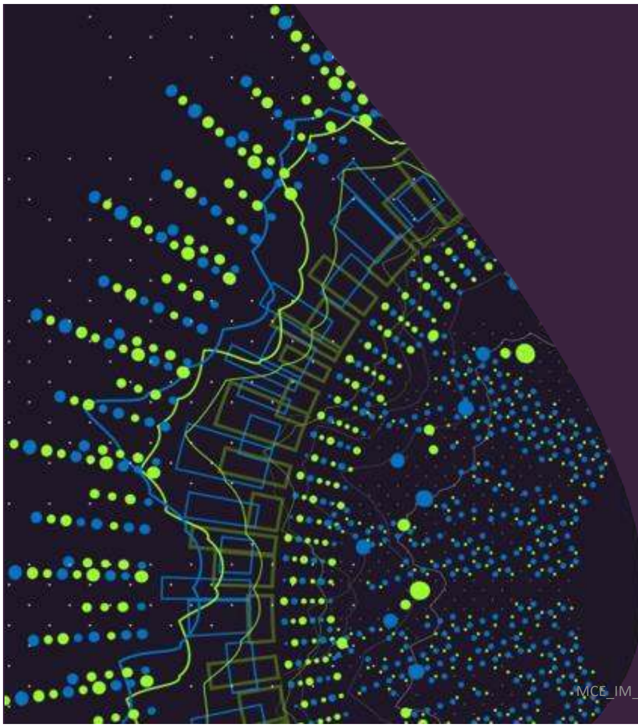


Mecânica e Campo Eletromagnético

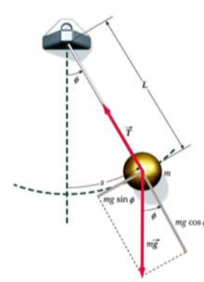
Aula 6 - 25 e 31 Out 2022

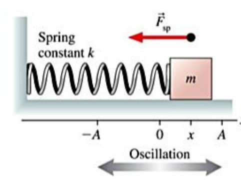
Cap.2- Movimento oscilatório
- Movimento harmónico simples
- Movimento amortecido
- Movimento forçado
- Exemplos

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

1

MOVIMENTO HARMÓNICO SIMPLES (MHS)

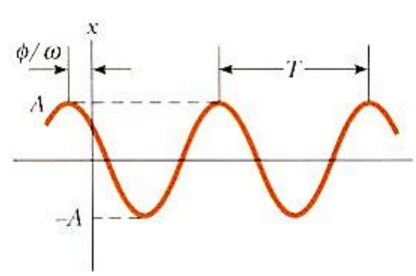




Se a força que atua sobre um corpo:

- é proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio
- aponta sempre para a posição de equilíbrio

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

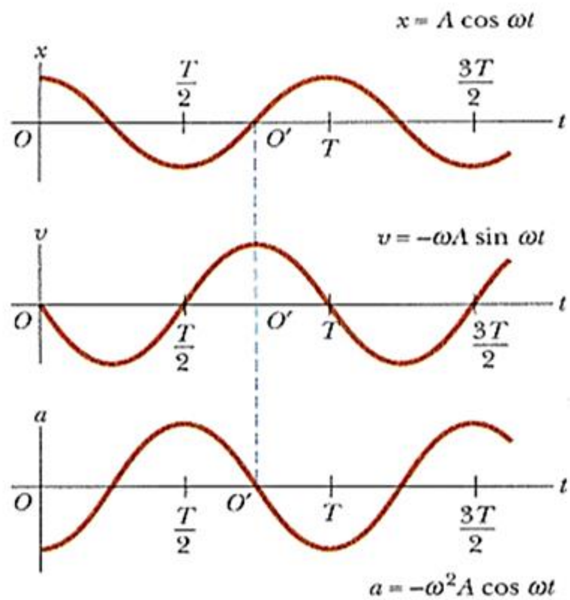


O corpo tem movimento **periódico**, **harmónico**, **oscilatório** ou **vibratório**

Ex: Bloco preso a uma mola, baloiço (pêndulo), corda a vibrar, moléculas a vibrar num sólido, etc...

