

Séries Numéricas

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)

Paolo Vettori

Sandrina Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Aveiro

Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Def. 2.1

Seja (a_n) uma sucessão de números reais.

Chamamos **série numérica de termo geral a_n** à “soma de todos os termos da sucessão $(a_n)_n$ ”:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n$$

A **sucessão das somas parciais** $(S_n)_n$ associada a esta série é a sucessão definida por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Obs. 2.2

Um exemplo de série é a **série harmónica** dada por

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Def. 2.3

Dizemos que uma **série** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe e é finito, caso em que é designado por **soma da série** e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Se $(S_n)_n$ é divergente, dizemos que a **série é divergente**.

Exer. 2.4

Estude a convergência das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Def. 2.5

Uma **série geométrica** de razão $r \in \mathbb{R}$, é uma série do tipo

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é o primeiro termo da série.

Obs. 2.6

O termo geral, S_n , da sucessão de somas parciais é dado por:

$$S_n = \begin{cases} na, & \text{se } r = 1 \\ a \frac{1 - r^n}{1 - r}, & \text{se } r \neq 1 \end{cases}$$

Obs. 2.6 (cont.)

Conclui-se assim que, para $a \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ converge se e só se } |r| < 1$$

e nesse caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Exer. 2.7

Verifique se as seguintes séries são convergentes e em caso afirmativo calcule a sua soma:

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} \quad (d) \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n}$$

Séries redutíveis (ou de Mengoli ou telescópicas) 6

Def. 2.8

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **redutível** (ou de **Mengoli** ou **telescópica**) se o seu termo geral se puder escrever numa das seguintes formas:

$$a_n = u_n - u_{n+p} \quad \text{ou} \quad a_n = u_{n+p} - u_n$$

onde (u_n) é uma sucessão e $p \in \mathbb{N}$.

Obs. 2.9

No caso em que $a_n = u_n - u_{n+p}$

$$S_n = \sum_{k=1}^p u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = u_1 + \cdots + u_p - (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})$$

e no caso em que $a_n = u_{n+p} - u_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^p u_k = u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} - (u_1 + \cdots + u_p)$$

Séries redutíveis (ou de Mengoli ou telescópicas) 7

Obs. 2.9 (cont.)

Assim, a série é convergente se $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})$ for finito.

Além disso, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = k \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = pk$.

Exer. 2.10

Determine a soma (se existir) das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$(e) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{(n+1)(n+4)}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(f) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$$

Teo. 2.11

As séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots, \forall p \in \mathbb{N}$$

têm a mesma natureza. Assim, a natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos.

Obs. 2.12

Como $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ e $S'_n = \sum_{k=p+1}^n a_k$ (com $n > p+1$), temos

$S_n = S'_n + \sum_{k=1}^p a_k$, e, portanto, se existir um dos limites o outro também existe:

$$\lim_n S_n = \lim_n S'_n + \sum_{k=1}^p a_k$$

Teo. 2.13

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Obs. 2.14

O resultado anterior é considerado como um primeiro critério de convergência de uma série. Na verdade, o critério é útil na sua forma contrapositiva, isto é:

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ ou não existir} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é divergente}$$

revelando-se, assim, como um “critério de divergência”. Note-se que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, nada se pode concluir sobre a natureza da série.

Exer. 2.15

Analise a natureza das séries seguintes, tendo em conta a condição necessária de convergência de séries numéricas:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{7}{10} \right)^n}$$

Teo. 2.16

- (a) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas convergentes com somas A e B respetivamente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

- (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e tem soma A , então $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é convergente e tem soma λA ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$$

Teo. 2.16 (cont.)

(c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é divergente.

(d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é divergente.

Obs. 2.17

Note-se que o resultado anterior nada diz quanto ao caso de ambas as séries serem divergentes. Na verdade, a série resultante

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ tanto pode ser convergente como divergente.

Exer. 2.18

Verifique se as seguintes séries são convergentes e, em caso afirmativo, determine a sua soma:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} 50 \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

$$(b) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{12}{n^2 - 1}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{7}{11} \right)^n + \left(\frac{10}{3} \right)^n \right]$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n}$$

Def. 2.19

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma **série de termos não negativos** se, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tem $a_n \geq 0$.

Exer. 2.20

Verifique quais das seguintes séries são séries de termos não negativos:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \left(\frac{1}{n} \right)$

Teo. 2.21

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então a sucessão das somas parciais associada à série é monótona crescente.

Teo. 2.22

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então, a série é convergente se e só se a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.

Teo. 2.23

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função decrescente e tal que $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

têm a mesma natureza.

Exer. 2.24

Estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$

Def. 2.25

A uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

chamamos **série de Dirichlet** (ou **série harmónica de ordem α**).

