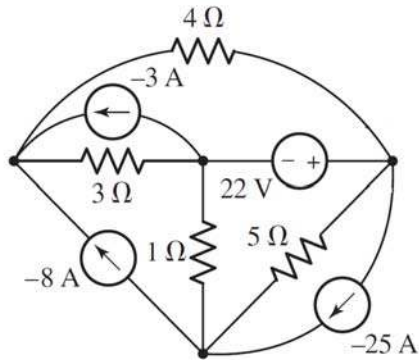


Sinais e Sistemas Electrónicos



Capítulo 2: Técnicas de Análise de Circuitos



Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2022/2023

Sumário

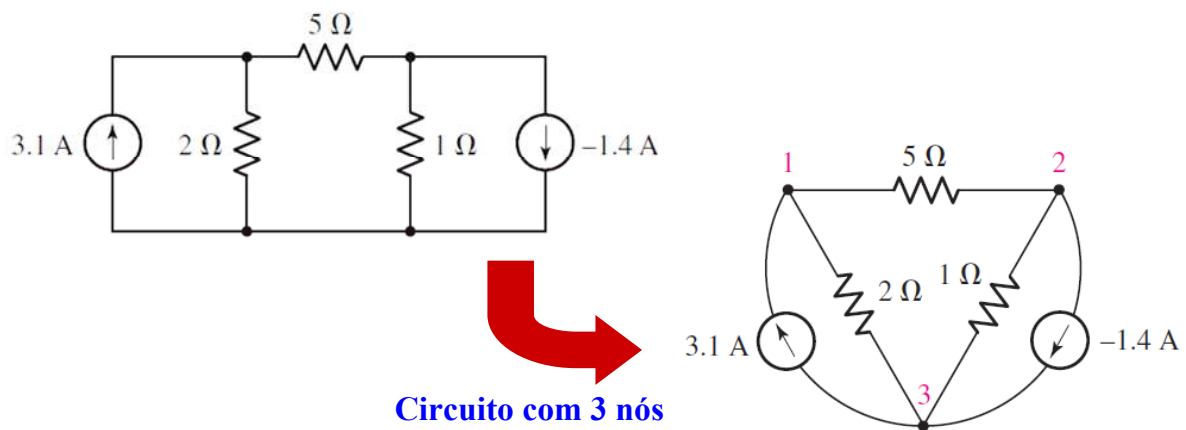
- **Análise de Nodal;**
- **Exemplos de cálculo;**
- **Análise Nodal com super-nós;**
- **Teorema de Thévenin;**
- **Exemplos de cálculo;**
- **Equivalente de Thévenin: Método Universal.**

Análise Nodal

2-3

Análise de Nodal

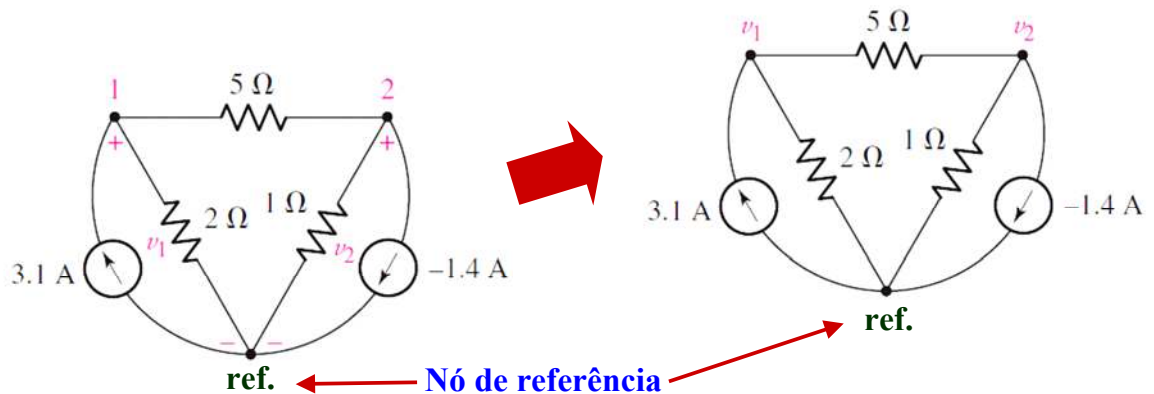
- Método sistemático que permite determinar as tensões em todos os nós de um circuito;
- **nó** – Ponto de ligação de dois ou mais elementos num circuito;



2-4

Análise de Nodal – nó de referência

- Dado que uma tensão é sempre definida entre dois nós, designamos um dos nós do circuito como **Nó de Referência** – em relação ao qual todas as tensões são medidas.

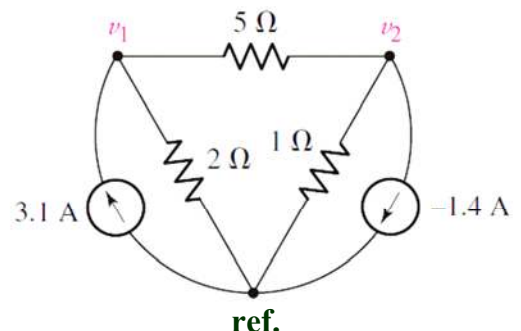


- Quando referirmos, por exemplo, a tensão v_1 , estaremos a referir-nos na realidade à tensão entre o **nó 1** e o **nó de referência**.

2-5

Análise de Nodal

- Para todos os efeitos práticos, o potencial eléctrico no nó de referência é considerado nulo;
- Um circuito com N nós tem $N-1$ tensões – as Tensões Nodais;
- A polaridade de referência das tensões nodais é geralmente considerada positiva (+) em cada nó e negativa (-) no nó de referência;
- Aplicando KCL a todos os nós **excepto o de referência**, obtemos um sistema de $N-1$ equações com $N-1$ incógnitas que nos permite determinar as tensões nodais.

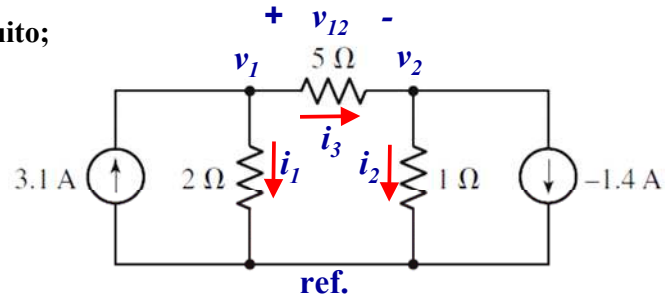


2-6

Análise Nodal – exemplo 1

- Apliquemos KCL aos nós do circuito;

