Exercício 4

Alínea a)

- Interseção das curvas $y = 0$ e $y = \sqrt{x}$:

$$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Logo, intersetam-se no ponto $(0, 0)$.

- Interseção das curvas $y = 0$ e $y = 2 - x$:

$$2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Logo, intersetam-se no ponto $(2, 0)$.

- Interseção das curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = 2 - x$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} = 2 - x \quad &\Rightarrow \quad x = (2-x)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 4 - 4x + x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 4 \vee x = 1
\end{aligned}$$

Verificação:
- se $x = 1$, $\sqrt{1} = 2 - 1 \rightarrow$ proposição verdadeira
- se $x = 4$, $\sqrt{4} = 2 - 4 \rightarrow$ proposição falsa.

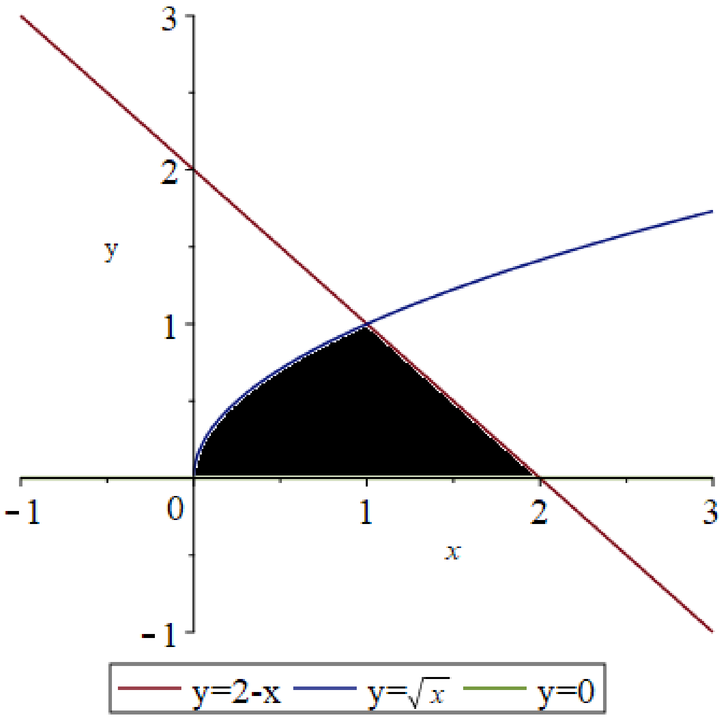
Logo, a equação $\sqrt{x} = 2 - x$ só é verdadeira para $x = 1$. Substituíndo, obtemos $y = \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$, e concluímos que as curvas se intersetam no ponto $(1, 1)$.

NOTA: em alternativa, pode fazer-se a mudança de variável $t = \sqrt{x}$ (logo $t \geq 0$) e resolver-se a equação:

$$t = 2 - t^2 \wedge t \geq 0,$$

de onde se obtém $t = 1$.

Alínea b)



Alínea c)

Da alínea anterior verificamos que para $x \in [0,1]$, a região fica compreendida entre as curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = 0$ e para $x \in [1,2]$, a região fica compreendida as curvas $y = x - 2$ e $y = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 |\sqrt{x} - 0| dx + \int_1^2 |2 - x - 0| dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx \\
&= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\
&= \frac{2}{3} + \left(2 \times 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \times 1 + \frac{1^2}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$