Cálculo I

João Mendonça (jmendonca@ua.pt)

Ano Lectivo 2022/23

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Parte 2 - Integração de Funções Reais de uma Variável Real

Aula 7

Definição

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, onde D_f é um sub-conjunto de pontos interiores (aberto) de $\mathbb{R}$. Caso exista, chamamos **(função)** primitiva de f a qualquer função $F : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in D_f$.

No caso de existência de uma primitiva de f, dizemos que f é primitivável. Diremos também que f é primitivável num aberto $A \subseteq D_f$ quando $f|_A$ for primitivável e que uma primitiva de $f|_A$ é uma primitiva de f em A.

Nota: Toda a primitiva de uma função contínua é uma função contínua.

Nota: Em termos de notação, para uma primitiva de uma função $y = f(x)$ é habitual utilizarmos a notação, $P_x f(x)$, $P_x f$, $P f(x)$, $P f$, $\int f(x)$ ou $\int f$.

Proposição

Sejam F_1 e F_2 duas primitivas de f num intervalo $]a, b[$. Então, $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, ou seja, F_1 e F_2 diferem entre si por apenas uma constante real.

O recíproco do resultado anterior é, obviamente, verdadeiro.

Nota: Denotamos usualmente a família de todas as primitivas de uma função f, $\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$, por

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x.$$

A f chamamos função integranda e a x variável de integração.

Exemplo

Dado que $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 50$ e $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 10$ possuem a propriedade $F_1'(x) = x^2 = F_2'(x)$, temos que tanto F_1 como F_2 são primitivas de $f(x) = x^2$. Na realidade, dado o resultado do slide anterior, temos já a consciência global de que

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int x^2\, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Nota: Pode parecer estranha a aparição do $\mathrm{d}x$ (da notação diferencial de derivada). Mais tarde veremos a utilidade em certas manipulações para o cálculo de primitivas.

- Atendendo ao anteriormente explorado,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R},$$

  onde F é uma primitiva de f.

- Se f for diferenciável, então

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Proposição

Sejam f e g funções definidas num aberto D, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos. Se f e g são primitiváveis em D, então $f + g$ é primitivável em D e

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Determine o conjunto das primitivas de $f :]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) \equiv 0$.

2. Indique uma primitiva das seguintes funções (no intervalo indicado)
   - $f(x) = 2x$, com $x \in \mathbb{R}$.
   - $f(x) = e^x$, com $x \in \mathbb{R}$.
   - $f(x) = \cos(x)$, com $x \in \mathbb{R}$.
   - $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x \in \mathbb{R}^+$.

Introdução às Primitivas - Resolução

1.

$$\left\{ F : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \mid F(x) = \begin{cases} c_1, & x \in \,]-\infty, -1[\\ c_2, & x \in \,]-1, 0[\\ c_3, & x \in \,]1, \infty[\end{cases} \right\}$$

2.

- $F(x) = x^2 + 10.$
- $F(x) = e^x + 50.$
- $F(x) = \sin(x) + e.$
- $F(x) = \ln(x) + \pi.$

Primitivas Imediatas

Chamamos primitivas imediatas às funções cujas derivadas são **funções elementares** conhecidas.

- $$\int x^p \, \mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \; c \in \mathbb{R}, \; p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$
- $$\int \frac{1}{x \ln(a)} \, \mathrm{d}x = \log_a(|x|) + c, \; c \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$
- $$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, \; c \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$
- $$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$
- $$\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

Primitivas Imediatas

- $\displaystyle\int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int \csc^2(x)\,\mathrm{d}x = -\cot(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int \sec(x)\tan(x)\,\mathrm{d}x = \sec(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$
- $\displaystyle\int \csc(x)\cot(x)\,\mathrm{d}x = -\csc(x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Primitivas Imediatas - Exercícios

1. Calcule:

- $\displaystyle\int (2^x - 3\sin(x))\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2}\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int (x+3)x^2\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3}\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int 4x^6 - 2x^3 + 7x - 4\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int 12+\csc(x)(\sin(x)+\csc(x))\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int 6\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} - \frac{12}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$

2. Determina a primitiva G da função $g(x) = 3x^3 + \frac{7}{2\sqrt{x}} - e^x$ que satisfaz $G(1) = 15 - e$.

3. Determina a primitiva H da primitiva da função $h(x) = 24x^2 - 48x + 2$ que satisfaz $H(-2) = -4$ e $H(1) = -9$.

1

- $\int (2^x - 3\sin(x))\ \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int (2^x - 3\sin(x))\ \mathrm{d}x &= \int 2^x\ \mathrm{d}x - \int 3\sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{2^x}{\ln(2)} - 3\int \sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{2^x}{\ln(2)} + 3\cos(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\int \frac{x+3}{x^2}\ \mathrm{d}x$

$$\int \frac{x+3}{x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \ln(|x|) - \frac{3}{x} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int (x+3)x^2 \, \mathrm{d}x$

$$\int (x+3)x^2 \, \mathrm{d}x = \int x^3 + 3x^2 \, \mathrm{d}x = \int x^3 \, \mathrm{d}x + 3\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^3 + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^3} \, \mathrm{d}x$

$$\int \sqrt[5]{x^3} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}} \, \mathrm{d}x = \frac{5x^{\frac{8}{5}}}{8} + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int 4x^6 - 2x^3 + 7x - 4 \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int 4x^6 - 2x^3 + 7x - 4 \, \mathrm{d}x &= 4\int x^6 \, \mathrm{d}x - 2\int x^3 \, \mathrm{d}x + 7\int x \, \mathrm{d}x - \int 4 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{4x^7}{7} - \frac{x^4}{2} + \frac{7x^2}{2} - 4x + c, \; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primitivas Imediatas - Resolução

- $\boxed{\int 12 + \csc(x)(\sin(x) + \csc(x)) \,\mathrm{d}x}$

$$\begin{aligned}\int 12 + \csc(x)(\sin(x) + \csc(x)) \,\mathrm{d}x &= \int 12 + \csc(x)\sin(x) + \csc^2(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int 13 + \csc^2(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \int 13 \,\mathrm{d}x + \int \csc^2(x) \,\mathrm{d}x \\ &= 13x - \cot(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\boxed{\int 6\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x}$

$$\begin{aligned}\int 6\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x &= 6\int \cos(x) \,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= 6\sin(x) + 4\arcsin(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} - \frac{12}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{1+x^2} - \frac{12}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x + 12 \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$$
$$= \arctan(x) + 12 \arccos(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

2 $G(x) = \int g(x)\, \mathrm{d}x = \int 3x^3 + \frac{7}{2\sqrt{x}} - e^x\, \mathrm{d}x = \frac{3x^4}{4} + 7\sqrt{x} - e^x + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$

Ora, se $G(1) = 15 - e$, então $\frac{3(1)^2}{4} + 7\sqrt{1} - e + c = 15 - e \quad \Rightarrow \quad c = \frac{29}{4}$.

3 Sabemos que

$$H(x) = \int \left(\int h(x)\, \mathrm{d}x\right)\, \mathrm{d}x = \int \left(\int 24x^2 - 48x + 2\, \mathrm{d}x\right)\, \mathrm{d}x$$
$$= \int \left(8x^3 - 24x^2 + 2x + c_1\right)\, \mathrm{d}x$$
$$= 2x^4 - 8x^3 + x^2 + c_1 x + c_2.$$

Ora, se $H(-2) = -4$ e $H(1) = -9$, segue que $c_1 = \frac{100}{3}$ e $c_2 = -\frac{112}{3}$.

Primitivas "Quase" Imediatas

Proposição

Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que a composta $f \circ g$ está bem definida. Se g é diferenciável em D_g, então $(f \circ g)g'$ é primitivável e tem-se que

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(x))\,\mathrm{d}(g(x)) = F(g(x)) + c,\ \ c \in \mathbb{R},$$

onde F é uma primitiva de f.

Exemplo

Vejamos que

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int \cos(x^2)\,\mathrm{d}(x^2) = \sin(x^2) + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

e que

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \arctan(x)\,\mathrm{d}(\arctan(x)) = \frac{\arctan^2(x)}{2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Vamos determinar a primitiva F da função $f(x) = \sec^4(x)$ que satisfaz $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int \sec^4(x)\ \mathrm{d}x &= \int \sec^2(x)(\tan^2(x)+1)\ \mathrm{d}x \\
&= \int \sec^2(x)\tan^2(x)\ \mathrm{d}x + \int \sec^2(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int \tan^2(x)\ \mathrm{d}(\tan(x)) + \int \sec^2(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ora, como já temos a forma geral das primitivas de f, basta substituirmos x por 0 e descobrir a constante c:

$$F(0) = \frac{\tan^3(0)}{3} + \tan(0) + c = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi}{2}.$$

Assim, concluímos que $F(x) = \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + \frac{\pi}{2}$.

Primitivas "Quase" Imediatas

A lista de primitivas que se segue generaliza a dos slides 9 e 10 e é consequência da última proposição apresentada.

Seja f uma função diferenciável. Então:

- $$\int f'(x)(f(x))^p \, \mathrm{d}x = \frac{(f(x))^{p+1}}{p+1} + c, \; c \in \mathbb{R}, \; p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$
- $$\int \frac{f'(x)}{f(x)\ln(a)} \, \mathrm{d}x = \log_a(|f(x)|) + c, \; c \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$
- $$\int f'(x) a^{f(x)} \, \mathrm{d}x = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c, \; c \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$
- $$\int f'(x) \sin(f(x)) \, \mathrm{d}x = -\cos(f(x)) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$
- $$\int f'(x) \cos(f(x)) \, \mathrm{d}x = \sin(f(x)) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

Primitivas "Quase" Imediatas

- $\displaystyle\int f'(x)\sec^2(f(x))\,\mathrm{d}x = \tan(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int f'(x)\csc^2(f(x))\,\mathrm{d}x = -\cot(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int f'(x)\sec(f(x))\tan(f(x))\,\mathrm{d}x = \sec(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

- $\displaystyle\int f'(x)\csc(f(x))\cot(f(x))\,\mathrm{d}x = -\csc(f(x)) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Aula 8

1. Determine as seguintes primitivas:

- $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^5}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int e^{\tan(x)}\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \sin(\sqrt{2}x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x7^{x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x+9)^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{5}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

Primitivas "Quase" Imediatas - Exercícios

2. Determine a primitiva da função $f(x) = x^{-2} + 1$ que se anula no ponto $x = 2$.

3. Determine a função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = \frac{2e^x}{3 + e^x} \qquad \text{e} \qquad F(0) = \ln(4).$$

4. Sabendo que a função f satisfaz a igualdade

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x) - \frac{x^2}{2} + c, \; c \in \mathbb{R},$$

determine $f(\frac{\pi}{4})$.

1

- $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^5}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x^4}{1+x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{1+x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^5)}{1+x^5} = \frac{\ln(|1+x^5|)}{5} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \sin(\sqrt{2}x)\,\mathrm{d}x$

$$\int \sin(\sqrt{2}x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int x7^{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\int x7^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x7^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 7^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{7^{x^2}}{2\ln(7)} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(|1+x^2|)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}(\ln(x))^3\,\mathrm{d}x = \int (\ln(x))^3\,\mathrm{d}(\ln(x)) = \frac{\ln^4(x)}{4}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int e^{\tan(x)}\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int e^{\tan(x)}\sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \int e^{\tan(x)}\,\mathrm{d}(\tan(x)) = e^{\tan(x)}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{\ln(|x^2+9|)}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Primitivas "Quase" Imediatas - Resolução

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x+9)^2}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(x+9)^2}\,\mathrm{d}x = \int (x+9)^{-2}\,\mathrm{d}x = \int (x+9)^{-2}\,\mathrm{d}(x+9) = \frac{(x+9)^{-1}}{-1} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 1\,\mathrm{d}\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{\arctan\left(\frac{x}{3}\right)}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctan(e^x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Primitivas "Quase" Imediatas - Resolução

- $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{(\frac{2}{3})3x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{3\arcsin(x^2)}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int -4x^3(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-x^4)^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^4)\\ = -\frac{1}{4}\frac{(1-x^4)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c,\ c\in\mathbb{R}\\ = \frac{\sqrt{1-x^4}}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln(x)\,\mathrm{d}(\ln(x)) = \frac{\ln^2(x)}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Primitivas "Quase" Imediatas - Resolução

- $\boxed{\displaystyle\int \frac{5}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x}$

$$\int \frac{5}{x\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x = 5\int \ln^{-3}(x)\,\mathrm{d}(\ln(x)) = -\frac{5\ln^{-2}(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\boxed{\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x}$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln(x))}{\ln(x)} = \ln(|\ln(x)|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Proposição

Sejam f e g duas funções de x diferenciáveis num aberto de $\mathbb{R}$. Então,

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{f'(x)}\underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c,\ c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\sqrt{x+1}}_{f'(x)} \, \mathrm{d}x &= \frac{2x(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \int \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2x(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3} \int (x+1)^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2x(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}{15} + c, \ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\boxed{\int \cos^2(x) \, \mathrm{d}x} &= \cos(x)\sin(x) - \int \sin(x)(-\sin(x)) \, \mathrm{d}x \\
&= \cos(x)\sin(x) + \int (1 - \cos^2(x)) \, \mathrm{d}x \\
&= \cos(x)\sin(x) + \int 1 \, \mathrm{d}x - \boxed{\int \cos^2(x) \, \mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$\int \underbrace{(3x+x^2)}_{g(x)}\underbrace{\sin(2x)}_{f'(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{(3x+x^2)\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int \underbrace{(3+2x)}_{h(x)}\underbrace{\cos(2x)}_{i'(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{(3x+x^2)\cos(2x)}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{(3+2x)\sin(2x)}{2} - \int \sin(2x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\frac{(3x+x^2)\cos(2x)}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{(3+2x)\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}\right) + c,\ \ c\in\mathbb{R}$$

$$= -\frac{(3x+x^2)\cos(2x)}{2} + \frac{(3+2x)\sin(2x)}{4}$$

$$+\frac{\cos(2x)}{4} + c,\ \ c\in\mathbb{R}$$

Primitivação por Partes

- Esta fórmula é útil sempre que a função integranda se pode escrever como o produto de duas funções e, além disso, é conhecida uma primitiva de pelo menos uma delas.
- Sabendo primitivar apenas uma das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra função.
- Quando conhecemos uma primitiva de cada uma das funções, devemos escolher para derivar a função que mais se simplifica por derivação (se alguma delas se simplificar).
- Por vezes é necessário efectuar várias aplicações sucessivas da fórmula de integração por partes.
- Por vezes obtém-se novamente o integral que se pretende determinar. Nesses casos, interpreta-se a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é o integral que se pretende determinar.

1. Determine os seguintes integrais utilizando a técnica de integração por partes:

   - $\displaystyle\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int e^{-3x}(2x+3)\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x.$
   - $\displaystyle\int \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x.$

2. A corrente i num circuito RCL é dada por

$$i = EC\left(\frac{\alpha^2}{\omega}+\omega\right)e^{-\alpha t}\sin(\omega t).$$

São constantes a força electromotriz E, ligada no instante $t=0$, a capacidade C (em farads), a resistência R (em ohms), a indutância L (em henrys),

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \omega = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C-R^2}}$$

A carga Q (em coulombs) é dada por $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = i$, com $Q(0)=0$. Determine a expressão de $Q(t)$.