KCL: “A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó”



nó 1: $3.1 = i_1 + i_3$

nó 2: $i_3 = i_2 - 1.4$

- Expressimos agora cada uma das correntes em função das tensões:

$$i_1 = v_1 / 2 \quad i_2 = v_2 / 1 \quad i_3 = v_{12} / 5 = (v_1 - v_2) / 5$$

- Substituindo acima obtém-se

$$3 = 0.5v_1 + 0.2(v_1 - v_2)$$

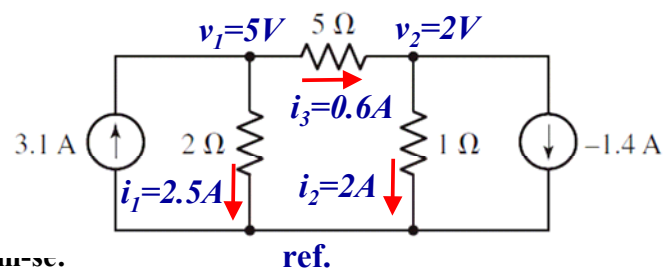
$$0.2(v_1 - v_2) = 1v_2 - 2$$

2-7

Análise Nodal – exemplo 1

- O que, rearranjando, dá o sistema:

$$\begin{cases} 3.5v_1 - v_2 = 15.5 \\ -v_1 + 6v_2 = 7 \end{cases}$$



- Resolvendo por substituição obtém-se.

$$\begin{cases} v_1 = 5V \\ v_2 = 2V \end{cases}$$

- Com as tensões nodais podemos agora calcular todas as correntes no circuito

$$i_1 = v_1 / 2 = 2.5A$$

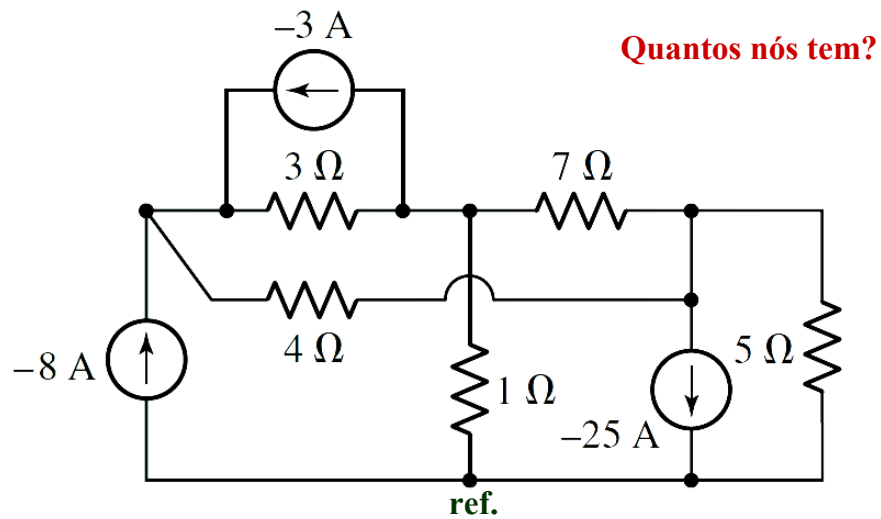
$$i_2 = v_2 / 1 = 2A$$

$$i_3 = (v_1 - v_2) / 5 = 0.6A$$

2-8

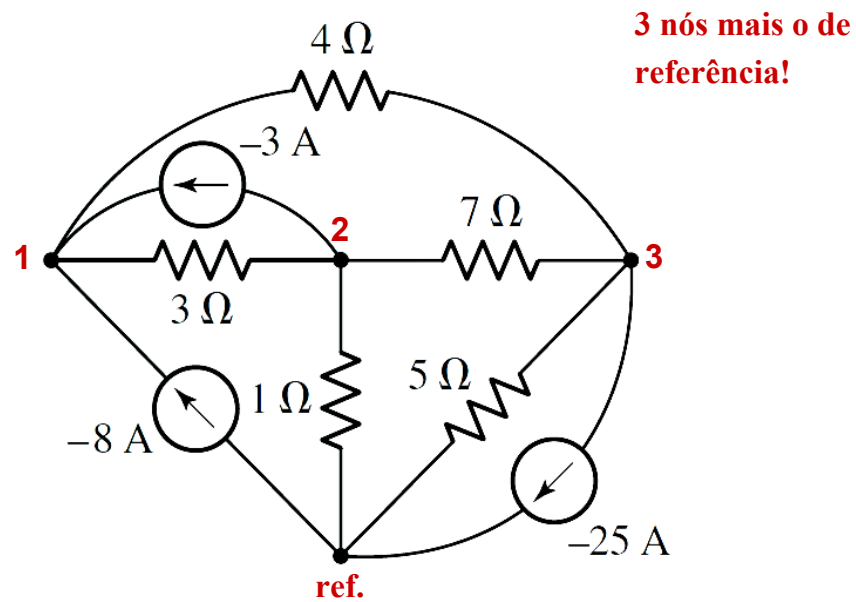
Análise Nodal – exemplo 2

- Determinar as tensões nodais no circuito dado.



2-9

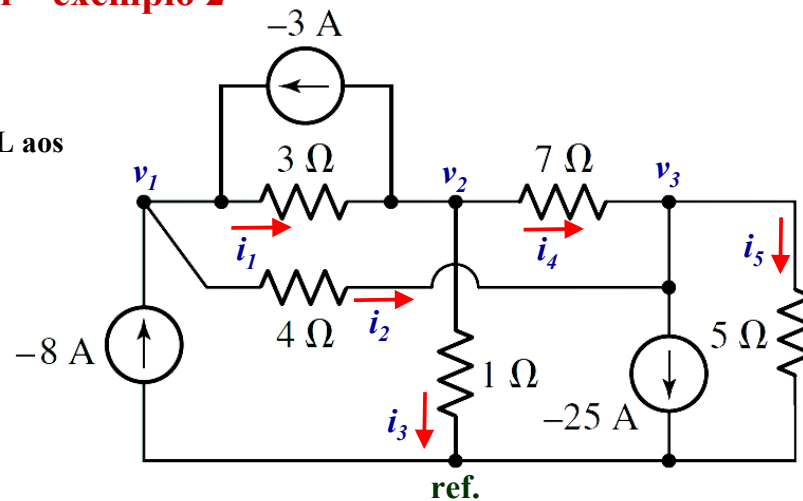
Análise Nodal – exemplo 2



2-10

Análise Nodal – exemplo 2

- Aplicando KCL aos três nós:



nó 1: $-8 - 3 = i_1 + i_2$

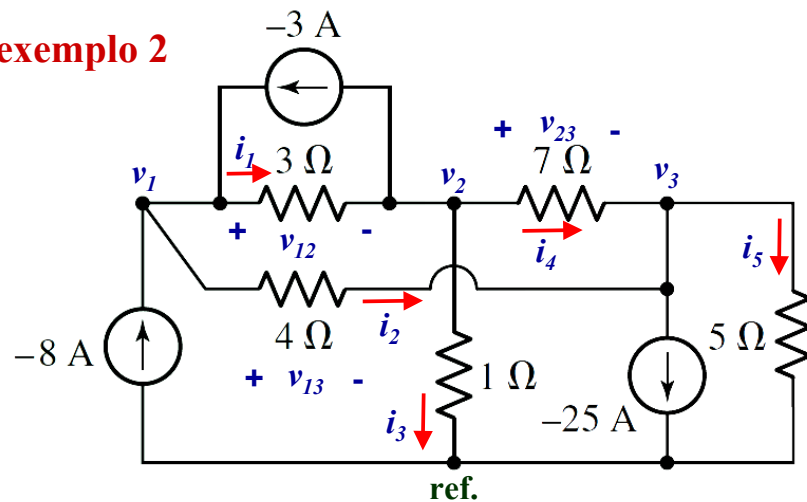
nó 2: $i_1 = -3 + i_3 + i_4$

nó 3: $i_4 + i_2 = -25 + i_5$

2-11

Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:



nó 1:

$$-8 - 3 = i_1 + i_2$$

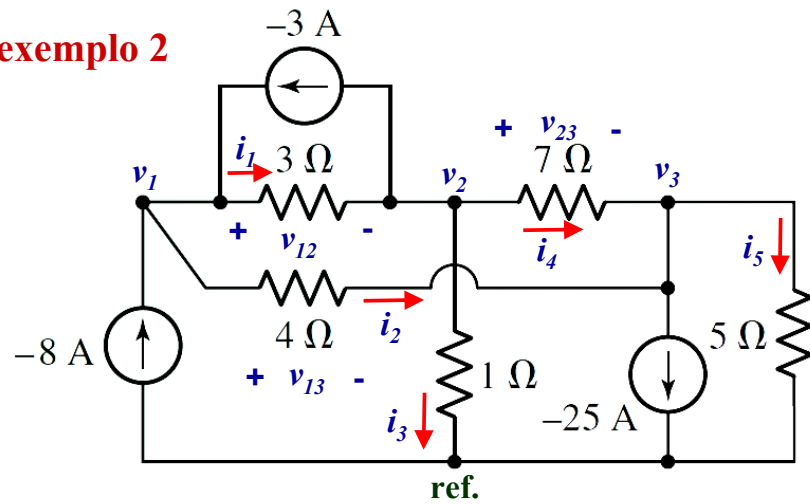
$$-8 - 3 = v_{12}/3 + v_{13}/4 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

$$7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132$$

2-12

Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:

nó 2:

$$i_1 = -3 + i_3 + i_4$$

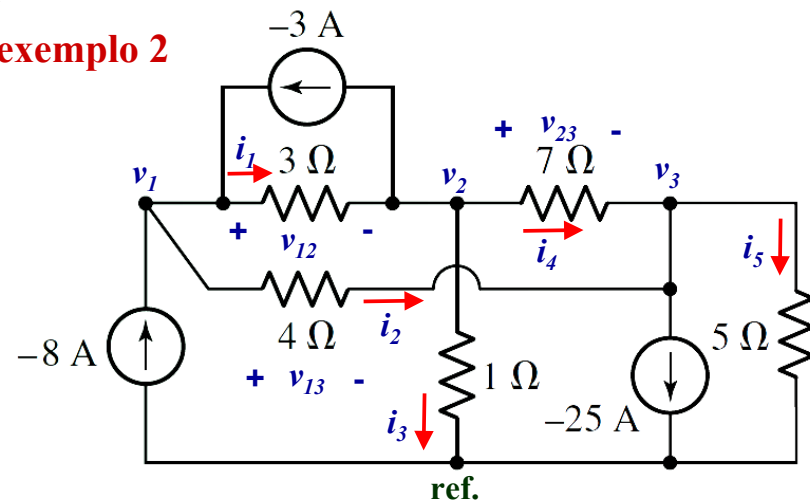
$$v_{12}/3 = -3 + v_2/1 + v_{23}/7 \Leftrightarrow \frac{v_1 - v_2}{3} = -3 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$

$$7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63$$

2-13

Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:

nó 3:

$$i_4 + i_2 = -25 + i_5$$

$$v_{23}/7 + v_{13}/4 = -25 + v_3/5 \Leftrightarrow \frac{v_2 - v_3}{7} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -25 + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500$$

2-14

Análise Nodal – exemplo 2

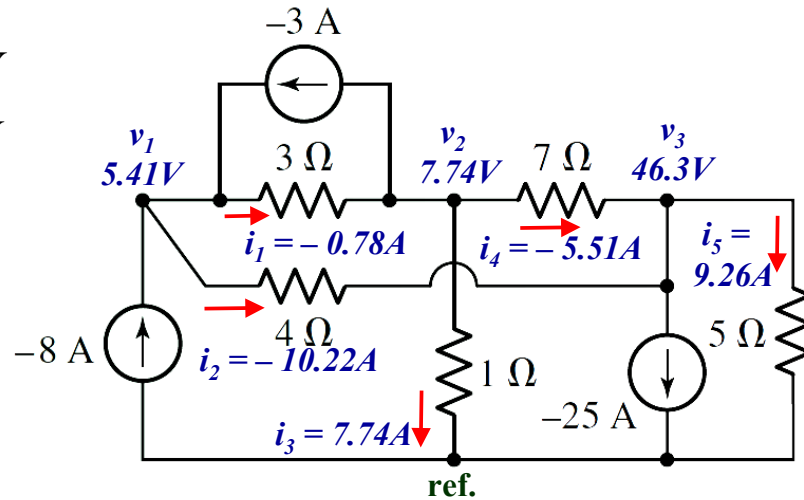
- O sistema de equações é:

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63 \\ 35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500 \end{cases}$$

- Resolvendo obtém-se:

$$\begin{cases} v_1 = 5.41V \\ v_2 = 7.74V \\ v_3 = 46.3V \end{cases}$$

- Com as tensões nodais, podemos agora calcular todas as correntes.



Análise Nodal passo a passo

1. Contar o número de nós N ;
2. Escolher um dos nós como **nó de Referência**;
3. Atribuir tensões aos nós: v_1, v_2, \dots, v_{N-1} ;
4. Marcar correntes em todos os ramos;
5. Usando a Lei das Correntes de Kirchhoff (KCL), escrever **$N-1$ equações nodais**.



Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Como resolver?

Processo 1

- marcar uma corrente na fonte de tensão: i_f

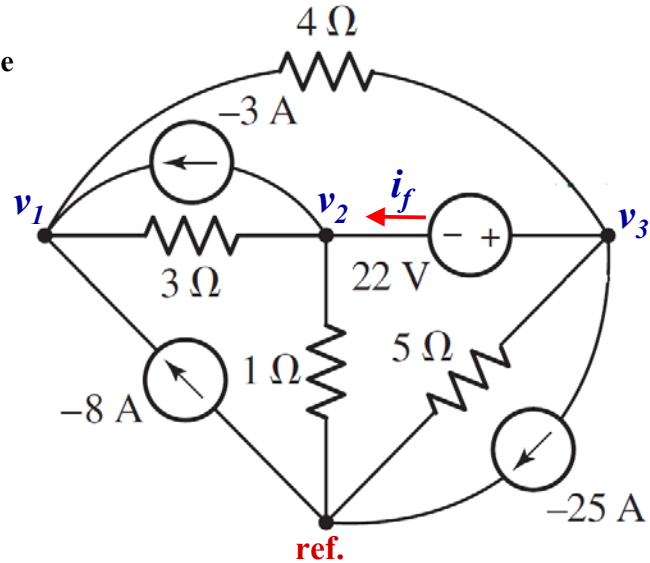
- aplicar KCL aos 3 nós

- aplicar KVL aos nós 2 e 3:

$$v_3 - v_2 = 22$$

Resultado:

4 equações com 4 incógnitas
MUITO COMPLICADO!!