$\omega = 2\pi f$ (rad/s)

2



3

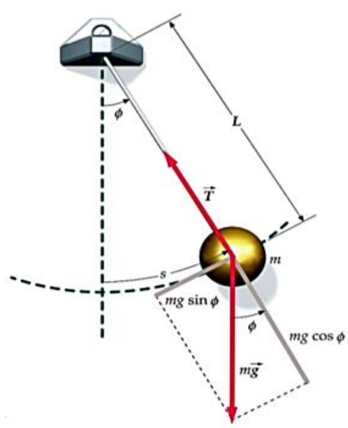
Pêndulo simples

Força restauradora:

$-mg\sin\phi$

aceleração tangencial:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$



$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\phi \approx -\frac{g}{L}\phi \quad \text{se} \quad \phi \ll 1$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$-mg\sin\phi = m\frac{d^2 s}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

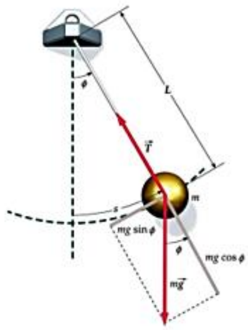
solução: $\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$

4

Pêndulo simples

Para pequenos ângulos
sen ϕ ≈ ϕ

Para pequenas oscilações, tem-se:



eq. movimento:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

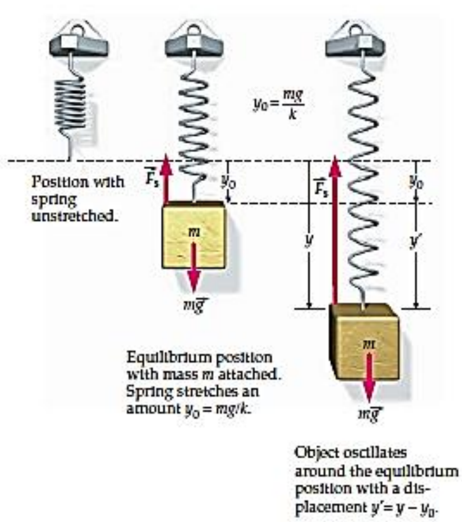
solução:

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

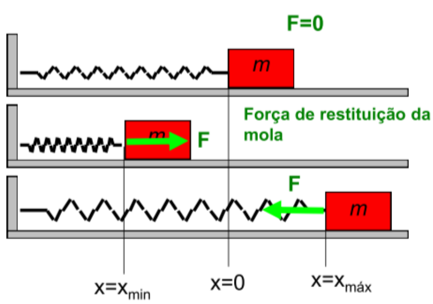
período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Sistema massa-mola



Sistema massa-mola



F: Força restauradora

$$F = -kx$$

k: constante da mola

Equação do movimento

$$F = -kx = ma_x \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

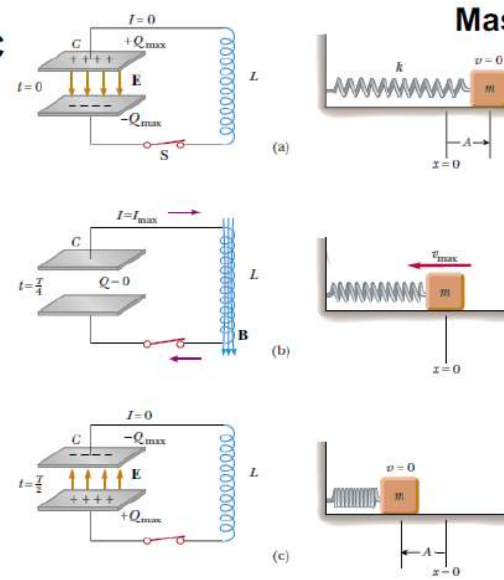
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

definimos $\omega^2 = \frac{k}{m}$ or $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ω: frequência angular (radianos/s)

COMPARANDO…

Circuito LC **Massa/Mola**



A intensidade da corrente I é análoga à velocidade v

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = 0 \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Energia no Movimento Harmónico Simples (MHS)

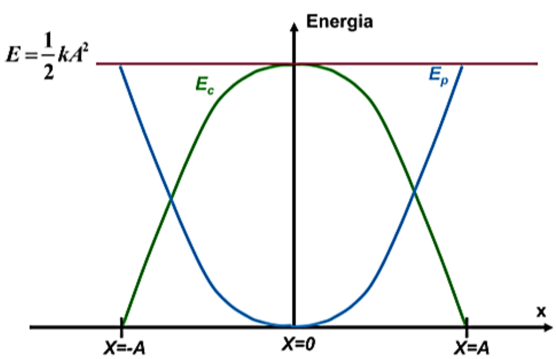
Num M.H.S. a Energia Mecânica é constante: $E = \frac{1}{2} k A^2$

Energia potencial elástica: $E_{Pe} = \frac{1}{2} k x^2$

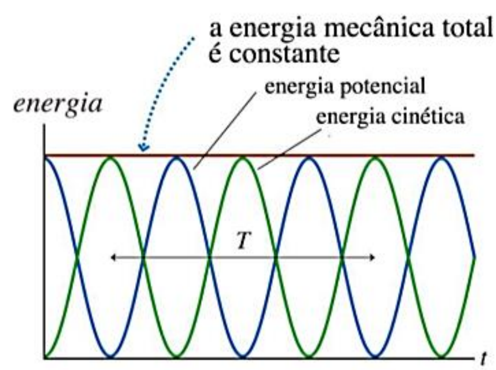
$E_{pe}(0)=0$ (posição de equilíbrio)

Energia cinética: $E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2} k \left(A^2 - x^2\right)$

Energia no MHS em função de x



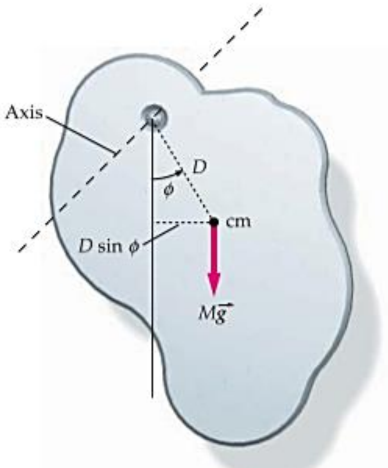
Energia no MHS em função de t



$$E = \tfrac{1}{2} m v_x{}^2 + \tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} k A^2 = \tfrac{1}{2} m v_{max}{}^2 = \text{constante}$$

Pêndulo físico ou Pêndulo composto

Para pequenos ângulos
sen ϕ ≈ ϕ



$$\tau = -MgDsen\phi \approx -MgD\phi$$

$$\tau = I\,\alpha = -MgD\phi \qquad \text{com } \alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

NB - O período do pêndulo físico depende da distribuição de massa, mas não da massa total, M.
O momento de inércia I é proporcional a M, pelo que <u>a razão I/M é independente de M</u>

Oscilador amortecido

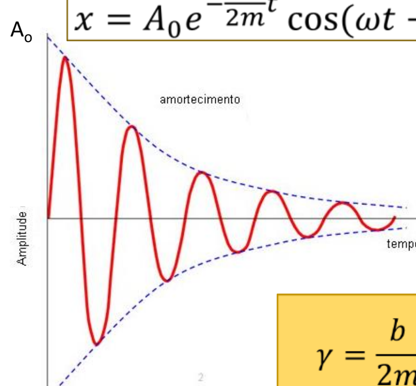
Na ausência de forças externas, a AMPLITUDE de um oscilador DIMINUI no tempo, devido a forças dissipativas (atrito, viscosidade, etc)

$$\boxed{\vec{F_a} = -b\vec{v}}$$

Se A diminui, a Energia Mecânica diminui também

$$\omega = \sqrt{\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]}$$

$$\boxed{x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi)}$$



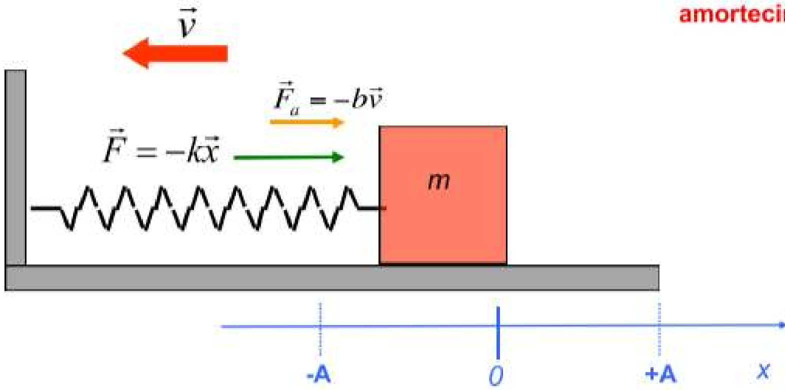
$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

