) \quad (20 \text{ pontos}) \quad \begin{cases} y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} = 1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 0 \\ - \end{cases}$$

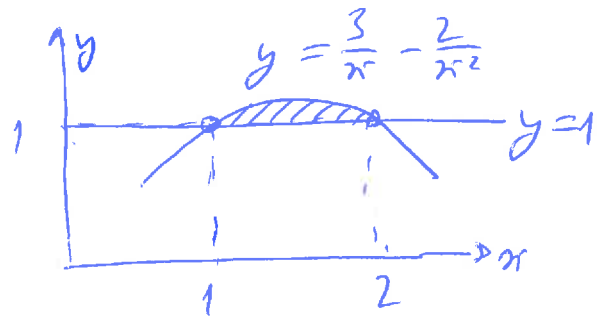
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \wedge x \neq 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm 1}{2} \wedge x \neq 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Os pontos de interseção são $(1, 1)$ e $(2, 1)$.

$$(b) \quad (50 \text{ pontos}) \quad 1 \leq \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

$$\text{Área}(A) = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - 1 \right) dx$$



$$= \left[3 \ln|x| + \frac{2}{x} - x \right]_1^2 = 3 \ln 2 + \frac{2}{2} - 2 - 3 \ln 1 - 2 + 1$$

$$= 3 \ln 2 - 2.$$

3. (a)

(20 pontos)

i. Falso.

Sejam f uma função não integrável e $g = -f$,
então $f + g = 0$. Desta forma,

$f + g$ é integrável, mas f e g não são integráveis.

ii. Correto.

Se $f + g$ e f são integráveis, então

$g = (f + g) + (-1) \cdot f$ também é integrável.

(b) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional} \\ -1, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$
(10 pontos) $f^2(x) = 1$.

f não é integrável, mas f^2 é integrável.