



universidade
de aveiro

departamento de física

MECÂNICA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

ano letivo 2022/2023

Capítulo 3. Campos elétrico e magnético

1ª série

Distribuições de carga

1. A densidade linear de carga dum bastão de comprimento L é dada por : $\lambda = \lambda_0 + 2x$ (onde $0 \leq x \leq L$). Qual é a carga total do bastão?

Solução: $Q = \lambda_0 L + L^2$

2. Um disco de raio R tem uma densidade de carga dada por $\sigma = 3r$. Calcule a carga total do disco.

Solução: $Q = 2\pi R^3$

3. Uma coroa esférica de raios r_1 e r_2 ($r_1 < r_2$) tem uma densidade de carga que é inversamente proporcional ao raio. Sabendo que a carga total da coroa é Q , obtenha uma expressão para a densidade de carga.

Solução: $\rho = \frac{Q}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)r}$

Lei de Coulomb. Campo e Potencial Elétricos

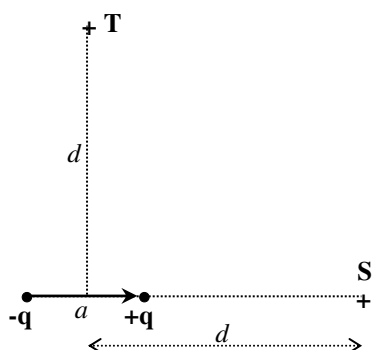
4. Quatro cargas $+q, +q, -q, -q$ estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado a .

- a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.

- b) Escolha uma linha apropriada e verifique que $\int_r \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Solução: $\vec{E} = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 a^2} \hat{k}$ e $V = 0$; $\vec{E} = \vec{0}$ e $V = 0$

5. Duas cargas iguais e de sinais contrários, com uma distância constante entre si constituem um dipolo (ver figura).



- a) Mostre que o campo elétrico em S é paralelo ao vetor \vec{a} , e em T tem o sentido contrário.

- b) Determine o campo elétrico em T e em S , fazendo aproximações adequadas ($d \gg a$). Introduza no resultado o vector momento dipolar elétrico, $\vec{P} = q\vec{a}$

- c) Mostre que um dipolo colocado num campo elétrico uniforme \vec{E} fica sujeito a um binário cujo momento é dado por $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}$.

Solução: $\vec{E}(S) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{d^3}$; $\vec{E}(T) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{d^3}$

6. Considere um anel de raio R carregado uniformemente com uma carga total Q .

- a) Calcule o campo elétrico no centro do anel.

- b) Calcule o campo elétrico num ponto do eixo do anel, distante de d do seu centro

- i) a partir da lei de Coulomb.

- ii) A partir do potencial

Solução: $\vec{E}(O) = \vec{0}$; $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qd}{(R^2 + d^2)^{3/2}}$; $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R^2 + d^2)^{1/2}}$

7. Um fio semi-circular de raio R está uniformemente carregado com uma carga total Q . Encontre o vetor campo elétrico no centro de curvatura.

Solução: $E = \frac{Q}{2\epsilon_0 \pi^2 R^2}$

8. Determine a partir da lei de Coulomb o campo e o potencial criados por um fio infinito, carregado com uma densidade linear de carga constante λ .

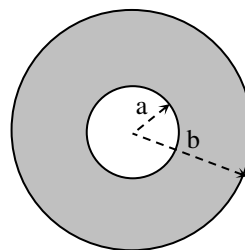
Solução: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$ e $V = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + const.$ há cargas no infinito...

9. Determine, a partir da lei de Coulomb o, campo e o potencial criados num ponto do eixo (à distância x) dum disco de raio R , uniformemente carregado com uma densidade superficial de carga σ . Estude o caso limite $R \rightarrow \infty$?

