Cálculo I - agr. 4 - 2021/22 - 1º teste

Resolução da questão 4:

(a) $\int 1\,dt = t + c_1 \quad , c_1 \in \mathbb{R}$

(20 pontos)

$$\int \frac{1}{g-kv^2}\,dv :$$

CA: $$\frac{1}{g-kv^2} = \frac{1}{(\sqrt{g}-\sqrt{k}v)(\sqrt{g}+\sqrt{k}v)} = \frac{A}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v} + \frac{B}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}$$

g, k constantes positivas

$$\Rightarrow 1 = A(\sqrt{g}+\sqrt{k}v) + B(\sqrt{g}-\sqrt{k}v)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} : \quad 1 = A\,2\sqrt{g} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

$$v = -\sqrt{\frac{g}{k}} : \quad 1 = B\,2\sqrt{g} \Leftrightarrow B = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

$$\int \frac{1}{g-kv^2}\,dv = \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}\,dv + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}\,dv$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{gk}} \int \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}\,dv + \frac{1}{2\sqrt{gk}} \int \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}\,dv$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln|\sqrt{g}-\sqrt{k}v| + \frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln|\sqrt{g}+\sqrt{k}v| + c_2 , \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

(em intervalos)

A partir da igualdade dada no enunciado, temos então que para cada $c_1 \in \mathbb{R}$ existe $c_2 \in \mathbb{R}$ (e vice-versa) tal que

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln\left|\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}\right| + c_2 = t + c_1 \quad , \quad \forall\, t \geq 0 .$$

Como nos dizem que para $t=0$ é $v=0$, então

$\frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln 1 + C_2 = 0 + C_1$, logo $C_2 = C_1$ e portanto

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln \left| \frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v} \right| = t \qquad , \quad t \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v} \right| = e^{2\sqrt{gk}\,t} \qquad , \quad t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v} = \pm e^{2\sqrt{gk}\,t} \qquad , \quad t \geq 0.$$

Como para $t=0$ o sinal $+$ do membro direito tem que ser escolhido e v, sendo a velocidade em causa, tem que variar continuamente, então o sinal $+$ do membro direito tem que se manter durante toda a queda do paraquedista

(b) $\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v} = e^{2\sqrt{gk}\,t} \Leftrightarrow \sqrt{g}+\sqrt{k}\,v = \sqrt{g}\,e^{2\sqrt{gk}\,t} - \sqrt{k}\,e^{2\sqrt{gk}\,t}\,v$

(10 pontos)

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{k}\left(1+e^{2\sqrt{gk}\,t}\right)v = \sqrt{g}\left(e^{2\sqrt{gk}\,t}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{g}{k}}\;\frac{e^{2\sqrt{gk}\,t}-1}{1+e^{2\sqrt{gk}\,t}} .$$

Assim, $\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{g}{k}}\;\frac{e^{2\sqrt{gk}\,t}-1}{1+e^{2\sqrt{gk}\,t}}$ (Indet. $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{1-e^{-2\sqrt{gk}\,t}}{e^{-2\sqrt{gk}\,t}+1} = \sqrt{\frac{g}{k}} .$$

Obs.: também poderia ser usada a regra de Cauchy no levantamento da indeterminação.