1

- $\displaystyle\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{\cos(x)}_{f'(x)}\,\mathrm{d}x = x\sin(x) - \int \sin(x)\,\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int e^{-3x}(2x+3)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^{-3x}}_{f'(x)}\underbrace{(2x+3)}_{g(x)}\,\mathrm{d}x &= -\frac{(2x+3)e^{-3x}}{3} - \int -\frac{2e^{-3x}}{3}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{(2x+3)e^{-3x}}{3} + \frac{2e^{-3x}}{9} + c,\ \ c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Primitivação por Partes - Resolução

- $\boxed{\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x}$

$$\int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{g(x)}\,\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= x\arctan(x) - \frac{\ln(|x^2+1|)}{2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\boxed{\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x}$

$$\int x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^2 e^{x^2} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{x^2}_{g(x)} \underbrace{e^{x^2}}_{f'(x)}\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\boxed{\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x}$

$$\int \underbrace{e^{2x}}_{f'(x)}\underbrace{\sin(x)}_{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}\sin(x)}{2} - \int \frac{e^{2x}\cos(x)}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{e^{2x}\sin(x)}{2} - \frac{1}{2}\int \underbrace{e^{2x}}_{i'(x)}\underbrace{\cos(x)}_{h(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{e^{2x}\sin(x)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}\cos(x)}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{4}\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2e^{2x}\sin(x) - e^{2x}\cos(x)}{4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2e^{2x}\sin(x) - e^{2x}\cos(x)}{5} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

2 Tomemos $\rho = EC\left(\frac{\alpha^2}{\omega} + \omega\right)$. Então,

$$\rho \int \underbrace{e^{-\alpha t}}_{f'(x)} \underbrace{\sin(\omega t)}_{g(x)} \, \mathrm{d}t = \rho \left(-\frac{e^{-\alpha t}\sin(\omega t)}{\alpha} - \int -\frac{\omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha} \, \mathrm{d}t \right)$$

$$= \rho \left(-\frac{e^{-\alpha t}\sin(\omega t)}{\alpha} - \int \underbrace{-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}}_{h'(x)} \underbrace{\omega\cos(\omega t)}_{i(x)} \, \mathrm{d}t \right)$$

$$= \rho \left(-\frac{e^{-\alpha t}\sin(\omega t)}{\alpha} - \left(\frac{\omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2} - \int -\frac{\omega^2 e^{-\alpha t}\sin(\omega t)}{\alpha^2} \, \mathrm{d}t \right) \right)$$

$$= \rho \left(-\frac{e^{-\alpha t}\sin(\omega t)}{\alpha} - \left(\frac{\omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2} - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \int -e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \, \mathrm{d}t \right) \right)$$

$$\rho\int e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t=\rho\left(-\frac{e^{-\alpha t}\sin(\omega t)}{\alpha}-\left(\frac{\omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2}-\frac{\omega^2}{\alpha^2}\int -e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rho\left(1+\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\int e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t=\rho\left(-\frac{e^{-\alpha t}\sin(\omega t)}{\alpha}-\frac{\omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rho\left(\frac{\alpha^2+\omega^2}{\alpha^2}\right)\int e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t=-\frac{\rho\alpha e^{-\alpha t}\sin(\omega t)+\rho\omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rho\int e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t=-\frac{\rho\alpha e^{-\alpha t}\sin(\omega t)+\rho\omega e^{-\alpha t}\cos(\omega t)}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Aula 9

Primitivação de Funções Trigonométricas

Funções que consistem em produtos de senos e co-senos podem ser integradas de forma quase imediata se utilizarmos identidades trigonométricas. O processo pode ser tedioso, mas a técnica é relativamente simples.

Exemplo

Vamos determinar a primitiva F da função $f(x) = \sin^5(x)$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^5(x)\, \mathrm{d}x = \int \sin(x)\sin^4(x)\, \mathrm{d}x &= \int \sin(x)(\sin^2(x))^2\, \mathrm{d}x \\
&= \int \sin(x)(1-\cos^2(x))^2\, \mathrm{d}x \\
&= \int -(1-\cos^2(x))^2\, \mathrm{d}(\cos(x)) \\
&= \int -(1-2\cos^2(x)+\cos^4(x))\, \mathrm{d}(\cos(x)) \\
&= -\cos(x) + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Vamos determinar a primitiva F da função $f(x) = \sin^6(x)$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^6(x)\,\mathrm{d}x &= \int (\sin^2(x))^3\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{(1-\cos(2x))}{2}\right)^3\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int 1 - 3\cos(2x) + 3\cos^2(2x) - \cos^3(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\boxed{\int 1\,\mathrm{d}x} - \frac{3}{8}\boxed{\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x} + \frac{3}{8}\boxed{\int \cos^2(2x)\,\mathrm{d}x} \\
&\quad - \frac{1}{8}\boxed{\int \cos^3(2x)\,\mathrm{d}x} \\
&= \frac{x}{8} - \frac{3\sin(2x)}{16} - \frac{\left(\sin(2x) - \frac{\sin^3(2x)}{3}\right)}{16} + \frac{3\left(x + \frac{\sin(4x)}{4}\right)}{16} + c,\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Primitivação de Funções Trigonométricas

1. **Potências ímpares de $\sin(x)$ ou $\cos(x)$.**
    - Destacamos uma unidade à potência ímpar e passamos o factor resultante à co-função utilizando $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

2. **Potências pares de $\sin(x)$ ou $\cos(x)$.**
    - Passamos ao arco duplo através das fórmulas
    $$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{ou} \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

3. **Produtos com factores do tipo $\sin(mx)$ ou $\cos(nx)$.**
    - Aplicamos as fórmulas
    $$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2},$$
    $$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2},$$
    $$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}.$$

4. **Potências pares e ímpares de $\tan(x)$ ou $\cot(x)$**
    - Destacam-se $\tan^2(x)$ ou $\cot^2(x)$ e aplicam-se as fórmulas
    $$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 \qquad \text{ou} \qquad \cot^2(x) = \csc^2(x) - 1.$$
5. **Potências pares de $\sec(x)$ ou $\csc(x)$**
    - Destacam-se $\sec^2(x)$ ou $\csc^2(x)$ e aplicam-se as fórmulas
    $$\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1 \qquad \text{ou} \qquad \csc^2(x) = \cot^2(x) + 1.$$
6. **Potências ímpares de $\sec(x)$ ou $\csc(x)$**
    - Destacam-se $\sec^2(x)$ ou $\csc^2(x)$ e primitiva-se por partes escolhendo esse factor para primitivar.

1. Determine as seguintes primitivas:

- $\int \tan(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int \sin(x)\cos^5(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int \sin^3(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int \tan^6(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int \sin^5(x)\cos^2(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int \sin(3x)\cos(4x)\ \mathrm{d}x$
- $\int \sin(x)\cos^2(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int \sin(2x)\sin(-3x)\ \mathrm{d}x$

Primitivação de Funções Trigonométricas - Resolução

1

- $\int \tan(x)\, \mathrm{d}x$

$$\int \tan(x)\, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, \mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos(x))}{\cos(x)} = -\ln(|\cos(x)|) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\int \sin(x)\cos^5(x)\, \mathrm{d}x$

$$\int \sin(x)\cos^5(x)\, \mathrm{d}x = -\int \cos^5(x)\, \mathrm{d}(\cos(x)) = -\frac{\cos^6(x)}{6} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\int \sin^3(x)\, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x)\, \mathrm{d}x &= \int \sin^2(x)\sin(x)\, \mathrm{d}x = \int (1-\cos^2(x))\sin(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int \sin(x)\, \mathrm{d}x - \int \cos^2(x)\sin(x)\, \mathrm{d}x = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \tan^6(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\int \tan^6(x)\,\mathrm{d}x &= \int (\sec^2(x)-1)\tan^4(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sec^2(x)\tan^4(x)\,\mathrm{d}x - \int \tan^4(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \tan^4(x)\,\mathrm{d}(\tan(x)) - \int (\sec^2(x)-1)\tan^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\tan^5(x)}{5} - \int \sec^2(x)\tan^2(x)\,\mathrm{d}x + \int \tan^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\tan^5(x)}{5} - \int \tan^2(x)\,\mathrm{d}(\tan(x)) + \int (\sec^2(x)-1)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\tan^5(x)}{5} - \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) - x + c,\ \ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- $\int \sin^5(x)\cos^2(x)\ \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \sin^5(x)\cos^2(x)\ \mathrm{d}x &= \int \cos^2(x)(\cos^2(x)-1)^2\sin(x)\ \mathrm{d}x\\ &= -\int \cos^2(x)(\cos^2(x)-1)^2\ \mathrm{d}(\cos(x))\\ &= -\int \left(\cos^6(x)-2\cos^4(x)+\cos^2(x)\right)\ \mathrm{d}(\cos(x))\\ &= -\frac{\cos^7(x)}{7}+\frac{2\cos^5(x)}{5}-\frac{\cos^3(x)}{3}+c\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\int \sin(3x)\cos(4x)\ \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)\cos(4x)\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \sin(7x)\ \mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \sin(x)\ \mathrm{d}x\\ &= -\frac{\cos(7x)}{14}+\frac{\cos(x)}{2}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Primitivação de Funções Trigonométricas - Resolução

- $\boxed{\int \sin(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x}$

$$\int \sin(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = -\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}(\cos(x)) = -\frac{\cos^3(x)}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

- $\boxed{\int \sin(2x)\sin(-3x)\,\mathrm{d}x}$

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\sin(-3x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \cos(5x) - \cos(x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\sin(5x)}{10} - \frac{\sin(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Primitivação de Funções Racionais

Definição

Uma função cuja expressão analítica admita a forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, onde N e D são funções polinomiais (com coeficientes reais) em x e D é não nula, diz-se uma função racional.

Caso $\deg(N) < \deg(D)$, dizemos que $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma fracção própria.

Proposição

Se $\deg(N) \geq \deg(D)$, então existem polinómios Q e R tais que

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

com $\deg(R) < \deg(D)$. Aos polinómios Q e R chamamos, respectivamente, quociente e resto da divisão de N por D.

Exemplo

Sendo $N(x) = 4x^3 + 3x$ e $D(x) = 2x^2 + 1$, tem-se que $\frac{N(x)}{D(x)} = 2x + \frac{x}{2x^2+1}$. Neste caso, os polinómios quociente e resto são, respectivamente, $Q(x) = 2x$ e $R(x) = x$.

Nota: Como consequência, obtemos

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int Q(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x,$$

reduzindo-se assim a primitiva inicial à questão das primitivas no segundo membro anterior.

Definição

Designamos por fracções simples todas as fracções do tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^p} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Bx+C}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^q}$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Exemplo

$$\frac{2}{x-1} \qquad \frac{1}{x^2} \qquad \frac{x-2}{x^2+x+1} \qquad \frac{1}{(x^2+x+2)^3}.$$

Proposição

Toda a fracção própria pode ser decomposta numa soma de fracções simples. De facto, sendo α_k (com $1 \leq k \leq s$) todas as suas raízes reais (com multiplicidade μ_k) e $c_\ell = \beta_\ell + \gamma_\ell i$ (com $1 \leq \ell \leq t$) todas as suas raízes complexas (com multiplicidade ν_k). Então,

$$\frac{N(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{n=1}^{\mu_k} \frac{A_{nk}}{(x-\alpha_k)^n} + \sum_{\ell=1}^{t} \sum_{m=1}^{\nu_\ell} \frac{B_{\ell m}x + C_{\ell m}}{((x-\beta_\ell)^2 + \gamma_\ell^2)^m}.$$

Nota: A primitiva de uma função racional $\frac{N(x)}{D(x)}$ pode sempre escrever-se como soma, produto, quociente e composição de funções racionais, logaritmos e arco-tangentes.

Demonstração.

- Mostrar que, dados $N(x), D(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\mu \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $D(\alpha) \neq 0$, se existirem $A_1, \ldots, A_\mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$N(x)(x-\alpha)^\mu + A_1 D(x)(x-\alpha)^{\mu-1} + \cdots + A_\mu D(x) = 0,$$

então $A_1 = \cdots = A_\mu = 0$.

- Mostrar que, dados $N(x), D(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $D(\alpha) \neq 0$ e $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinómio quadrático irredutível de raízes $\beta + \gamma i$, se existirem $B_1, \ldots, B_\nu, C_1, \ldots, C_\nu \in \mathbb{R}$ tais que

$$N(x)P(x)^\nu + (B_1 x + C_1)D(x)P(x)^{\nu-1} + \cdots + (B_\nu x + C_\nu)D(x) = 0,$$

então $B_1 = \cdots = B_\nu = C_1 = C_\nu = 0$.

- Mostrar que o conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{D(x)}{(x-\alpha_k)^n} \,:\, k \in [s],\ n \in [\mu_k] \right\} \cup \left\{ \frac{D(x)}{P(x)^\ell}, \frac{xD(x)}{P(x)^\ell} \,:\, \ell \in [t],\ m \in [\nu_\ell] \right\}$$

é linearmente independente.

♦

Aula 10

Primitivação de Fracções Simples

Procedimento:

1. Decompor $D(x)$ em factores irredutíveis:

   $$D(x) = a(x-\alpha_1)^{\mu_1}\cdots(x-\alpha_n)^{\mu_n}((x-\beta_1)^2+\gamma_1^2)^{\nu_1}\cdots((x-\beta_m)^2+\gamma_m)^{\nu_m},$$

   onde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mu_k, \nu_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, para $i = 1,\ldots,n$ e $j = 1,\ldots,m$.

2. Associar a cada fator de $D(x)$ uma determinada fracção simples ou soma de fracções simples de acordo com o seguinte:

   i. Ao factor de $D(x)$ do tipo $(x-\alpha_k)^{\mu_k}$, com $\mu_k \in \mathbb{N}$, corresponde

   $$\frac{A_1}{x-\alpha_k} + \frac{A_2}{(x-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{A_{\mu_k}}{(x-\alpha_k)^{\mu_k}},$$

   onde $A_1,\ldots,A_k$ são constantes reais a determinar.

   ii. Ao factor de $D(x)$ do tipo $((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)^{\nu_\ell}$, com $\nu_\ell \in \mathbb{N}$, corresponde

   $$\frac{B_1x+C_1}{((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)} + \frac{B_2x+C_2}{((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)^2} + \cdots + \frac{B_{\nu_\ell}x+C_{\nu_\ell}}{((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)^{\nu_\ell}}$$

   onde B_i, C_i são constantes reais a determinar, $i = 1,\ldots,s$.

3. Escrever $\frac{R(x)}{D(x)}$ como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Primitivação de Fracções Simples

1. Fracção do tipo: $\dfrac{A}{(x-\alpha_k)^{\mu_k}}$
   - Se $\mu_k = 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha_k)}\,\mathrm{d}x = A\ln(|x-\alpha_k|) + c,\ c \in \mathbb{R}$
   - Se $\mu_k \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^{\mu_k}}\,\mathrm{d}x = \frac{A(x-\alpha_k)^{-\mu_k+1}}{-\mu_k+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$
2. Fracção do tipo: $\dfrac{Bx+C}{((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)^{\nu_\ell}}$
   - Reduz-se à primitivação de fracções dos tipos:

$$\frac{t}{(1+t^2)^{\nu_\ell}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$$

i. Fracção do tipo: $\dfrac{t}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$

- Se $\nu_\ell = 1$, $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(|1+t^2|)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- Se $\nu_\ell \neq 1$, $\displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}\,\mathrm{d}t = \frac{(1+t^2)^{-\nu_\ell+1}}{2(-\nu_\ell+1)} + c,\ c \in \mathbb{R}$

ii. Fracção do tipo: $\dfrac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$

- Se $\nu_\ell = 1$, $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(t) + c,\ c \in \mathbb{R}$
- Se $\nu_\ell \neq 1$, aplicamos o método de primitivação por partes recursivamente, partindo de $\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Primitivação de Fracções Simples - Resumo

Função Primitivável	Primitiva
$\dfrac{A}{(x-\alpha_k)^{\mu_k}}$	$\begin{cases} A\ln(\lvert x-\alpha_k\rvert)+c,\ c\in\mathbb{R},\ \mu_k=1 \\ \dfrac{A(x-\alpha_k)^{-\mu_k+1}}{-\mu_k+1}+c,\ c\in\mathbb{R},\ \mu_k\neq 1\end{cases}$
$\dfrac{Bx+C}{(x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2}$	$\dfrac{B\ln((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)}{2}+\dfrac{B\beta_\ell+C}{\gamma_\ell}\arctan\left(\dfrac{x-\beta_\ell}{\gamma_\ell}\right)+c,$ $c\in\mathbb{R}$
$\dfrac{Bx+C}{((x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2)^{\nu_\ell}}$	$\dfrac{B(1+t^2)^{-\nu_\ell+1}}{2\gamma_\ell^{2\nu_\ell-2}(1-\nu_\ell)}+\dfrac{B\beta_\ell+C}{\gamma_\ell^{2\nu_\ell-1}}\displaystyle\int\dfrac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}\,\mathrm{d}t+c,\ c\in\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$	a primitiva aparece através da primitivação por partes , tomando $$\frac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}=\frac{1}{(1+t^2)^{\nu_\ell-1}}-\frac{t}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^{\nu_\ell}}$$

Exemplo

Calculemos a primitiva de

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 + \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Ora, sabemos que

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$$

de seguida encontramos a decomposição em fracções parciais:

$$\frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-2)}$$

Esta última igualdade implica que

$$3x^2 + 4x + 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

$$\begin{cases} x^2 : 3 = A + B + C \\ x^1 : 4 = C - \frac{B}{2} - A \\ x^0 : 1 = -2A \end{cases}$$

Exemplo (cont...)

$$3x^2 + 4x + 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

$$\begin{cases} x^2 : 3 = A + B + C \\ x^1 : 4 = C - \frac{B}{2} - A \\ x^0 : 1 = -2A \end{cases}$$

Da resolução do sistema considerado segue que $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$ e $C = \frac{7}{2}$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} \, \mathrm{d}x &= \int x + 1 + \frac{7}{2(x-2)} - \frac{1}{2x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int x \, \mathrm{d}x + \int 1 \, \mathrm{d}x + \int \frac{7}{2(x-2)} \, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{2x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{7 \ln(|x-2|)}{2} - \frac{\ln(|x|)}{2} + c, \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo

Calculemos a primitiva de

$$f(x) = \frac{1}{x^4+1}.$$

Ora, sabemos que

$$(x^4+1) = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1);$$

de seguida encontramos a decomposição em fracções parciais:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

Esta última igualdade implica que

$$1 = (Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

$$\begin{cases} x^3 : 0 = A + C \\ x^2 : 0 = B + D + \sqrt{2}(A - C) \\ x^1 : 0 = A + C + \sqrt{2}(B - D) \\ x^0 : 1 = B + D \end{cases}$$

Exemplo (cont...)

Da primeira e da terceira equações decorre que $A = -C$ e que $B = D$. Da quarta equação $B = D = \frac{1}{2}$ e da segunda equação $A = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -C$. Em consequência, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{2}x+2}{4(x^2+\sqrt{2}x+1)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{2}x-2}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(-\sqrt{2}x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(-\sqrt{2}x+1) + c,\ \ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

1. Determine as seguintes primitivas:

- $\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{x^5+x^4+8x^3+8x^2+16x+16}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{3x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{x^2-2x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{6x^2-3x}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{4x-11}{x^3-9x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{2x^2+4x+22}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^4+3x^2+2}\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{x^5+1}\,\mathrm{d}x$

1

- $\displaystyle \int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{x^5 + x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 16x + 16} \, \mathrm{d}x$

Comecemos por notar que a função que temos em mãos é da forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, com $\deg(D(x)) > \deg(N(x))$. Assim, o primeiro passo será factorizar $D(x)$ em irredutíveis. Podemos ver (de forma relativamente rápida) que -1 é raíz de $D(x)$. Por aplicação da regra de Ruffini, vem que

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 1 & 8 & 8 & 16 & 16 \\ -1 & & -1 & 0 & -8 & 0 & -16 \\ \hline & 1 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 \end{array}$$

$$x^5 + x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 16x + 16 = (x+1)(x^4 + 8x^2 + 16) = (x+1)(x^2+4)^2.$$

Desta forma,

$$\frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 31}{x^5 + x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 16x + 16} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

A última igualdade implica que

$$3x^4+x^3+20x^2+3x+31 = A(x^2+4)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+4)+(Dx+E)(x+1).$$

Igualando os coeficientes,

$$\begin{cases} x^4 : 3 & = A + B \\ x^3 : 1 & = B + C \\ x^2 : 20 & = 8A + 4B + C + D \\ x^1 : 3 & = 4B + 4C + D + E \\ x^0 : 31 & = 16A + 4C + E \end{cases}$$

Resulta da resolução do sistema anterior que $A = 2$, $B = 1$, $C = D = 0$ e $E = -1$. Por conseguinte,

$$\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{x^5+x^4+8x^3+8x^2+16x+16}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x+1} + \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln(|x+1|) + \frac{\ln(|x^2+4|)}{2} - \frac{x}{8(x^2+4)} - \frac{\arctan(\frac{x}{2})}{16} + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

- $$\boxed{\int \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}\,\mathrm{d}x}$$

A função em mãos é da forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, com $\deg(D(x)) > \deg(N(x))$. Assim, o primeiro passo será factorizar $D(x)$ em irredutíveis. Podemos ver (de forma relativamente rápida) que 1 é raíz de $D(x)$. Por aplicação da regra de Ruffini, vem que

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

A última igualdade implica que

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1).$$

Igualando os coeficientes,

$$\begin{cases} x^2 : 0 & = A + B \\ x^1 : 0 & = C - B \\ x^0 : 1 & = A - C \end{cases}$$

Resulta da resolução do sistema anterior que $A = \frac{1}{2}$ e $B = C = -\frac{1}{2}$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(|x-1|)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln(|x-1|)}{2} - \frac{\ln(|x^2+1|)}{4} - \frac{\arctan(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- $\boxed{\int \frac{3x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x}$

A função em mãos é da forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, com $\deg(D(x)) = \deg(N(x))$. Assim, o primeiro passo será aplicar o algoritmo da divisão a $N(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\,3x^2-3 & 3 \\ \cline{1-1} -\,3 & \end{array}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int 3 - \frac{3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int 3\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 3x - 3\arctan(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

A função em mãos é da forma $\frac{N(x)}{D(x)}$, com $\deg(D(x)) > \deg(N(x))$. Assim, o primeiro passo será factorizar $D(x)$ em irredutíveis. Podemos ver (de forma relativamente rápida) que -1 é raíz de $D(x)$.

Por aplicação da regra de Ruffini, vem que

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 - 2x = (x+1)(x+2)x$$

Assim,

$$\frac{x^2+1}{x^3+3x^2-2x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x}.$$

A última igualdade implica que

$$x^2 + 1 = Ax(x+2) + Bx(x+1) + C(x+1)(x+2).$$

Igualando os coeficientes,

$$\begin{cases} x^2 : 1 & = A + B + C \\ x^1 : 0 & = 2A + B + 3C \\ x^0 : 1 & = 2C \end{cases}$$

Resulta da resolução do sistema anterior que $A = -2$, $B = \frac{5}{2}$ e $C = \frac{1}{2}$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^3+3x^2-2x}\,\mathrm{d}x &= \int -\frac{2}{x+1}+\frac{5}{2(x+2)}+\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x+\int \frac{5}{2(x+2)}\,\mathrm{d}x+\int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x\\ &= -2\ln(|x+1|)+\frac{5\ln(|x+2|)}{2}+\frac{\ln(|x|)}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aula 11

Proposição

Sejam f e φ duas funções tais que $f \circ \varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Suponhamos ainda que a função $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, que φ' tem sinal constante e que $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável. Então f é também primitivável no intervalo $\varphi(]a, b[)$ e

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \\ &= \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}(\varphi(t))\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}\end{aligned}$$

Demonstração.

Suponhamos que se conhece uma primitiva $H(t)$ de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ e se pretendem obter as primitivas de $f(x)$. Admitindo que o sinal de φ' se mantém constante em $]a, b[$, é fácil ver que $H(\varphi^{-1}(x))$ é uma primitiva de $f(x)$ no intervalo aberto $\varphi(]a, b[)$:

$$\frac{\mathrm{d}(H \circ \varphi^{-1})}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$$

♦

Exemplo

Pensemos em calcular $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$. Se fizermos a substituição $u = 1 + x^4$ teremos $\mathrm{d}u = 4x^3\,\mathrm{d}x$. No entanto, como $4x^2$ não é constante,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4x^2}\frac{4x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \neq \frac{1}{4x^2}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Isto permite exibir que a mudança $u = 1 + x^4$ não resolve o problema. No entanto, se fizermos $u = x^2$, teremos $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ e, assim,

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\bigg|_{u=x^2} = \frac{\arctan(u)}{2}\bigg|_{u=x^2} = \frac{\arctan(x^2)}{2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

Exemplo

Calculemos $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$. Ao escolher $x = t^3$, ficamos com $3t^2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int e^{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x &= \int 3t^2 e^t\,\mathrm{d}t\\ &= 3t^2e^t - 6te^t + 6e^t + c,\ c \in \mathbb{R}\\ &= 3x^{\frac{2}{3}}e^{x^{\frac{1}{3}}} - 6x^{\frac{1}{3}}e^{x^{\frac{1}{3}}} + 6e^{x^{\frac{1}{3}}} + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemplo

Calculemos $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$. Ao escolher $t = \sqrt{2x}$, com $t \geq 0$, obtemos $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}} &= \int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\ &= t - \ln(|1+t|) + c,\ c \in \mathbb{R}\\ &= \sqrt{2x} - \ln(|1+\sqrt{2x}|) + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nem sempre é muito claro qual a mudança de variável mais recomendada. No entanto, em numerosas situações encontram-se estudadas substituições aconselhadas. Veja-se a seguinte tabela na qual f é uma função irracional dos argumentos indicados.

Nota: A utilização destas substituições permite transformar a função a primitivar numa função racional que pode ser primitivável por decomposição.

- Integrais do tipo $\displaystyle\int \frac{Px+Q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$:

  $\rightarrow$ Decompor $Px+Q$ em $p\dfrac{\mathrm{d}(ax^2+bx+c)}{\mathrm{d}x}+q$.

- Integrais do tipo $\displaystyle\int \frac{1}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$:

  $\rightarrow$ Aplicar substituição $t=\dfrac{1}{px+q}$.

Primitivação por Mudança de Variável

Primitiva	Substituição
$\int f(x, e^x)$	$x = \ln(t),\ t \in \mathbb{R}^+$
$\int f(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})$	$x = \dfrac{a\sin(t)}{b},\ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$\int f(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2})$	$x = \dfrac{a\tan(t)}{b},\ t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$\int f(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2})$	$x = \dfrac{a\sec(t)}{b},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
$\int f\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$	$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

1. Determine as seguintes primitivas:

- $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x\sqrt{8+x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-7}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+6}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1}\,\mathrm{d}x$

1

- $\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t = 1-x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -1 \Leftrightarrow -\mathrm{d}t = \mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x &= \int (t-1)^2\sqrt{t}\,(-\mathrm{d}t) = -\int (t-1)^2\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\\ &= -\int (t^2-2t+1)t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = -\int t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{2t^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4t^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\\ &= -\frac{2(1-x)^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4(1-x)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3} + c,\ \ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

- $\int x(2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t = 2x+5} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{2} = \mathrm{d}x.$

$$\int x(2x+5)^{10}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{t-5}{2}\right) t^{10}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{4}\int (t-5)t^{10}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int t^{11}-5t^{10}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\frac{t^{12}}{12}-\frac{5t^{11}}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right)+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t=\sqrt{e^x-1}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t.$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\arctan(t) = 2\arctan(\sqrt{e^x-1})+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Primitivação por Mudança de Variável - Resolução

- $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t=\sqrt{x}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t.$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin(t)}{t}(2t\,\mathrm{d}t) = 2\int \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -2\cos(t) = -2\cos(\sqrt{x}) + c,\ \ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t=e^x} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = e^x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}.$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}+2}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{1}{t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t+1} \\ &= -\frac{1}{e^x+1} + c,\ \ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{x = 3\sin(t)} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3\cos(t) \Leftrightarrow \mathrm{d}x = 3\cos(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3\cos(x)}{(3\sin(t))^2\sqrt{9-(3\sin(t))^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{3\cos(t)}{9\sin^2(t)\sqrt{9\cos^2(t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\int \csc^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\cot(t)}{9} = -\frac{\cot\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right)}{9} + c,\ c \in \mathbb{R} \\
&= -\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

- $\int x\sqrt{8+x^2}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{x = \sqrt{8}\tan(t)} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{8}\sec^2(t) \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{8}\sec^2(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{8+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int (\sqrt{8}\tan(t))\sqrt{8+(\sqrt{8}\tan(t))^2}(\sqrt{8}\sec^2(t)\,\mathrm{d}t) \\
&= \int (\sqrt{8}\tan(t))\sqrt{8+8\tan^2(t)}\sqrt{8}\sec^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 8\int \tan(t)\sqrt{8\sec^2(t)}\sec^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 8\sqrt{8}\int \tan(t)\sec^3(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{8^{\frac{3}{2}}\sec^3(t)}{3} = \frac{8^{\frac{3}{2}}(1+\tan^2(t))^{\frac{3}{2}}}{3} \\
&= \frac{(8+8\tan^2(t))^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{(8+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t=\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= t - \arctan(t) = \sqrt{x^2-1} - \arctan(\sqrt{x^2-1}) + c,\ \ c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-7}}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{x=\sqrt{7}\sec(t)} \Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{7}\sec(t)\tan(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-7}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{7\sec^2(t)\sqrt{7\sec^2(t)-7}}\left(\sqrt{7}\sec(t)\tan(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \int \frac{\sqrt{7}\tan(t)\,\mathrm{d}t}{7\sec(t)\sqrt{7\tan^2(t)}} = \frac{1}{7}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sec(t)}$$

$$= \frac{\sin(t)}{7} = \frac{\sin\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)\right)}{7} + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-7}}{7x} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

- $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+6}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+6}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{(6x+2)+13}{3}}{\sqrt{9x^2+6x+6}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}}\boxed{\int \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x} + \frac{13}{3\sqrt{3}}\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x}$$

Primitivação por Mudança de Variável - Resolução

Mudança de variável: $\boxed{t = 3x^2 + 2x + 2} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 6x + 2 \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{6x+2}$.

$$\boxed{\int \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+2}}\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}$$

$$= \sqrt{3x^2+2x+2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{3x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x} = \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{5}{3}}}\,\mathrm{d}x}$$

Mudança de variável: $\boxed{t = \dfrac{3x+1}{\sqrt{5}}} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{5}\,\mathrm{d}t}{3}$.