Solução: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \hat{u}_x$ e $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - |x|)$
quando $R \rightarrow \infty$, $E \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ como o caso do plano infinito (σ)

10. Um anel circular, de raio interior **a** e de raio exterior **b** ($a < b$), tem uma densidade superficial de carga σ constante.

- Calcule o potencial num ponto P do eixo da coroa, à distância **x** do centro.
- Deduz a expressão do campo elétrico em P.
- Verifique que no limite em que $a \rightarrow 0$, as expressões acima tendem para o caso do disco uniformemente carregado.



Solução:

$$V(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{x^2 + a^2}) \quad e \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right) \hat{u}_x$$

11. Uma superfície hemisférica fina de raio **R**, com a base situada no plano **xy**, tem uma carga **Q** uniformemente distribuída. Encontre o campo elétrico e o potencial no centro de curvatura **O**, origem do sistema de eixos.

Solução: $\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \hat{u}_z = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \hat{u}_z$; $V(O) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R$

12. Um fio de comprimento **L**, centrado na origem dum sistema de eixos **xy** e paralelo ao eixo-**xx**, está carregado uniformemente com uma densidade de cargas dada por $\lambda \text{ Cm}^{-1}$.

- Determine a expressão do campo elétrico num ponto genérico ao longo do fio, fora e dentro do fio.
- Determine o campo elétrico nos pontos que se situam ao longo da reta que é perpendicular ao fio e passa pelo ponto médio deste.

Solução: $E_{\text{fora}}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x - \frac{L}{2}} - \frac{1}{x + \frac{L}{2}} \right]$; $E_{\text{dentro}}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\frac{L}{2} - x} - \frac{1}{\frac{L}{2} + x} \right]$; $E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{L}{y(L^2 + 4y^2)^{1/2}} \right]$

Aplicações do teorema de Gauss

13. Uma esfera de centro A e de raio **a** está carregada com uma densidade volúmica uniforme ρ , exceto numa cavidade esférica de centro B e de raio **b**, que não contem cargas. Mostre que o campo elétrico dentro da cavidade é uniforme e encontre uma expressão para ele.

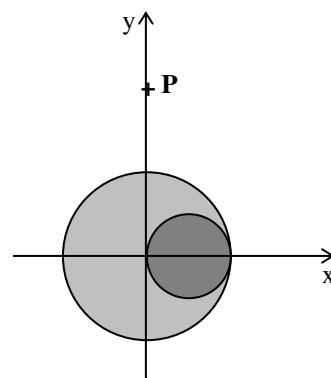
Solução: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{AB}$

14. Linhas de *força* emergem radialmente duma superfície esférica e têm uma densidade uniforme ao longo da superfície. Quais são as possíveis distribuições de carga dentro da esfera?

Solução: $\rho(r)$; $\sigma(r)$

15. Considere uma esfera isoladora de raio **R** que tem uma carga distribuída uniformemente com densidade volúmica ρ , exceto numa região esférica de raio **R/2**, como se representa na figura. Nessa região a densidade volúmica é **2ρ**.

- Calcule o campo elétrico em qualquer ponto do eixo **xx**. Considere as várias regiões onde o campo é diferente.
- Calcule o campo elétrico no ponto **P** do eixo **yy**, à distância **2R**, do centro da esfera.
- Qual o valor do campo elétrico no ponto **P**, se a esfera de raio **R/2** fosse comprimida até ficar com raio nulo, mantendo a carga total das duas regiões constante.
- Determine o fluxo através de uma esfera concêntrica com a esfera na origem, e que passa por **P**.



16. Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço devido a um plano infinito uniformemente carregado:

- A partir da lei de Coulomb.
- Usando a lei de Gauss.

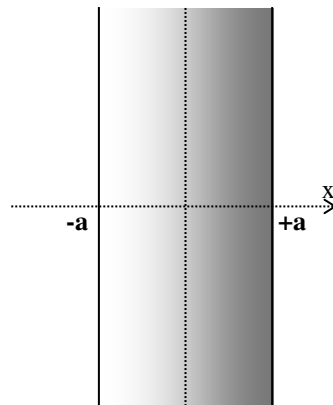
Justifique o cálculo.

