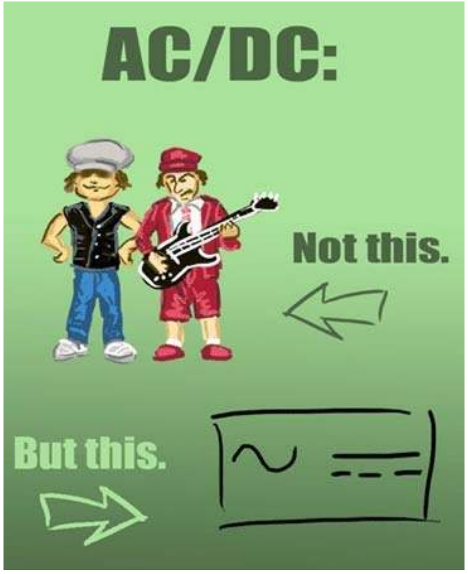


Sinais e Sistemas Electrónicos

Problemas resolvidos IV

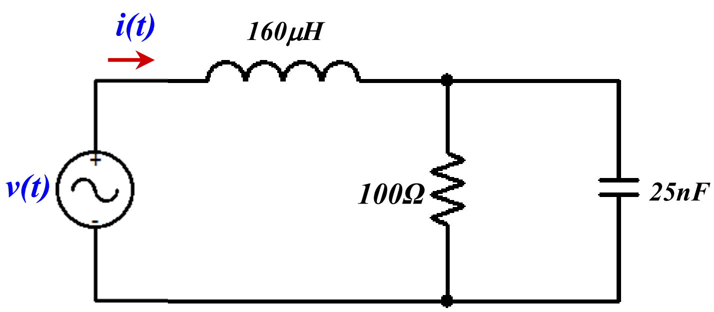
Ernesto Martins
evm@ua.pt
DETI (gab. 4.2.38)
Universidade de Aveiro

Circuitos em regime sinusoidal

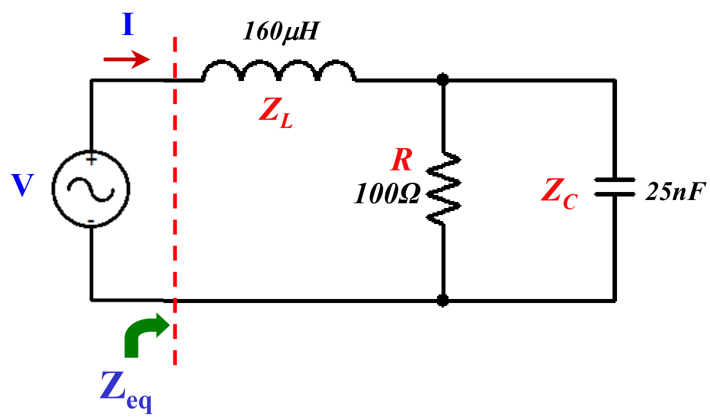
1 – Para o circuito representado, calcule

a) **a frequência para a qual a tensão sinusoidal *v(t)* está em fase com *i(t)*;**

b) **a impedância total *vista* pela fonte *v(t)* a essa frequência.**



Com fasores:



I e V relacionam-se por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z_{eq}}}$$

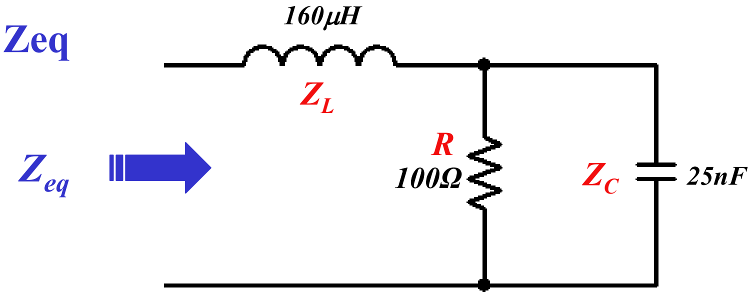
Para que os fasores I e V tenham o mesmo angulo (de forma a ter *v(t)* e *i(t)* em fase) é preciso que Zeq seja um numero real.

Zeq tem de ser, portanto, uma impedância resistiva.

a) Calculemos então Zeq

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$



$$Z_{eq} = Z_L + (R // Z_C) = j\omega L + \frac{R(1/j\omega C)}{R + (1/j\omega C)}$$

Multiplicando a fracção pelo complexo conjugado do denominador e simplificando, obtemos

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega\left[\left(\omega^2R^2C^2 + 1\right)L - R^2C\right]}{\omega^2R^2C^2 + 1}$$

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega\left[\left(\omega^2R^2C^2 + 1\right)L - R^2C\right]}{\omega^2R^2C^2 + 1}$$

Para que Z_{eq} seja real, é preciso que a parte imaginária seja nula, donde

$$\omega\left[\left(\omega^2R^2C^2 + 1\right)L - R^2C\right] = 0$$

portanto

$$\omega = 0 \quad \vee \quad \left[\left(\omega^2R^2C^2 + 1\right)L - R^2C\right] = 0$$

Resolvendo a segunda igualdade em ordem a ω…

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2C^2}}$$

L = 160µH,
R = 100Ω
C= 25nF

$$\omega = 300 Krad/s$$

$$f = 47.7 KHz$$

b) impedância à frequência ω calculada?

$$Z_{eq} = \frac{R + j\omega\left[\left(\omega^2 R^2 C^2 + 1\right)L - R^2 C\right]}{\omega^2 R^2 C^2 + 1}$$

A *300krad/s* a parte imaginária da impedância é nula pelo que fica

$$Z_{eq(300Krad/s)} = \frac{R}{\left(0.3\text{x}10^6\right)^2 R^2 C^2 + 1}$$

Substituindo valores obtemos

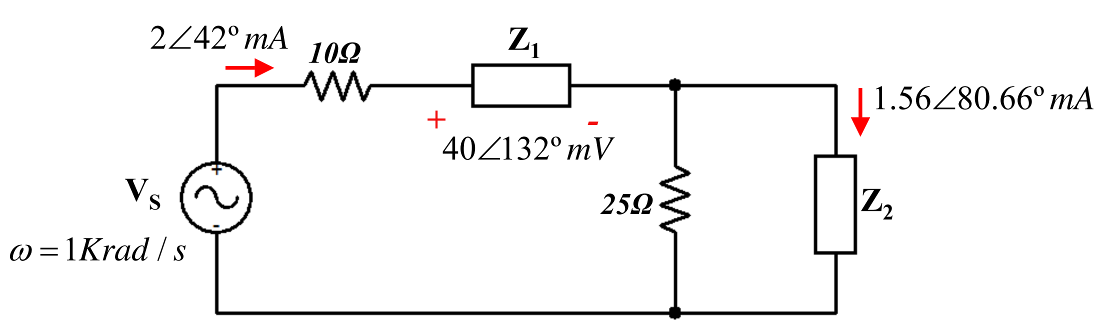
$$Z_{eq(300Krad/s)} = 64\Omega$$

2 – Considere o circuito representado na figura.

a) De que tipo (resistência, condensador ou bobina) é o elemento Z_1.

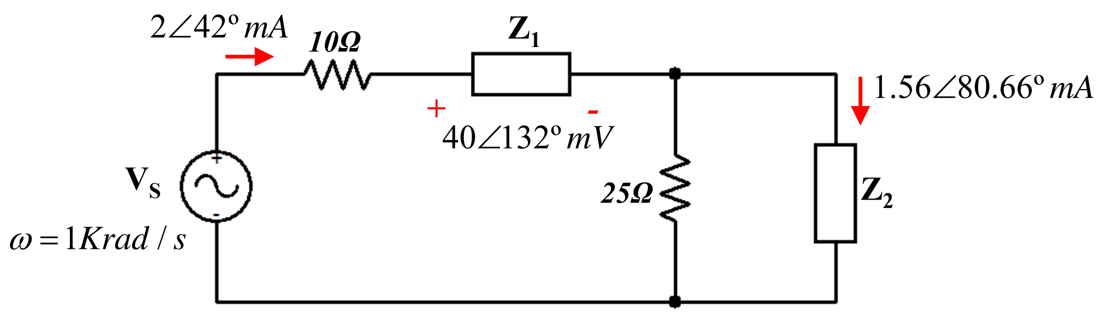
b) Determine o seu valor.

c) Calcule o valor de Z_2.



Ficha "Circuitos em regime sinusoidal", prob. 2.

a) Tipo de $\mathbf{Z}_1$?



$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{40\angle 132^{o}}{2\angle 42^{o}} = 20\angle 90^{o}\,\Omega$$

Com uma fase de *90º*, $\mathbf{Z}_1$ tem de ser uma bobina

b) Valor de $\mathbf{Z}_1$? $\mathbf{Z}_1 = 20\angle 90^{o}\,\Omega = j20\Omega \quad = j\omega L$

Com *ω = 1Krad/s*, vem *L = 20mH*

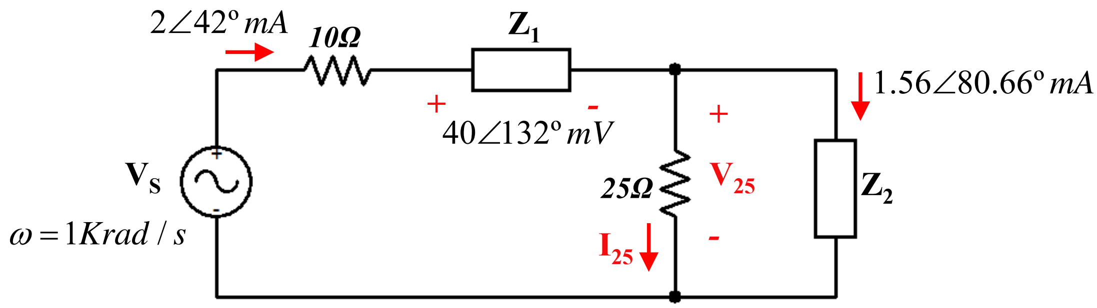
Antes de resolver a alínea c) recordemos a…

***Fórmula de Euler*:**

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

… que iremos usar para converter fasores da forma polar para a representação algébrica.

c) Valor de $\mathbf{Z}_2$?



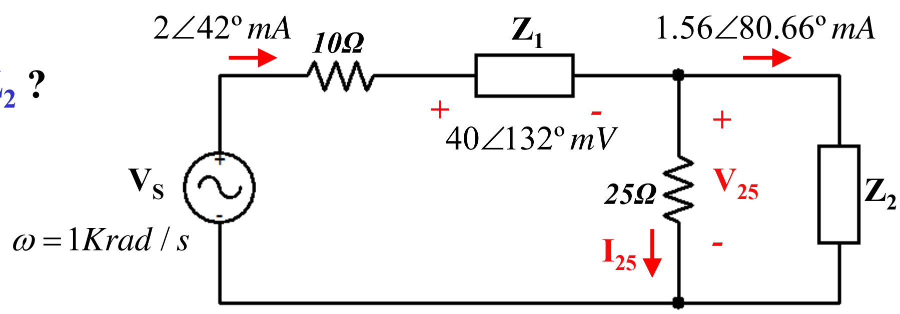
Usando KCL: $\mathbf{I}_{25} = 2\angle 42^o - 1.56\angle 80.66^o$

$$= 2(\cos 42^o + j\sin 42^o) - 1.56(\cos 80.66^o + j\sin 80.66^o)$$

$$= 1.233 - j0.2\ [mA]$$

$$\mathbf{V}_{25} = 25\mathbf{I}_{25} = 30.83 - j5\ [mV]$$

c) Valor de $\mathbf{Z}_2$?



$$\mathbf{V}_{25} = 30.83 - j5\ [mV]$$

$$\mathbf{V}_{25} = \sqrt{30.83^2 + (-5)^2}\angle arctg(-5/30.83) = 31.23\angle -9.21^o\ [mV]$$

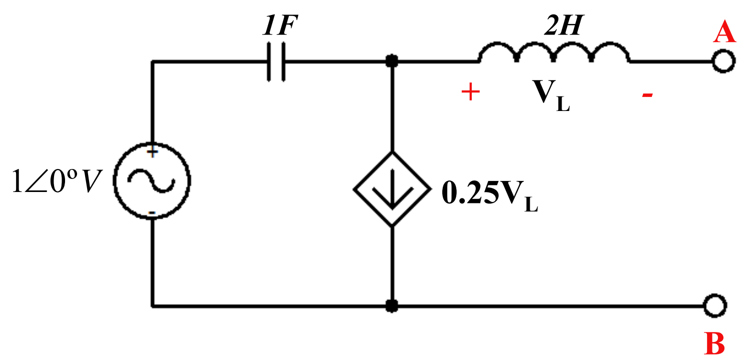
$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{V}_{25}}{1.56\angle 80.66^o} = 20\angle -90^o\,\Omega$$

Com uma fase de -*90º*, $\mathbf{Z}_2$ tem de ser um condensador

$$\mathbf{Z}_2 = -j20\Omega = 1/j\omega C$$

Com *ω = 1Krad/s*, vem *C = 50μF*

3 – Calcule o equivalente de Thévenin entre os terminais A e B, considerando $\omega = 1rad/s$.

