1.(a) No 1º caso temos um integral impróprio de 2ª espécie.

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$$

Como $2 \in [1,3]$ e $\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{1}{x^2-2x} = \mp\infty$,

para além de não estar definida no ponto 2,
a função também se torna ilimitada junto a 2.

No 2º caso, temos: por um lado um integral impróprio de 1ª espécie, pois o limite de integração é infinito.
por outro lado, é também de 2ª espécie pois

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x(\ln(x))^{1/2}} = +\infty,$$

para além de não estar definida no ponto 1,
a função é ilimitada junto a 1, sendo $f(x)=\frac{1}{x(\ln(x))^{1/2}}$
contínua em $]1,+\infty[$ é integrável em
qualquer intervalo $[\alpha,\beta]$, com $1<\alpha<\beta$.

b) Considere os seguintes integrais impróprios:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-2x}\,dx \quad e \quad \int_2^3 \frac{1}{x^2-2x}\,dx$$

Estudando a natureza do primeiro integral temos:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-2x}\,dx = \lim_{\beta \to 2^-} \int_1^\beta \frac{1}{x^2-2x}\,dx$$

C.A.

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x-2) + Bx$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

$$= \lim_{\beta \to 2^-} \int_1^\beta \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= \lim_{\beta \to 2^-} \left[-\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-2| \right]_1^\beta$$

$$= \lim_{\beta \to 2^-} \left(-\frac{1}{2} \ln\beta + \frac{1}{2} \underbrace{\ln|\beta-2|}_{\to -\infty} \right)$$

$$= -\infty$$

$\therefore$ O integral diverge!

(ii) Considere os seguintes integrais impróprios:

$$\int_1^2 (\ln(x))^{-1/2} \frac{1}{x}\, dx \quad e \quad \int_2^{+\infty} (\ln(x))^{-1/2} \frac{1}{x}\, dx$$

Estudando a natureza do segundo integral temos:

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_2^{\beta} (\ln(x))^{-1/2} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\beta \to +\infty} \left[2\,(\ln(x))^{1/2} \right]_2^{\beta}$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \underbrace{2\,(\ln \beta)^{1/2}}_{\to +\infty} - 2\,(\ln(2))^{1/2}$$

$$= +\infty$$

∴ O integral diverge!

2 (a) (i) (2,0 val.)

Seja $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)$; então $|a_n| = \frac{1}{n^2} \left|\arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)\right|$. Sabemos que $|\arcsin x| \le \pi/2$ para todo o $x \in [-1, 1]$; portanto

$$|a_n| \le \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}.$$

Sabemos que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, daqui segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}$ também converge, logo pelo Critério de Comparação concluimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Desta forma, a série original **converge absolutamente**.

2 (a) (ii) (1,5 val.)

Seja $b_n = \frac{3(n+1)^2}{\pi^{n+1}}$. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+2)^2}{\pi^{n+2}} \frac{\pi^{n+1}}{3(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^2 = \frac{1}{\pi} < 1.$$

Pelo Critério de D'Alembert concluimos que a série **converge** (e como é de termos positivos, também **converge absolutamente**).

2 (b) (2,5 val.)

A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^{n-1}}$ é geométrica, com o primeiro termo $a = -\frac{2}{3}$ e com a razão $r = -\frac{2}{3}$. O módulo da razão é $|r| = \frac{2}{3} < 1$, logo a série converge e a sua soma é

$$\frac{a}{1-r} = \frac{-2/3}{1+2/3} = -\frac{2}{5}.$$

A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ é telescópica, pois o seu termo geral tem a forma $\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$. Denotando $b_n = \frac{1}{n}$, obtemos $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+2}$, logo $p = 2$. Como existe o limite $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, concluimos que a série telescópica dada é convergente e a sua soma é $b_1 + b_2 - \lim_{n\to\infty}(b_{n+1} + b_{n+2}) = 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}$.

Usando a propriedade conveniente das séries (ver o ex. 5 (a)), concluimos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{(-2)^{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{n^2-1}\Big) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^{n-1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = -\frac{2}{5} + \frac{3}{2} = \frac{11}{10}.$$

3 (3 val.)

Seja $\Phi(x)$ uma primitiva da função $\arctan(x^2)$ (uma tal primitiva existe porque esta função é contínua); pela Fórmula de Barrow temos

$$F(x) := \int_{\sin(x^2)}^{\sqrt{x^2+1}} \arctan(t^2)\, dt = \Phi(\sqrt{x^2+1}) - \Phi(\sin(x^2)).$$

Logo

$$F'(x) = \Big(\Phi(\sqrt{x^2+1}) - \Phi(\sin(x^2))\Big)' = \Phi'(\sqrt{x^2+1})\, (\sqrt{x^2+1})' - \Phi'(\sin(x^2))\, (\sin(x^2))'$$

$$= \arctan(x^2+1)\, \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\, 2x - \arctan(\sin^2(x^2))\, \cos(x^2)\, 2x.$$

Substituindo $x = 0$, temos $F'(0) = \arctan(1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - \arctan(0) \cdot 1 \cdot 0 = 0.$

4. (a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$

$\dfrac{1}{x\ln x}$ é contínua em $[2,\infty[$, logo trata-se de um integral de 1ª espécie.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x\ln x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln|\ln x|\right]_2^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\right) = \infty$$

∴ O integral dado é divergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}.$

Seja $f: [2,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ dada por $f(x) := \dfrac{1}{x\ln x}$.

Temos que $f(n) = \dfrac{1}{n\ln n}$, $\forall n \geq 2$, e que f é decrescente (pois $x\ln x$ é crescente).

Podemos então usar o critério do integral e afirmar que a série acima tem a mesma natureza que o integral impróprio da alínea (a).

∴ A série dada é divergente.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries numéricas.

(a) Se forem ambas convergentes, então, por definição,

$$\lim_{N\to\infty}(a_1+\dots+a_N) = S_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{N\to\infty}(b_1+\dots+b_N) = S_2 \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, usando propriedades da adição (finita) e dos limites de sucessões,

$$\lim_{N\to\infty}\left((a_1+b_1)+\dots+(a_N+b_N)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(a_1+b_1+\dots+a_N+b_N\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left((a_1+\dots+a_N)+(b_1+\dots+b_N)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}(a_1+\dots+a_N) + \lim_{N\to\infty}(b_1+\dots+b_N)$$

$$= S_1 + S_2 \in \mathbb{R},$$

e portanto $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = S_1+S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(b) Se for uma convergente e a outra divergente, digamos respetivamente a 1.ª e a 2.ª, vejamos se seria possível $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ser convergente:

Se fosse, então, como $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$ também seria, conjugando com a alínea (a) ter-se-ia que

$$\sum_{n=1}^{\infty}((a_n+b_n)-a_n)$$

seria convergente. Mas a última série é $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, que estamos a assumir divergente.

Tendo-se obtido uma contradição, é impossível $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ser convergente, logo é divergente.

(c) Considere-se $a_n=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, e $b_n=-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são divergentes (para ∞ e $-\infty$ respectivamente). No entanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-1)=0,$$

ou seja, é convergente.

Por outro lado, se mantivermos a_n acima e considerarmos agora $b_n=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ continuam a ser divergentes (agora ambas para ∞), o mesmo se passando com

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(1+1),$$

que diverge também para ∞.

Assim, no caso de as séries dadas serem divergentes, há casos em que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge e casos em que esta série diverge