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{5}{3}}}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{\frac{5t^2}{3} + \frac{5}{3}}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln\left(\left|\sqrt{t^2+1} + t\right|\right) = \frac{\ln\left(\left|\sqrt{\frac{(3x+1)^2}{5} + 1} + \frac{3x+1}{\sqrt{5}}\right|\right)}{\sqrt{3}} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Primitivação por Mudança de Variável - Resolução

$$\therefore \int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+6}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3x^2+2x+2}}{3\sqrt{3}} + \frac{13\ln\left(\left|\sqrt{\frac{(3x+1)^2}{5}+1}+\frac{3x+1}{\sqrt{5}}\right|\right)}{9} + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Aula 12

1. Se um objecto se move em linha recta a uma velocidade dada por $v(t) = 1 - t^2$, em cada instante $t \in [0, 2]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 2, qual a posição do objecto no instante final $t = 2$?

$$(A)\ -\frac{2}{3} \qquad (B)\ 0 \qquad (C)\ \frac{4}{3}$$

2. Se um objecto se move em linha recta a uma aceleração dada por $a(t) = -\frac{3t}{2}$, em cada instante $t \in [0, 2]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 0, já a deslocar-se com velocidade 1, qual a posição do objecto no instante final $t = 2$?

$$(A)\ -4 \qquad (B)\ 0 \qquad (C)\ \frac{1}{2}$$

3. Se um objecto se move em linha recta a uma aceleração dada por $x''(t) = \frac{3t}{2}$, em cada instante $t \in [0, 2]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 0, já a deslocar-se com velocidade 1, qual a expressão para $x(t)$?

$(A)\ \dfrac{9t^2}{8} + t$ $\qquad (B)\ \dfrac{t^3}{4} + t$ $\qquad (C)$ Nenhuma das anteriores

4. Se um objecto se move em linha recta a uma velocidade dada por $v(t) = e^t + t$, em cada instante $t \in [0, 2]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 1, qual a posição do objecto no instante final $t = 2$?

$$(A)\ e^2 + 1 \qquad (B)\ e^2 + 3 \qquad (C)\ e^2 + 2$$

5. Um carro move-se em linha recta a uma aceleração dada por $a(t) = \frac{9t}{10}$, em cada instante $t \in [0, 10]$, e se no instante inicial $t = 0$ se encontra na posição 0, qual a posição do objecto no instante final $t = 10$?

$$(A)\ 250 \qquad (B)\ 380 \qquad (C)\ 200$$

Extensão dos Conceitos de Primitiva e Derivada

A definição de primitiva F não foi dada pontualmente mas sim num conjunto, e um tal conjunto foi considerado aberto porque a definição dada exigiu a derivação de F nos pontos do mesmo.

Se admitirmos a consideração de derivadas laterais, podemos fazer a seguinte extensão do conceito:

Definição

Uma função $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma primitiva de $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se e só se

- $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in]a, b[$,
- $F'_d(a) = f(a)$,
- $F'_e(b) = f(b)$.

Em tal caso diz-se também que f é a (função) derivada de F.

Nota: Diz-se também que uma função F é uma primitiva de $f : D_F \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ em $[a, b] \subseteq D_f$ se e só se F é uma primitiva de $f|_{[a,b]}$ no sentido definido acima.

É também possível provar que é válido o seguinte critério simples para testarmos se uma primitiva de uma função num intervalo aberto se pode estender a uma primitiva no correspondente intervalo fechado:

Proposição

Se $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e se $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in]a, b[$, onde f é uma função contínua à direita em a e contínua à esquerda em b, então F é uma primitiva de f em $[a, b]$.

Exemplo

Podemos ver que a restrição de

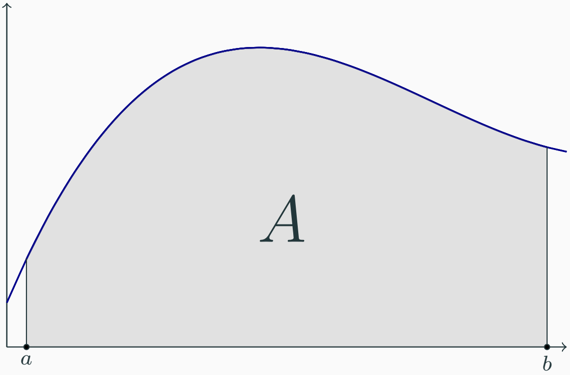
$$F(x) = \frac{9 \arcsin(\frac{x}{3})}{2} + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2}$$

ao intervalo $]-3, 3[$ é uma primitiva de $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ nesse intervalo. Já que F, tanto como f, são contínuas no domínio comum de definição $[-3, 3]$, o resultado acima garante que F também é uma primitiva de f em $[-3, 3]$.

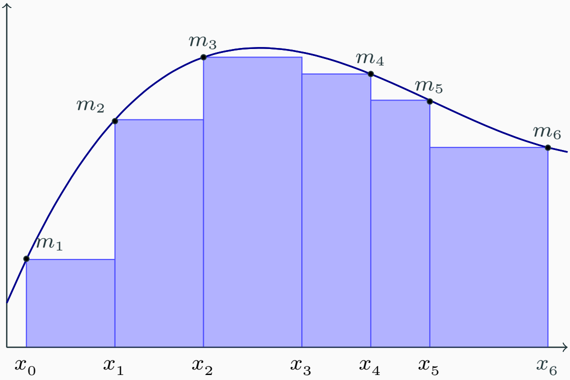
Aula 13

Integral de Riemann - Motivação

Como calcular a área delimitada pelo gráfico de f, pelas rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$?



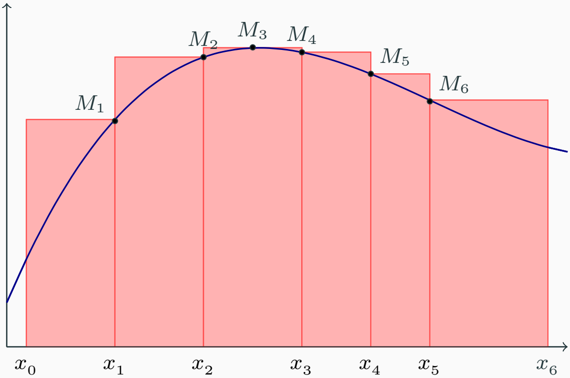
Área (Defeito)



$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

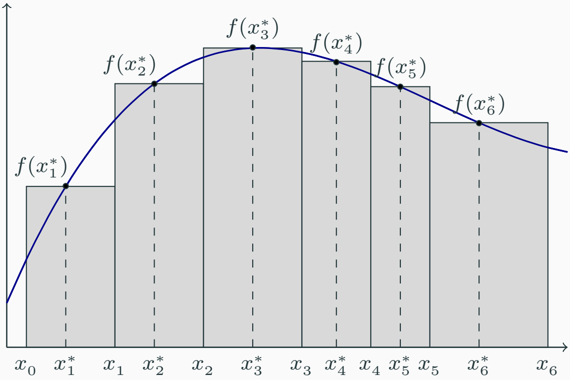
$$A_m = \sum_{i=1}^{6} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Área (Excesso)



$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$A_M = \sum_{i=1}^{6} M_i(x_i - x_{i-1})$$



$$A^* = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Devemos notar que
$A_m \leq A^* \leq A_M$.

Definição

- Seja $[a, b]$ um intervalo em que $a \leq b$ (podendo, inclusivamente, considerar um intervalo degenerado). Uma partição de $[a, b]$ é um conjunto de pontos

  $$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

  tal que $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b$.
- Chamamos diâmetro de $\mathcal{P}$, denotando por $\Delta\mathcal{P}$, à maior das amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, i.e.,

  $$\Delta\mathcal{P} := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n.\}$$

- Dizemos que uma sequência $\mathcal{C} := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ é compatível com a partição $\mathcal{P}$ quando, para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiver $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
- Um refinamento da partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é uma partição $\mathcal{Q}$ de $[a, b]$ tal que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Nesta situação dizemos que $\mathcal{Q}$ é mais fina do que $\mathcal{P}$.

Nota: Denotaremos o conjunto de todas as partições de $[a, b]$ por $\mathcal{P}[a, b]$.

Definição

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $a < b$. A soma de Riemann de f associada à partição $\mathcal{P} \in \mathscr{P}[a, b]$ e à sequência compatível $\mathcal{C}$ compatível é

$$\Sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{C}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Nota:

- Caso $\mathcal{C} = \left(\sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) \right)_{i \in [n]}$, denotamos $\Sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{C})$ por $S(f, \mathcal{P})$ e dizemos que esta é a soma superior de Riemann de f relativamente a $\mathcal{P}$.
- Caso $\mathcal{C} = \left(\inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) \right)_{i \in [n]}$, denotamos $\Sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{C})$ por $I(f, \mathcal{P})$ e dizemos que esta é a soma inferior de Riemann de f relativamente a $\mathcal{P}$.

Lema

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathcal{P}[a,b]$, *com* $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. *Então* $I(f,\mathcal{P}) \leq I(f,\mathcal{Q})$.

Corolário

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathcal{P}[a,b]$, *com* $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. *Então* $S(f,\mathcal{P}) \geq S(f,\mathcal{Q})$.

Definição

Dizemos que a soma inferior (resp. superior) de Riemann tende para ℓ, $I(f,\mathcal{P}) \xrightarrow{\mathcal{P}} \ell$ (resp. $S(f,\mathcal{P}) \xrightarrow{\mathcal{P}} \ell$), se para qualquer $\varepsilon > 0$, existir uma partição $\mathcal{P}_\varepsilon$ tal que $|I(f,\mathcal{P}) - \ell| < \varepsilon$ (resp. $|S(f,\mathcal{P}) - \ell| < \varepsilon$), para todas as partições $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_\varepsilon \in \mathcal{P}[a,b]$.

Lema

Para toda a função limitada f *em* $[a,b]$, *os limites* $\lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} I(f,\mathcal{P})$ *e* $\lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} S(f,\mathcal{P})$ *existem e são iguais a, respectivamente,*

$$\lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} I(f,\mathcal{P}) = \sup\{I(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]\},$$

$$\lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} S(f,\mathcal{P}) = \inf\{S(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]\}.$$

Partições, Somas e Integral de Riemann

Definição

Uma função definida num intervalo $[a, b]$ diz-se integrável à Riemann se

$$\lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} S(f, \mathcal{P}) = \lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} I(f, \mathcal{P}).$$

Neste caso, o integral de Riemann de f em $[a, b]$ é definido por este valor:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} S(f, \mathcal{P}) = \lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} I(f, \mathcal{P}).$$

Nota: Analogamente, podemos dizer que f é integrável à Riemann em $[a, b]$ se, para toda a sucessão $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{P}[a, b]$ tais que $\lim_{n\to\infty}(\Delta\mathcal{P}_n) = 0$, se tiver $\lim_{n\to\infty} \Sigma(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = k$, para toda a sucessão $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sequências compatíveis com $\mathcal{P}_n$.

limite superior

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \text{acréscimo infinitesimal}$$

função integranda

limite inferior

Exemplo

Se $a \in D_f$, para uma função $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, então f é limitada em $\{a\}$ e

$$I(f, \{a\}) = S(f, \{a\}) = 0.$$

Assim, segundo a definição acabada de introduzir, temos que f é integrável em $\{a\}$ e que

$$\int_a^a f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Proposição (Condição Necessária de Integrabilidade)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se f for integrável à Riemann, então f é limitada.

Nota:

- O resultado anterior permite concluir que f não limitada em $[a, b] \Rightarrow f$ não integrável à Riemann em $[a, b]$.
- O recíproco da proposição anterior não é válido. Existem funções limitadas num intervalo que não são integráveis nesse intervalo.

Condições de Integrabilidade

Teorema

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função.*

- *Se* f *for contínua em* $[a, b]$ *então é integrável à Riemann em* $[a, b]$.
- *Se* f *for limitada em* $[a, b]$ *e descontínua apenas num número finito ou infinito contável de pontos (de facto, num conjunto com medida nula), então é integrável à Riemann em* $[a, b]$.
- *Se* f *for monótona em* $[a, b]$ *então é integrável à Riemann em* $[a, b]$.

Nota: O integral de Riemann de uma função contínua e positiva entre a e b pode interpretar-se geometricamente como a área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos xx e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Proposição

Sejam f *e* g *funções definidas em* $[a, b]$. *Se* f *for integrável em* $[a, b]$ *e* g *diferir de* f *apenas num número finito de pontos (i.e.,* $f(x) = g(x)$*, para todo o* $x \in [a, b]$*, excepto um número finito de valores), então*

$$g \text{ é integrável em } [a, b] \qquad \text{e} \qquad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplo

A função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável à Riemann em nenhum intervalo $[a, b]$, com $a < b$.

Seja $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$. Então, para cada $i \in [n]$, o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ contém tanto racionais como irracionais. Assim,

$$\inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0 \qquad \text{e} \qquad \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1.$$

Desta forma,

$$I(f, \mathcal{P}) = 0 \qquad \text{enquanto que} \qquad S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a,$$

concluíndo-se que, de acordo com a definição de integral de Riemann, f não é integrável à Riemann em $[a, b]$.

Exemplo

A função $f(x) = x$ é integrável em $[0,1]$ e

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

A circunstância de f ser integrável em $[0,1]$ decorre directamente do facto de ser uma função contínua.

Fixemos temporariamente $n \in \mathbb{N}$ e consideremos a partição $\mathcal{P}$ obtida pela divisão de $[a,b] = [0,1]$ em n intervalos de igual amplitude. É claro que

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = x_i \qquad \text{e} \qquad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = x_{i-1}.$$

e assim (dado que $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} = \frac{i}{n}$) vem

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2n},$$

$$I(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n-1}{2n}.$$

Exemplo (cont...)

Sabemos que, para todas as partições $\mathcal{Q}$ tais que $\mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}$, temos

$$I(f, \mathcal{P}) = \frac{n-1}{2n} \leq I(f, \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{Q}) \leq \frac{n+1}{2n} = S(f, \mathcal{P}).$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos n suficientemente grande para garantir que

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < I(f, \mathcal{P}) \qquad \text{e} \qquad S(f, \mathcal{P}) < \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

e isto mostra que as somas superior e inferior de Riemann convergem ambas para $\frac{1}{2}$.

Definição

Seja f uma função é integrável à Riemann em $[a, b]$ (com $a < b$). Então, definimos o integral de Riemann de b até a por

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partições, Somas e Integral de Riemann - Exercícios

1. Uma função f diz-se escada se existir uma $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]$ e reais c_i tais que $f(x) = c_i$, para todo o $x \in]x_{i-1}, x_i[$. Justifique que todas as funções escada são integráveis à Riemann.

2. Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis à Riemann no intervalo considerado:

   - $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$, com $x \in [0, 4]$.
   - $f(x) = \begin{cases} \tan(x), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, em $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   - $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-2, 0] \\ 2, & x = 0 \\ x, & x \in]0, 1] \end{cases}$, em $[-2, 1]$.
   - $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [3, 7] \text{ e } x \notin \mathbb{N} \\ 1, & x \in [3, 7] \cap \mathbb{N} \end{cases}$, em $[3, 7]$.

3. Seja
$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}.$$
Mostre que g é integrável em $[-1, 2]$ e calcule $\int_{-1}^{2} g(x)\, \mathrm{d}x$ com base na interpretação geométrica do integral.

4. Dê um exemplo de uma função f que nunca assuma o valor 0 num dado intervalo $[a, b]$ (com $a < b$), mas seja tal que $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = 0$.

5. Dê um exemplo de uma função com um número finito de descontinuidades num intervalo limitado e fechado e que não seja integrável aí.

6. Dê um exemplo de uma função não integrável cujo módulo seja integrável.

(1) Qualquer função escada pode ser escrita como uma combinação linear de funções escada com um único "degrau" (ou seja, a correspondente partição possui somente três pontos).

Suponhamos então que

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & x \in [a, p[, \\ c_2, & x \in]p, b], \end{cases}$$

e que $f(p) = c_1$ ou $f(p) = c_2$. Teremos de tratar da descontinuidade no ponto p. Seja dado $\varepsilon > 0$ e escolham-se pontos $p' < p < p''$ tais que $p'' - p' < \varepsilon$ quando $p \neq a, b$ (quando $p = a$, tomamos $p' = a$; e quando $p = b$, tomamos $p'' = b$).

Seja $\mathcal{P}_0 = \{a, p', p'', b\} \in \mathcal{P}[a, b]$. Observemos que

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}_0) &= c_1(p' - 1) + \max\{c_1, c_2\}(p'' - p') + c_2(b - p'') \\ &= c_1(p - a) + c_2(b - p) - c_1(p - p') - c_2(p'' - p) + \max\{c_1, c_2\}(p'' - p') \\ &\leq c_1(p - a) + c_2(b - p) + 3\varepsilon \cdot \max\{c_1, c_2\}, \end{aligned}$$

Analogamente, $I(f, \mathcal{P}_0) \geq c_1(p - a) + c_2(b - p) - 3\varepsilon \cdot \max\{c_1, c_2\}$.

Decorre então que

$$c_1(p-a)+c_2(b-p)-3C\varepsilon \leq I(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) \leq c_1(p-a)+c_2(b-p)+3C\varepsilon,$$

onde $C=\max\{c_1,c_2\}$, para todo o refinamento $\mathcal{P}\supseteq\mathcal{P}_0$. Então, f é integrável à Riemann e

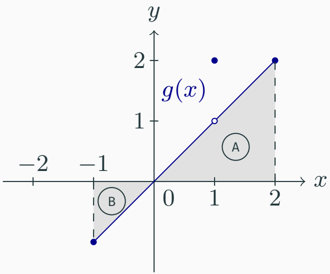
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c_1(p-a)+c_2(b-p).$$

2

- f é contínua no intervalo em questão, pelo que será integrável à Riemann.
- f não é limitada no intervalo em questão, pelo que não será integrável à Riemann.
- f é limitada e descontínua apenas num conjunto finito de pontos, pelo que será integrável à Riemann.
- f é limitada e descontínua apenas num conjunto finito de pontos, pelo que será integrável à Riemann.

3 De acordo com o enunciado, f é uma função limitada e descontínua apenas num número finito de pontos. Desta forma, será integrável em $[-1, 2]$.

Com base na interpretação geométrica do integral de Riemann,



$$\int_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = A - B = \frac{2\times 2}{2} - \frac{1\times 1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

4 Por exemplo, $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$. Outro exemplo poderia ser: $f : [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se $x \in [1,2]$, e $f(x) = -1$, se $x \in]2,3]$.

5 Por exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} \ln(x), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

6 Por exemplo, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, e $f(x) = -1$, se $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. A correspondente função, $|f|$, é constantemente igual a 1 em $[0,1]$, logo integrável aí. No entanto, f não é integrável.

Aula 14

Redes Indexadas por Partições

Definição

Suponhamos que $\{x_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \in \mathscr{P}[a,b]\}$ é uma família de números reais indexada por partições $\mathcal{P}$ de $[a,b]$. Dizemos que $x_{\mathcal{P}}$ converge para x, $x_{\mathcal{P}} \to x$, se, dado um qualquer $\varepsilon > 0$, existir uma $\mathcal{P}_0 \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que

$$|x_{\mathcal{P}} - x| < \varepsilon,$$

para toda a $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ em $\mathscr{P}[a,b]$. Adicionalmente, uma família de números reais indexada por $\mathscr{P}[a,b]$ é designada por rede.

Lema

Suponhamos que $x_{\mathcal{P}}$ e $y_{\mathcal{P}}$ são redes indexadas por $\mathcal{P} \in \mathscr{P}[a,b]$ e que $x_{\mathcal{P}} \to x$ e $y_{\mathcal{P}} \to y$. Então:

- $x_{\mathcal{P}} + y_{\mathcal{P}} \to x + y$.
- $x_{\mathcal{P}} y_{\mathcal{P}} \to xy$.
- $cx_{\mathcal{P}} \to cx$, *para todo o* $c \in \mathbb{R}$.
- $x_{\mathcal{P}}/y_{\mathcal{P}} \to x/y$, *desde que* $y \neq 0$.

Lema (Redes Enquadradas)

Suponhamos que $x_{\mathcal{P}}$ e $y_{\mathcal{P}}$ são duas redes indexadas por $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]$, que ambas convergem para $c \in \mathbb{R}$, e que $x_{\mathcal{P}} \leq z_{\mathcal{P}} \leq y_{\mathcal{P}}$ para todo $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]$. Então, também sucede que $z_{\mathcal{P}} \to c$.

Demonstração.

Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese, existem duas partições $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ tais que

$$|x_{\mathcal{P}} - c| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo o } \mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0 \qquad \text{e} \qquad |y_{\mathcal{P}} - c| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo o } \mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_1.$$

O conjunto dos pontos $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1$ também é uma partição de $[a,b]$ e, naturalmente, qualquer conjunto que contenha $\mathcal{P}_2$ também contém $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$. Então

$$|x_{\mathcal{P}} - c| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad |y_{\mathcal{P}} - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

são ambos válidos para qualquer $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_2$. Desta forma,

$$c - \varepsilon < x_{\mathcal{P}} \leq z_{\mathcal{P}} \leq y_{\mathcal{P}} < c + \varepsilon.$$

Então, para todo o $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_2$, temos $|z_{\mathcal{P}} - c| < \varepsilon$, conforme desejado. ♦

Propriedades do Integral de Riemann

Proposição

Sejam f e g duas funções integráveis à Riemann em $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

1. *$f+g$ é integrável à Riemann em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. *αf é integrável à Riemann em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. *Se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. *$|f|$ é integrável à Riemann em $[a,b]$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Proposição (cont...)

Sejam f e g duas funções integráveis à Riemann em $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

5. *fg é integrável à Riemann em $[a, b]$.*
6. *Se $c \in]a, b[$, então f é integrável à Riemann em $[a, c]$ e em $[b, c]$ e*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. *f é integrável em qualquer sub-intervalo $[c, d] \subseteq [a, b]$.*
8. *Se $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

9. *Se $m \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \in [a, b]$, onde $m, M \in \mathbb{R}$, então*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Demonstração.

1. Comecemos por observar que

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}[f(x)+g(x)] \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x),$$

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}[f(x)+g(x)] \geq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x).$$

Portanto,

$$I(f,\mathcal{P})+I(g,\mathcal{P}) \leq I(f+g,\mathcal{P}) \leq S(f+g,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})+S(g,\mathcal{P}),$$

para toda a partição $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]$. Dado que f e g são integráveis à Riemann, ao utilizar um dos lemas prévios, concluímos que $I(f,\mathcal{P})+I(g,\mathcal{P})$ e $S(f,\mathcal{P})+S(g,\mathcal{P})$ convergem ambas para o mesmo valor ($\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$).

Usando agora o Lema das Redes Enquadradas, temos que $S(f+g,\mathcal{P})$ e $I(f+g,\mathcal{P})$ convergem ambas para esse mesmo valor. Por definição, tal significa que $f+g$ é integrável à Riemann e que

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração.

2. Se $\alpha = 0$, a propriedade é trivial. No caso em que $\alpha > 0$, temos

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \alpha f(x) = \alpha \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \alpha f(x) = \alpha \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Se $\alpha < 0$, então

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \alpha f(x) = \alpha \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \alpha f(x) = \alpha \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Na primeira situação vem que

$$\alpha I(f,\mathcal{P}) \leq I(\alpha f,\mathcal{P}) \leq S(\alpha f,\mathcal{P}) \leq \alpha S(f,\mathcal{P}),$$

enquanto que na segunda temos

$$\alpha S(f,\mathcal{P}) \leq I(\alpha f,\mathcal{P}) \leq S(\alpha f,\mathcal{P}) \leq \alpha I(f,\mathcal{P}).$$

Em qualquer um do casos, o Lema das Redes Enquadradas (dado que f é integrável) garante que as somas de Riemann convergem para $\alpha \lim_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}[a,b]} S(f,\mathcal{P}) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, concluíndo o que se queria demonstrar.

Demonstração.

3. Se $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, então $f(x_i) \leq g(x_i)$ para todo o i e, consequentemente,

$$\Sigma(f, \mathcal{P}, \max\{x\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \Sigma(g, \mathcal{P}, \max\{x\}).$$

   Dado que f e g são integráveis à Riemann, as duas redes convergem, respectivamente, para os integrais de f e g, obtendo-se assim o resultado.

4. Se $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, então para todo $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, tem-se

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$$

   e daí

$$\sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\xi)| - \inf_{\gamma \in [x_{i-1}, x_i]} |f(\gamma)| \leq \sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) - \inf_{\gamma \in [x_{i-1}, x_i]} f(\gamma).$$

   Multiplicando por $x_i - x_{i-1}$ e somando (em ordema i), obtemos

$$0 \leq S(|f|, \mathcal{P}) - I(|f|, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}).$$

Demonstração.

Dado que f é integrável à Riemann, a rede da direita converge para 0, concluímos (pelo Lema das Redes Enquadradas) que a rede do meio converge para 0. Tal significa que

$$\lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} S(|f,\mathcal{P}|) = \lim_{\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]} I(|f|,\mathcal{P}),$$

e, portanto, $|f|$ é integrável à Riemann.

5. Vamos começar por demonstrar que o quadrado de uma função integrável à Riemann é também integrável à Riemann. Observe-se que

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} [f(x)]^2 = \left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|\right]^2,$$

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} [f(x)]^2 = \left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)|\right]^2.$$

Demonstração.

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
S(f^2,\mathcal{P})-I(f^2,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)|\right]^2-\left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)|\right]^2\right\}(x_i-x_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)|-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)|\right)\\
&\qquad\times\left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)|+\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)|\right)(x_i-x_{i-1})\\
&\leq 2M[S(|f|,\mathcal{P})-I(|f|,\mathcal{P})],
\end{aligned}$$

onde M é um majorante para f. Como $|f|$ é integrável, $S(|f|,\mathcal{P})-I(|f|,\mathcal{P})$ converge para 0. Pelo Lema das Redes Enquadradas, $S(f,\mathcal{P})-I(f,\mathcal{P})$ também converge para 0.

Adicionalmente, sabemos que se f e g são integráveis à Riemann, pelo que $f+g$ também tem essa propriedade. Decorre então daqui que $(f+g)^2-f^2-g^2=2fg$ é integrável, i.e., que fg é integrável.

Demonstração.

Adicionalmente, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ e assim (atendendo ao ponto 3.), temos

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

6. Dada uma $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]$, podemos adicionar-lhe o ponto c, no caso deste já não estar em $\mathcal{P}$, obtendo assim uma nova partição $\mathcal{P}'$ (que inclui c). Note-se que $S(f,\mathcal{P}')$ é a soma das somas superiores de Riemann de f em $[a,c]$ e em $[c,b]$. Então

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f,\mathcal{P}') \leq S(f,\mathcal{P}).$$

Analogamente,

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq I(f,\mathcal{P}') \geq I(f,\mathcal{P}).$$

Consequentemente,

$$0 \leq \left(\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}).$$

Demonstração.

Atendendo à hipótese de que f é integrável, o limite da rede acima é igual a zero. Assim sendo,

$$\left(\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0.$$

No entanto, dado que tanto $\overline{\int_a^c} f(x)\ \mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\ \mathrm{d}x$, como $\overline{\int_c^b} f(x)\ \mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ são não negativos, a condição anterior implica na realidade que

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tal significa, portanto, que f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Adicionalmente temos

$$I(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f, \mathcal{P})$$

e, portanto, tomando o limite, observamos que a soma destes integrais é igual a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Demonstração.

7. É uma consequência imediata do ponto anterior.
8. É uma consequência imediata do ponto 3. (tomando $f(x) = 0$ e $g(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$).
9. Se $m \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \in [a, b]$, onde $m, M \in \mathbb{R}$, então

$$\int_a^b m \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b M \, \mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

♦

Propriedades do Integral de Riemann - Exercícios

1. Mostre que $\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geq 0$.

2. Sabendo que f é uma função par, que
$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 \qquad \text{e} \qquad \int_7^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -11,$$
calcule $\int_{-7}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Mostre que, se f for uma função contínua e estritamente crescente em $[1,3]$, então
$$f(1) \leq \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(3).$$

4. Suponha que $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são duas funções integráveis à Riemann. Mostre que são válidas as seguintes desigualdades:
   - $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [g(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.
   - $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b [g(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

Aula 15

Teorema (Primeiro do Valor Médio Integral)

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas, onde g possui sinal constante. Então, existirá um $c \in \,]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração.

Se g é identicamente nula, então não há nada a provar. Analogamente, se f é constante em $[a, b]$ não resta nada para provar (a identidade é trivial).

Nas restantes possibilidades, g é sempre estritamente positiva ou estritamente negativa em $[a, b]$. Consideremos $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ e $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Então,

$$m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} < M.$$

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe um $c \in \,]a, b[$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

♦

Corolário

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua, então existirá um* $c \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Nota: Para demonstrarmos o último resultado, basta considerarmos $g(x) = 1$ no Primeiro Teorema do Valor Médio Integral.

Teorema (Segundo do Valor Médio Integral)

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *duas funções contínuas, onde* g *é monótona. Então, existirá um* $c \in]a, b[$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definição

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e defina-se $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Chamamos a F o integral indefinido de f.

Observamos que, para qualquer sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a,b]$ convergir para um dado $x \in [a,b]$ se verifica, pela aditividade do integral (revisitada), pela desigualdade triangular e pela limitação do integral (neste caso aplicada à função $|f|$), que

$$
\begin{aligned}
0 \leq |F(x_n) - F(x)| &= \left| \int_a^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_x^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x_n} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M|x_n - x|
\end{aligned}
$$

de modo que, devido a este enquadramento de sucessões, $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$, i.e., F é uma função contínua.

Proposição

O integral indefinido de uma função integrável num intervalo é uma função contínua nesse intervalo.

Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Teorema (Fundamental do Cálculo Integral - Parte 1)

Sejam $f, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *duas funções reais de variável real, onde* f *é contínua e* F *é definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Então, F *é contínua em* $[a, b]$*, diferenciável em* $]a, b[$*, e* $F'(x) = f(x)$ *(para todo o* $x \in\,]a, b[$*), i.e.,* F *é uma primitiva de* f*.*

Corolário (Fórmula de Barrow)

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função reais de variável real contínua e* F *uma sua primitiva em* $[a, b]$*. Então,*

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = F(t)|_a^b := F(b) - F(a).$$

Demonstração - Teorema Fundamental do Cálculo Integral - Parte 1.

Definamos então $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Para quaisquer $x_1, x_2 \in [a,b]$ de tal forma que $|x_2 - x_1| = \varepsilon$ (s.p.g., assumamos $x_1 < x_2$), temos

$$F(x_1+\varepsilon) - F(x_1) = \int_a^{x_1+\varepsilon} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} f(t)\ \mathrm{d}t,$$

dado que

$$\int_a^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{x_1+\varepsilon} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

De acordo com o Primeiro Teorema do Valor Médio Integral, existirá um $c \in [x_1, x_1+\varepsilon]$ tal que $F(x_1+\varepsilon) - F(x_1) = f(c)\cdot\varepsilon$; o que nos leva a

$$\frac{F(x_1+\varepsilon) - F(x_1)}{\varepsilon} = f(c).$$

Ao calcular o limite quando $\varepsilon \to 0$, obtemos $F'(x_1) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(c)$. No entanto, porque $c \in [x_1, x_1+\varepsilon]$, quando $\varepsilon \to 0$, temos $c = x_1$. Pelo facto de ser contínua, $\lim_{\varepsilon\to 0} f(c) = f(\lim_{\varepsilon\to 0} c) = f(x_1)$, concluíndo-se que $F'(x_1) = f(x_1)$. ♦

Nota: Para a demonstração do corolário, basta tomarmos uma nova função

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pela parte 1 do T.F.C.I., G é também uma primitiva de f, pelo que $G(x) = F(x) + c$, para algum $c \in \mathbb{R}$ e para todo o $x \in [a, b]$. Tomando $x = a$ vem que

$$F(a) + c = G(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

ou seja, que $G(x) = F(x) - F(a)$. Assim,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) = F(b) - F(a).$$

Teorema (Fundamental do Cálculo Integral - Parte 2)

Sejam $f, F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real, onde F é contínua, sendo uma primitiva de f (para todo o $x \in]a, b[$). Se f for integrável à Riemann em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left. F(x)\right|_a^b := F(b) - F(a).$$

Demonstração - Teorema Fundamental do Cálculo Integral - Parte 2.

