Nome: nº de estudante:

Declaro que desisto:

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - SE **2020/21**

exame de recurso Duração: 2h15

- Este exame contém **5 questões** no total, com uma questão por folha. O enunciado do exame contém no total 6 folhas numeradas de 0 até 5. Na página inicial (esta página, pág. 0) encontras também a cotação e formulários.
- Cada pergunta deve ser respondida na **respetiva folha do enunciado**, na frente ou no verso. Se necessário podes usar folhas de continuação mas tens de dizer qual é a questão a que estás a responder.
- **Não podes misturar respostas a diferentes perguntas** na mesma folha. Por exemplo, não podes responder a parte da pergunta 2 na mesma folha da questão 1, e vice-versa.
- Deves identificar todas as folhas que usares com o teu **nome e nº de estudante**. Deves indicar no enunciado de cada pergunta **quantas folhas de continuação** usaste para essa pergunta. Repete essa informação na tabela em baixo.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente **justificados** e todas as respostas devem ser **cuidadosamente redigidas**.

Cotação:

1. 4; 2. 6; 3. 3; 4. 4; 5. 3.

Número de folhas de continuação:

Questão 1: ☐ **Questão 2**: ☐ **Questão 3**: ☐

Questão 4: ☐ **Questão 5**: ☐

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ m \in \mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ n \in \mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\log_a \lvert u(x)\rvert,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x)\ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1+\tan^2 u = \sec^2 u$	$1+\operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1-u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1-u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

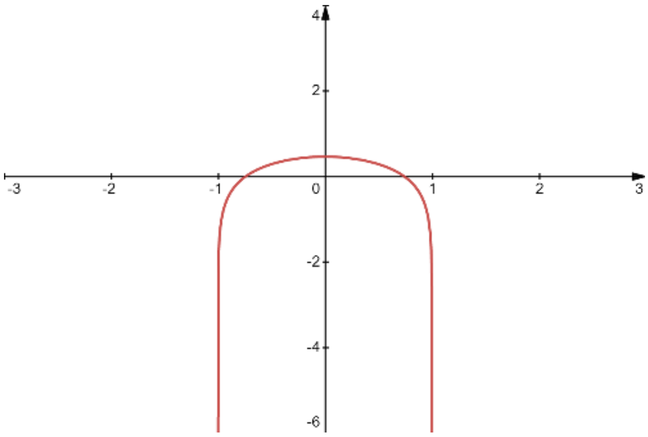
$\sinh u = \frac{e^u-e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 1).

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \ln(\arccos(x^2))$.

   Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido software gráfico.



   Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

   (a) Determina o domínio D_f de definição de f.

   (b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

Resposta à questão 1:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: ☐ (Questão 2).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $x^2 \cosh x$; (b) $\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+3}$; (c) $\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$.

   Sugestão: Na alínea (a) usa primitivação por partes; na alínea (c) começa por fazer a mudança de variável definida por $x = \tan t$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, e, se precisares, a certa altura podes usar a fórmula $\int \sec u \, du = \ln(\sec u + \tan u) + C$ em intervalos.

   Resposta à questão 2:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 3).

3. Seja $\mathcal{A}$ a região de área finita delimitada pela curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e pelas retas $y = 2x$ e $x = 1$.

   (a) Calcula os pontos de interseção da curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ com a reta $y = 2x$.

   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(2^{-2/3}, 2^{1/3})$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

Resposta à questão 3:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 4).

4. Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (2n)!}{n^{2n}}$.

   Resposta à questão 4:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 5).

5. Calcula, caso exista, o

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\int_1^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\, dt}{x^3}.$$

Sugestão: Tenta aplicar a regra de Cauchy, se possível.

Resposta à questão 5: