Temas: Convergência pontual e convergência uniforme de sucessões de funções. Convergência pontual / uniforme de séries de funções. Propriedades da convergência uniforme. Critério de Weierstrass para a convergência uniforme. Discussão de alguns exemplos de aplicação.

Sucessões e séries de funções

- **Sucessão Numérica:** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Ex: $a_n = 3n+1$

- **Série numérica:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow$ soma infinita dos termos gerados por uma sucessão.

- **Sucessão de funções**

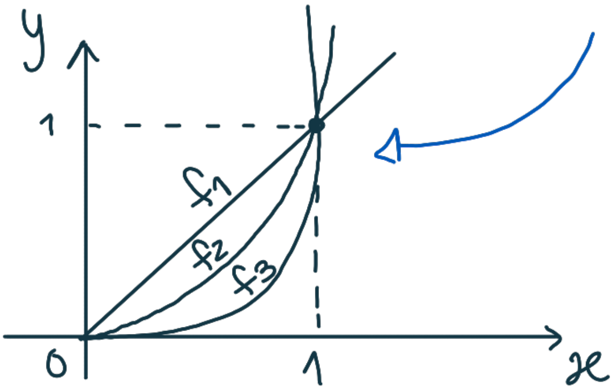
Uma sucessão $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ em que cada termo é uma função de domínio D, é designada por **sucessão de funções**.

Representa-se por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemplo 1:

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : f_n(x) = x^n \qquad x \in [0,1]$$

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = x^2 \qquad f_3(x) = x^3 \qquad \ldots$$



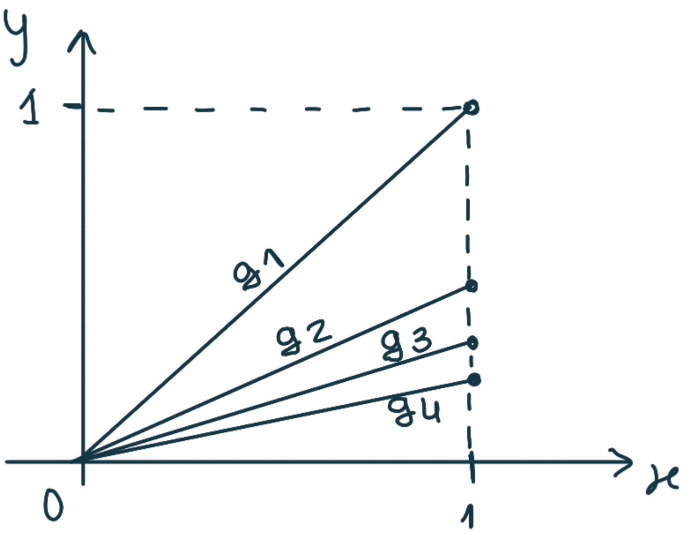
Graficamente

Exemplo 2:

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $g_n(x) = \frac{x}{n}$ $\quad x \in [0,1]$

$g_1(x) = x \quad g_2(x) = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x \quad g_3(x) = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x \quad \dots$

Graficamente:



Convergência de uma sucessão de funções

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$.

① $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f em D se

$\forall x \in D$, $\underbrace{f(x)}$ $= \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

Chamamos **limite pontual** de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D.

② $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente** para a função f em D se:

$$\sup_{x\in D} \left| f_n(x) - f(x) \right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

(ou seja, é um <u>infinitésimo</u>)

Exemplo 3:

$f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ 1 & , x=1 \\ 0 & , x\in]0,1[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ se } x\in [0,1[\\ 1 & , \text{ se } x=1 \end{cases}$$

! A convergência uniforme é mais forte do que a pontual.

$$\sup_{x\in D} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| x^n - f(x) \right| = 1$$

entre 0 e 1
(ver gráfico acima)

$\lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$ logo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge uniformemente

Exemplo 4:

$$g_n(x) = \frac{x}{n} \qquad x \in [0,1]$$

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ 0 & , x=1 \\ 0 & , x\in]0,1[\end{cases} = 0 \quad , \forall x\in[0,1]$$

$$\sup_{x\in D} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \rightarrow \text{infinitésimo}$$

$\therefore$ $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. uniformemente em $x\in[0,1]$

<u>Proposição</u>: Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, em D, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente em D para f.

A Convergência uniforme de uma certa sucessão de funções acarreta para a mesma importantes propriedades:

1. f é contínua em $[a,b]$

② f é integrável em $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b f_n(x) dx\right]$$

③ Se f_n tem derivadas contínuas em $[a,b]$ e a sucessão $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. uniformemente em $[a,b]$ então f é diferenciável em $[a,b]$ e

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x) \quad , \forall x \in [a,b]$$

Basta que falhe uma destas prop. e já não existe convergência uniforme.

$$\boxed{p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p}$$

Exemplo 5 :

$$h_n(x) = nx(1-x^2)^n \qquad x \in [0,1]$$

$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente?

função contínua

① $$h(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \begin{cases} 0 \ , & x=0 \\ 0 \ , & x=1 \\ 0 \ , & x\in]0,1[\end{cases} = 0$$

$x \in]0,1[$

$$\lim nx(1-x^2)^n = \lim \frac{nx}{(1-x^2)^{-n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{RC}{=}} \lim \frac{\cancel{x}}{-\cancel{n}(-2x)(1-x^2)^{-n-1}}$$

$$= \lim \frac{1}{2x(1-x^2)^{-n-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$\therefore$ A prop. 1 verifica-se.

