Nome: nº de estudante:

Declaro que desisto:

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - SE **2020/21**

2º teste Duração: 1h30

- Este exame contém **4 questões** no total, com uma questão por folha. O enunciado do exame contém no total 5 folhas numeradas de 0 até 4. Na página inicial (esta página, pág. 0) encontras também a cotação e formulários.
- Cada pergunta deve ser respondida na **respetiva folha do enunciado**, na frente ou no verso. Se necessário podes usar folhas de continuação mas tens de dizer qual é a questão a que estás a responder.
- **Não podes misturar respostas a diferentes perguntas** na mesma folha. Por exemplo, não podes responder a parte da pergunta 2 na mesma folha da questão 1, e vice-versa.
- Deves identificar todas as folhas que usares com o teu **nome e nº de estudante**. Deves indicar no enunciado de cada pergunta **quantas folhas de continuação** usaste para essa pergunta. Repete essa informação na tabela em baixo.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente **justificados** e todas as respostas devem ser **cuidadosamente redigidas**.

Cotação:
1. 4; 2. 6; 3. 7; 4. 3.

Número de folhas de continuação:

Questão 1: ☐ **Questão 2**: ☐ **Questão 3**: ☐

Questão 4: ☐

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ \ m \in \mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ \ n \in \mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\log_a \lvert u(x) \rvert,\ \ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ \ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)} u'(x) \ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1+\tan^2 u = \sec^2 u$	$1+\operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1-u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1-u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u-e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 1).

1. Calcula $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,(1+e^{\sqrt{x}})}\,dx$.

   Sugestão: Começa por fazer a mudança de variável definida por $x = t^2$, $t > 0$.

   Resposta à questão 1:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 2).

2. Seja $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - x - 2 \leq y \leq 1 - |x|\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = x^2 - x - 2$ e de $y = 1 - |x|$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1, 0)$ e $(\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

Resposta à questão 2:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 3).

3. Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n^2-10n+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$.

Resposta à questão 3:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: ☐ (Questão 4).

4. Considera os gráficos das funções $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

   (a) Qual o valor da área da superfície compreendida entre os dois gráficos quando x varia de 0 a 1? Não te esqueças de justificar a tua resposta.

   (b) Qual o valor da área da superfície compreendida entre os dois gráficos quando x varia de 1 a ∞? Não te esqueças de justificar a tua resposta.

Resposta à questão 4: