



em [2.1 Primitivas - parte 3] ver Primitivação por mudança de variável

## 1 Fórmula e hipóteses

Sejam  $F$  uma primitiva de  $f$  e  $\phi$  uma função invertível (detalhes a seguir)

Definindo  $G(t) = F(\phi(t))$ , temos que  $F(x) = G(\phi^{-1}(x))$  e que

$$G'(t) = (F(\phi(t)))' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

Assim, caso seja possível determinar uma primitiva de  $f(\phi(t))\phi'(t)$ , o seguinte esquema permite calcular (indiretamente) uma primitiva de  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} \int f(x) dx & \xrightarrow{x=\phi(t)} & \int f(\phi(t))\phi'(t) dt \\ \downarrow \text{(primitiva)} & x \in I \quad t \in J & \downarrow \text{(primitiva)} \\ F(x) = G(\phi^{-1}(x)) & \xleftarrow{t=\phi^{-1}(x)} & G(t) \end{array}$$

- o domínio das primitivas é um intervalo:  $D_F = I (\subseteq D_f)$  e  $D_G = J$
- logo, sendo  $G = F \circ \phi$ , é necessário que:  $D_\phi = J$  e  $CD_\phi \subseteq I = D_F$
- $\phi$  tem de ser diferenciável e invertível (usam-se as duas propriedades)

## 2 Sobre a fórmula do integral

Vimos que, se  $x = \phi(t)$ , então  $\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt$

Para justificar a igualdade podemos recorrer à notação de Leibniz:

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{d\phi}{dt}(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Embora a fração seja simbólica, podemos ‘multiplicar por  $dt$ ’ e escrever

$$\phi'(t) dt = d\phi(t) = dx$$

$$\begin{array}{c} \int f(x) dx \\ \begin{array}{l} x = \phi(t) \downarrow \\ dx = \phi'(t) dt \end{array} \\ \int f(\phi(t))\phi'(t) dt \end{array}$$

## 3 Exemplo 1

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{1}{t + 1} (\ln t)' dt \\ &= \int \frac{1}{t + 1} \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \int \frac{-1}{t + 1} + \frac{1}{t} dt \\ &= -\ln |t + 1| + \ln |t| + C \\ &= -\ln |e^x + 1| + \ln |e^x| + C \\ &= x - \ln(e^x + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(1)

Escolho  $t = e^x$  para (tentar) simplificar o integral: repare-se que, nestes casos, em vez de  $\phi$  começa-se por definir a função inversa:

$$t = \phi^{-1}(x) = e^x \Rightarrow x = \phi(t) = \ln t$$

Sendo  $D_f = \mathbb{R} \Rightarrow I = D_F = \mathbb{R}$ ,  $D_\phi = \mathbb{R}^+ = J$ ,  $CD_\phi = \mathbb{R} \subseteq I$  e  $\phi$  diferenciável, podemos efetuar a substituição.

(1) Nesta passagem foi calculada a decomposição em frações simples da função racional  $\frac{1}{t(t+1)}$ .



## 4 Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t - 1}} (\ln t)' dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{t - 1}} \cdot \frac{1}{t} dt \quad (?)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx &= \int \frac{1}{t} (\ln(t^2 + 1))' dt \\ &= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + C \\ &= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Escolho  $t = e^x$  como no exemplo anterior; agora,  $D_f = D_F = I = \mathbb{R}^+$ : preciso de definir  $D_\phi$  para que  $CD_\phi \subseteq D_F \Leftrightarrow \ln t > 0 \Leftrightarrow t > 1$ . Assim, com  $D_\phi = J = ]1, +\infty[$ , posso aplicar a substituição que, infelizmente, não torna mais simples o cálculo do integral.

Tento com  $t = \sqrt{e^x - 1} = \phi^{-1}(x)$ . Pelas propriedades da raiz e pelo domínio de  $f$ , tem que ser  $t > 0$ . Assim, calculo  $\phi(t) = \ln(1 + t^2)$ , com  $D_\phi = \mathbb{R}^+$ , que satisfaz as hipóteses: com esta substituição obtém-se a primitiva.