2-17

Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

Processo 2

- tratar os nós 2 e 3 mais a fonte de tensão como um só nó: **um super nó**

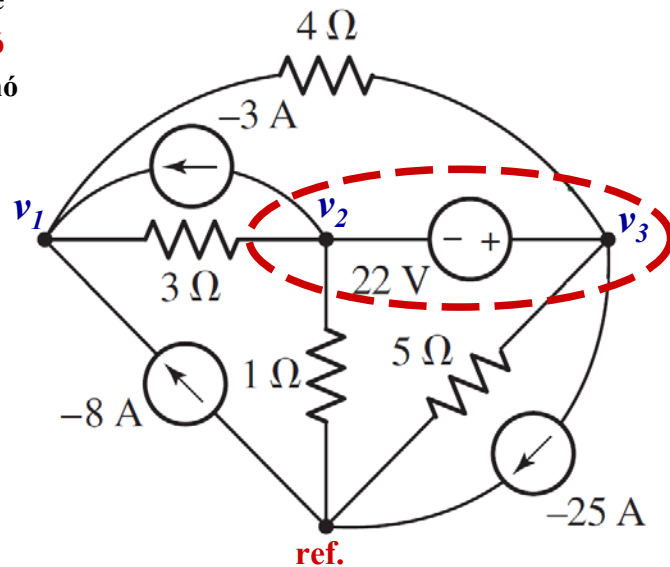
- aplicar KCL ao nó 1 e ao super-nó

- aplicar KVL aos nós 2 e 3:

$$v_3 - v_2 = 22$$

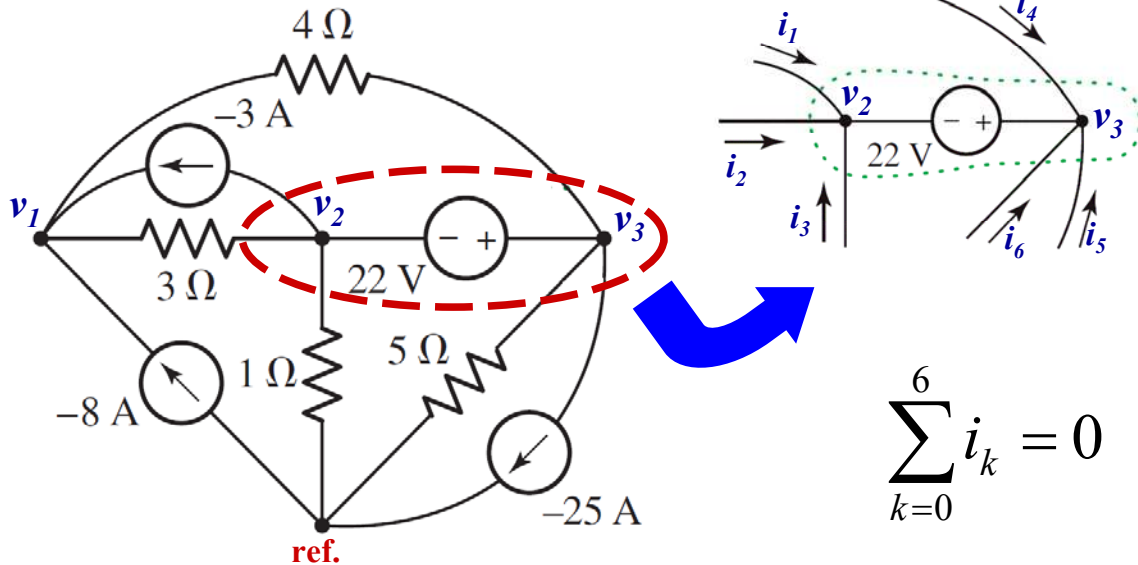
Resultado:

3 equações com 3 incógnitas
PROCESSO MAIS SIMPLES!!



2-18

Análise Nodal – com super-nó



- Se a soma das correntes que entram no nó v_2 é zero e a soma das correntes que entram no nó v_3 é zero, então a soma das correntes que entram **nos dois nós** também tem de ser zero.

2-19

Análise Nodal – com super-nó

- Apliquemos então KCL

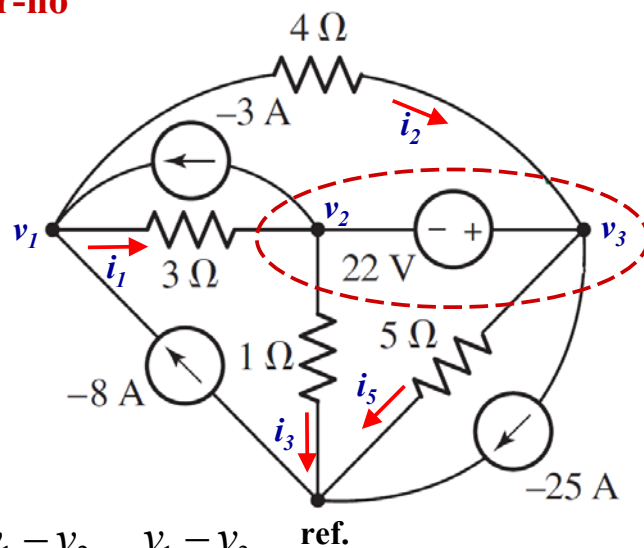
nó 1:

$$-8 - 3 = i_1 + i_2$$

$$-8 - 3 = v_{12}/3 + v_{13}/4 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

$$7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132$$

... é a mesma equação do exemplo anterior



2-20

Análise Nodal – com super-nó

NOTA: O super-nó inclui a fonte de tensão + os dois nós aos quais a fonte está ligada

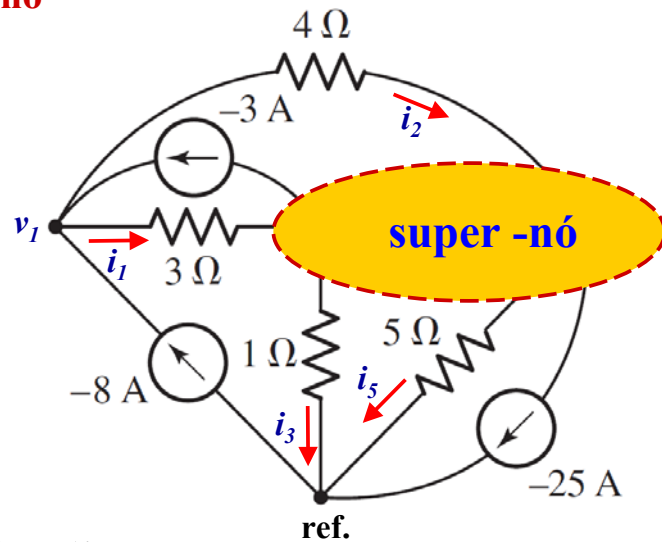
super -nó:

$$i_1 + i_2 = -3 + i_3 + i_5 - 25$$

$$\frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -28 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680$$

