Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I–Agrupamento 4 2019/2020

Soluções da Ficha de Exercícios 1

1. (a) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}-1; \end{array}$; $CD_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

   (b) $f^{-1}: \begin{array}{ccc}]2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -1+\ln(x-2) \end{array}$; $CD_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

   (c) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2-3^x \end{array}$; $CD_{f^{-1}}=]-\infty,2[$

   (d) $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3-1 \end{array}$; $CD_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

2. (a) —; (b) $f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$; (c) $g_{|\mathbb{R}_0^+}$, $CD_{g_{|\mathbb{R}_0^+}}=CD_g=[1,+\infty[$.

3. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (e) $\frac{5}{12}$; (f) $-\frac{7}{25}$; (g) $\frac{1}{2}$; (h) $\frac{\pi}{4}$; (i) 0.

4. (a) $\mathcal{D}_{f^{-1}}=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}}=[-\pi,0]$; $f^{-1}(y)=\operatorname{arcsen}(2y)-\frac{\pi}{2}$;

   (b) $\mathcal{D}_{f^{-1}}=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}}=[0,2]$; $f^{-1}(y)=1-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3y}{2}\right)$;

   (c) $\mathcal{D}_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}}=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$; $f^{-1}(y)=2-\frac{\pi}{\operatorname{arctg} y}$;

   (d) $\mathcal{D}_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}}=[-4,-3]$; $f^{-1}(y)=\cos^2\left(\frac{y+\frac{\pi}{2}}{3}\right)-4$;

   (e) $\mathcal{D}_{f^{-1}}=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right[$ $\mathcal{CD}_{f^{-1}}=\mathbb{R}$; $f^{-1}(y)=2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi-y}{3}\right)+1$;

   (f) $\mathcal{D}_{f^{-1}}=]0,\pi[$ $\mathcal{CD}_{f^{-1}}=]-1,+\infty[$; $f^{-1}(y)=e^{\operatorname{cotg} y}-1$.

5. $(f^{-1})'(-3)=\frac{1}{54}$.

6. $(f^{-1})'(2)=1$.

7. (a) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; (b) -1.

8. (a) $f'(x)=\frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$, $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$; (b) $f'(x)=2x\,\mathrm{e}^{x^2}(1+x^2)$, $D_{f'}=\mathbb{R}$;
   (c) $f'(x)=\frac{-2\operatorname{sen}(\log_2(x^2))}{x\ln 2}$, $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; (d) $f'(x)=\frac{1-x^2(2\ln x+1)}{x}$, $D_{f'}=\mathbb{R}^+$;
   (e) $f'(x)=2x\operatorname{arctg} x+1$, $D_{f'}=\mathbb{R}$; (f) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$, $D_{f'}=]0,1[$;

9. (a) $\frac{-12x^2\cos(4x^3)}{1+\operatorname{sen}^2(4x^3)}$; (b) $\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}=\frac{-2\sqrt{x^4-1}}{x^5-x}$; (c) $\frac{e^x}{\sqrt{2e^x-e^{2x}}}$; (d) $\frac{1}{x(2+\ln^2 x+\ln(x^2))}$.

10. —

11. —

12. —

13. f tem um zero em $]0,1[$, um em $]1,2[$ e outro em $]-1,0[$.

14. —

15. Verdadeira.

16. (a) Sugestão: Considere a função $f(x) = \text{arcsen}x - x$ e prove que é positiva no intervalo considerado analisando o comportamento da primeira derivada; (b) —; (c) —.

17. A função f é crescente em $]-\infty, 0]$, decrescente em $[0, +\infty[$ e tem máximo $f(0) = 1$ em $x = 0$.

18. $x = 0$ é um minimizante local; $h(0) = 5$.

19. —

20. —

21. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = 1$.

22. (a) 1/9; (b) não existe; (c) 2/3; (d) $-1/2$; (e) -1; (f) 0; (g) 1; (h) 0; (i) 1; (j) e^4; (k) $\ln 3$; (l) 1; (m) e; (n) e^{-2}; (o) 0.

23. (a) É contínua em $\mathbb{R}$;
(b) f não é diferenciável em $x = 0$;
(c) $b = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
(d) máximo global: 0; mínimo global: -5π

24. (a) f é contínua em $[0, e]$; (b) $+\infty$;
(c) 0 é mínimo absoluto e 1 é máximo absoluto;
(d) $CD_f = [0, 1]$.

25. (a) f é contínua em $x = 0$.
(b) f não é diferenciável em $x = 0$.
(c) f tem mínimo global em $x = 0$.
(d) —
(e) —
(f) $g^{-1} : [0, \pi/2[\to \mathbb{R} \quad g^{-1}(x) = -\sqrt{\operatorname{tg} x}$, $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^-$.

26. —

27. (a) $D_f = [0, 2]$.
(b) —
(c) Para justificar a existência de máximo e mínimo globais usar o Teorema de Weierstrass. Observar que $f'(x) < 0$, para todo $x \in]0, 2[$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e $f(2) = \frac{-\pi}{2}$. Então o mínimo global é $\frac{-\pi}{2}$ e o máximo global é $\frac{\pi}{2}$.
(d) $CD_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

28. —

29. —

30. (a) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;
(b) —

31. 1

32. f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$. A função f não tem extremos locais.

33. (a) — ; (b) 10^3; (c) $10^{0.75} - 1$, que é aproximadamente 4.62; (d) 9.

34. (a) N é estritamente decrescente em $\mathbb{R}_0^+$;
(b) $t = 0$ é maximizante absoluto e o máximo absoluto correspondente é $N(0) = a$;
(c) $CD_N =]0, a]$;
(d) 5×10^9 anos.