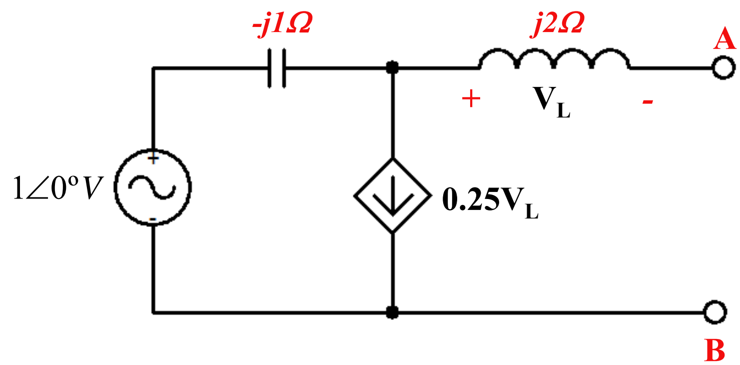


Ficha "Circuitos em regime sinusoidal", prob. 6.

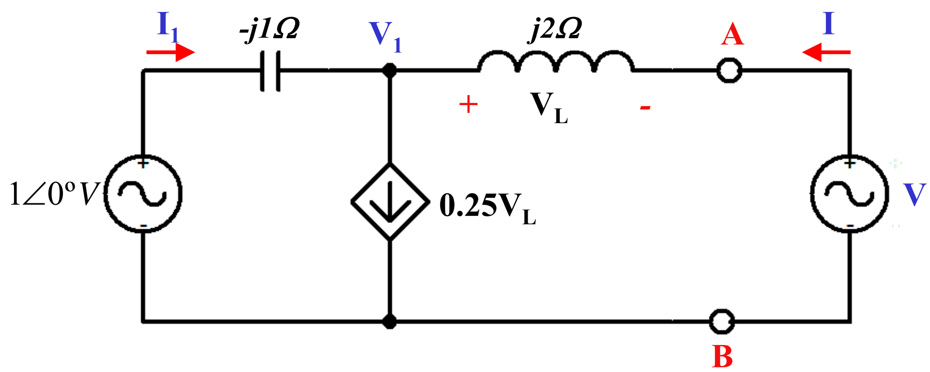
Calculamos primeiro as impedâncias do condensador e da bobina

$$\omega = 1rad/s \qquad \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{1\text{x}1} = -j1\Omega$$

$$j\omega L = j1\text{x}2 = j2\Omega$$



Calculamos agora o equivalente pelo método universal

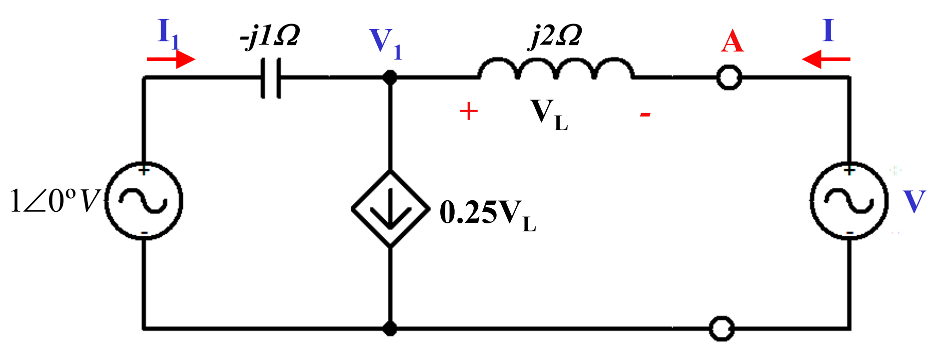


Usando KCL no nó $\mathbf{V_1}$: $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I} = 0.25\mathbf{V_L} \quad \Leftrightarrow \dfrac{1-\mathbf{V_1}}{-j} + \mathbf{I} = 0.25\mathbf{V_L}$

Sabendo que $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{V_L}$ **e** $\mathbf{V_L} = -j2\mathbf{I}$

Substituindo estas igualdades em cima $j[1-(\mathbf{V} - j2\mathbf{I})] + \mathbf{I} = 0.25(-j2\mathbf{I})$

