

Temas: Cálculo do raio de convergência usando apenas a sucessão dos coeficientes da série.
Polinómio de Taylor.

Podemos analisar o raio de convergência da série de potências usando apenas a sucessão dos coeficientes da série.

Vamos considerar um caso geral e recorrer, por exemplo ao Criterio de D'Alembert:

Série de potências: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x-c)^{n+1}|}{|a_n(x-c)^n|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x-c|}{|a_n|} \\ &= |x-c| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \end{aligned}$$

$$= \frac{|x-c|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}$$

R $\Rightarrow [0, +\infty[\Rightarrow$ A série conv.
Absolutamente se $\frac{|x-c|}{R} < 1$
Se $x \in]c-R, c+R[$

$\Rightarrow L = 0 < 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$
 \Rightarrow Domínio de conv. = \mathbb{R}

$\Rightarrow L = +\infty > 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$
 \Rightarrow Domínio de conv: $\{c\}$

De forma análoga, aplicando o critério de Cauchy, podemos concluir que:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Em resumo:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (\text{crit. de D'Alembert})$$

ou

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (\text{crit. de Cauchy})$$

Exemplo 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2e-2)^n}{n^5 + 3} \quad C=2 \quad a_n = \frac{1}{n^5 + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^5 + 3}}{\frac{1}{(n+1)^5 + 3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^5 + 3}{n^5 + 3} \stackrel{\infty}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5}{n^5} = 1$$

∴ $R = 1 \Rightarrow$ A série converge absolutamente
em: $]2-1, 2+1[=]1, 3[$

$x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5 + 3}$$

Alternada

Série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 + 3}$$

$$\frac{1}{n^5 + 3} \leq \frac{1}{n^5}$$

Dirichlet Conv.
(Criter. Comparação)
Conv. Absoluta

$x = 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^5 + 3}$$

Absolutamente
convergente

Exemplo 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(zx)^n}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(n-1)!} \rightsquigarrow c=0 \quad a_n = \frac{2^n}{(n-1)!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^n}{(n-1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n n!}{2^{n+1} (n-1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} n = +\infty$$

$$\therefore R = +\infty$$

\Rightarrow A série dada é absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$

Exemplo 3 (*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

Reparamos! $\rightarrow = \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^6}{27} + \dots$

$$= 0x + \frac{1}{3}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{9}x^4 + 0x^5 + \frac{1}{27}x^6 + \dots$$

Se considerássemos $a_n = \frac{1}{3^n}$ a sucessão dos coeficientes tinharmos incoerências

n	1	2	3	\dots
a_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	\dots

Não bate certo!

Nestas situações optamos por estudar o raio usando o termo geral da série de potências.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{3^{n+1}}}{\frac{x^{2n}}{3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x^{2n+2} \cdot 3^n|}{|x^{2n} \cdot 3^{n+1}|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} |x^2| \times \frac{1}{3} = \frac{|x^2|}{3} < 1 \rightsquigarrow \text{para que existe conv.}$$

$$\frac{|x^2|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x^2| < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 < x^2 < 3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 > -3}_{\text{C. Univ.}} \wedge x^2 < 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

absoluta

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &= 0 \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$



Desafio ($x = -\sqrt{3}$) ($x = \sqrt{3}$)

C. Aux

Exemplo 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

$$c=0 \quad a_n = \frac{n^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{n^n}{n!} \right|}{\left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n (n+1)!}{(n+1)^{n+1} n!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n (n+1)}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

 limite notável

∴ Em $]0 - \frac{1}{e}; 0 + \frac{1}{e}[=]-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}[$ a série de potências converge absolutamente.

Temos agora de estudar o que acontece em:

$$x = -\frac{1}{e} \text{ e } x = \frac{1}{e}$$

 Desafio

Exemplo 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-2)^n \quad c = 2 \quad a_n = n^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n^n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

∴ Como o raio de convergência é zero. Isso significa que a série dada apenas converge absolutamente em $x=2$.

$$\mathcal{D} = \mathcal{I} = \{2\}$$

Exemplo 6

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n+4} \left(x - \frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

C. Aux:

$$\begin{aligned} (2x-3)^n &= \left(2(x-\frac{3}{2})\right)^n \\ &= 2^n \left(x - \frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$c = \frac{3}{2} \quad a_n = \frac{2^n}{2n+4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^n}{2n+4}}{\frac{2^{n+1}}{2(n+1)+4}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (2n+6)}{2^{n+1} (2n+4)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+6}{2n+4} \stackrel{\infty}{=} \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

∴ No intervalo $\left] \frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right[=]1, 2[$ há conv. absoluta.

$x = 1$

$x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+4} \quad (\text{alternadas})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+4} \quad (\text{Divergente})$$

igual

série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+4}$$

Vamos comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
que é uma dirichlet divergente ($\alpha=1$).

Comp. pass. limite:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+4} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$$

∴ As séries têm a mesma natureza (Divergentes)
logo não há conv. absoluta.

Crit. Leibniz: $u_n = \frac{1}{2n+4} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (verificar!)

u_n é decrescente (verificar!) e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+4} = 0$

∴ Temos conv. simples em $x=1$

∴ $D =]1, 2[\quad I = [1, 2[$

Polinómio de Taylor

Objetivo: usar polinómios para aproximar funções não tão simples de trabalhar.

A Um polinómio do tipo :

f admite derivadas até a ordem n

$$T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$$

Chamamos **Polinómio de Taylor** de ordem n de f no ponto c .

Se $c=0$ chamamos **Polinómio de MacLaurin** de ordem n de f .

Notem!

$$\bullet n=1 \quad T_c^1 f(x) = f(c) \quad \text{Imagem de } c$$

$$\bullet n=2 \quad T_c^2 f(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$$

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x=c$

Curiosidade: ver link seguinte

Aplicação Geogebra

[https://www.geogebra.org/m/Wv4gg9GT?
fbclid=IwAR1mRPHR_HYJDL09AXecrL-
GGzDaDHFTDFB7XDUQm0HKcDCXfoRjDKqpd14](https://www.geogebra.org/m/Wv4gg9GT?fbclid=IwAR1mRPHR_HYJDL09AXecrL-GGzDaDHFTDFB7XDUQm0HKcDCXfoRjDKqpd14)

Exemplo 1

$$T_0^3(x^3 + 2x + 1)$$

$$c=0 \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \quad f'(0) = 2$$

$$f''(x) = 6x \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 6 \quad f'''(0) = 6$$

$$T_0^3(x^3 + 2x + 1) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3$$

$$= 1 + 2x + x^3 \quad \leadsto \text{o polinómio de Taylor coincide com o polinómio.}$$

Desafio:

$$T_0^4(x^4 + 2x + 1)$$

Exemplo 2

$$T_{\pi}^3(\cos(x))$$

$$c = \pi \quad f(\pi) = \cos \pi = -1$$

$$f'(x) = -\sin(x) \rightarrow f'(\pi) = 0$$

$$f''(x) = -\cos(x) \rightarrow f''(\pi) = -(-1) = 1$$

$$f'''(x) = \sin(x) \rightarrow f'''(\pi) = 0$$

$$\begin{aligned} T_{\pi}^3(\cos x) &= -1 + \frac{0}{1!}(x-\pi) + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{0}{3!}(x-\pi)^3 \\ &= -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$T_1^n\left(\frac{1}{x}\right) \quad c = 1$$

$$\bullet f(1) = 1$$

$$\bullet f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\bullet f''(x) = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \rightarrow f''(1) = 2$$

$$\bullet f'''(x) = (2x^{-3})' = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4} \rightarrow f'''(1) = -6$$

⋮
⋮

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}} \rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

$$\begin{aligned} T_1^n\left(\frac{1}{x}\right) &= 1 - \frac{1!}{1!}(x-1) + \frac{2!}{2!}(x-1)^2 + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}(x-1)^n \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k (x-1)^k \end{aligned}$$

Exemplo 4

$$T_0^n \left(\frac{1}{1-x} \right) = \sum_{k=0}^n x^k$$

mostrar

DESAFIO

Exemplo 5

$$T_0^n (e^x) \quad c=0 \quad f(0)=1$$

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x)$$

$$\hookrightarrow f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Então,

$$\begin{aligned} T_0^n (e^x) &= 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Nota: Já podem resolver FT1 - Ex 2 e Ex 3

Ver texto de apoio: págs. 8-13

Bom trabalho!

Filipa.