Diz-se que o movimento é **amortecido**

Exemplo de força dissipativa: $\vec{F}_a = -b\vec{v}$

Força devida à viscosidade de um fluido

Coeficiente de amortecimento



13

$$\sum F = -kx - bv = -kx - b\frac{dx}{dt} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

com

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \\ \gamma &= \frac{b}{2m} \end{aligned}}$$

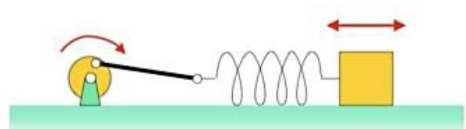
14

Capítulo 2

8. Um pêndulo 1 m de comprimento é largado com um ângulo de 15,0°. Após 1000 s, a sua amplitude foi reduzida para 5,5°. Qual é o coeficiente de amortecimento?

13. Um pêndulo simples tem um período de 2 s e uma amplitude de 2°. Depois de 10 oscilações completas, a sua amplitude foi reduzida para 1,5°. Calcular o coeficiente de amortecimento. Discuta a influência da viscosidade do ar no período do pêndulo.

Oscilador Forçado



“mola” ligada a um “motor”

Oscilador Forçado

- Para manter um sistema a oscilar na presença de forças dissipativas, temos de fornecer energia, aplicando uma força externa. Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força externa.
- Nessa altura, a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, a amplitude mantém-se constante, e o seu valor depende da frequência externa.

Este movimento designa-se

Oscilação Forçada

Equações do movimento

Força externa:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t$$

frequência angular da força externa

2ª Lei de Newton:

$$\sum F = F_0 \cos \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

amortec. — força elástica

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

com $\gamma = \dfrac{b}{2m}$

Solução geral

$$\boxed{\text{solução:}\quad x(t) = x_t(t) + x_p(t)}$$

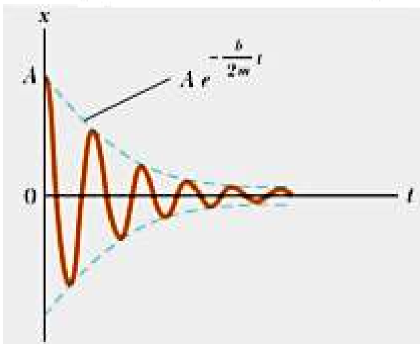
solução transiente:

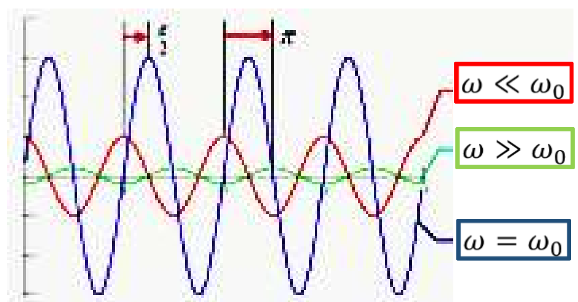
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

+

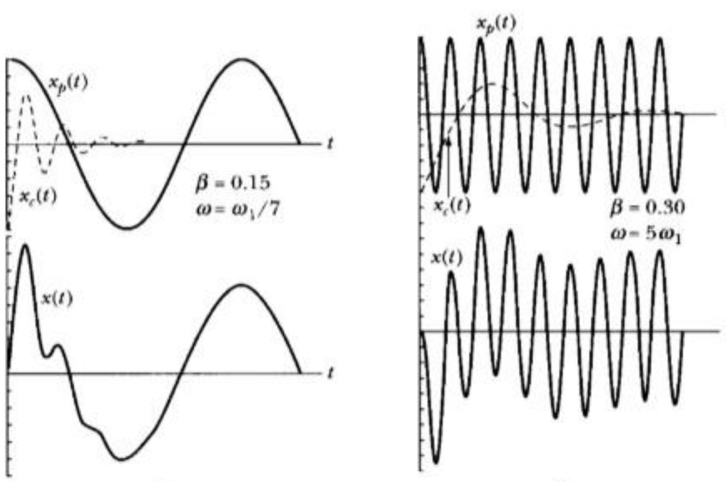
solução permanente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$





