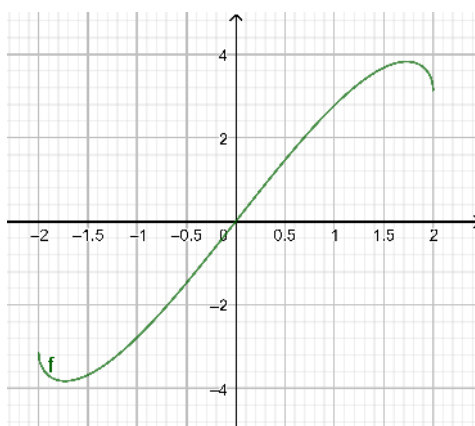


- Este teste termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido software gráfico.



Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

- Determina o domínio  $D_f$  de definição de  $f$ .
  - Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de  $f$  (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).
2. Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $a < b$ , uma função regular tal que  $f'(x) \neq 1, \forall x \in ]a, b[$ . Justifica as seguintes afirmações, que em conjunto pretendem mostrar que a equação  $f(x) = x$  tem no máximo uma solução em  $[a, b]$ . Argumentando por contradição,
- supondo que existiriam pelo menos duas soluções diferentes  $x_1$  e  $x_2$  de  $f(x) = x$  em  $[a, b]$ , então  $x_1$  e  $x_2$  seriam zeros de  $g(x) := f(x) - x$  em  $[a, b]$ ;
  - e então uma aplicação do Teorema de Rolle permitiria obter uma contradição com uma das hipóteses acima consideradas (qual?).

Já agora, conclui a argumentação por contradição.

**FIM**

**Cotação:**

1. 17; 2. 3.