Resumo 4

21 de março de 2021 22:09

Convergência Pontual e Uniforme

Sucessões de Funções

- $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f em D se $\forall x\in D$, $f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (limite pontual)

- $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f se:

$$\sup_{x\in D} |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

(sup: menor dos majorantes; $|f_n(x)-f(x)|$: infinitésimo)

Conv. uniforme implica

Propriedades

① f é contínua em $D=[a,b]$

② f é integrável em $D=[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] = \lim\left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]$$

③ Se $f_n(x)$ tem derivadas contínuas em $[a,b]$ e $(f'_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ conv. uniformemente em $[a,b]$ então f é diferenciável em $[a,b]$ e

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty} f'_n(x),\ \forall x\in[a,b]$$

O contrário pode não ser verdade. ①②③ $\not\Rightarrow$ C.Unif

A falha de uma das prop. ①,② ou ③ prova a $\bar{n}$ conv. uniforme.

Séries de funções

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente se existir limite pontual de S_n (sucessão das somas parciais)

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$$\lim S_n(x)=\lim\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)$$

↳ basta calcular o limite e ver onde existe.

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em D se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em D

Pode ser difícil!

(Muito mais fácil) → Critério de Weierstrass

Se existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente:

$\forall x\in D, \forall n\in\mathbb{N}$, $D=[a,b]$

O termo geral da série é majorado por a_n: $|f_n(x)|\le a_n$

Então a série converge uniformemente em D

O contrário pode não ser verdade ①②③ ⇒ Conv. Unif

Propriedades

① $S(x)$ é contínua em $[a,b]$

② S é integrável em $[a,b]$ e:

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

(integração termo a termo)

③ Se cada f_n é diferenciável em $[a,b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente em $[a,b]$ então $S(x)$ é diferenciável em $[a,b]$ e:

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

(derivação termo a termo)