Comecemos por tomar f integrável à Riemann em $[a,b]$, F contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, onde F é uma primitiva de f. Façamos uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$. Segue então que

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\
&= F(x_n) + [-F(x_{n-1}) + F(x_{n-1})] + \cdots + [-F(x_1) + F(x_1)] - F(x_0) \\
&= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \cdots + [F(x_1) - F(x_0)] \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} F'(c_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ com } c_i \in [x_{i-1}, x_i] \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ com } c_i \in [x_{i-1}, x_i] \\
&= \Sigma(f, \mathcal{P}, (c_i)_{i\in[n]}).
\end{aligned}$$

Ao tomar agora o limite nos refinamentos de $\mathcal{P}$, vem que

$$F(b) - F(a) = \lim_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]} F(b) - F(a) = \lim_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]} \Sigma(f, \mathcal{P}, (c_i)_{i\in[n]}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

♦

Exemplo

- $\displaystyle\int_1^2 (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}.$
- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|\ln(x)|)|_e^{e^2} = \ln(|\ln(e^2)|) - \ln(|\ln(e)|) = \ln(2).$

Corolário

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ e $g_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em I tais que $g_1(I) \subseteq]a,b[$ e $g_2(I) \subseteq]a,b[$. Então a função H definida em I por

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

é diferenciável em I e $H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x)$.

Nota: Sendo $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, com $x \in [a,b]$, e $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, com $x \in I$ e $g(I) \subseteq]a,b[$, então $G = F \circ g$ e, portanto, $G'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$.

Teorema Fundamental do Cálculo Integral - Exercícios

1. Calcule $F'(x)$:
   - $F(x) = \int_1^x (\sin(t^2) + e^{-t^2})\, \mathrm{d}t$
   - $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}\, \mathrm{d}t$
   - $F(x) = \int_2^{\sqrt{x}} \cos(t^4)\, \mathrm{d}t$
   - $F(x) = \int_{\cos(x)}^{x^3} \ln(t^2+1)\, \mathrm{d}t$
2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ e seja

   $$F(x) = \int_1^x f(t)\, \mathrm{d}t, \qquad \text{para } x > 1.$$

   Justifique que F é diferenciável em $x = 2$ e calcule $F'(2)$.
3. Mostre que se f é uma função contínua e não negativa em $[a, b]$ e se

   $$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = 0,$$

   então $f(x) \equiv 0$ para todo o $x \in [a, b]$.
4. Seja F a função definida por $\int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2}\, \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}t$. Calcule $F''(x)$.

5. A probabilidade do electrão de um átomo de hidrogénio se encontrar a uma distância inferior a x do seu núcleo é dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{4r^2 e^{-\frac{2r}{\beta}}}{\beta^3}\, \mathrm{d}r,$$

onde $\beta \in \mathbb{R}^+$ é o raio de Bohr ($\beta \approx 0.5292\mathring{A}$). Calcule a probabilidade do electrão se encontrar a uma distância do núcleo inferior a 2β.

6. A probabilidade P de que um frequencímetro digital manufacturado por uma companhia electrónica dure entre 2 e 3 anos, com um uso normal, é dada aproximadamente por

$$P = \int_2^3 12t^{-3}\, \mathrm{d}t.$$

- Calcule a probabilidade P.
- Determine x de tal forma que $\displaystyle\int_2^x 12t^{-3}\, \mathrm{d}t$.

7. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{x^2} t\cos(1-e^{1-t})\, \mathrm{d}t}{x^2-1}$.

8. Calcule

- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^2(x)}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_3^2 \left(\frac{t^2}{3}-\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t$

9. Calcule

- $\displaystyle\int_1^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x,$ onde $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x \in [-1,0[, \\ 7, & x = 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x \in]0,1]. \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x,$ onde $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, & x \neq 1, \\ 5, & x = 1. \end{cases}$

Aula 16

Teorema

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis, com f', g' integráveis em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, \mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Demonstração.

Este resultado segue directamente do uso da regra de derivação do produto de duas funções ($(fg)' = f'g + fg'$), do Teorema Fundamental do Cálculo e da linearidade do integral de Riemann, pois atendendo a tal obtém-se:

$$\begin{aligned} f(x)g(x)|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b (f(x)g(x))'\, \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\, \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

♦

Exemplo

Para calcularmos $\int_1^{50} \ln(x)\, \mathrm{d}x$ podemos começar por imaginar que a nossa função integranda é o produto de $f'(x) = 1$ por $g(x) = \ln(x)$. Em tal situação estamos em condições de aplicar o resultado anterior. Assim sendo, temos

$$\begin{aligned}\int_1^{50} \ln(x)\, \mathrm{d}x &= x\ln(x)\big|_1^{50} - \int_1^{50} x\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = 50\ln(50) - 0 - \int_1^{50} \mathrm{d}x \\ &= 50\ln(50) - 49.\end{aligned}$$

Exemplo

Para calcularmos $\int_0^5 xe^{-x}\, \mathrm{d}x$ podemos começar por imaginar que a nossa função integranda é o produto de $f'(x) = e^{-x}$ por $g(x) = x$. Em tal situação estamos em condições de aplicar o resultado anterior. Assim sendo, temos

$$\begin{aligned}\int_0^5 xe^{-x}\, \mathrm{d}x &= -xe^{-x}\big|_0^5 - \int_0^5 -e^{-x}\, \mathrm{d}x = -5e^{-5} - 0 - \int_0^5 -e^{-x}\, \mathrm{d}x \\ &= -5e^{-5} - e^{-x}\big|_0^5 = -6e^{-5} + 1.\end{aligned}$$

Teorema

Seja φ uma função com derivada contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Se f é contínua em $\varphi([a, b])$, então $f \circ \varphi$ também é contínua em $[a, b]$ e

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demonstração.

Escolha-se $c \in \,]a, b[$ e construa-se $F(x) = \int_c^x f(u)\,\mathrm{d}u$. Decorre que $F'(x) = f(x)$, para todo o x no intervalo em causa. Consideremos agora $\omega(t) := F(\varphi(t))$. Pela regra da cadeia, vem que $\omega' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Em consequência,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \omega'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \omega(t)\big|_a^b = \omega(b) - \omega(a) \\
&= F(x)\big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\
&= \int_c^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{\varphi(a)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

♦

Exemplo

Para calcularmos $\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, vejamos que é útil fazermos uma substituição de variáveis: $u = -\frac{x^2}{2}$. Assim,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = -x\,\mathrm{d}x, \qquad x = 0 \to u = 0, \qquad x = 1 \to u = -\frac{1}{2}.$$

Por conseguinte,

$$\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}(-x\,\mathrm{d}x) = -\int_0^{-\frac{1}{2}} e^u\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^0 e^u\,\mathrm{d}u$$

$$= e^u\big|_{-\frac{1}{2}}^0 = e^0 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$$

Nota: Embora o objectivo seja aplicar uma substituição de variável, é também possível calcular o integral anterior sem recorrer a tal método. De facto,

$$\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = e^{-\frac{x^2}{2}} + c,\; c \in \mathbb{R},$$

o que leva a

$$\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^1 = -e^{-\frac{1}{2}} + 1.$$

1. Calcule:

- $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x+4}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_1^0 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 2x^{17}e^{1+x^9}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_6^0 (2+5x)e^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos(4x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-x}\sin(4x)\,\mathrm{d}x$

2. Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$, $a \in I$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Sabendo que $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, mostre que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t,$$

para todo o $x \in I$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e par. Considere ainda $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$F(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Mostre que F é uma função ímpar.

4. Sabendo que $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável e ímpar, mostre que
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

5. Sabendo que $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável e par, mostre que
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1

- $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x+4}\,\mathrm{d}x$

Mudança de variável: $\boxed{t = e^x} \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x = \ln(2) & \rightarrow & t = 2 \\ x = -\ln(2) & \rightarrow & t = \frac{1}{2} \end{array}}$$

$$\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x+4}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{(t+4)t}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{t^2(1+\frac{4}{t})}\,\mathrm{d}t$$

Mudança de variável: $\boxed{v = 1 + \dfrac{4}{t}} \Rightarrow \mathrm{d}t = -\dfrac{t^2}{4}\,\mathrm{d}u$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} t = 2 & \rightarrow & u = 3 \\ t = \frac{1}{2} & \rightarrow & u = 9 \end{array}}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{t^2(1+\frac{4}{t})}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{9}^{3} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{4}\int_{3}^{9} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$= -\left.\frac{\ln(|u|)}{4}\right|_{3}^{9} = \frac{\ln(9)}{4} - \frac{\ln(3)}{4} = \frac{\ln(3)}{4}.$$

- $$\boxed{\int_1^0 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x}$$

Mudança de variável: $\boxed{t = 1 - x^2} \Rightarrow \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x = 0 & \to & t = 1 \\ x = 1 & \to & t = 0 \end{array}}$$

$$\int_1^0 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}.$$

- $$\boxed{\int_{-1}^0 2x^{17}e^{1+x^9}\,\mathrm{d}x}$$

Mudança de variável: $\boxed{t = x^9} \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{9x^8}$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x = -1 & \to & t = -1 \\ x = 0 & \to & t = 0 \end{array}}$$

$$\int_{-1}^{0} 2x^{17}e^{1+x^9}\,\mathrm{d}x = 2e\int_{-1}^{0} x^{17}e^{x^9}\,\mathrm{d}x = \frac{2e}{9}\int_{-1}^{0} \underbrace{t}_{g(t)}\underbrace{e^t}_{f'(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2e}{9}\left(te^t\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^t\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{2e}{9}\left[te^t - e^t\right]\Big|_{-1}^{0} = \frac{4-2e}{9}.$$

- $\boxed{\int_{6}^{0} (2+5x)e^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x}$

$$\int_{6}^{0} \underbrace{(2+5x)}_{f(x)}\underbrace{e^{\frac{x}{3}}}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = 3(2+5x)e^{\frac{x}{3}}\Big|_{6}^{0} - \int_{6}^{0} 15e^{\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[3(2+5x) - 45e^{\frac{x}{3}}\right]\Big|_{6}^{0} = -51e^2 - 39.$$

- $\boxed{\int_0^\pi x^2 \cos(4x)\ \mathrm{d}x}$

$$\int_0^\pi \underbrace{x^2}_{g(x)} \underbrace{\cos(4x)}_{f'(x)}\ \mathrm{d}x = \left.\frac{x^2\sin(4x)}{4}\right|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{x\sin(4x)}{2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{x^2\sin(4x)}{4}\right|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \underbrace{x}_{h(x)} \underbrace{\sin(4x)}_{i'(x)}\ \mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{x^2\sin(4x)}{4}\right|_0^\pi - \frac{1}{2}\left(-\left.\frac{x\cos(4x)}{4}\right|_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{\cos(4x)}{4}\ \mathrm{d}x\right)$$

$$= \left.\frac{x^2\sin(4x)}{4}\right|_0^\pi + \left.\frac{x\cos(4x)}{8}\right|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\cos(4x)}{4}\ \mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{x^2\sin(4x)}{4}\right|_0^\pi + \left.\frac{x\cos(4x)}{8}\right|_0^\pi - \left.\frac{\sin(4x)}{32}\right|_0^\pi = \frac{\pi}{8}.$$

Técnicas de Integração - Resolução

- $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-x}\sin(4x)\,\mathrm{d}x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \underbrace{e^{-x}}_{g(x)}\underbrace{\sin(4x)}_{f'(x)}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\sin(4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \underbrace{4\cos(4x)}_{h(x)}\underbrace{e^{-x}}_{i'(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= -e^{-x}\sin(4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} - 4e^{-x}\cos(4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} - 16\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-x}\sin(4x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$17\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-x}\sin(4x)\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\sin(4x) - 4e^{-x}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$17\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-x}\sin(4x)\,\mathrm{d}x = -e^{-\frac{\pi}{8}} + 4.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-x}\sin(4x)\,\mathrm{d}x = \frac{-e^{-\frac{\pi}{8}} + 4}{17}.$$

2

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= f(a) + \left(tf'(t)\Big|_a^x - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t \right) \\
&= f(a) + \big(xf'(x) - af'(a)\big) - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t \\
&= f(a) + xf'(x) - af'(a) + (xf'(a) - xf'(a)) - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t \\
&= f(a) + (x-a)f'(a) + x(f'(x) - f'(a)) - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t \\
&= f(a) + (x-a)f'(a) + x\int_a^x f''(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t \\
&= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x xf''(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t \\
&= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
-F(-x) &= -f\left(-\frac{x}{2}\right)\int_0^{-2x} f(t)\,\mathrm{d}t = -f\left(\frac{x}{2}\right)\int_0^{-2x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f\left(\frac{x}{2}\right)\int_{-2x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = f\left(\frac{x}{2}\right)\int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{0} -f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

5

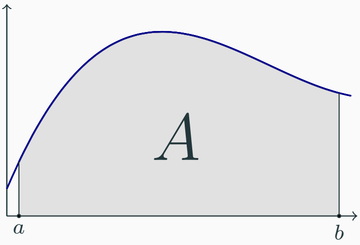
$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{0}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Proposição

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas rectas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ilustração Gráfica:



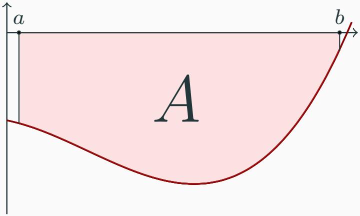
$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposição

Se f é uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(x) \leq 0$, para todo o $x \in [a,b]$, então a área da região plana delimitada pelo gráfico de f e pelas rectas $y=0$, $x=a$ e $x=b$ é dada por

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ilustração Gráfica:



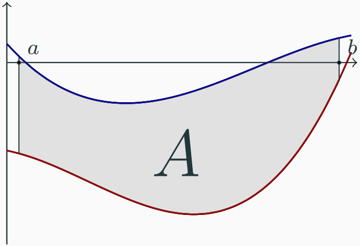
$$A = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposição

Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(x) \geq g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, então a área da região plana delimitada pelos gráficos de f e de g e pelas rectas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x.$$

Ilustração Gráfica:



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x$$

O volume V de um sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da área limitada pelas curvas (correspondentes a funções integráveis não negativas) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as rectas $x = a$ e $x = b$ ($a \leq b$), pode ser calculado através da fórmula:

$$V = \int_a^b \pi |f^2(x) - g^2(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Note-se que

$$\int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| \, \mathrm{d}x = \lim_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{i=1}^{n} \pi |f^2(\xi_i) - g^2(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}),$$

e que tal identidade facilita a interpretação geométrica do volume em causa.

Uma outra utilidade do integral definido passa pelo cálculo do comprimento de curvas.

Se a curva for poligonal, podemos facilmente encontrar o seu comprimento ao adicionar os comprimentos dos segmentos de recta que a formam. No entanto, a situação não será tão fácil se estivermos a supor uma situação geral em que uma curva γ é dada pela equação $y = f(x)$, onde f é diferenciável e $x \in [a, b]$.

Sendo $\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a, b]$, a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ é uma aproximação para γ. Note-se que a aproximação fica tanto melhor quanto mais refinada for $\mathcal{P}$.