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2022/2023



$$j[1-(\mathbf{V} - j2\mathbf{I})] + \mathbf{I} = 0.25(-j2\mathbf{I})$$

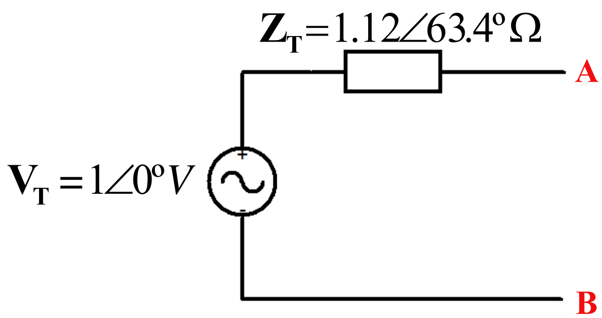
De onde se obtém $\mathbf{V} = (0.5 + j)\mathbf{I} + 1$

Dos coeficientes da equação tiramos

$$\mathbf{Z_T} = (0.5 + j)\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{V_T} = 1V$$

ou $$\mathbf{Z_T} = 1.12\angle 63.4^o \Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{V_T} = 1\angle 0^o V$$

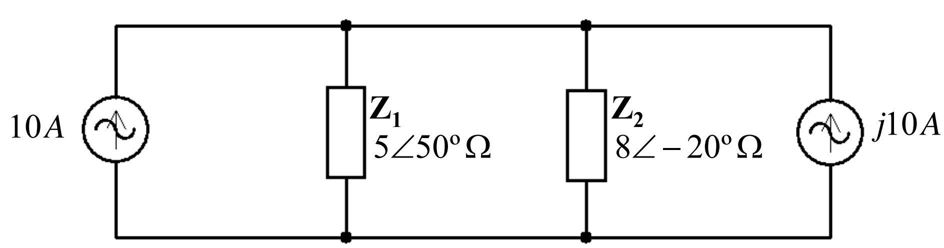
Equivalente de Thévenin



4 – Relativamente ao circuito abaixo, calcule as potências médias…

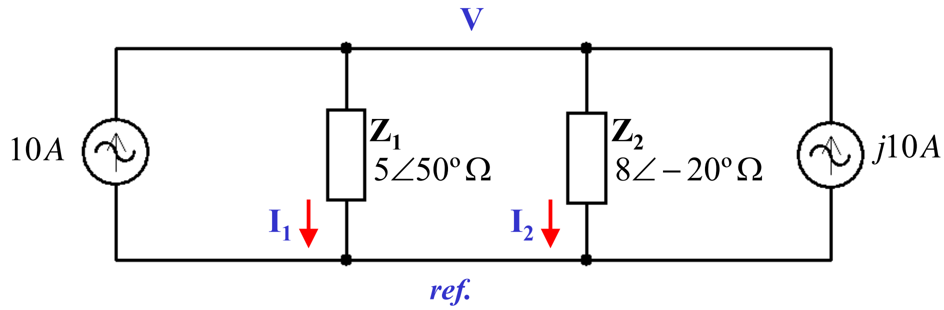
a) … dissipadas em $\mathbf{Z_1}$ e $\mathbf{Z_2}$;

b) … fornecidas pelas fontes.



Ficha "Circuitos em regime sinusoidal", prob. 7.

Usando análise nodal, começamos por determinar a tensão V no circuito



$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 10 + j10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathbf{V}}{5\angle 50^\circ} + \frac{\mathbf{V}}{8\angle -20^\circ} = 10(1+j)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8/5\angle -70^\circ\,\mathbf{V}}{8\angle -20^\circ} + \frac{\mathbf{V}}{8\angle -20^\circ} = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}(1 + 8/5\angle -70^\circ) = 80\sqrt{2}\angle 25^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}(1 + 8/5\angle -70^\circ) = 80\sqrt{2}\angle 25^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}\left[1 + (8/5)(\cos(-70^\circ) + j\sin(-70^\circ))\right] = 80\sqrt{2}\angle 25^\circ$$