Obs. 2.26

A convergência destas séries é analisada usando o critério do integral. É fácil ver que (exercício!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ é : } \begin{cases} \text{convergente se } \alpha > 1 \\ \text{divergente se } \alpha \leq 1 \end{cases} .$$

Exer. 2.27

Indique a natureza das seguintes séries

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{n^5}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$$

Obs. 2.28

Convém notar que, na utilização do critério do integral, o valor obtido na resolução do integral impróprio quando este é convergente **não é** a soma da respectiva série.

Teo. 2.29

Suponha-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Então:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge.}$$

Obs. 2.30

Convém notar que, se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente ou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, nada se pode concluir.

Teo. 2.31

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.
Suponha-se que existe o limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Então verificam-se as condições seguintes:

(a) se $L \in \mathbb{R}^+$, então as séries têm a mesma natureza.

(b) se $L = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(c) se $L = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Obs. 2.32

Podemos assim concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ funciona como referência, sendo necessário conhecer à partida a sua natureza. A escolha desta série é normalmente sugerida pela forma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Em muitas situações, as séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ revelam-se de grande utilidade (como referência).

Exer. 2.33

Use o critério da comparação ou o critério do limite para estudar a natureza das séries seguintes:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^4}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^3 + 2}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^3}}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{17n - 13}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n^2}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{n^6 + 1}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$$

Def. 2.34

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a correspondente **série dos módulos**.

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **absolutamente convergente**.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **simplesmente convergente**.

Teo. 2.35

Toda a série absolutamente convergente é também convergente.

Obs. 2.36

- (a) Realça-se que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esta pode ser convergente ou divergente.
- (b) Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é uma série de termos não negativos, então podemos aplicar os critérios vistos anteriormente para estudar a sua natureza.

Exer. 2.37

Verifique se as séries seguintes são absolutamente convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{e^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$

Teo. 2.38

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais não nulos e

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(c) se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Teo. 2.39

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(c) se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Exer. 2.40

Estude a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{3n^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4}{3} \right)^n$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^2}{(2n)!}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n! + 1}{n^n}$$

Def. 2.41

Uma **série alternada** é uma série onde os seus termos são alternadamente positivos e negativos, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

onde $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exer. 2.42

Verifique se as seguintes séries são alternadas:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^4}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n!}$

Teo. 2.43

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ com $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ uma série alternada. Se

(a) a sucessão (a_n) é monótona decrescente;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

então a série é convergente.

Exer. 2.44

Estude a natureza das seguintes séries usando o critério de Leibniz.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

Exer. 2.45

Estude a natureza (divergência, convergência absoluta ou convergência simples) das seguintes séries numéricas:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(1/n)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^{10}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{(n + \sqrt{n})^2}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} - 1}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{5^n} \right]$$

2.4.

- (a) Div.
- (b) Conv. e $S = 0$ se $\alpha = 0$;
Div. se $\alpha \neq 0$
- (c) Conv. e $S = 1$

2.7.

- (a) Conv. e $S = 100$
- (b) Div.
- (c) Conv. e $S = 1$
- (d) Conv. e $S = \frac{1}{4}$

2.10.

- (a) $S = \frac{3}{2}$
- (b) Div.
- (c) $S = 1$
- (d) $S = \frac{1}{2}$
- (e) $S = \frac{47}{60}$
- (f) $S = \frac{3}{2}$

2.15.

- (a) Div.
- (b) Nada se pode concluir
- (c) Nada se pode concluir

(d) Div.

(e) Div.

(f) Div.

2.18.

- (a) Div.
- (b) Conv. e $S = 9$
- (c) Div.
- (d) Conv. e $S = 2$

2.20.

- (a) Não
- (b) Sim
- (c) Não
- (d) Sim

2.24.

- (a) Div.
- (b) Conv.
- (c) Div.

2.27.

- (a) Conv.
- (b) Conv.
- (c) Div.
- (d) Div.

2.33.

- (a) Conv.
- (b) Conv.
- (c) Div.
- (d) Conv.
- (e) Conv.
- (f) Div.
- (g) Conv.
- (h) Div.

2.37.

- (a) Sim
- (b) Não
- (c) Sim
- (d) Não

2.40.

- (a) Abs. Conv.
- (b) Abs. Conv.
- (c) Div.
- (d) Abs. Conv.
- (e) Abs. Conv.
- (f) Div.
- (g) Div.
- (h) Div.

2.42.

- (a) Sim
- (b) Sim
- (c) Não
- (d) Sim

2.44.

- (a) Conv.
- (b) Conv.
- (c) Nada se pode concluir
- (d) Conv.

2.45.

- (a) Simp. Conv.
- (b) Abs. Conv.
- (c) Div.
- (d) Abs. Conv.
- (e) Simp. Conv.
- (f) Simp. Conv.
- (g) Div.
- (h) Div.
- (i) Abs. Conv.
- (j) Div.