O comprimento da poligonal é então dado por

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Por aplicação do Teorema de Lagrange em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, concluímos que existirá um $c_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Decorre daqui que

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i)(x_i - x_{i-1}))} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Neste sentido, definimos o comprimento da curva γ como

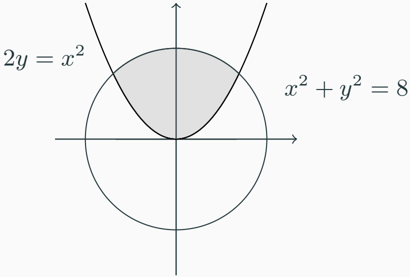
$$L_\gamma = \lim_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

1. Utilizando o cálculo de integrais, mostre que a área da região do plano delimitada pela elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}^+,$$

é igual a πab.

2. Recorrendo ao cálculo integral, determine o valor da área da região sombreada representada na seguinte figura:



3. Utilizando a integração, calcule o volume de uma esfera de raio unitário.

4. Calcule o comprimento de arco de $y = x^{\frac{3}{2}}$, para $x \in [1, 4]$.

5. Calcule a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = e^{2x+1}$ e $g(x) = xe^{2x+1}$, e pelas rectas de equações $x = -1$ e $x = -\frac{1}{2}$.

6. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2,\ y \geq x - 1,\ y \leq 4\}$.

   - Represente geometricamente a região A.
   - Calcule o valor da área da região A.

1 Vejamos que $y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Podemos rapidamente ver que $y = 0 \Rightarrow x = \pm a$. Assim, vamos tomar $f(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $g(x) = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ e calcular a área entre estas duas funções e as rectas $x = -a$ e $x = a$.

$$A = \int_{-a}^{a} [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) - \left(-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x$$

Mudança de variável: $\boxed{x = a\sin(t)} \Rightarrow \mathrm{d}x = a\cos(t)\ \mathrm{d}t$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x = a & \rightarrow & t = \frac{\pi}{2} \\ x = -a & \rightarrow & t = -\frac{\pi}{2} \end{array}}$$

$$\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{2b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos(t)\sqrt{a^2-a^2\sin^2(t)}\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{2b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2(t)\ \mathrm{d}t = 2ba\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ \mathrm{d}t$$

$$= 2ba\left[\frac{\cos(t)\sin(t)+t}{2}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ba\pi.$$

2 O primeiro passo será tomar $f(x)=\sqrt{8-x^2}$, $g(x)=\frac{x^2}{2}$, e resolver a equação $f(x)=g(x)$ (por forma a determinar os extremos de integração).

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{2}=\sqrt{8-x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2=2\sqrt{8-x^2}\\
&\Leftrightarrow \quad x^4=32-4x^2\\
&\Leftrightarrow \quad y^2=32-4y\\
&\Leftrightarrow \quad \cancel{y=-8}\vee y=4\\
&\Leftrightarrow \quad x^2=4\\
&\Leftrightarrow \quad x=\pm 2
\end{aligned}
$$

Agora, basta aplicarmos a fórmula apresentada anteriormente. Neste caso teremos como extremos do integral -2 e 2.

$$\int_{-2}^{2}\left[\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right]\,\mathrm{d}x=\boxed{\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x}-\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2\,\mathrm{d}x$$

Mudança de variável: $\boxed{x = 2^{\frac{3}{2}}\sin(t)} \Rightarrow \mathrm{d}x = 2^{\frac{3}{2}}\cos(t)\,\mathrm{d}t$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x = 2 & \rightarrow & t = \frac{\pi}{4} \\ x = -2 & \rightarrow & t = -\frac{\pi}{4} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2^{\frac{3}{2}}\cos(t)\sqrt{8 - 8\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t - \left.\frac{x^3}{6}\right|_{-2}^{2} \\
&= 8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t - \left.\frac{x^3}{6}\right|_{-2}^{2} \\
&= 8\left.\left[\frac{\cos(t)\sin(t)}{2}\right]\right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t - \left.\frac{x^3}{6}\right|_{-2}^{2} \\
&= 8\left.\left[\frac{\cos(t)\sin(t)}{2} + \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\right]\right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \left.\frac{x^3}{6}\right|_{-2}^{2} \\
&= (2\pi + 4) - \frac{8}{3} = \frac{6\pi + 4}{3}.
\end{aligned}$$

3 Vejamos que a esfera unitária, $x^2+y^2=1$, pode ser gerada como sólido de revolução em torno dos xx, limitada pelas curvas $f(x)=y=\sqrt{1-x^2}$ e $g(x)=0$. Desta forma, basta aplicar a fórmula do slide 154,

$$\int_{-1}^{1} \pi |f^2(x)-g^2(x)|\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} \left| \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \right| \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} 1-x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

De forma mais geral, para uma circunferência $x^2+y^2=r^2$ (com $r\in\mathbb{R}^+$), tomamos $f(x)=y=\sqrt{r^2-x^2}$ e $g(x)=0$.

$$\int_{-r}^{r} \pi |f^2(x)-g^2(x)|\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} \left| \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 \right| \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} r^2-x^2\,\mathrm{d}x$$

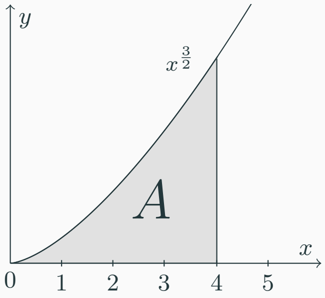
$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_{-r}^{r} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

4 Para se calcular o comprimento de arco de $y=x^{\frac{3}{2}}$ para $x\in[1,4]$, se identificarmos $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ temos $f'(x)=\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2}$. Em consequência,

$$L_\gamma = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x.$$

Fazendo, $t = 1 + \frac{9x}{4}$, teremos $\mathrm{d}t = \frac{9}{4}\,\mathrm{d}x$. Adicionalmente, quando $x = 4$ temos $t = 10$ e quando $x = 1$ temos $t = \frac{13}{4}$. Desta forma,

$$L_\gamma = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\int_{\frac{13}{4}}^{10} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{9}\left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Bigg|_{\frac{13}{4}}^{10} = \frac{8}{27}\left[10^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$



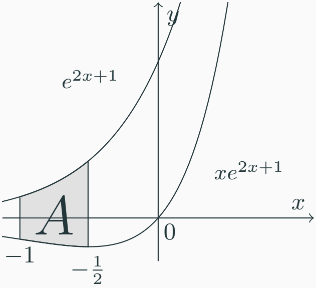
5 Basta aplicarmos a fórmula apresentada anteriormente. Neste caso teremos $f(x) = e^{2x+1}$, $g(x) = xe^{2x+1}$, e os extremos do integral serão -1 e $-\frac{1}{2}$.

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}e^{2x+1}-xe^{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(1-x)e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$$

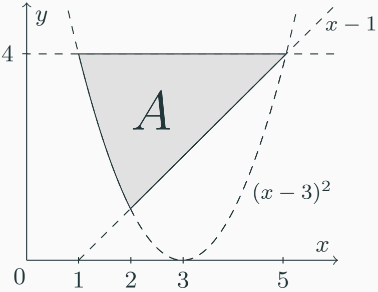
$$=-e\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\underbrace{(x-1)}_{g'(x)}\underbrace{e^{2x+1}}_{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=-e\left[\left.\frac{(x-1)e^{2x}}{2}\right|_{-1}^{-\frac{1}{2}}-\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\right]=-e\left.\left[\frac{(x-1)e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\right]\right|_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left.\left[\frac{e^{2x+1}}{4}-\frac{(x-1)e^{2x+1}}{2}\right]\right|_{-1}^{-\frac{1}{2}}=\left.\left[-\frac{(2x-3)e^{2x+1}}{4}\right]\right|_{-1}^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{5}{4e}.$$



6



$$A = \int_1^2 4 - (x-3)^2 \, \mathrm{d}x + \int_2^5 4 - (x-1) \, \mathrm{d}x = \left[4x - \frac{(x-3)^3}{3}\right]\Bigg|_1^2 + \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_2^5$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{9}{2} = \frac{37}{6}.$$

Aula 17

Como aplicação de alguns dos teoremas anteriores, desenvolveremos agora as funções exponencial e logaritmo natural. Começamos por definir

$$\begin{aligned}\ln : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

Deste modo, e pelo que vimos anteriormente, $\ln(x)$ é uma função contínua no seu domínio ($\mathbb{R}^+$) — algo que ainda não se tinha provado até agora. Além disso, e dado que $f(t) = \frac{1}{t}$ é contínua para $t \in \mathbb{R}^+$, a 1ª parte do T.F.C.I. implica que $\ln(x)$ seja uma função diferenciável e

$$\frac{\mathrm{d}(\ln(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}, \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}^+.$$

Porque $\frac{1}{x} > 0$ no intervalo considerado, temos que $\ln(x)$ é estritamente crescente. Em particular, tal implica (pelo Teorema de Bolzano-Cauchy) que, para $0 < x_1 < x_2$,

$$\ln(x_2) - \ln(x_1) = \frac{(x_2 - x_1)}{x_0}, \qquad \text{para algum } x_0 \in\,]x_1, x_2[.$$

Assim, concluímos ainda que $\ln(x)$ é injectiva.

Proposição (Propriedades do Logarítmo Natural)

1. $\ln(1) = 0$.
2. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, *para* $a, b > 0$.
3. $\ln(a^n) = n\ln(a)$, *para* $a \in \mathbb{R}^+$ *e* $n \in \mathbb{R}$.
4. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$, *para* $a, b > 0$.

Demonstração.

1. É verificada de forma imediata (pela definição de $\ln(x)$). De facto,

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = 0.$$

2. Comecemos por ver que $\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{a} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Ora, se aplicarmos a mudança de variável $u = \frac{t}{a}$ ($a\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$) ao segundo integral da soma anterior, obtemos

$$\int_1^{a} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(a) + \int_1^{b} \frac{a\ \mathrm{d}u}{au} = \ln(a) + \ln(b).$$

Demonstração.

3. Suponhamos que f, g são funções diferenciáveis num intervalo $]a, b[$ e que $f'(x) = g'(x)$, para todo o $x \in]a, b[$. Então, $f(x) = g(x) + c$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Caso exista um $x_0 \in]a, b[$ de forma a que conheçamos $f(x_0)$ e $g(x_0)$, podemos determinar $c = f(x_0) - g(x_0)$.

   Em particular, tomemos $f(x) = \ln(x^n)$ e $g(x) = n\ln(x)$, para $x > 0$. Então,

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^n} = \frac{n}{x} = g'(x),$$

   pelo que $f(x) = g(x) + c$. Em $x_0 = 1$, $f(x_0) = \ln(1^n) = 0 = n\ln(1) = g(x_0)$, ou seja, $c = 0$.

4.
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \int_1^{\frac{a}{b}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_{\frac{a}{b}}^a \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \ln(a) - \int_{\frac{1}{b}}^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(a) + \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).\end{aligned}$$

♦

De seguida, vamos obter uma estimativa de $\ln(n)$ para um $n \in \mathbb{N}$. Um passos necessários será utilizar as somas de Riemann para $\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Fixemos então um $n \in \mathbb{N}$, e tomemos $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \in \mathcal{P}[1, n]$. Para $c \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{x_{i-1}},$$

pelo que se $f(x) = \frac{1}{x}$, então

$$I(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} = S(f, \mathcal{P}).$$

Podemos ainda ver que, quando fazemos $n \to \infty$, teremos $I(f, \mathcal{P}) \to \infty$. De facto,

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} > 2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2},$$

$$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}\right) > 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 4 \cdot \tfrac{1}{8} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1,$$

e é possível mostrar que

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n-1}{2}.$$

Assim,

$$\frac{n-1}{2} < \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leq \int_1^{2^n - 1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(2^n - 1).$$

Porque $\ln(x)$ é uma função estritamente crescente, segue que $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty$.

De semelhante forma, podemos mostrar que $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$. Relembramos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n).$$

Atendento ao facto de $\ln(x)$ ser contínua em $\mathbb{R}^+$, segue que

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} -\ln(n) = -\infty.$$

Como $\ln(x)$ é contínua, segue (pelo Teorema de Bolzano-Cauchy) que $\ln(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. Assim, garante-se a existência de um número real, que denotaremos por e, tal que $\ln(e) = 1$.

Dado que $\frac{\mathrm{d}(\ln(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$, segue que $\left.\frac{\mathrm{d}(\ln(x))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = 1$. Por definição, a derivada de $\ln(x)$ em $x = 1$ será dada por

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right).$$

No entanto, porque $\ln(x)$ é contínua,

$$\lim_{h\to 0} \ln\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right) = 1.$$

Pela injectividade de $\ln(x)$, temos que

$$e = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Agora desenvolvemos a função exponencial e^x. Como $\ln(x) = \log_e(x)$ é diferenciável, crescente e injectiva, então tem admite inversa (que é também crescente e diferenciável). Assim denotamos a inversa de $\ln(x)$ por e^x. Note-se que $D_{e^x} = \ln(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$.

Proposição (Propriedades da Exponencial Natural)

1. $e^0 = 1$.
2. $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.
3. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
4. $e^{ax} = (e^a)^x$.

Demonstração.

1. Temos que $\ln(e^0) = 0$, dado que $\ln(e^x) = x$ (e^x é inversa de $\ln(x)$). No entanto, sabemos que $\ln(1) = 0$. Pela injectividade de $\ln(x)$, segue que $e^0 = 1$.
2. Sejam $x = e^a$ e $y = e^b$. Desta forma, $\ln(x) = a$ e $\ln(y) = b$, pelo que

$$\ln(e^{a+b}) = a + b = \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy) = \ln(e^a \cdot e^b).$$

   Dada a injectividade de $\ln(x)$, sai que $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.
3. $\ln(e^{a-b}) = a - b = \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right)$.
4. $\ln(e^{ab}) = ab = b\ln(x) = \ln(x^b) = \ln((e^a)^b)$.

♦

Integração Imprópria

A definição de integral de Riemann exige que a função integranda, f, esteja definida num intervalo fechado e limitado, I, e que f seja limitada. Vamos agora estender este conceito omitindo uma (ou as duas) dessas condições, passando ao estudo do que chamamos Integrais Impróprios.

Estes integrais podem ser de duas espécies:

- **1ª Espécie**: I é ilimitado.
- **2ª Espécie**: f é ilimitada ou não definida em alguns pontos de I.

Definição

Seja $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Se existir e for finito o limite

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x) \, \mathrm{d}x,$$

então o integral impróprio $\int_a^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_a^\infty f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Exemplo

Como
$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \arctan(x)\big|_0^t = \lim_{t\to\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2},$$
o integral impróprio $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ é convergente e
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo

Considerando $k \in \,]1,\infty[$, como
$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{1-k}}{1-k}\bigg|_1^t = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-k}}{1-k} - \frac{1^{1-k}}{1-k} = -\frac{1}{1-k} = \frac{1}{k-1},$$
o integral impróprio $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x$ é convergente e
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k-1}.$$

Definição

Seja $f :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, a]$, para todo o $t \leq a$. Se existir e for finito o limite

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, \mathrm{d}x,$$

então o integral impróprio $\int_{-\infty}^a f(x)\, \mathrm{d}x$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Exemplo

Como

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^1 \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{t \to -\infty} \arctan(x)\Big|_t^1 = \lim_{t \to -\infty} \frac{\pi}{4} - \arctan(t) = \frac{3\pi}{4},$$

o integral impróprio $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$ é convergente e

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}.$$

Exemplo

Vamos estudar, em função de $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, a natureza do integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{0} a^x \, \mathrm{d}x.$$

Para cada $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, a função $f_a(x) = a^x$ definida por $f_a(x) = a^x$, para todo o $x \in \,]-\infty, 0]$ é integrável em $[t, 0]$, para todo o $t \leq 0$. Consequentemente, para cada $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, o integral impróprio considerado é um integral impróprio de 1ª espécie, impróprio no limite inferior de integração.