2-21



Análise Nodal – com super-nó

● Finalmente, aplicamos KVL ao super-nó:

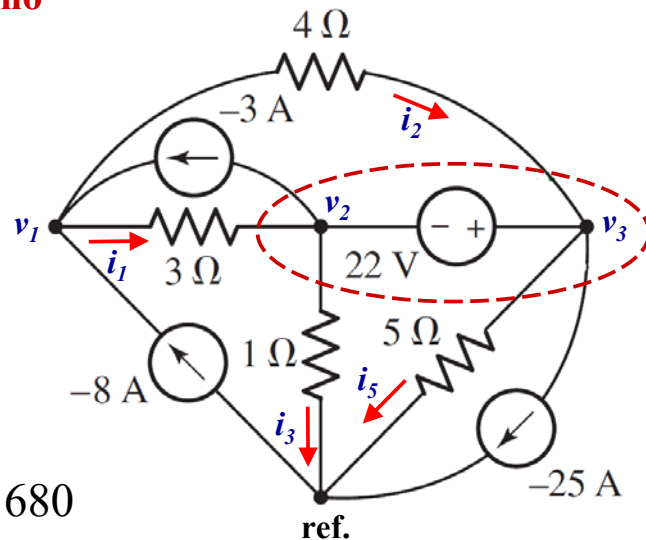
$$v_3 - v_2 = 22$$

● pelo que o sistema de equações final é

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680 \\ v_3 - v_2 = 22 \end{cases}$$

● Resolvendo obtém-se:

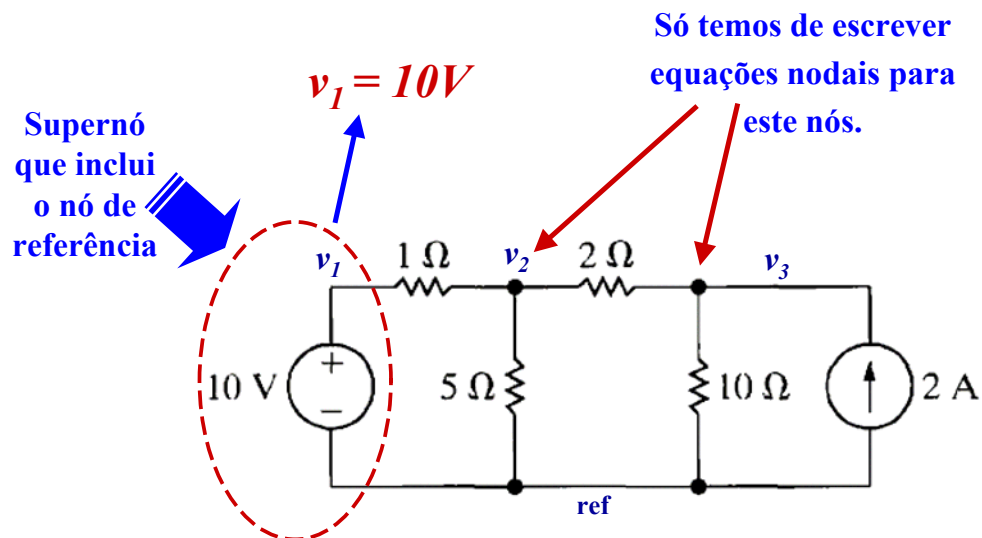
$$\begin{cases} v_1 = 1.07V \\ v_2 = 10.5V \\ v_3 = 32.5V \end{cases}$$



2-22

Análise Nodal – super-nó que contém o nó de referência

- Quando o super-nó inclui o nó de referência a análise fica mais fácil!



2-23

Análise Nodal passo a passo (com super-nós)

1. Contar o número de nós N ;
2. Escolher **nó de Referência**;
3. Atribuir tensões aos nós: v_1, v_2, \dots, v_{N-1} ;
4. Marcar correntes em todos os ramos;
5. Se o circuito contiver fontes de tensão, formar **super-nós** que contenham essas fontes e os nós a que estão ligados;
6. Usando KCL, escrever uma equação para cada nó (excepto o de referência) e para cada super-nó que não contenha o nó de referência;
7. Usando KVL relacionar a tensão de cada fonte com as tensões nodais.

2-24

Teorema de Thévenin

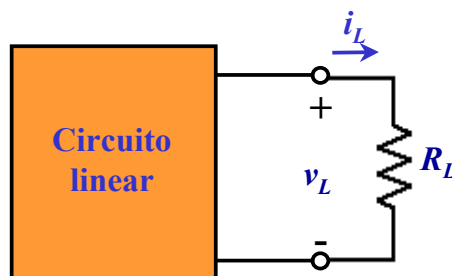


Léon Charles Thévenin
(1857 - 1926)

2-25

Teorema de Thévenin

- Técnica que permite simplificar a análise de circuitos lineares.

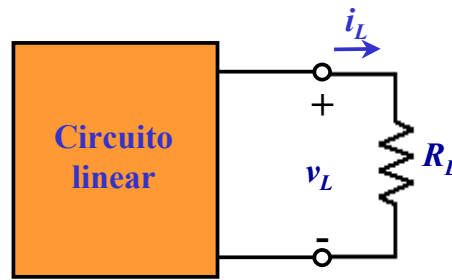


- Útil nos casos em que estamos interessados em saber o que se passa *apenas num elemento ou numa parte do circuito*, por ex:

- Qual é a potência dissipada em R_L ?
- Qual é o valor de v_L para diferentes valores de R_L ?

2-26

Teorema de Thévenin

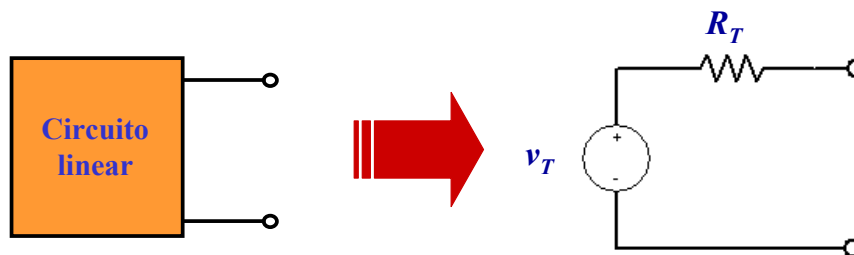


- Segundo o **teorema de Thévenin**, podemos substituir todo o **circuito linear** por um **circuito equivalente** mais simples;
- A análise do que se passa em R_L prossegue depois usando este circuito equivalente.

