ver também *2.3 Integrais impróprios*: [*parte 1*], [*parte 2*]

1 Integrais impróprios de 1ª espécie ('simples')

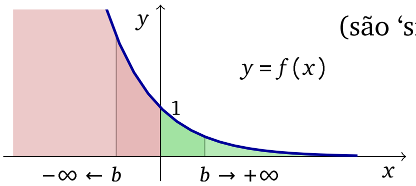
Dada $f(x) = e^{-x}$, com $x \in D_f = \mathbb{R}$, seja $F(b) = \int_0^b f(x)\,dx = 1 - e^{-b}$, $b \in D_F = \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) = 1$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} -\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} -F(b) = +\infty$$

Não são integrais de Riemann pois o intervalo de integração não é limitado:

são impróprios de 1ª espécie



(são 'simples': <u>um limite</u> da função integral)

Exercício: Determina (a) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$ (b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4+x^2}dx$ (c) $\int_1^{+\infty} x \operatorname{sen} x^2 dx$

2 Integrais impróprios de 2ª espécie ('simples')

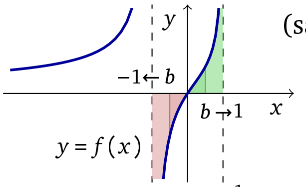
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{1+x}$, $x \in D_f =]-\infty, 1[\setminus\{-1\} \Rightarrow F(b) = \int_0^b f(x)\,dx$, $b \in D_F =]-1, 1[$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{b\to1^-} \int_0^b f(x)\,dx = \lim_{b\to1^-} F(b) = \lim_{b\to1^-} 2 - 2\sqrt{1-b} - \ln(1+b) = 2 - \ln 2$$

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \lim_{b\to-1^+} \int_b^0 f(x)\,dx = \lim_{b\to-1^+} -\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{b\to-1^+} -F(b) = -\infty$$

Não são integrais de Riemann pois a função integranda não é limitada:

são impróprios de 2ª espécie



(são 'simples': <u>um limite</u> da função integral)

Exercício: Determina (a) $\int_1^e \frac{1}{x\ln x}dx$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}dx$ (c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$

3 Integrais impróprios 'simples'

Se f é integrável em intervalos fechados $I \subseteq [\alpha,\beta[$ mas não em $[\alpha,\beta]$, porque

- $\beta \notin D_f$ ou
- $\beta = +\infty$ (integral impróprio de 1ª espécie) ou
- há uma assíntota vertical esquerda em β (integral impróprio de 2ª espécie)

então, em todos os casos, define-se o integral impróprio de f em $[\alpha, \beta]$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{b\to\beta^-} \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

Analogamente, para o extremo inferior do intervalo de integração de α a β,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{a\to\alpha^+} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

Um integral impróprio 'simples' é definido por UM limite em UM dos extremos

e é convergente se o limite existe e é finito, senão é divergente

Exercícios: calcula (a) $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}dx$ (b) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}dx$ (c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}dx$

4 Integrais impróprios de 1ª, 2ª e 3ª espécie 'gerais'

A função f pode ser não integrável no intervalo I por mais que uma razão:

- $I=\mathbb{R}$, sendo f integrável em cada $[a,b]\subseteq I$ (1ª espécie)
- f apresenta mais assíntotas verticais em $I=[a,b]$ (2ª espécie)
- f apresenta assíntotas verticais em I, que não é limitado (3ª espécie)

Então, considerando uma partição em subintervalos de $I=I_1\cup I_2\cup\cdots$ tal que

- todo o integral de f em I_i, $i=1,2,\ldots$ é impróprio, mas 'simples':
- o integral de f em I converge $\iff$ cada integral impróprio 'simples' converge
- e, neste caso, o integral de f em I obtém-se por 'aditividade'

Exemplo: pelo que foi mostrado no primeiro slide, podemos afirmar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx \text{ diverge pois } \int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx \text{ e } \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx \text{ não são ambos convergentes}$$

Exercício: (a) analisa o integral $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{1+x}\,dx$;

(b) mostra que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx$ converge para $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx+\int_c^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx=2$ (para qualquer $c>0$)

5 Análise e cálculo de integrais impróprios

Exercício: estuda a natureza (convergente ou divergente) dos integrais

$$\text{(a)}\ \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3}\,dx \qquad \text{(b)}\ \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx \qquad \text{(c)}\ \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

Nota: o integral $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+4)(x-3)^3\ln x}\,dx$ é impróprio "nos pontos" $0, 1, 3, +\infty$

assim, é necessário analisar o comportamento de $f(x)=\frac{1}{(x+4)(x-3)^3\ln x}$ em:

$]0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1[$, $]1,2]$, $[2,3[$, $]3,5]$ e $[5,+\infty[$ ($\frac{1}{2}$, 2 e 5 escolhidos *livremente*!)

f não admite primitiva 'elementar': só podemos determinar a sua natureza

por exemplo, *comparando* f com funções mais simples...

