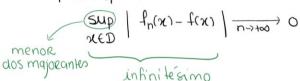
Convergência pontual e uniforme

Suassões de Funções

- f(x)_{nein} converge pontualmente paea $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x)$ $\lim_{n \to +\infty} f(x)$
- (fn(x))new converge uniformemente para f re:



O contrácio pode não per verdadi.



lonv. uniforme implica

1 23 ≠> C. Unif

Propriedades

- 1) fé continua em D= [a,b]
- @ féintegrávelem D= Ca,6] e

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a}^{b} \left[\lim_{n \to +\infty} f_{n}(x) \right] = \lim_{n \to +\infty} \left[\int_{a}^{b} f_{n}(x) dx \right]$$

3 Se $f_n(x)$ tem derivadas contínuas em $[a_1b]$ e $(f'_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ conv. uniformement em $[a_1b]$ então f e' diferenciavel em $[a_1b]$ e $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$, $\forall x \in [a_1b]$

A falha de uma das peop. (1), (2) ou (3) peova 9 7 conv. uni forme.

Séries de funções

 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente se existic limite pontual de S_n (successão das somas paraixis)

$$S_{n}(x) = \sum_{k=1}^{n} f_{k}(x)$$

$$\lim S_{n}(x) = \lim \left(\sum_{k=1}^{n} f_{k}(x) \right)$$

> basta calcular o limite e ver onde existe.

 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformement em D $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em D

Pode ser dificil!

(Muito mais faail)

Ceité eio de

weigestrass

se existe (an) new convergente:



O contra eio pode não see verdado

Propriedado

Propriedados

Propriedados

1) S(x) e' continua em [a,b]

- ② Se integravel em [a,b] e: $\int_{a}^{b} s(x) dx = \int_{a}^{b} \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{a}^{b} f_{n}(x) dx \right)$
- (integração kemoa kemo)

 3 se cada f_n e diferenciavel em [a,b] e

 2 f'_n(x) converge uniformemente em [a,b]
 então s(x) e diferenciavel em [a,b] e:

$$S^{1}(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{n}(x)\right)^{1} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n}(x)$$

(decivação termo a termo)

Séries de Fourier

$$f(x) \sim$$

Fórmula geral:
$$f(x) \sim \frac{a_0}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

função 21 - periódica



Se f não tiver periodo dπ, mas sim periodo T então :

$$\frac{F(x)}{\sqrt{x}} = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$$

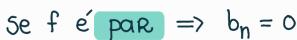
211- periodica

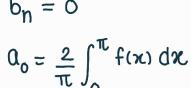
Coeficientes de Fourier:

$$\Rightarrow 0_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$Q_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx$$





$$Q_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

5e f e'impar $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

A serie de Fourier nem sempre converge para a propria função.

Mas quais são as condições para que a soma da série de Fourier coincida com a função f?

Teoremade Sejam f: IR -> IR uma função 277-periódica e Dirichlet: seccionalmente diferenciável em IR e ce IR. Então a serie de fourier converge no ponto c para:

Quando existe uma paetição do intervalo [a,b] em que a função decivada se vezifica

$$\frac{f(c^{+}) + f(c^{-})}{2}$$

$$\lim_{\chi \to c^{-}} f(\chi)$$

$$\lim_{\chi \to c^{+}} f(\chi)$$

contínua em

todos os

subintervalos

abertos da partição]aj-1,aj [(j=0,1,...,n) e ainda se existem

e são finitos

os limites laterais:

$$f(a_{j-1}^{+}) = \lim_{x \to a_{j-1}^{+}} f(x)$$

$$e \qquad f(a_{j-1}^{-}) = \lim_{x \to a_{j-1}^{+}} f(x)$$

• Se f e' continua em x=c, então:

$$S(c) = \frac{f(c^{+}) + f(c^{-})}{2} = \frac{2 f(c)}{2} = f(c)$$

$$\lim_{x \to c^{+}} f(x) = \lim_{x \to c^{-}} f(x) = f(c)$$

Se f ñ é contínua em x=c, então:

$$S(c) = \frac{f(c^+) + f(c^-)}{2} = \text{valor médio dos}$$

limites laterais

Miscelânea de exercícios Capítulo 2

- [35] Considere $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (a) Desenvolva a função f em série de MacLaurin.
- (b) Use a série obtida em (a) para mostrar que $f'(x) = -2x e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- [50] Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de periodo 2π , definida no intervalo $[-\pi,\pi[\text{ por } f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \\ \pi-x, & \text{se } 0 \leq x < \pi. \end{array} \right.$
- (a) Sabendo que a série de Fourier de f tem a forma

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi (2n-1)^2} \cos((2n-1)x) + b_n \sin(nx) \right],$$

calcule os coeficientes b_n , $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Sendo S a função soma da série anterior, justifique que $S(0)=\frac{\pi}{2}$ e represente-a graficamente no intervalo $[-2\pi,2\pi]$.
- (c) Usando a série de Fourier obtida, prove que $\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2}$.
- [30] Considere a série de potências $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \, 2^{n-1}}$.
- (a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.
- (b) Determine a soma S(x).

(Sugestão: Comece por identificar a derivada S'(x) e tenha em conta o valor de S(1))

[10] Determine a série de Fourier de co-senos da função f definida em $[0,\pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad 0 \le x \le 1, \\ 0, & se \quad 1 < x \le \pi. \end{cases}$$

- [35] Considere a função dada por $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.
- (a) Represente em série de MacLaurin as funções f e f' (indicando os respetivos intervalos de convergência).
- (b) Calcule a soma da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+3)}{n!}.$

- [30] Considere a função f definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|(\pi |x|)$.
- (a) Justifique que a série de Fourier de f é uma série de cossenos, ou seja, da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad (a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0)$$

e calcule o coeficiente a_0 que figura nesta série.

(b) Sabendo agora que a série de Fourier de f é

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2},$$

mostre que esta série converge uniformemente em $[-\pi,\pi]$ e indique a sua função soma.

(c) Usando o resultado da alínea anterior, prove que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

- [50] Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n} x^n$.
- (a) Determine o domínio de convergência da série.
- (b) Justifique que

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \,, \quad \text{ para todo o } x \in]-1,1[.$$

[Sugestão: use convenientemente um dos desenvolvimentos indicados no formulário]

- (c) Usando a representação indicada da alínea (b), determine a soma f(x) da série dada (no respetivo intervalo de convergência).
- [35] Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (4x-1)^n$.
- (a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.
- (b) Mostre que $f'(x) = \frac{1}{x}$ (para todo o x no intervalo de convergência da série).
- [20] Determine a série de Fourier de cossenos da função f, definida em $[0,\pi]$ por f(x)=x.

[40] Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n3^n}$.

- (a) Determine o domínio de convergência da série, indicando os pontos onde a convergência é simples e os pontos onde a convergência é absoluta.
- (b) Calcule a soma f(x). (Sug.: comece por identificar a função derivada de f.)
- [20] Represente em série de MacLaurin a função $f(x)=\frac{x}{(1-x^2)^2}$, indicando o maior intervalo onde tal representação é válida.

(Sug.: comece por representar $\frac{1}{1-x^2}$ e derive a série correspondente)

[40] Seja
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n} (x+3)^n$$
.

- (a) Determine o domínio de convergência da série dada, indicando os pontos onde a convergência é simples e absoluta.
- (b) Explicite a soma f(x) da série.

Bom trabalho! Filipa Santana