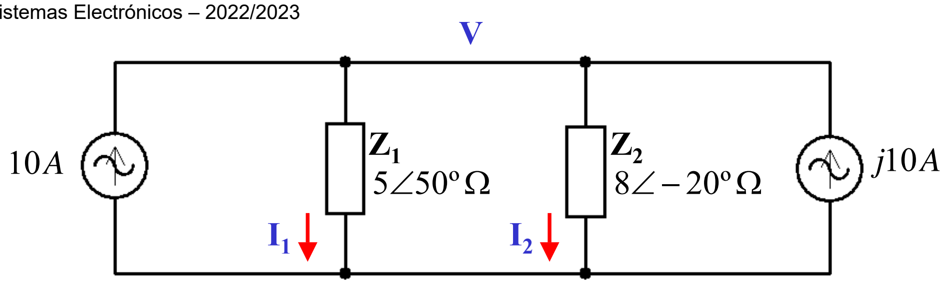
$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{V}(1.55 - j1.5) = 80\sqrt{2}\angle 25^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = \frac{80\sqrt{2}\angle 25^\circ}{2.16\angle -44.1^\circ} = 52.5\angle 69.1^\circ V$$

A potência média num elemento de circuito é dada por

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

Sendo θ e ϕ as fases da tensão e corrente, respectivamente.



Note-se que para obter as potência em $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ não precisamos de calcular as correntes respectivas, dado que:

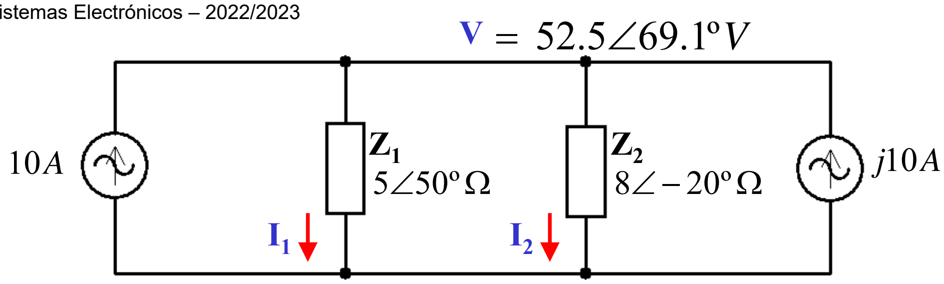
$$\Leftrightarrow \ \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \ \Leftrightarrow \ |Z|\angle Z = \frac{V_m}{I_m}\angle(\theta - \phi)$$

Pelo que

$$I_m = \frac{V_m}{|Z|} \quad \mathbf{e} \quad (\theta - \phi) = \angle Z$$

e portanto

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi) = \frac{1}{2}\frac{V_m^{\ 2}}{|Z|}\cos(\angle Z)$$



$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{V_m^{\ 2}}{|Z_1|}\cos(\angle Z_1) = \frac{1}{2}\frac{52.5^2}{5}\cos(50^o) = 177.2W$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{52.5^2}{8}\cos(-20^o) = 161.9W$$

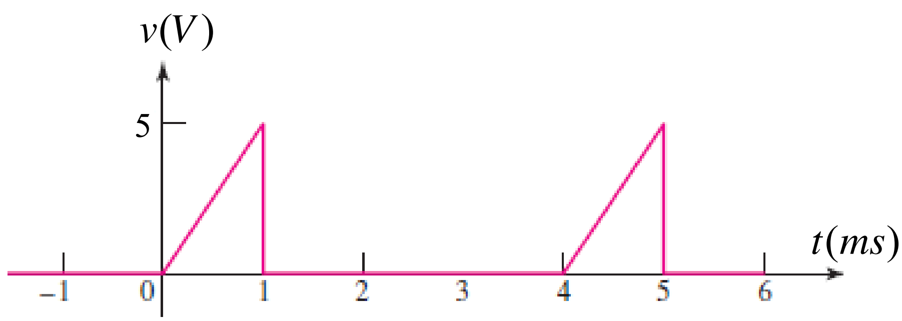
Potências absorvidas

$$P_{10} = \frac{1}{2}(52.5)(10)\cos(69.1^o - 0) = 93.6W$$

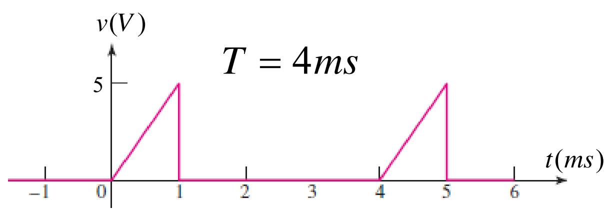
$$P_{j10} = \frac{1}{2}(52.5)(10)\cos(69.1^o - 90^o) = 245.3W$$

Potências fornecidas

5 – Determine os valores médio e eficaz da tensão periódica representada na figura abaixo.



Ficha "Circuitos em regime sinusoidal", prob. 10-b).



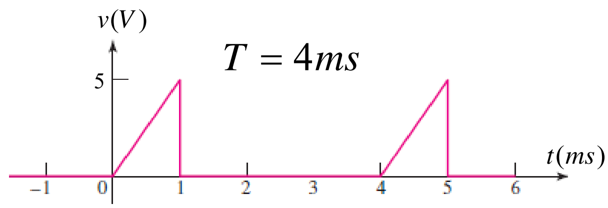
No período que vai de *0* a *4ms*, a tensão *v(t)* é dada algebricamente por:

$$v(t) = \begin{cases} 5000t\,[V] & 0 < t < 1ms \\ 0\text{V} & 1 < t < 4ms \end{cases}$$

Valor médio de *v(t)*:

$$\overline{v(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = \frac{1}{4\text{x}10^{-3}}\int_0^{1ms}(5000t)dt$$

$$\overline{v(t)} = \frac{1}{4\text{x}10^{-3}}\,5000\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{1ms} = 625mV$$



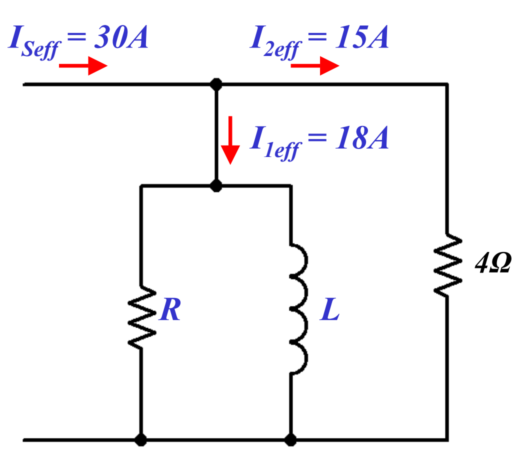
Valor eficaz de *v(t)*:

$$v_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{4x10^{-3}}\int_0^{1ms} (5000t)^2\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4x10^{-3}}\left(25x10^6\right)\frac{t^3}{3}\Big|_0^{1ms}} = \sqrt{\frac{6.25}{3}}$$

$$v_{eff} = 1.44V$$

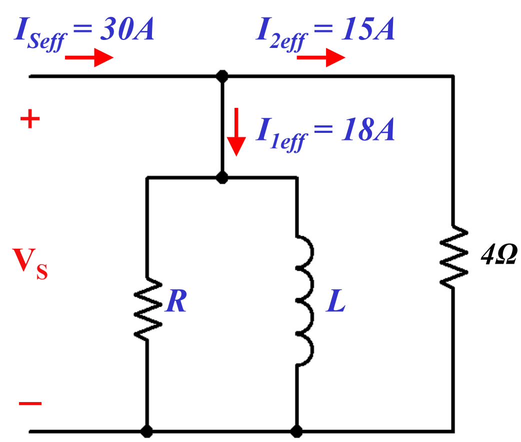
6 – Considere o circuito representado na figura e as correntes indicadas com os respectivos valores eficazes. Calcule *R* e o valor da impedância de *L*.



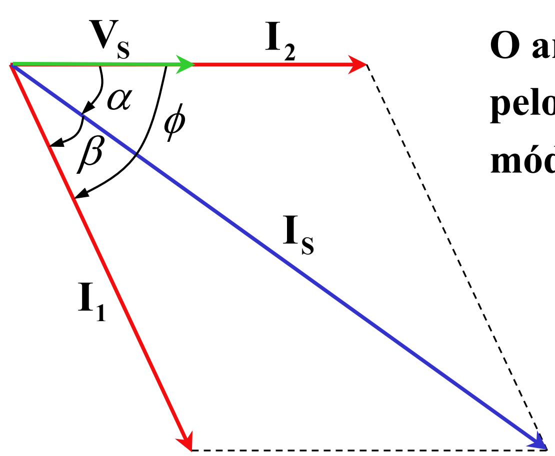
Ficha "Circuitos em regime sinusoidal 2", prob. 7.