## 5 Exemplo 3

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int t(e^t)' dt \\ &= \int t e^t dt \\ &= t e^t - \int e^t dt \\ &= t e^t - e^t + C \\ &= e^t(t - 1) + C \\ &= x(\ln(x) - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

O integral dado calcula-se por partes, com um truque (uma parte é '1'). No entanto, com a substituição  $t = \phi^{-1}(x) = \ln x$ , ou seja,  $x = \phi(t) = e^t$ , obtém-se um integral em que a resolução por partes é mais evidente.

(1) Repare-se que, nas substituições, podemos usar todas as relações encontradas entre  $x$  e  $t$ : neste caso,  $e^t = x$  e  $t = \ln x$ .

(1)

## 6 Exemplo 4

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} dx \int \frac{1}{x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{2}{6}}} dx \\ &= \int \frac{1}{t^3 + t^2} (t^6)' dt \\ &= \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt \\ &= 6 \int \frac{t^3}{t + 1} dt \\ &= 6 \int t^2 - t + 1 - \frac{1}{t + 1} dt \\ &= 6 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |t + 1| \right) + C \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t + 1| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) \\ &\quad + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Frequentemente, a substituição serve para obter uma função racional: neste caso, os expoentes das potências não são inteiros, mas são múltiplos de  $\frac{1}{6}$ . Assim, se  $t = \phi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x} > 0$ , tem-se  $\sqrt{x} = t^3$  e  $\sqrt[3]{x} = t^2$ , sendo  $x = \phi(t) = t^6$  diferenciável e invertível em  $D_\phi = \mathbb{R}^+$ , com  $CD_\phi = \mathbb{R}^+ = D_F$ .

(1) Aqui foi calculada a divisão do polinómio  $t^3$  por  $t + 1$ , sendo  $t^2 - t + 1$  o quociente e  $-1$  o resto.

(1)



## 7 Substituições trigonométricas (para radicais)

Para integrar funções com raízes de expressões quadráticas podemos:

- transformar a raiz num dos radicais elementares apresentados na tabela
- aplicar as seguintes substituições (pode ser preciso usar restrições)

A.	$\sqrt{1-x^2} = \cos t$	se	$\begin{cases} x = \phi(t) = \sin t \in [-1, 1] \\ t = \phi^{-1}(x) = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$
B.	$\sqrt{1+x^2} = \sec t$	se	$\begin{cases} x = \phi(t) = \tan t \in \mathbb{R} \\ t = \phi^{-1}(x) = \arctan x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \end{cases}$
C.	$\sqrt{x^2-1} = \tan t$	se	$\begin{cases} x = \phi(t) = \sec t \in [1, +\infty[ \text{ ou } -\sec t \in ]-\infty, -1] \\ t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arccos} \frac{1}{ x } = \arctan \sqrt{x^2-1} \in [0, \frac{\pi}{2}[ \end{cases}$

TPC: obter as outras funções trigonométricas usando secante e tangente.

### 8 Exemplo 5 (radical de tipo 'A')

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos t (\sin t)' dt \\
 &= \int \cos^2 t dt \\
 &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C \\
 &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t + C \\
 &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \\
 C &\in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$x = \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Neste tipo de substituição, não se escolhe  $\phi^{-1}$ , mas  $\phi$ , para poder eliminar indiretamente o radical.

- (1) A primitiva obtida pela fórmula  $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$  não permite voltar facilmente à variável  $x$ : no entanto, basta usar as fórmulas sobre somas de ângulos (aqui:  $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$ ) ou, como vimos, primitivar por partes para chegar a (2).

### 9 Exemplo 6 (radical de tipo 'A')

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sin t \cos t} (\sin t)' dt \\
 &= \int \frac{\cos t}{\sin t \cos t} dt \\
 &= \int \frac{1}{\sin t} dt \\
 &= \int \operatorname{cosec} t dt \\
 &= -\ln |\operatorname{cosec} t + \cotg t| + C \\
 &= -\ln \left| \frac{1 + \cos t}{\sin t} \right| + C \\
 &= \ln \left| \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right| + C \\
 &= \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right| + C, C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$x = \sin t, t \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[ \text{ ou } t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$$

Neste caso, o domínio da substituição dada por  $x = \phi(t) = \sin t$  não pode ser  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , pois  $D_f = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$  e, portanto, o domínio de  $F$  só pode ser o intervalo  $I = ]-1, 0[$  ou  $I = ]0, 1[$ . Consequentemente, o domínio de  $\phi$  poderá ser apenas o intervalo  $J = ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  ou  $J = ]0, \frac{\pi}{2}[$ , onde todas as hipóteses são satisfeitas.