Solução: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$

17. Considere que no espaço limitado por dois planos infinitos e paralelos ($x=a$ e $x=-a$), existe uma distribuição de carga $\rho = \alpha x$.

- Determine a carga por unidade de área existente entre os planos.
- Mostre que o campo no exterior é nulo.
- Determine o campo em cada ponto no interior dos planos.
- Represente graficamente $|\vec{E}|$ em função de x .
- Que densidade de carga σ deveria ter a superfície dos planos, sem carga no interior, para o campo ter o mesmo valor em $x=0$ que na situação anterior?

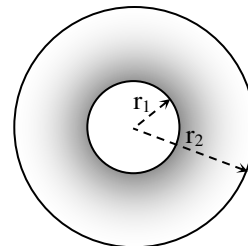
Solução: a) $Q=0$; b) $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$; c) $E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0} (a^2 - x^2)_{int}$
 d) porção de parábola para $-a \leq x \leq +a$; e) $\sigma = \frac{\alpha a^2}{2}$



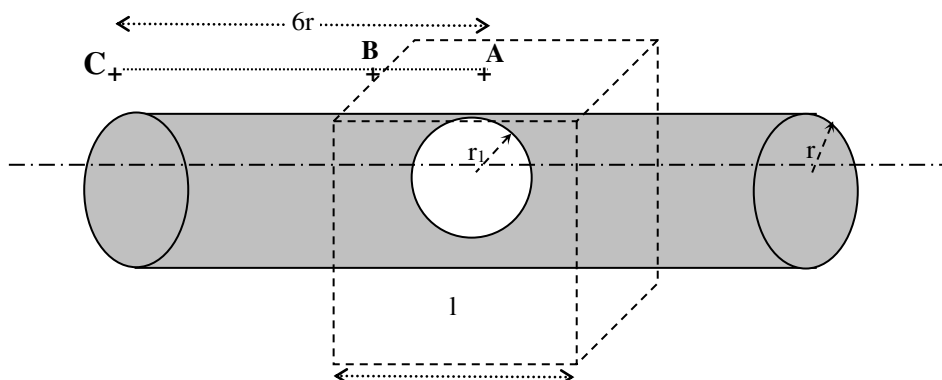
18. Considere uma coroa esférica de raios interno r_1 e externo r_2 com uma densidade de carga $\rho = \frac{\alpha}{r}$.

- Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.
- Que tipo de distribuição poderia criar um campo uniforme no interior da coroa esférica?

Solução: $r < r_1 \Rightarrow E=0$; $r_1 < r < r_2 \Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0 r^2} (r^2 - r_1^2)$
 $r > r_2 \Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0 r^2} (r_2^2 - r_1^2)$



19. Considere a seguinte distribuição de cargas ρ num cilindro infinito de raio r , onde existe um vazio esférico de raio $r_1 < r$ e com centro sobre o eixo.



- Determine o fluxo do campo elétrico através de um cubo de aresta $l > 2r$, de tal modo que o cilindro o atravessasse, nos casos em que:

- no interior do cubo se encontra o espaço vazio.
- o interior do cubo não inclui esse espaço.

- Mostre que estes cálculos não lhe permitem calcular o campo \vec{E} em qualquer ponto do espaço.
- Usando o princípio da sobreposição determine o campo elétrico nos pontos **A**, **B** e **C**.