Este problema resolve-se melhor começando por traçar um diagrama fasorial. Para o fazer, note-se que:

- **O fasor I_2 tem de estar em fase com V_S;**
- **Como o paralelo de R e L é indutivo, o fasor I_1 tem de estar em atraso relativamente a V_S;**
- **Finalmente, $I_S = I_1 + I_2$.**



O diagrama fasorial deverá ser portanto



O angulo α pode ser determinado pelo teorema do coseno, partindo do módulo dos vectores:

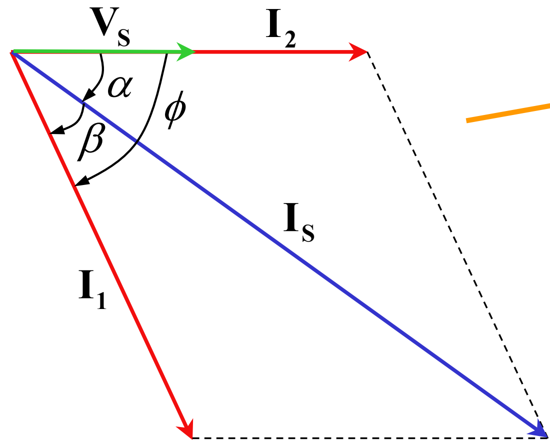
$$\mathbf{I}_1^{\,2} = \mathbf{I}_2^{\,2} + \mathbf{I}_S^{\,2} - 2\mathbf{I}_2\mathbf{I}_S \cos\alpha$$

$$\alpha = \arccos\frac{15^2 + 30^2 - 18^2}{2\text{x}15\text{x}30}$$

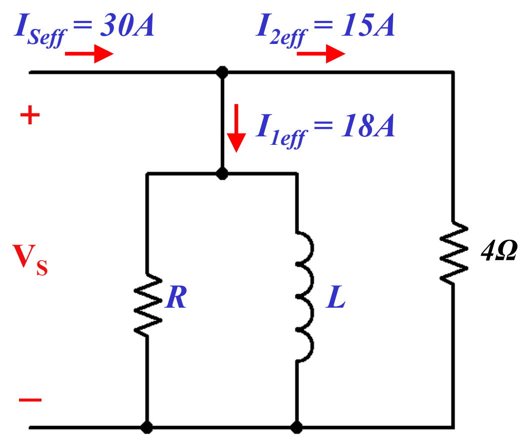
$$\alpha = 27.13^{\text{o}}$$

O angulo β é calculado da mesma maneira:

$$\mathbf{I}_2^{\,2} = \mathbf{I}_1^{\,2} + \mathbf{I}_S^{\,2} - 2\mathbf{I}_1\mathbf{I}_S \cos\beta \;\Rightarrow\; \beta = \arccos\frac{30^2 + 18^2 - 15^2}{2\text{x}18\text{x}30} = 22.33^{\text{o}}$$



$$\phi = \alpha + \beta = 49.5^{o}$$

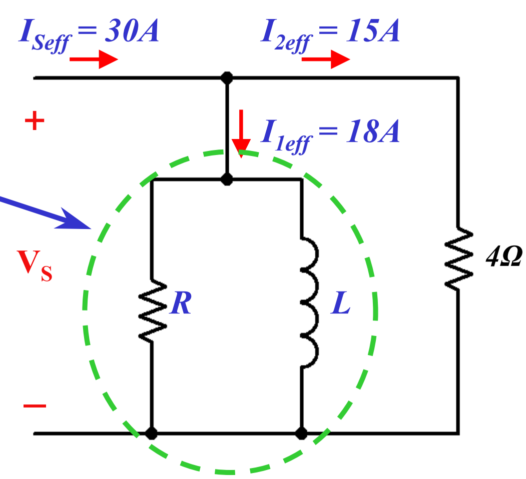


Os fasores $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{V_S}$ são

$$\mathbf{I}_1 = 18\sqrt{2}\angle -49.5^{o}\, A$$

$$\mathbf{V}_S = (4\Omega)\mathbf{I}_2 = 60\sqrt{2}\angle 0^{o}\, V$$

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_S} = \mathbf{Y}_T$$



$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_S} = \frac{18\sqrt{2}\angle -49.5^{o}}{60\sqrt{2}\angle 0^{o}}$$

$$= 0.3\angle -49.5^{o}$$

$$= (0.195 - j0.228)\Omega^{-1}$$

igualando…

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = 0.195 - j0.228$$

$$R = \frac{1}{0.195} = 5.13\Omega \qquad X_L = \frac{1}{0.228} = 4.39\Omega$$