- (1) Mais uma vez é preciso reescrever o resultado em termos de seno e cosseno para conseguir voltar à variável  $x$ .

**10 Exemplo 7 (radical de tipo ‘B’)**

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sec t (\operatorname{tg} t)' dt \\
 &= \int \sec^3 t dt \\
 &= \frac{1}{2} \sec t \operatorname{tg} t + \frac{1}{2} \ln |\sec t + \operatorname{tg} t| + C \\
 &= \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C \\
 &= \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C, \\
 C &\in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

(1)

$$x = \operatorname{tg} t, t \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

(2)

(2) Calcula-se por partes, tal como sugere a expressão de (1).

**11 Exemplo 8 (radical de tipo ‘B’)**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} dx \\
 &= \int \frac{1}{\sec^3 t} (\operatorname{tg} t)' dt \\
 &= \int \frac{1}{\sec t} dt \\
 &= \int \cos t dt \\
 &= \sin t + C \\
 &= \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \cos t + C \\
 &= \frac{\operatorname{tg} t}{\sec t} + C \\
 &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C, C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

(1)

$$x = \operatorname{tg} t, t \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

(1) Nesta substituição (e na próxima) conhecem-se expressões na variável  $x$  para  $\sec t$  e  $\operatorname{tg} t$ : usando estas duas funções é possível representar as outras funções trigonométricas. (Aliás, com a exceção do sinal, o mesmo pode ser feito a partir de uma única função trigonométrica qualquer.)

**12 Exemplo 9 (radical de tipo ‘C’)**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{1}{\sec t \operatorname{tg} t} (\sec t)' dt \\
 &= \int \frac{\sec t \operatorname{tg} t}{\sec t \operatorname{tg} t} dt \\
 &= \int 1 dt \\
 &= t + C \\
 &= \arccos \frac{1}{x} + C \\
 &= \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + C, C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

(1)

$$x = \sec t, t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$$

O domínio da função integranda  $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  não é um intervalo: a definição de  $\phi$  depende do intervalo escolhido (ou dado, no caso do integral definido) para o domínio de  $F$ : se  $D_F = ]-\infty, -1[$ ,  $x = \phi(t) = -\sec t$  e, se  $D_F = ]1, +\infty[$ ,  $x = \phi(t) = \sec t$ , com  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  em ambos os casos. Nesta resolução optou-se pela segunda hipótese.

(1) É possível escolher qualquer uma das duas soluções, embora seja mais comum a primeira.



### 13 Transformação de expressões quadráticas

Vamos transformar a expressão quadrática do radical  $\sqrt{1+x-2x^2}$ :

- pôr em evidência o coeficiente de  $x^2$

$$1+x-2x^2 = -2(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$$

- completar o quadrado  $x^2 \pm 2ax = x^2 \pm 2ax + a^2 - a^2 = (x \pm a)^2 - a^2$

$$= -2(x^2 - 2\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}) = -2((x - \frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{2}) = -2((x - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16})$$

- pôr em evidência o termo constante ( $\frac{9}{16}$ ), escolhendo o sinal para que o fator numérico da expressão ( $\frac{9}{8}$ ) seja positivo

$$= -2(-\frac{9}{16})(-\frac{16}{9}(x - \frac{1}{4})^2 + 1) = \frac{9}{8}(1 - \frac{16}{9}(x - \frac{1}{4})^2)$$

- passar o coeficiente para dentro do quadrado

$$= \frac{9}{8}(1 - (\frac{4}{3}(x - \frac{1}{4}))^2) = \frac{9}{8}(1 - (\frac{4x-1}{3})^2)$$

Então:  $\sqrt{1+x-2x^2} = \sqrt{\frac{9}{8}(1 - (\frac{4x-1}{3})^2)} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{1 - (\frac{4x-1}{3})^2}$  com substituição

$$\sqrt{1 - (\frac{4x-1}{3})^2} = \cos t, \frac{4x-1}{3} = \sin t, t = \phi^{-1}(x) = \arcsen \frac{4x-1}{3}, x = \phi(t) = \frac{1}{4}(1+3\sin t)$$