Solução: a) i) $\varphi = \frac{\rho\pi}{\epsilon_0} \left(r^2 l - \frac{4}{3} r_1^3 \right)$; a) ii) $\varphi = \frac{\rho\pi}{\epsilon_0} r^2 l$
 b) $\vec{E}_A = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{l} - \frac{4}{3} \frac{r_1^3}{l^2} \right) \hat{r}$; $\vec{E}_B = \left(-\frac{\rho}{3\epsilon_0 l^2} r_1^3 \sqrt{2} + \frac{\rho}{\epsilon_0 l} r^2 \right) \hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho}{3\epsilon_0 l^2} r_1^3 \sqrt{2} \hat{z}$
 $\vec{E}_C = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{l} - \frac{r_1^3 l}{6 (l^2/4 + 36r^2)^{3/2}} \right) \hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{2r_1^3 r}{(l^2/4 + 36r^2)^{3/2}} \hat{z}$

Relações campo-potencial e equações locais do campo

20. Uma esfera de raio R contém uma distribuição volúmica de cargas ρ , de simetria esférica.

a) Determine a função E_0 sabendo que o campo elétrico dentro da esfera é radial com um módulo constante E_0 :

- i) aplicando a forma local do teorema de Gauss.
- j) aplicando a forma integral do teorema de Gauss.

b) Calcule a carga total Q contida na esfera e determine o campo elétrico ao exterior da esfera. Verifique a continuidade do campo na fronteira interior/exterior da esfera.

Solução: $\rho(r) = \frac{2\epsilon_0}{r} E_0$; $Q = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^2$; $E(r) = \frac{E_0 R^2}{r^2}$

21. O chamado “potencial de Yukawa” é uma maneira de representar as forças nucleares, cujo alcance é muito mais curto do que as forças coulombianas:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/a)}{r} \quad \text{onde } a > 0 \text{ representa o alcance da interação.}$$

Determine a distribuição volúmica de carga ρ que cria este potencial.

Solução: $\rho = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/a)}{r a^2}$

22. O espaço entre dois cilindros coaxiais infinitos, de raios $R_1 < R_2$, está carregado com uma densidade volúmica de carga $\rho = a/r$.

a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.

b) Deduza as expressões do potencial elétrico, sob a hipótese que $V(R_1) = 0$.

Solução:

a) $E_I = 0$; $E_2 = \frac{a}{\epsilon_0} \frac{r-R_1}{r}$; $E_3 = \frac{a}{\epsilon_0} \frac{R_2-R_1}{r}$

b) $V_I = 0$; $V_2 = \frac{a}{\epsilon_0} \left(R_1 \ln \frac{r}{R_1} - r + R_1 \right)$; $V_3 = \frac{a}{\epsilon_0} \{ (R_1 - R_2)(1 + \ln r) - R_1 \ln R_1 + R_2 \ln R_2 \}$

23. Um longo cilindro de raio a tem uma carga uniforme por unidade de comprimento Q C/m. Encontre a d.d.p. entre dois pontos situados à distância r_1 e r_2 do eixo do cilindro ($a < r_1 < r_2$).

Solução: $V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$

24. Ao longo de um plano o potencial é dado por: $V = \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r}$ em que r e θ são as coordenadas polares de um ponto do plano e a e b são duas constantes.

Encontre as componentes E_ρ e E_θ do campo elétrico, em qualquer ponto.

Solução: $E_r = -\frac{2a \cos \theta}{r^3} - \frac{b}{r^2}$; $E_\theta = -\frac{a \sin \theta}{r^3} + \frac{b}{r^2}$

25. Dada a função vectorial de componentes:

$$A_x = 6xy$$

$$A_y = 3x^2 - 3y^2$$

$$A_z = 0$$

Calcule o integral de linha de \vec{A} , do ponto $(0,0,0)$ para o ponto $(2,4,0)$, através do caminho mais curto. Repita o cálculo para um caminho parabólico. Tire conclusões.

Solução: a) -16

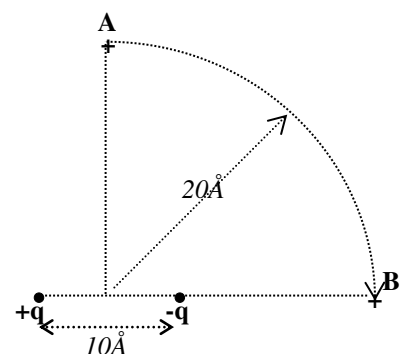
Trabalho das forças elétricas. Energia eletrostática

26. Um electrão está colocado num ponto A , no campo dum dipolo de cargas $+q$ e $-q$ distanciadas de $a=10 \text{ \AA}$.

a) Qual será o trabalho realizado se o electrão fizer uma volta circular de raio $d=20 \text{ \AA}$, partindo do ponto A e voltando ao mesmo ponto. Considerando as linhas de campo dum dipolo, indique onde o trabalho é positivo ou negativo.

b) Determine o trabalho realizado no caminho circular de A para B .

Solução: a) $W_{A \rightarrow A} = 0$ b) $W_{A \rightarrow B} = -e \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{d^2 - (a^2/4)}$



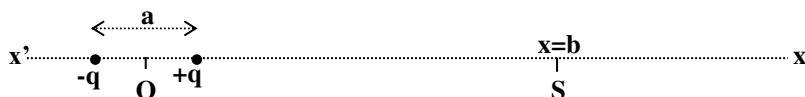
27. Calcule a energia eletrostática **W** duma esfera de raio **R** e de densidade de carga **ρ** uniforme, colocada no vácuo, pelos dois métodos seguintes

a) A partir da densidade de energia.

b) Usando a lei $W = \frac{1}{2} \int \rho V dv$ ou calculando o trabalho necessário para carregar a esfera, $W = \int_0^Q V dq$.

Solução: $W = \frac{4}{15} \frac{\pi \rho^2 R^5}{\epsilon_0}$

28. Um dipolo (carga **q** e separação **a**) está colocado ao longo do eixo-**xx**.



a) Calcule o trabalho necessário para trazer uma carga **+Q** desde o infinito até ao ponto **S**, em $x = b$.

b) Escreva uma aproximação para o potencial em **S**, na condição $b \gg a$.

c) Use o resultado da alínea anterior para obter a amplitude e direção do campo elétrico no ponto **S**.

Solução: $W = \frac{Q q a}{4\pi\epsilon_0(b^2 - a^2/4)}$; $V_S = \frac{q a}{4\pi\epsilon_0 b^2}$; $\vec{E} = \frac{2 q a}{4\pi\epsilon_0 b^3} \hat{x}$

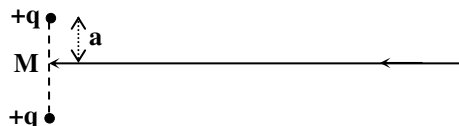
29. Duas cargas pontuais idênticas de valor **+q** estão separadas de uma distância **2a** como mostra a figura.

Calcule o trabalho por unidade de carga para trazer uma carga desde o infinito ao longo de uma linha representada na figura e até ao ponto **M** :

a) calculando o integral de linha

b) usando o conceito de potencial

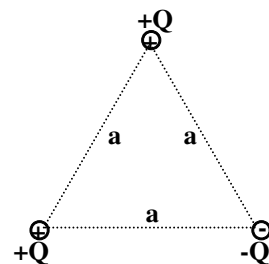
Solução: $W = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}$



30. Calcule a energia potencial do sistema de cargas ilustrado na figura.

(Nota: a energia potencial de um sistema de cargas pontuais é igual ao trabalho necessário para trazer as cargas para as suas posições finais, desde muito longe (do infinito).

Solução: $E_p = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$



Condutores

31. Uma esfera metálica tem o raio **R** e está isolada de todos os outros corpos.

a) Expresse o potencial da superfície da esfera como função da carga nela colocada.

b) Integre a expressão da alínea anterior para determinar o trabalho necessário para carregar a esfera a um potencial **V**.

Solução: $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$; $W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$