Exercício 2a). $\frac{1}{\sqrt{x^3}}\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})$ é contínua em $[1,\infty[$, logo trata-se de um integral impróprio de 1ª espécie no limite superior. Ora, por definição:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, \mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, \mathrm{d}x \\ &= -2\cdot \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}_{f'(x)} \cos\Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{f(x)}\Bigg)\, \mathrm{d}x \\ &= -2\cdot \lim_{t\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_1^t \\ &= -2\cdot(0-\sin(1)) = 2\sin(1).\end{aligned}$$

E concluímos assim que o integral em estudo é convergente.

Exercício 2b). Comecemos por ver que $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ é contínua em $]-1,1[$. Adicionalmente, sabemos que:

- $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = -\infty$, pelo que a função é ilimitada junto a -1,
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \infty$, pelo que a função é ilimitada junto a 1.

Desta forma, estamos na presença de um integral impróprio de 2ª espécie em ambos os limites de integração. Este irá convergir se e só se os dois integrais de 2ª espécie convergirem:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, \mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Por definição:

- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \lim_{t\to -1^+} -\frac{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}{4}\Bigg|_t^0 = \lim_{t\to -1^+}\left(-\frac{3}{4}+\frac{3(1-t^2)^{\frac{2}{3}}}{4}\right) = -\frac{3}{4}.$
- $\displaystyle\int_{0}^{1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-} -\frac{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}{4}\Bigg|_0^t = \lim_{t\to 1^-}\left(-\frac{3(1-t^2)^{\frac{2}{3}}}{4}+\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}.$

Portanto, o integral dado converge e temos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = -\frac{3}{4}+\frac{3}{4} = 0.$$