### 14 Exemplos – mais expressões quadráticas

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 14 &= x^2 + 2 \cdot 3x + 14 = (x+3)^2 - 9 + 14 = (x+3)^2 + 5 \\ &= 5(\frac{1}{5}(x+3)^2 + 1) = 5((\frac{x+3}{\sqrt{5}})^2 + 1) \end{aligned}$$

Logo,  $\sqrt{x^2 + 6x + 14} = \sqrt{5((\frac{x+3}{\sqrt{5}})^2 + 1)} = \sqrt{5}\sqrt{(\frac{x+3}{\sqrt{5}})^2 + 1}$  com substituição

$$\sqrt{(\frac{x+3}{\sqrt{5}})^2 + 1} = \sec t, \frac{x+3}{\sqrt{5}} = \tan t, t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{\sqrt{5}}, x = \phi(t) = -3 + \sqrt{5} \tan t$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 &= \frac{1}{4}(x^2 - 8x + 12) = \frac{1}{4}((x-4)^2 - 4) \\ &= \frac{1}{4}(\frac{(x-4)^2}{4} - 1) = (\frac{x-4}{2})^2 - 1 \end{aligned}$$

Logo,  $\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3} = \sqrt{(\frac{x-4}{2})^2 - 1}$  com substituição

$$\sqrt{(\frac{x-4}{2})^2 - 1} = \tan t, \frac{x-4}{2} = \pm \sec t, t = \phi^{-1}(x) = \arccos \frac{2}{|x-4|}, x = \phi(t) = 4 \pm 2 \sec t$$

### 15 Exemplo 10 (radical de tipo ‘C’)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3}}{x-4} dx &= \int \frac{\tan t}{2 \sec t} (4 + 2 \sec t)' dt \\ &= \int \frac{\tan t}{2 \sec t} \cdot 2 \sec t \tan t dt \\ &= \int \tan^2 t dt \\ &= \int \sec^2 t - 1 dt \\ &= \tan t - t + C \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3} - \arccos \frac{2}{x-4} + C, \\ C &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$x = 4 + 2 \sec t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Aproveitando as contas da página anterior, se  $x = \phi(t) = 4 + 2 \sec t$ , com  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  e  $x \in [6, +\infty[$ , podemos aplicar a substituição, sendo  $\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3} = \tan t$ ,  $x - 4 = 2 \sec t$  e  $t = \phi^{-1}(x) = \arccos \frac{2}{x-4}$ .



## 16 Primitivação quase imediata e por substituição

A primitivação quase imediata (PQI) é o “contrário” da substituição (PS)

**PS:** escolhe-se  $\phi(t)$  e transforma-se  $f(x)$  em  $f(\phi(t))\phi'(t)$

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left[ \begin{matrix} t=\phi^{-1}(x)=\ln x, x=\phi(t)=e^t \\ dx=d\phi(t)=\phi'(t)dt=e^t dt \end{matrix} \right] = \int \frac{e^t dt}{e^t(1+t)} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln|1+\ln x| + C$$

**PQI:** descobre-se  $u(x)$  e transforma-se  $f(u(x))u'(x)$  em  $f(u)$

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{1}{1+\ln x} \frac{1}{x} dx = \left[ \begin{matrix} u(x)=1+\ln x \\ u'(x)=\frac{1}{x} \end{matrix} \right] = \int \frac{1}{u} u' dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|1+\ln x| + C$$

Contudo, na PQI, a primitiva de  $f(u)$  não é sempre imediata (=tabelas!)

