Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2022/23**

exame de recurso Duração: 2h30

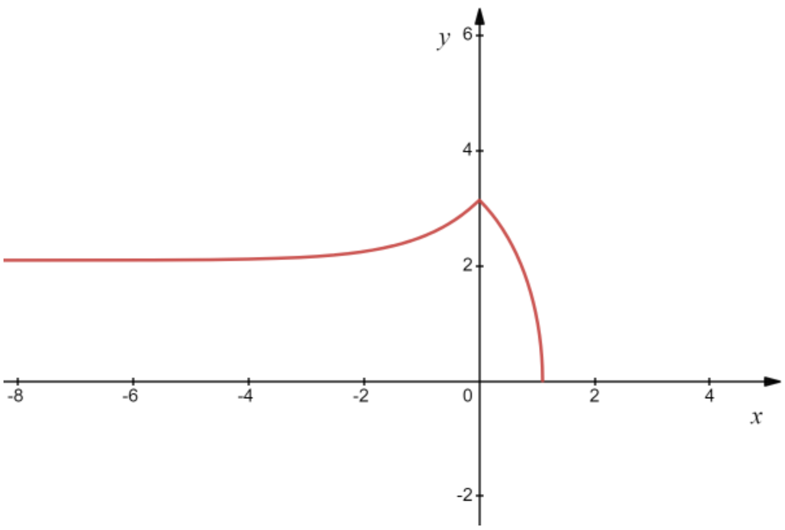
- **Este teste continua no verso e termina com a palavra FIM. No verso encontras também a cotação e formulários.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \arccos\left(\frac{e^{2x} - 2e^x - 1}{2}\right).$$

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido software gráfico.



Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço ao lado):

(a) Determina o domínio D_f de definição de f.

Sugestão: A substituição temporária de e^x por uma nova variável pode ajudar...

(b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções: (a) $\sqrt{x^3}\,\ln\sqrt[3]{x}$; (b) $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}$, $x \in]0,3[$.

Sugestão: Na alínea (a) primitiva por partes; na alínea (b) faz a mudança de variável definida por $x = 3\sin t$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, e depois observa se a linha $1 + \operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$ do formulário te ajuda a concluir (seguindo esta sugestão, no presente exame considerar-se-á a resolução desta alínea concluída quando tiveres obtido expressões para a primitiva em termos de $\arcsin \frac{x}{3}$).

3. Calcula as primitivas de $\dfrac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x}$.

4. Seja $\mathcal{A}$ a região do plano limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ e $y = 0$.

(a) Calcula os pontos de interseção destas três curvas.

Nota: Para efeitos da resolução da alínea seguinte informa-se que a solução é $(1,1)$, $(0,0)$ e $(2,0)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

(b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$ e calcula a sua área.

5. (a) Determina a natureza e, no caso de convergência, o valor do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx$.

(b) Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n) + n}{n\sqrt{n} + 1}$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4^{\frac{n}{2}} n^2}{3^{2+n}(n+3)}$.

6. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de números reais não negativos.

(a) Mostra que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ também é convergente.

Sugestão: Recorda que da convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sai que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(b) Mostra que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ forem ambas convergentes, então o mesmo sucede a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n b_n}$.

Sugestão: Mostra primeiro que do facto de $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$ ser não negativo sai que a seguinte desigualdade é válida: $2\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n$.

(c) Será que as hipóteses da alínea anterior também garantem que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge? Justifica a tua resposta.

Sugestão: Vê se as duas alíneas anteriores são úteis aqui.

FIM

Cotação:

1.(a) 1,5; 1.(b) 3; 2.(a) 1,5; 2.(b) 1,5; 3. 2; 4. 3; 5.(a) 1,5; 5.(b) 3; 6.(a) 1; 6.(b) 1; 6.(c) 1.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\, u(x),\ m \in \mathbb{R}$	$m\, u'(x)$
$u(x)^n,\ n \in \mathbb{R}$	$n\, u(x)^{n-1}\, u'(x)$
$\log_a \lvert u(x)\rvert,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)} u'(x) \ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\, u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\, u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\, u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\, u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\, u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\, u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\, u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\, u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1 + \tan^2 u = \sec^2 u$	$1 + \operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1 - u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1 - u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	