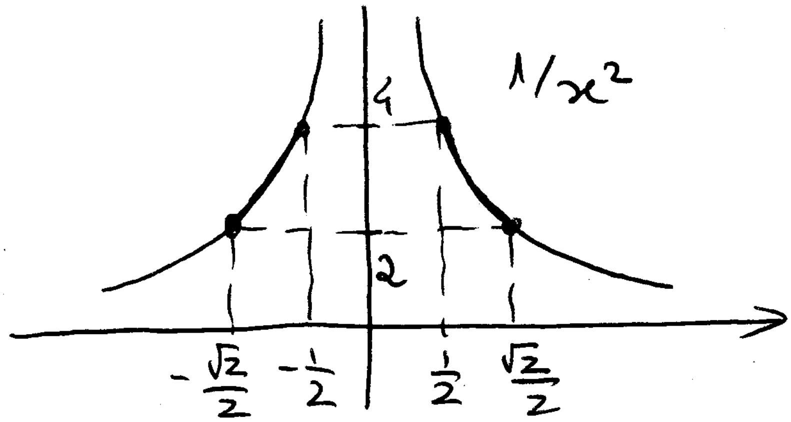
1.

(a) $-1 \leq \frac{1}{x^2} - 3 \leq 1$

$2 \leq \frac{1}{x^2} \leq 4$



$\frac{1}{x^2} = 4$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$\frac{1}{x^2} = 2$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$D_f = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(b) f é diferenciável em $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x^2}-3\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}-3\right)^2}} = -\frac{-2x^{-3}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}-3\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{x^3\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}-3\right)^2}} \neq 0$$

f não tem pontos críticos.

Pelo T. de Fermat e pelo T de Weierstrass os extremantes de f são $\pm\frac{1}{2}$ e $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, os extremos de f são $f(\pm\frac{1}{2})$ e $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$

Minimizante $f(\pm\frac{1}{2}) = \pi - \arcsen(4-3) = \pi/2 \rightarrow$ Mínimo absoluto

Maximizante $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \pi - \arcsen(2-3) = \frac{3\pi}{2} \rightarrow$ Máximo absoluto

2.

(a) $\int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx = x \cdot \frac{-1}{2(x^2+1)} - \int \frac{-1}{2(x^2+1)}\, dx =$

$= -\frac{x}{2}\, \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x + C$, em intervalos

2.

(b) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 - 3x + 2) = (x-0)^2 (x-2)(x-1)$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$

$$\frac{4}{x^4 - 3x^3 + 2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-1}$$

$$4 = A\, x(x^2 - 3x + 2) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x^3 - x^2) + D(x^3 - 2x^2)$$

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ -3A + B - C - 2D = 0 \\ 2A - 3B = 0 \\ 2B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C + D = -3 \\ C + 2D = -9 + 2 = -7 \\ A = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \\ B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = -4 \end{cases}$$

$\int \frac{4}{x^4 - 3x^3 + 2x^2}\, dx = 3 \ln|x| - \frac{2}{x} + \ln|x-2| - 4 \ln|x-1| + C$,

em intervalos

2.

(c) $\int \sqrt{\sqrt{x-1}-1}\, dx = \int \sqrt{t-1} \cdot (2t)\, dt = \cancel{\circledast}$

$x = t^2+1$, $t > 1$ $\Rightarrow$ $t^2 = x-1$ $\Rightarrow$ $t = \sqrt{x-1}$

$\frac{dx}{dt} = 2t > 0 \quad \forall_{t>1}$

$\cancel{\circledast} = \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} \cdot (2t) - \int \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} \cdot 2\, dt =$

$= \frac{4}{3} t (t-1)^{3/2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot (t-1)^{5/2} + C$

$= \frac{4}{15} (t-1)^{3/2} (3t+2) + C$

$= \frac{4}{15} \left(\sqrt{x-1}-1\right)^{3/2} \left(3\sqrt{x-1}+2\right) + C$, em intervalos

3. Teorema de Lagrange:

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é regular, então $\exists c\in]a,b[: f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ regular e $F(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$,
$\forall x\in[a,b]$.

(a) F é contínua em $[a,b]$ porque é a diferença de duas funções contínuas (f por hipótese; a outra por ser polinomial).

F é diferenciável em $]a,b[$ porque é a diferença de duas funções diferenciáveis (f por hipótese; a outra por ser polinomial).

$\therefore F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é regular.

$$F(a)=F(b)\Leftrightarrow f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b$$

$$\Leftrightarrow f(a)-f(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-b)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{f(a)}-\cancel{f(b)}=-\cancel{f(b)}+\cancel{f(a)}\Leftrightarrow 0=0 \checkmark$$

Assim, F obedece às hipóteses do Teorema de Rolle.

(b) $\exists c\in]a,b[: F'(c)=0$.

(c) $\forall x\in]a,b[,\ F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Para o c da alínea (b) vem então que

$$0=F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \text{i.e.,}$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

4. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = \dfrac{3}{x^2} \end{cases}$ $\begin{matrix} x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ y \neq 0 \end{matrix}$ $\begin{cases} y = 4 - \dfrac{3}{y} \\ x^2 = \dfrac{3}{y} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y^2-4y+3=0 \\ x^2 = \dfrac{3}{y} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)(y-3) = 0 \\ x^2 = \dfrac{3}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x^2 = 1 \end{cases}$

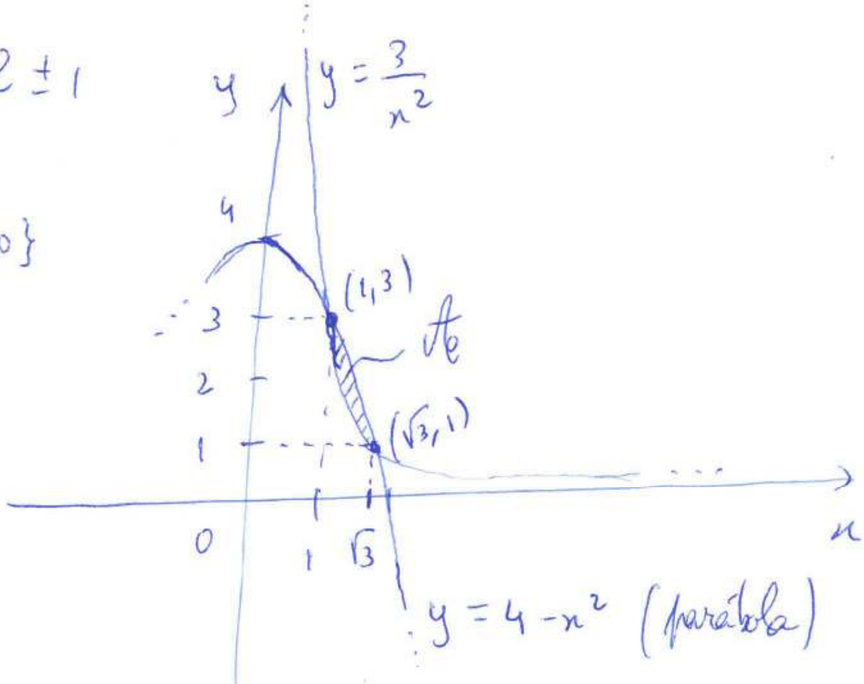
$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1$$

$g(x) := \dfrac{3}{x^2} > 0 \quad \forall_{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}$

$g''(x) = \dfrac{18}{x^4} > 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$



$$\text{área}(\mathcal{A}) = \int_1^{\sqrt{3}} \left| (4-x^2) - \frac{3}{x^2} \right| dx = \int_1^{\sqrt{3}} 4 - x^2 - \frac{3}{x^2} \, dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x} \right]_1^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 4 + \frac{1}{3} - 3 = 4\sqrt{3} - \frac{20}{3}$$

$> 0{,}1 > 0$

5.