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{1-\sin^2 x} (\sin x)' dx = \int \frac{1}{1-\sin^2 x} d(\sin x) \\ (u=\sin x) &= \int \frac{1}{1-u^2} du = (\text{função racional!}) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C \end{aligned}$$

$$\left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \frac{1+\sin x}{1+\sin x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} \right| = \ln \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right| = \ln|\sec x + \tan x| \right)$$

## 17 Substituições com funções hiperbólicas (facultativo)

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ , análoga a  $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ , proporciona as substituições

B'. $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$	se $\begin{cases} x = \phi(t) = \sinh t \in \mathbb{R} \\ t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \in \mathbb{R} \end{cases}$
C'. $\sqrt{x^2 - 1} = \sinh t$	se $\begin{cases} x = \phi(t) = \cosh t \in [1, +\infty[ \text{ ou } -\cosh t \in ]-\infty, -1] \\ t = \phi^{-1}(x) = \operatorname{arcosh}( x ) = \ln( x  + \sqrt{x^2 - 1}) \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$

No cálculo das primitivas podem ser úteis as seguintes fórmulas:

$$e^t = \cosh t + \sinh t \quad \cosh(2t) = \cosh^2 t + \sinh^2 t \quad \sinh(2t) = 2 \sinh t \cosh t$$

$$(\operatorname{tgh} t)' = 1 - \operatorname{tgh}^2 t = \frac{1}{\cosh^2 t} \quad (\operatorname{cotgh} t)' = 1 - \operatorname{cotgh}^2 t = -\frac{1}{\sinh^2 t}$$

$$\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}(t + \sinh t \cosh t) + C \quad \int \sinh^2 t dt = \frac{1}{2}(-t + \sinh t \cosh t) + C$$

Estas substituições são aplicadas aos exemplos 7, 8 e 9 nos slides seguintes

## 18 Exemplo 11 (radical de tipo B')

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \cosh t (\sinh t)' dt \\ &= \int \cosh^2 t dt \\ &= \frac{1}{2}(t + \sinh t \cosh t) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + C, \\ C &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$x = \sinh t, t \in \mathbb{R}$$

(1) calcula-se por partes, como no caso trigonométrico, aplicando a identidade  $\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1$ .

**19 Exemplo 12 (radical de tipo B')**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} dx \\
 &= \int \frac{1}{\cosh^3 t} (\sinh t)' dt \\
 &= \int \frac{1}{\cosh^2 t} dt \\
 &= \operatorname{tgh} t + C \\
 &= \frac{\sinh t}{\cosh t} + C \\
 &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$x = \sinh t, t \in \mathbb{R}$$

**20 Exemplo 13 (radical de tipo C')**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{1}{\cosh t \sinh t} (\cosh t)' dt \\
 &= \int \frac{1}{\cosh t} dt \\
 &= \int \frac{\cosh t}{\cosh^2 t} dt \\
 &= \int \frac{(\sinh t)'}{1+\sinh^2 t} dt \\
 &= \operatorname{arctg}(\sinh t) + C \\
 &= \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) + C
 \end{aligned}$$

$$x = \cosh t, t \in \mathbb{R}^+$$

(1) Escolheu-se  $x \in ]1, +\infty[$  também nesta resolução, mas o domínio da substituição  $x = \phi(t) = \cosh t$  é  $t \in ]0, +\infty[$ .

(1) As contas são parecidas com o integral da secante (slide 16), mas neste caso a primitiva quase imediata resolve-se com a primitiva imediata da arco tangente.

**21 Revisão**

$$(a) \int (1+x)^{-2} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$(b) \int \frac{1}{(x+3)^3 \sqrt{x^2+6x+8}} dx$$

$$(c) \int (x-1) \ln(x+1) dx$$

$$(d) \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$$

$$(e) \int x(1-x)^{42} dx$$

$$(f) \int \frac{1}{(1+\sinh x) \cosh x} dx$$

$$(g) \int \frac{1}{\sinh x} dx$$

$$(h) \int \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} dx \quad [t = \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x]$$

Soluções:

$$(a) -\frac{3}{8} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$(b) \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{x+3} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2+6x+8}}{(x+3)^2} + C$$

$$(c) \frac{1}{2} (x^2 - 2x - 3) \ln(1+x) - \frac{1}{4} (x-3)^2 + C$$

$$(d) \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} - 2\sqrt{1+\ln x} + C$$

$$(e) \frac{1}{44} (1-x)^{44} - \frac{1}{43} (1-x)^{43} + C$$

$$(f) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sinh x}{\cosh x} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sinh x) + C$$

$$(g) \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$$

$$(h) \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{tg}^{\frac{4}{3}} x - \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x + 1}{(\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x + 1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x - 1}{\sqrt{3}} + C$$