Exercício: verifica a natureza dos seguintes integrais dependentes de $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha<1\\ \text{diverge} & \text{se } \alpha\geq 1\end{cases} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1\\ \text{diverge} & \text{se } \alpha\leq 1\end{cases}$$

Resumidamente: $\frac{1}{|x-c|^\alpha}$ tem integral convergente de 1ª espécie $\iff \alpha>1$ e de 2ª espécie $\iff \alpha<1$

6 Critérios de convergência

Sejam f e g funções integráveis em $[a,x]$ para todo o $x\in[a,b[=I$.

Critério de comparação: se $f(x)\geq g(x)\geq 0$, $\forall x\in I$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ CONV.} \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \text{ CONV.} \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x)\,dx \text{ DIV.} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ DIV.}$$

Critério do limite: se $f(x)\geq 0$ e $g(x)\geq 0$, $\forall x\in I$,

- $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ têm a mesma natureza
- $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ CONV. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ CONV.
- $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ DIV. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ DIV.

Convergência absoluta: $\int_a^b |f(x)|\,dx$ CONV. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ CONV. (e esta convergência é absoluta)

se o integral de $|f|$ diverge e o de f converge, a convergência é simples

Nota: o integral impróprio de f converge se $f(b^-)\in\mathbb{R}$ (ver o exemplo seguinte)

7 Exemplos

Considere-se o integral de $f(x) = \frac{1}{(x+4)(x-3)^3 \ln x}$ apresentado no slide 5

- $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ é CONV: se $g(x) = f(x)$ em $]0, \frac{1}{2}]$ e $g(0) = f(0^+) = 0$, g é contínua e
  $\lim_{a\to 0^+} \int_a^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\,dx \in \mathbb{R}$ (a função integral é contínua)
  Repare-se que, para avaliar apenas a natureza, $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \in \mathbb{R}^+$ pela definição de g
- $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$ é DIV: $g(x) = \frac{1}{1-x} > 0$ e $f(x) \geq 0$ para $x \in [\frac{1}{2}, 1[$; pelo cr. do limite,
  $$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{40} \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx \text{ tem a natureza de } \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-x}\,dx \overset{(t=1-x)}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\,dt \quad \text{divergente}$$
- $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ é CONV: se $x \geq 5$, $0 \leq x^2 \leq (x+4)(x-3)^3 \leq (x+4)(x-3)^3 \ln x$ e, por comparação, $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx = \int_5^{+\infty} \frac{1}{(x+4)(x-3)^3 \ln x}\,dx \leq \int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CONV

8 Exercícios e alguns integrais impróprios notáveis

Exercício: determina a natureza (convergente ou divergente) de

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ (b) $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 2}dx$ (c) $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

(d) $\int_0^{2} \frac{2x-1}{\sqrt{x}\cos(\pi x)}dx$ (e) $\int_0^{2} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}-1}dx$ (f) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+\sqrt{x})}dx$

Nota: funções sem primitiva “elementar” podem ter integral impróprio
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi$$

Exercício: uma função pode ser definida através de um integral impróprio

o caso mais simples e conhecido é dado pela função $F(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$

- mostra que $D_F =]-1, +\infty[$
- prova que $F(n) = n!$ para $n \in \mathbb{N}_0$ $\qquad [F(x) = xF(x-1), x > 0 \text{ e } F(0) = 1]$
- calcula $F(-\frac{1}{2})$ e $F(\frac{1}{2})$

9 Um integral simplesmente convergente (facultativo!!)

$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge simplesmente: vamos apenas analisar $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

Convergência: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge porque
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{é convergente}$$

Divergência (do *módulo*): repare-se que $|\operatorname{sen} x| \geq |\operatorname{sen} x|^2 = \operatorname{sen}^2 x$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx = \left[\frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} -\frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)}{x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2}\,dx \quad \text{DIV}$$
$$\text{porque } \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{1}{2x} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{2b}{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2}\,dx \xrightarrow[b\to+\infty]{} \text{“}+\infty - K\text{”} = +\infty$$
pois o integral de $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2}$ converge absolutamente e tende para um numero real K

Logo, por comparação, o integral de $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \geq \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \geq 0$ diverge.

Desafio: verifica que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$