(a) (i) $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x \ln x} = +\infty$

integral impróprio de 2.ª espécie

(ii) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = +\infty$

integral impróprio de 2.ª espécie

(b)

(i) $\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x \ln x} dx =$

$= \lim_{t \to 1^+} \left[\ln(\ln x) \right]_t^2 = \ln(\ln 2) - \lim_{t \to 1^+} \ln(\ln t) =$

$= \ln(\ln 2) - (-\infty) = +\infty$ <u>diverge</u>

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^{3/5}} dx = \lim_{t \to 0^+} \frac{5}{2} \left[x^{2/5} \right]_t^1 =$

$= \lim_{t \to 0^+} \frac{5}{2} \left(1^{2/5} - t^{2/5} \right) = \frac{5}{2} \cdot 1 - \frac{5}{2} \lim_{t \to 0^+} t^{2/5} = \frac{5}{2} - 0$

$= 5/2$ <u>Converge</u> $\left(\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge se } (0<)\, \alpha < 1 \right.$
pelo exercício dado nas aulas $\left. \right)$

6.

(i) $$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}^{\to 0}}{\frac{1}{n^2}} \underset{(*)}{=} 1$$

$$(*)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Pelo critério do limite (comparação por passagem ao limite) a série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ são da ~~me~~ mesma natureza. Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet de ordem 2 (>1), convergente, também $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ é convergente. Isto mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right|$ é convergente, consequentemente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ é absolutamente convergente.

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}\, 3^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}}{\frac{(-1)^n\, 3^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^2 \cdot \cancel{3^{2n}} \cdot \cancel{(2n)!}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\,\cancel{3^{2n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1.$$

Pelo critério de D'Alembert a série converge absolutamente.

(b) $$a_n = \underbrace{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3n}\right)}_{u_n} - \underbrace{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3(n+2)}\right)}_{u_{n+2}}$$ logo a série é de Mengoli

$$S_n = u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{sen}\frac{\pi}{3} + \mathrm{sen}\frac{\pi}{6} = (\sqrt{3}+1)/2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3n}\right) - \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3n+6}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

7. $$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)(x-2t)e^{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^x (x^2-3xt+2t^2)e^{t^2}\,dt$$

pois x é constante na integração

regra da derivada da soma e do produto e Teorema Fundamental do Cálculo, atendendo a que as funções integrandas são contínuas

$$= \frac{d}{dx}\left(x^2\int_0^x e^{t^2}dt - 3x\int_0^x te^{t^2}dt + 2\int_0^x t^2e^{t^2}dt\right)$$

$$= 2x\int_0^x e^{t^2}dt + \cancel{x^2e^{x^2}} - 3\int_0^x te^{t^2}dt \cancel{-3x\cdot xe^{x^2}} + \cancel{2x^2e^{x^2}}$$

$$= \int_0^x (2x-3t)e^{t^2}\,dt$$

← novamente o facto de x ser constante na integração.

<u>Observação:</u> Muitos alunos acharam que tinham resolvido esta questão fazendo

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)(x-2t)e^{t^2}dt \overset{⊛}{=} \int_0^x \frac{d}{dx}\left[(x^2-3xt+2t^2)e^{t^2}\right]dt$$

$$= \int_0^x (2x-3t)e^{t^2}dt.$$

O problema é que a passagem ⊛ acima não está justificada e nem sequer faz sentido pois $\int_0^x \dots$ depende logo de x no limite superior. O facto de aparentemente funcionar e "levar" ao mesmo resultado é "apenas" coincidência.

Por exemplo, $\frac{d}{dx}\int_0^x (x+t)e^{t^2}dt = \int_0^x e^{t^2}dt + 2xe^{x^2}$, usando o processo correto do início desta página, enquanto que a "álgebrice" do início desta observação levaria a $\int_0^x e^{t^2}dt$.