(2) $\int_0^1 h(x)\,dx = 0$ função nula $\boxed{h(x)=0}$ logo a área é nula!

$$\int_0^1 h(x)\,dx \overset{?}{\neq} \lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^1 h_n(x)\,dx\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{2}\int_0^1 -2x(1-x^2)^n\,dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{2}\left[0-\frac{1}{n+1}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\therefore$ falha a prop. 2 logo ñ há conv. uniforme.

Exemplo 6:

Seja $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$

a) Estuda a convergência pontual em $[0,1]$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x=0 \\ 1/2 & ; \quad x=1 \\ 0 & ; \quad x\in\,]0,1[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

$x \in]0,1[$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{x^n}\to 0}{1+\cancel{x^n}\to 0} = \frac{0}{1} = 0$$

b) convergência uniforme em $[0,1]$

Não há conv. uniforme em $[0,1]$ pois f ñ é contínua em $[0,1]$ (Falha a propriedade 1)

c) convergência uniforme em $[0,\frac{1}{2}]$

$$\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 0 \right| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| = \circledast$$

função contínua em intervalo fechado tem máximo e mínimo T. Weierstrass

$$\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)' = \frac{n x^{n-1}(1+x^n) - x^n(n x^{n-1})}{(1+x^n)^2}$$

$$= \frac{n x^{n-1} + n x^{2n-1} - n x^{2n-1}}{(1+x^n)^2}$$

$$= \frac{n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \geq 0 \quad \text{crescente}$$

$\downarrow$

maior valor em $x = \frac{1}{2}$

$$(*) = \frac{(1/2)^n}{1 + (1/2)^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{(1/2)^n}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\cancel{(1/2)^n}}_{0}} = 0 \text{ (infinitésimo)}$$

$\therefore$ Há conv. uniforme em $[0, 1/2]$

Séries de funções

Idea semelhante nas séries numéricas

Convergência de uma série de funções

Seja $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge pontualmente** se a sucessão $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das somas parciais converge pontualmente.

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge uniformemente** se a sucessão $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das somas parciais converge uniformemente.

A convergência pontual da série corresponde à convergência da série numérica gerada por cada valor de x.

sucessão das somas parciais

Exemplo 7:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$$

Convergência Pontual:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{k \to +\infty} f_k(x) \right)$$

limite da soma = soma dos limites

$$\lim_{k\to+\infty} k e^{-kx} = \begin{cases} 0 & x>0 \\ +\infty & x\leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{e^{kx}} = 0$$

Pela c.n.c, se $x \leq 0$ a série diverge

$$\lim_{k\to+\infty} k e^{-kx} = +\infty \times +\infty = +\infty$$

Também podiamos usar o Crit. Cauchy

Para $x>0$, aplicando Crit. D'Alembert:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|(n+1)e^{-(n+1)x}|}{|n e^{-nx}|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} e^{-nx-x-(-nx)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} e^{-x}$$

$$= e^{-x} \times 1 = e^{-x}$$

Como $x>0$: $-x<0 \Leftrightarrow e^{-x} < e^{0} \Leftrightarrow e^{-x}<1$

$\therefore$ Conv. absolutamente em $\mathbb{R}^+$

Cómo a convergência da série está ligada à convergência da sucessão das somas parciais é de esperar a existência de propriedades semelhantes para as séries de funções.

Propriedades da convergência uniforme

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série de funções contínuas em $[a,b]$. Se a série converge uniformemente em $[a,b]$, com soma S. Então:

① A soma S é uma função contínua em $[a,b]$

② A soma S é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Integração termo a termo

③ Se cada f_n for de classe C^1 em $[a,b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente em $[a,b]$, então S é diferenciável em $[a,b]$ e

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad , x \in [a,b]$$

Derivação termo a termo

À semelhança das sucessões se uma destas propriedades falhar, isso implica que a série não converge uniformemente em $[a,b]$.

Exemplo 8:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge para $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

que é descontínua, então não há convergencia uniforme da série, pois falha a propriedade 1.

Contudo, provar a convergência uniforme de uma série de funções por definição torna-se, em geral, complicado devido à dificuldade em lidar com as somas parciais. O resultado seguinte, bastante útil na prática, fornece uma condição suficiente para a convergência uniforme.

Critério de Weierstrass

Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em D e $\sum_{n=1} a_n$ uma série numérica convergente de termos não negativos, tais que,

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in D$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em D.

Termo geral da sucessão de funcões é majorado pelo termo geral de uma série numérica convergente.

Exemplo 9:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$ série Dirichlet convergente

$\therefore$ A série de funções é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n^2+x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ é uma série de Dirichlet convergente

$\therefore$ A série de funções é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 11

Considere a série de funções

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

(a) Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(b) Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

a) $$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$$

$$\left| f_n(x) \right| \leq \left| \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é uma série Dirichlet convergente.

Pelo critério de weierstrass, a serie de funções é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

b) Pelas propriedades da convergência uniforme a soma S é contínua em $\mathbb{R}$, uma vez que se verificou a conv. uniforme na alinea anterior.

Exemplo 12

Justifica a convergência uniforme das séries:

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{1+(2n+1)x}}, \quad x \geq 0$$

$$\left| f_n(x) \right| = \left| \frac{1}{3^n\sqrt{1+(2n+1)x}} \right| \leq \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

termo geral de uma série geométrica convergente $R = \frac{1}{3} \rightsquigarrow |R| < 1$

Pelo crit. de weierstrass a série de funções converge uniformemente em $\mathbb{R}_0^+$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n + nx}}$, $x \geq 0$

$$\left| f_n(x) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2^n+nx}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

termo geral de uma série geométrica convergente

$$R = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \rightsquigarrow |R| < 1$$

Pelo crit. de Weierstrass a série de funções converge uniformemente em $\mathbb{R}_0^+$.

Texto de apoio 22-31 → Para mais pormenores podes consultar o texto de apoio.