2-27

Teorema de Thévenin

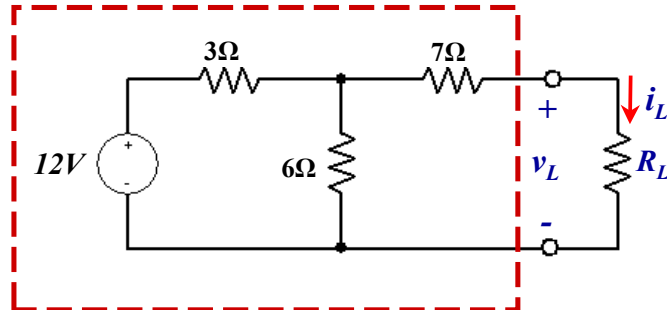
- Segundo este teorema o circuito equivalente é constituído por uma **fonte de tensão** com uma **resistência em série**.



2-28

Teorema de Thévenin

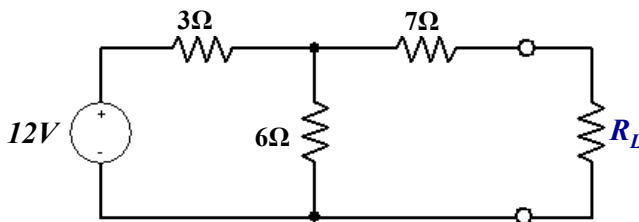
- Suponha-se que queremos saber o que se passa na resistência R_L : por exemplo, qual é o valor de i_L para vários valores de R_L .



- Podemos começar por simplificar o resto do circuito (a parte dentro do rectângulo), determinando o seu equivalente de Thévenin.

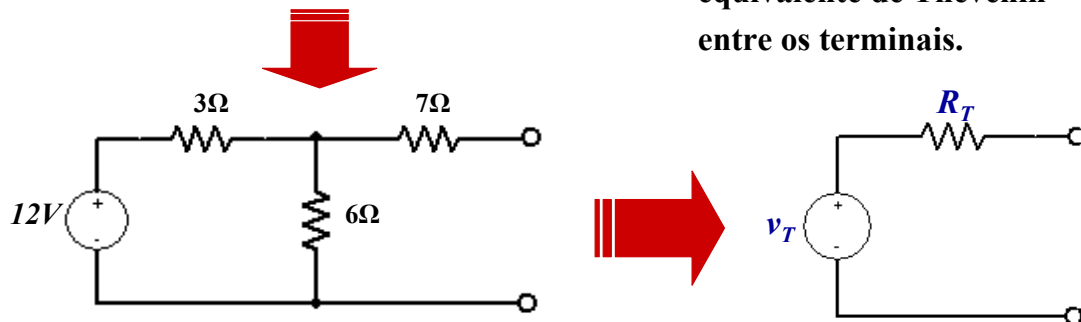
2-29

Determinação do equivalente de Thévenin



1- Começamos por remover a resistência R_L .

2- Calculamos o equivalente de Thévenin entre os terminais.



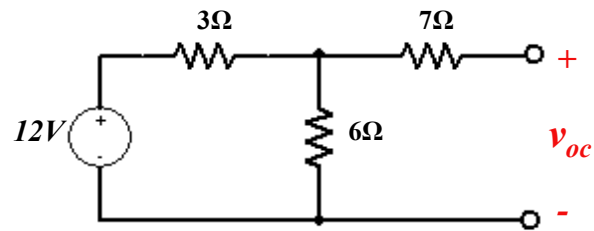
- Determinar o equivalente de Thévenin resume-se a calcular os valores de v_T e R_T .

Como se procede então?

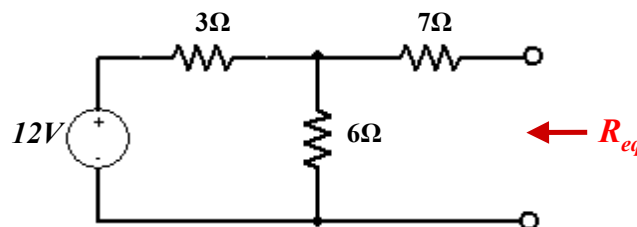
2-30

Determinação do equivalente de Thévenin

- Determinamos a tensão que aparece aos terminais do circuito **em aberto**, ou seja, sem nada ligado.



- Determinamos a **resistência equivalente** entre os terminais do circuito quando este é **desativado** - todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).

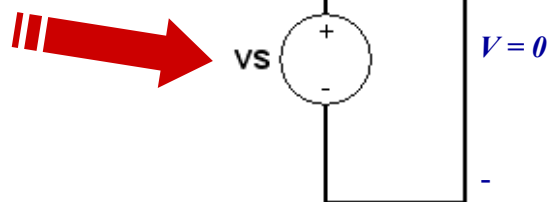


2-31

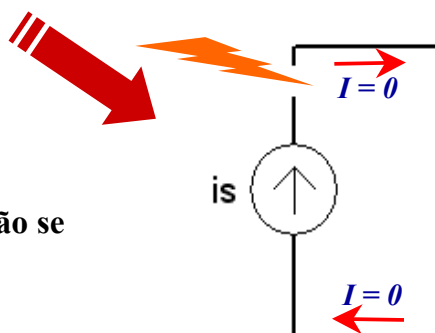
Determinação do equivalente de Thévenin

Como se desactivam as fontes independentes?

- Fontes de tensão são curto-circuitadas $\Rightarrow V = 0$;



- Fontes de corrente são abertas $\Rightarrow I = 0$;

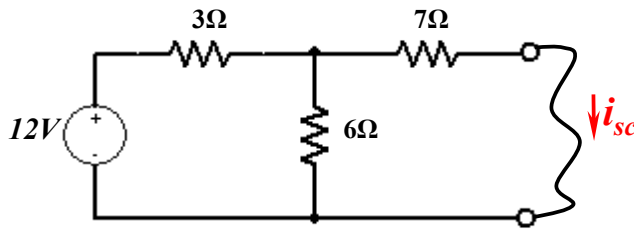


- Fontes dependentes não se desactivam.