Solução transiente + solução permanente



(a) (b)

Solução permanente

$$\boxed{x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

com $A = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ amplitude

$\delta = \arctan \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ desfasamento entre a posição x e a força

$$0 \le \delta \le \pi$$

OSCILADOR FORÇADO

Força externa: $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Posição: $x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$

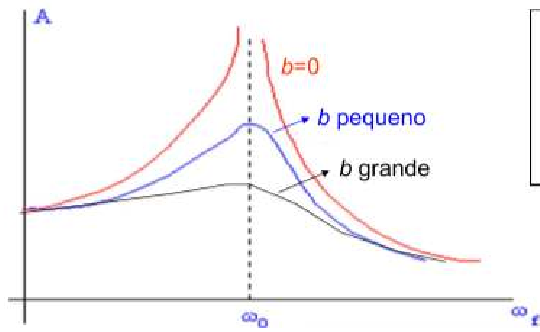
Mesma frequência!

Amplitude: $$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ressonância no oscilador forçado

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \Rightarrow \text{A é máximo quando } \omega \approx \omega_0 \Rightarrow \textbf{ressonância}$$



Na ausência de amortecimento

$A \longrightarrow \infty$

quando $\omega \longrightarrow \omega_0$

23

Sobre a energia

<u>Considerando a solução permanente</u>,
NA RESSONÂNCIA, verifica-se:

- energia máxima dissipada
- trabalho máximo realizado pelo motor
- energia mecânica máxima do oscilador

NUM PERÍODO:
energia dissipada pelo atrito = trabalho realizado pelo motor

24

[The Tacoma](#)
[Narrows Bridge Collapse](#)

1940

https://youtu.be/7saC-DnQ9Rc?t=36

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!

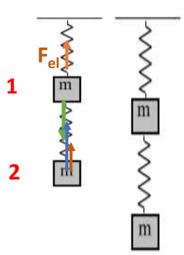
Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa *m* como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Nota: não é necessário considerar a aceleração da gravidade porque esta não tem influência na oscilação.



1 $\quad F_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$ $\qquad m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$

2 $\quad F_2 = -k_2x_2 - k_2(x_2 - x_1)$ $\qquad m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2x_2 - k_2(x_2 - x_1)$

$k_1 = k_2 = k$ $\qquad m_1 = m_2 = m$

Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa *m* como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

1 $$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0$$

2 $$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k}{m}x_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

SOLUÇÕES POSSÍVEIS:

$x_1 = A \cos \omega t$

$x_2 = B \cos \omega t$

Derivar 1 e 2 vezes x_1 e x_2 e substituir nas equações diferenciais

1 $- mA\omega^2 \cos \omega t + 2kA \cos \omega t - kB \cos \omega t = 0$

2 $- mB\omega^2 \cos \omega t + 2kB \cos \omega t - kA \cos \omega t = 0$

$\Leftrightarrow$

$- mA\omega^2 + 2kA - kB = 0$ $\quad$ $A(2k - m\omega^2) - kB = 0$

$- mB\omega^2 + 2kB - kA = 0$ $\quad$ $- kA + B(2k - m\omega^2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ANÁLISE DAS SOLUÇÕES POSSÍVEIS

A = B = 0 o que significaria que não havia oscilação.

Resolvendo o determinante, deveremos chegar a alguma conclusão

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$$

Usando a fórmula resolvente para equações de 2º grau, obtém-se

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{3k + \sqrt{5}k}{2m}}$$

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3k - \sqrt{5}k}{2m}}$$

FREQUÊNCIAS DOS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO DO SISTEMA

(ω_1 e ω_2)

16. b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Tínhamos
$$\begin{cases} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ -kA + B(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

Usando, por exemplo, a 1ª equação, tem-se:

$$A(2k - m\,\boxed{\omega^2}) - kB = 0$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{3\,k + \sqrt{5}\,k}{2\,m}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1-\sqrt{5})} = -1{,}61$$ valor negativo ➡ oposição de fase

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3\,k - \sqrt{5}\,k}{2\,m}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1+\sqrt{5})} = 0{,}61$$ valor positivo ➡ em fase