Para todo o $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e todo o $t \leq 0$, temos

$$\int_{t}^{0} a^x \, \mathrm{d}x = \left. \frac{a^x}{\ln(a)} \right|_{t}^{0} = \frac{1}{\ln(a)} - \frac{a^t}{\ln(a)}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} a^x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\ln(a)}, & a > 1 \\ \infty, & a \in \,]0, 1[. \end{cases}, \text{ i.e. } \int_{-\infty}^{0} a^x \, \mathrm{d}x \text{ é } \begin{cases} \text{convergente}, & a > 1 \\ \text{divergente}, & a \in \,]0, 1[. \end{cases}$$

Proposição

Sejam $f, g : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *e integráveis em* $[a, t]$*, para todo o* $t \geq a$*. Então, verificam-se as seguintes condições:*

1. *Se os integrais impróprios* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *e* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *são ambos convergentes, então para* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, o integral impróprio*

$$\int_a^\infty (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

   é convergente.

2. *Se o integral impróprio* $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ *é divergente, então, para todo o* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, o integral impróprio*

$$\int_a^\infty \alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

   é divergente.

Nota: O resultado análogo, com as devidas adaptações, é válido para integrais impróprios de 1ª espécie no limite inferior de integração.

Demonstração.

1. Atendendo à hipótese, existem e são finitos os limites $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ e $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$. Atendendo a que, para todo o $t \geq a$,

$$\int_a^t (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x,$$

temos que

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \left(\alpha \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

A hipótese e a álgebra dos limites permitem então concluir que

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \lim_{t\to\infty} \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Atendendo à definição, concluímos que $\int_a^\infty (\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{d}x$ é convergente, como pretendíamos.

Demonstração.

2. Atendendo à hipótese, o limite $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ não existe, ou é infinito. Além disso, sabendo que, para todo o $t \geq a$,

$$\int_a^t \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

temos que o limite

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left(\alpha \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

não existe ou é infinito, ou seja, que o integral em causa é divergente. ♦

Proposição

Seja $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *integrável em* $[a, t]$, *para todo o* $t \geq a$, *e* $b > a$. *Então, os integrais impróprios* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *e* $\int_b^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *têm a mesma natureza. Em caso de convergência, tem-se que*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração.

O resultado fica demonstrado se provarmos que o integral impróprio $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente se e só se $\int_b^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ for convergente. Para todo o $b > a$, temos

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Consequentemente,

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^t f(x)\,\mathrm{d}x \right),$$

o que implica que o limite $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\ \ \mathrm{d}x$ existe e é finito se e só se $\lim_{t\to\infty} \int_b^t f(x)\,\mathrm{d}x$ existir e for finito. ♦

Nota: Os resultados análogos, com as devidas adaptações, são válidos para integrais impróprios de 1ª espécie no limite inferior de integração.

Exemplo

É possível, de acordo com o apresentado anteriormente, concluir que o integral

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

é convergente. No entanto, ao considerar o integral $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ é natural nos questionarmos àcerca da convergência.

Aqui, devemos notar que os integrais em questão apenas diferem no limite inferior de integração, portanto, estudar a convergência do segundo integral é o mesmo que estudar $\lim_{t\to\infty}\int_{\sqrt{2}}^{t} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$. Pelas propriedades do integral de Riemann,

$$\int_{\sqrt{2}}^{t} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{t} e^{-2x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{2}} e^{-2x}\,\mathrm{d}x,$$

o que nos leva a

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\sqrt{2}}^{t} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left(\int_0^{t} e^{-2x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{2}} e^{-2x}\,\mathrm{d}x\right).$$

Dado que o limite $\lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ existe e é finito, temos $\lim_{t\to\infty}\int_{\sqrt{2}}^{t} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ existe e é também finito (o que implica a convergência do integral).

Definição

Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função integrável nos intervalos $[\alpha,\beta]$, para todos os $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que $\alpha<\beta$.

1. Se, para algum $a\in\mathbb{R}$, os integrais impróprios
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
forem ambos convergentes, então dizemos que o integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente e escrevermos
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Se, para algum $a\in\mathbb{R}$, pelo menos um dos integrais impróprios
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
é divergente, dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ é divergente.

Exemplo

Vamos estudar a natureza do integral impróprio $\int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}x$. Para tal, consideremos os integrais

$$\int_{-\infty}^{0} x \, \mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_{0}^{\infty} x \, \mathrm{d}x.$$

Uma vez que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{0} x \, \mathrm{d}x$ é divergente, concluímos, por definição, que o integral impróprio em estudo é divergente.

Exemplo

Vamos estudar a natureza do integral impróprio $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Para tal, consideremos os integrais

$$\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \text{e} \qquad \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Uma vez que ambos os integrais impróprios divergem, concluímos, por definição, que o integral impróprio em estudo é divergente.

Integração Imprópria - Valor Principal de Cauchy

Definição

Dada uma função $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos o valor principal de Cauchy de um integral de f que comporta uma singularidade como:

- Para uma singularidade $c \in [a, b] \subseteq D_f$: o limite (caso exista) de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, i.e.,

$$\fint_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

- Para uma singularidade $\pm\infty$: o limite (caso exista) de $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$, i.e.,

$$\fint_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nota: O valor principal de Cauchy de um integral pode existir mesmo quando o integral não converge. No entanto, se o integral impróprio convergir, terá obrigatoriamente de ser igual ao seu valor principal.

Exemplo

Sabemos que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x \, \mathrm{d}x = 0$ para todo o $\varepsilon > 0$, portanto temos que

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x \, \mathrm{d}x \right) = \fint_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}x = 0.$$

No entanto, como vimos, tanto $\int_{-\infty}^{0} x \, \mathrm{d}x$ como $\int_{0}^{\infty} x \, \mathrm{d}x$ são divergentes.

Exemplo

Sabemos que $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$ para todo o $\varepsilon > 0$, portanto temos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \fint_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0.$$

No entanto, como vimos, tanto $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ como $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ são divergentes.

Adicionalmente, podemos ver que, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-\delta\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \ln(\delta).$$

Proposição (Critério de Comparação)

Seja $f, g : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, integráveis em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$, e tais que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a, \infty[$. Então:

1. *Se $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente.*
2. *Se $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ é divergente.*

Exemplo

Vamos estudar a natureza do integral impróprio

$$\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Para todo o $x \in [1, \infty[$, temos que $\frac{1}{x^2} \in [0, 1]$ e, portanto, $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq 0$. Consequentemente, para todo o $x \in [1, \infty[$, temos $0 \leq \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq \frac{1}{x^2}$. Assim, e dado que o integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$ é convergente, concluímos que

$$\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x \leq 1.$$

Proposição (Critério do Limite)

Sejam $f, g : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Admitamos ainda que, para todo o $x \in [a, \infty[$, $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$. Seja

$$\ell := \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Então:

1. *Se $\ell \in \mathbb{R}^+$, então $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ têm a mesma natureza.*
2. *Se $\ell = 0$ e $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente, então $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente.*
3. *Se $\ell = \infty$ e $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ é divergente.*

Exemplo

Vamos aplicar o critério do limite para voltar a concluir que $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$ é convergente. Notemos que, para todo o $x \in [1, \infty[$, $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq 0$ e $\frac{1}{x^2} > 0$. Além disso,

$$\ell = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Uma vez que $\ell \in \mathbb{R}^+$ e que $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ é convergente, segue que $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ é também convergente.

Exemplo

Vamos estudar a natureza do integral impróprio $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^4}\, \mathrm{d}x$. Sabemos que, para todo o $x \in [1, \infty[$, temos

$$\frac{\arctan(x)}{1+x^4} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{x^4} > 0.$$

Como sabemos, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\, \mathrm{d}x$ é convergente. Além disso,

$$\ell = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\arctan(x)}{1+x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 \arctan(x)}{1+x^4} = \frac{\pi}{2}.$$

Atendendo a que $\ell \in \mathbb{R}^+$, concluímos que ambos os integrais indefinidos têm a mesma natureza, i.e., que $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^4}\, \mathrm{d}x$ é convergente.

Definição

Seja $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Dizemos que o integral impróprio $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ é absolutamente convergente se o integral impróprio

$$\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

é também convergente.

Exemplo

Sendo $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, temos que

$$\int_2^\infty \left| \frac{(-1)^n}{1+2x^4} \right| \mathrm{d}x = \int_2^\infty \frac{1}{1+2x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Para todo o $x \in [2, \infty[$, temos $\frac{1}{1+2x^4} \geq 0$ e $\frac{1}{x^4} > 0$. Uma vez que

$$\ell = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1+2x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{1+2x^4} = \frac{1}{2},$$

e o integral impróprio $\int_2^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$ é convergente, segue (pelo Critério do Limite) que $\int_2^\infty \frac{(-1)^n}{1+2x^4}\,\mathrm{d}x$ é absolutamente convergente.

Proposição

Seja $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Se o integral impróprio $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ for absolutamente convergente, então será também convergente.

Demonstração.

Para todo o $x \in [a, \infty[$, temos

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|.$$

Por hipótese, $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ é convergente (e, por isso, sabemos que $\int_a^\infty 2|f(x)|\,\mathrm{d}x$ é também convergente). Atendendo à desigualdade indicada acima, podemos concluir (pelo Critério de Comparação) que

$$\int_a^\infty (f(x) + |f(x)|)\,\mathrm{d}x$$

é convergente. Utilizando as propriedades do integrais impróprios, segue que

$$\int_a^\infty (f(x) + |f(x)| - |f(x)|)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

é convergente. ♦

Integração Imprópria - 1ª Espécie - Exercícios

1. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

   - $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \cos(x)\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

2. Faça um esboço do gráfico da função F definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

   onde

$$f(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Integração Imprópria - 1ª Espécie - Exercícios

3. Estude, utilizando o Critério de Comparação ou o Critério do Limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:
   - $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{x^2+1}{4+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{5x^2-3}{x^8+x-1}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{x^7+2x+1}\,\mathrm{d}x$

4. Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Mostre que se f admite singularidades (não infinitas) $x_1 < \cdots < x_n$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, então $\fint_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

5. Calcule $\displaystyle\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2-4)}\,\mathrm{d}x.$

Aula 18

Definição

Seja $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, b]$, para todo o $a < t \leq b$. Se existir e for finito o limite

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\ \mathrm{d}x,$$

dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ é convergente e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Caso contrário, dizemos que o integral em questão é divergente.

Exemplo

A função $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}$ é integrável em $[t, 1]$, para todo o $0 < t \leq 1$. Vamos estudar a natureza do integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x}}\ \mathrm{d}x.$$

Exemplo (cont...)

Para todo o $0 < t \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,\mathrm{d}x &= \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{-(x^2-2x+1)+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{-(x-1)^2+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \arcsin(x-1)\big|_t^1 \\
&= -\arcsin(t-1),
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \arcsin(t-1) = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Por definição, concluímos então que o integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,\mathrm{d}x$ é convergente e tem valor $\frac{\pi}{2}$.

Integração Imprópria - 2ª Espécie

Definição

Seja $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, para todo o $a \leq t < b$. Se existir e for finito o limite

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, \mathrm{d}x,$$

dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ é convergente e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Caso contrário, dizemos que o integral em questão é divergente.

Exemplo

A função $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ é integrável em $[0, t]$, para todo o $0 \leq t < 1$. Vamos estudar a natureza do integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x.$$

Exemplo (cont...)

Para todo o $0 \leq t < 1$,

$$\int_0^t \frac{\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x = -\left.\frac{\ln^2(1-x)}{2}\right|_0^t$$

$$= -\frac{\ln^2(1-x)}{2}(1-t),$$

e, portanto,

$$\lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x = \lim_{t \to 1^-} \left(-\frac{\ln^2(1-x)(1-t)}{2}\right) = -\infty.$$

Por definição, concluímos então que o integral $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x$ é divergente.

Integração Imprópria - 2ª Espécie

Definição

Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$, excepto possivelmente para um ponto $c \in \,]a,b[$, integrável em $[a,t]$, para todo o $a \leq t < c$ e integrável em $[t,b]$, para todo o $c < t \leq b$. Se os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

forem ambos convergentes, então o integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diz-se convergente e escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Caso contrário, dizemos que o integral em questão é divergente.

Nota: As propriedades, definições e critérios de convergência apresentados para os integrais de 1ª espécie têm as suas versões para os integrais de 2ª espécie.

Proposição

Sejam $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *duas funções integráveis em* $[a, t]$*, para todo o* $a \leq t < b$*. Então verificam-se as seguintes condições:*

1. *Se os integrais impróprios* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *e* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *são ambos convergentes, então para* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, o integral impróprio*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

   é convergente.

2. *Se o integral impróprio* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *é divergente, então, para todo o* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, o integral impróprio*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

   é divergente.

Proposição

Seja $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrável em* $[t, b]$, *para todo o* $a < t \leq b$ *e* $a < b' < b$. *Então, os integrais impróprios* $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ *e* $\int_a^{b'} f(x)\, \mathrm{d}x$ *têm a mesma natureza. Em caso de convergência, tem-se que*

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^{b'} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{b'}^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Exemplo

A função $f :]0, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ é integrável em $[t, t']$, para todos os $0 < t < t' < 2$. Vamos então estudar a natureza do integral

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}.$$

Para o efeito, podemos considerar os integrais impróprios

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} \quad \text{e} \quad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}.$$

Exemplo (cont...)

Para todo o $0 < t \leq 1$ e $1 \leq t' < 2$, temos

$$\int_1^{t'} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \arcsin(x-1)\Big|_1^{t'} = \arcsin(t'-1),$$

$$\int_t^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \arcsin(x-1)\Big|_t^{1} = -\arcsin(t-1),$$

o que nos leva a

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \lim_{t\to 0^+} (-\arcsin(t-1)) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{t'\to 2^-} \int_1^{t'} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \lim_{t'\to 2^-} (-\arcsin(t'-1)) = \frac{\pi}{2}.$$

Concluímos então, por defincão, que o integral impróprio

$$\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} + \int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

é convergente e tem valor π.

Proposição (Critério de Comparação)

Seja $f, g :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, integráveis em* $[t, b]$*, para todo o* $a < t \leq b$*, e tais que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$*, para todo o* $x \in]a, b]$*. Então:*

1. *Se* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *é convergente, então* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *é convergente.*
2. *Se* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *é divergente, então* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *é divergente.*

Proposição (Critério do Limite)

Sejam $f, g :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *duas funções integráveis em* $[t, b]$*, para todo o* $a < t \geq b$*. Admitamos ainda que, para todo o* $x \in]a, b]$*,* $f(x) \geq 0$ *e* $g(x) > 0$*. Seja*

$$\ell := \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Então:

1. *Se* $\ell \in \mathbb{R}^+$*, então* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *e* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *têm a mesma natureza.*
2. *Se* $\ell = 0$ *e* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *é convergente, então* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *é convergente.*
3. *Se* $\ell = \infty$ *e* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *é divergente, então* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *é divergente.*

Definição

Seja $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $a < t \leq b$. Dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é absolutamente convergente se o integral impróprio

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

é também convergente.

Proposição

Seja $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $a < t \leq b$. Se o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ for absolutamente convergente, então será também convergente.

Integração Imprópria - 2ª Espécie - Exercícios

1. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:
   - $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$

2. Estude, utilizando o Critério de Comparação ou o Critério do Limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:
   - $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_0^1 \frac{2+\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$
   - $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$