2-32

Determinação do equivalente de Thévenin

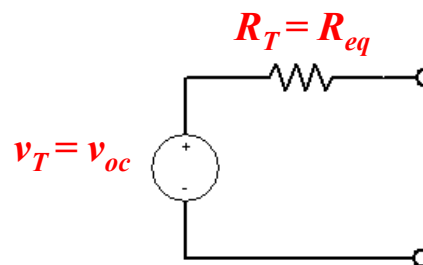
- Se for mais fácil, podemos determinar a corrente entre os terminais do circuito quando estes são curto-circuitados – **a corrente de curto-circuito**:



Esta corrente relaciona-se com os valores anteriores por:

$$i_{sc} = \frac{v_{oc}}{R_{eq}}$$

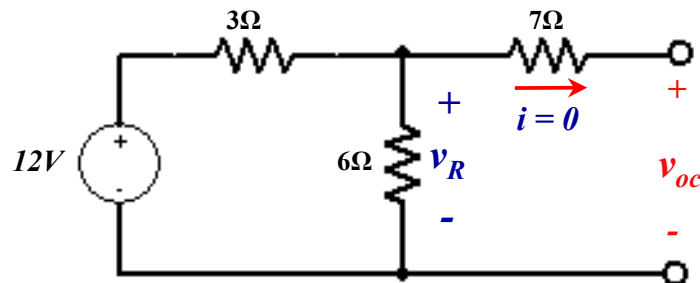
Finalmente, o **equivalente de Thévenin** do circuito A é dado por



2-33

Aplicação do teorema de Thévenin

1- Determinação de v_{oc} , a tensão **em circuito aberto** do circuito A:

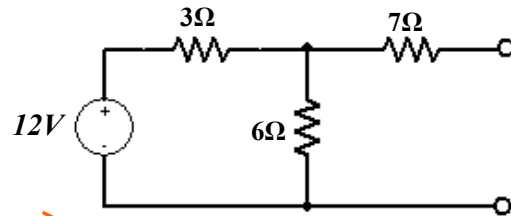


$$v_{oc} = v_R = \frac{6}{6+3} 12 = 8V$$

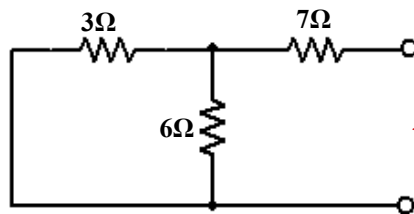
2-34

Aplicação do teorema de Thévenin

2- Determinação de R_{eq} , a resistência equivalente ou de saída:



Desactivação das fontes...

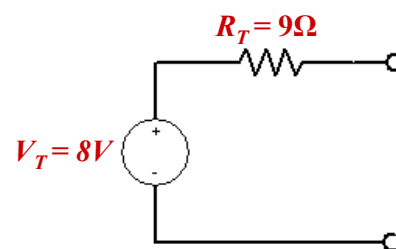
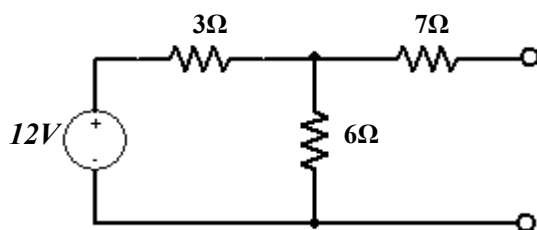


$$R_{eq} = 3 // 6 + 7 = \frac{3 \times 6}{3 + 6} + 7 = 9\Omega$$

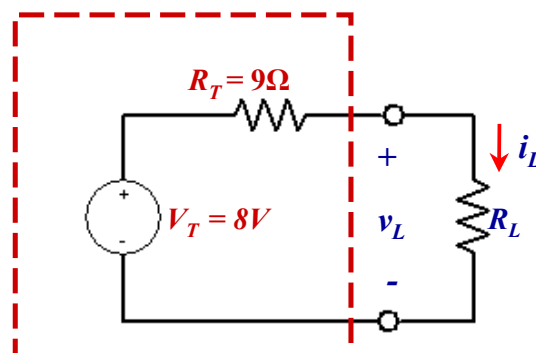
2-35

Aplicação do teorema de Thévenin

● O equivalente de Thévenin do circuito é portanto:



Equivalente
de Thévenin
do Circuito

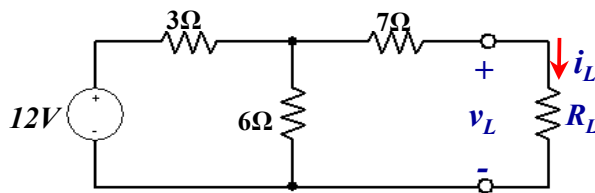


● Neste circuito é muito mais fácil calcular, por exemplo, os valores de i_L para vários valores de R_L .

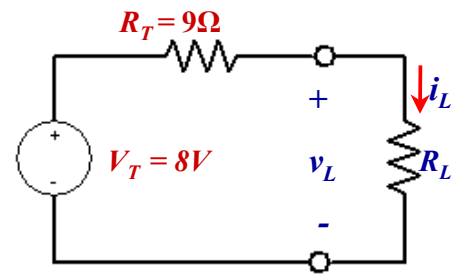
2-36

Aplicação do teorema de Thévenin

Circuito original



Circuito c/ equivalente de Thévenin



● Com o **equivalente de Thévenin** é possível obter informações úteis que não estão disponíveis de imediato no circuito original:

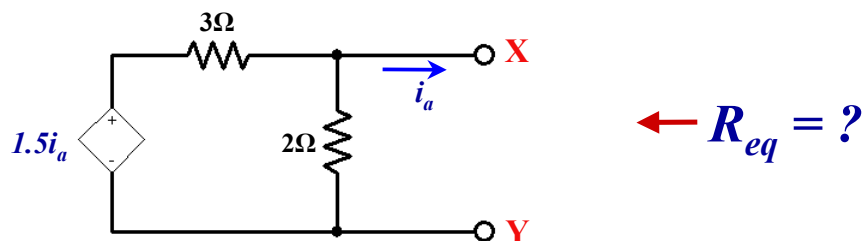
- O **valor máximo de v_L** (tensão de circuito aberto) é **$8V$** ;
- O **valor máximo de i_L** (corrente de curto-circuito) é **$(8/9)A$** ;
- O circuito A fornece a **potência máxima** quando **$R_L = 9\Omega$** .

2-37

Equivalente de Thévenin – dificuldades

● Em circuitos com fontes dependentes, por vezes é **impossível obter o valor de R_T** .

Exemplo: determinar o equivalente de Thévenin do circuito entre **X** e **Y**.



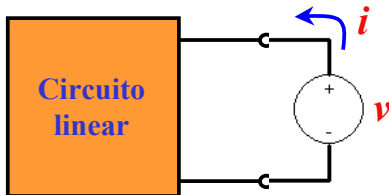
● Obter R_{eq} por simples combinação de resistências **não é possível** porque a fonte dependente não pode ser desactivada.

2-38

Equivalente de Thévenin - Método universal

- É um método que pode ser aplicado a todos os circuitos.

Como funciona?



- Dado o **circuito linear**...
- ... aplicamos nos terminais uma fonte de tensão de valor v , com corrente i .
- Depois analisamos o circuito de forma a obter uma expressão de v em função de i , com a forma

$$v = ai + b$$

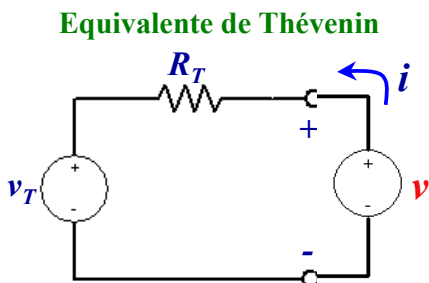
- Dos coeficientes a e b tiramos

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

2-39

Método universal - demonstração

- É fácil mostrar que o Método Universal funciona recorrendo ao próprio Equivalente de Thévenin.



- Aplicamos então aos terminais uma fonte de tensão de valor v , com corrente i .
- Aplicando KVL: $-v_T - R_T i + v = 0$

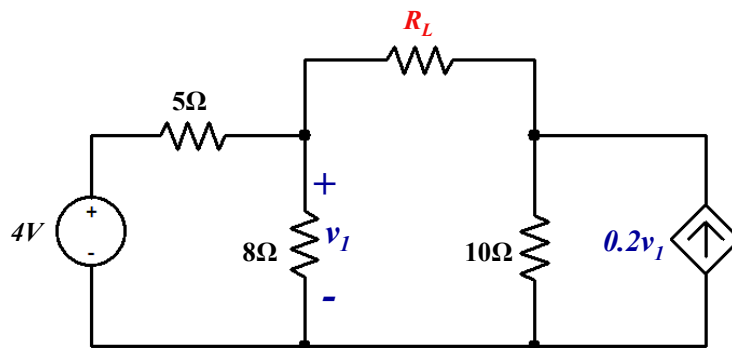
$$v = R_T i + v_T$$
- Obtemos então uma relação de v em função de i , com a forma

$$v = ai + b$$

- Donde se conclui que $a = R_T$ e $b = v_T$.

2-40

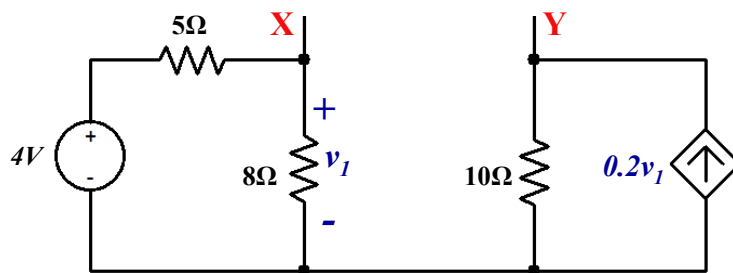
Exemplo: determinar o equivalente de Thévenin visto pela resistência R_L .



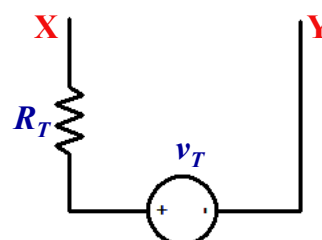
2-41

Exemplo

● Retiramos R_L e determinamos o Equivalente de Thévenin entre os terminais **X** e **Y**.



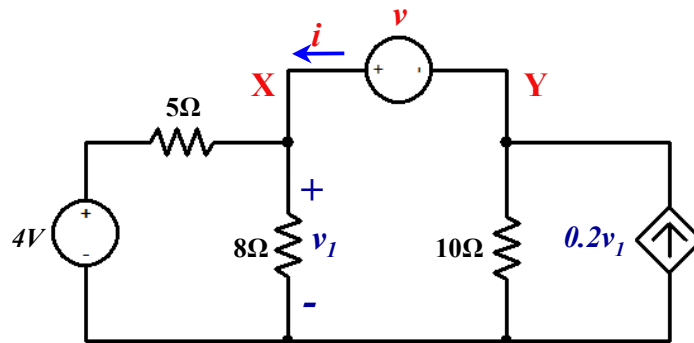
Equivalente de Thévenin



2-42

Exemplo

- Como o circuito tem uma fonte dependente, teremos de usar o **Método Universal**;



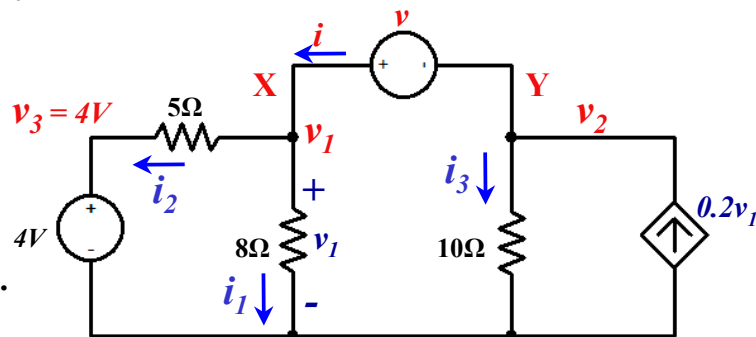
- Agora o objectivo é determinar uma relação matemática de v em função de i , com a forma

$$v = ai + b$$

2-43

Exemplo

- Vamos fazer uma **Análise Nodal**;
- Marcamos correntes.
- Aplicando KCL:



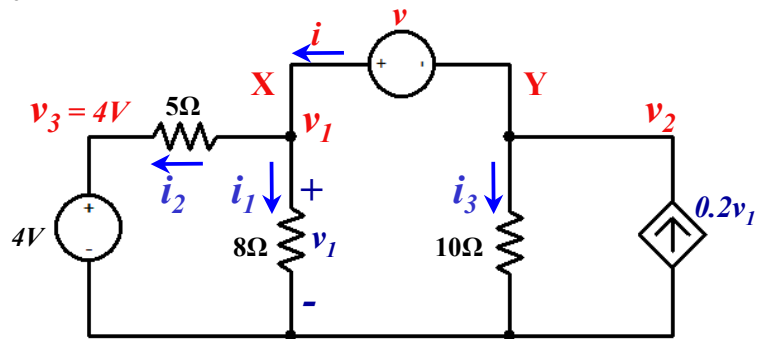
$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ 0.2v_1 = i + i_3 \end{cases} \quad \text{e KVL: } v_1 - v_2 = v$$

$$\begin{cases} i = \frac{v_1}{8} + \frac{v_1 - 4}{5} \\ 0.2v_1 = i + \frac{v_2}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{13}(40i + 32) \\ v_2 &= \frac{64}{13} - \frac{64}{13}i \end{aligned}$$

2-44

Exemplo

- Substituindo as duas equações na de v :



$$v_1 - v_2 = v \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{13}(40i + 32) - \left(\frac{64}{13} - \frac{64}{13}i \right) = v$$

- De onde tiramos a expressão apenas com v e i , como pretendido

$$v = \frac{90}{13}i - \frac{32}{13}$$

2-45

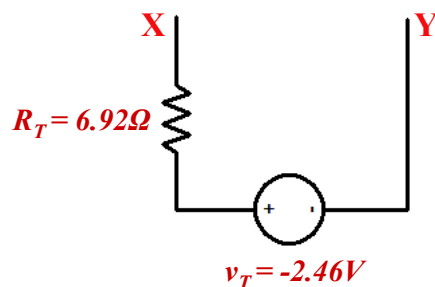
Exemplo

$$v = \frac{90}{13}i - \frac{32}{13}$$

$$v = 6.92i - 2.46$$

$$v = ai + b$$

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

Equivalente de Thévenin

2-46