

Temas: Mini-teste 1

Introdução às f.R.v.v.R: noções topológicas em \mathbb{R}^n . Domínios e gráficos. Conjuntos de nível.

Espaço euclideano

$\mathbb{R}^n \rightarrow$ espaço vetorial de dimensão n
 munido de produto interno



Vamos essencialmente trabalhar com funções com $n = 2$ ou $n = 3$.

O caso $n = 1$ já é bem conhecido por nós!

Exemplos de f.R.v.v.R

funções reais de várias variáveis reais

$$\textcircled{1} \quad f(x,y) = \ln(x+y)$$

$$\textcircled{2} \quad V_{\substack{\text{pirâmide} \\ \text{quadrangular}}} = V(l,h) = \frac{1}{3} l^2 \times h$$

2 variáveis

3 variáveis

$$\textcircled{3} \quad C(n,j,C_0) = C_0 (1+j)^n$$

Capital acumulado em juro composto

$n = \text{periódos}$

$j = \text{taxa de juro}$

$C_0 = \text{capital investido (inicial)}$

$$\textcircled{4} \quad E_C = E(m, v) = \frac{1}{2} mv^2 \quad z \text{ variáveis}$$

→ Energia cinética

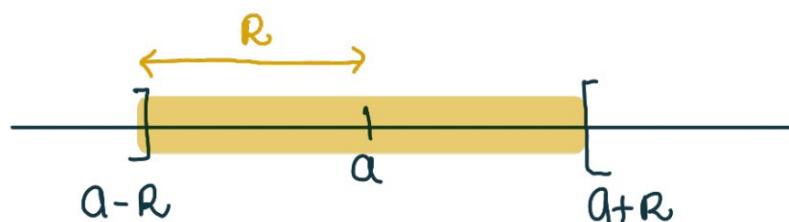
Noções topológicas em \mathbb{R}^n

Bola → Chamamos bola (aberta) de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e Raio $R > 0$ ao conjunto

$$B_R(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < R \right\}$$

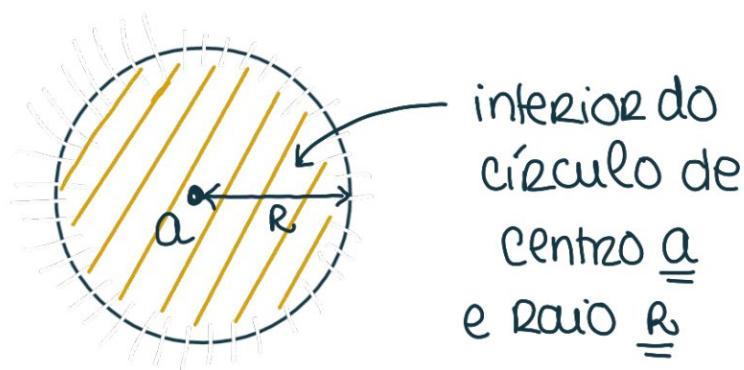
Distância entre
 \underline{x} e \underline{a}

$n=1$



Intervalo
aberto

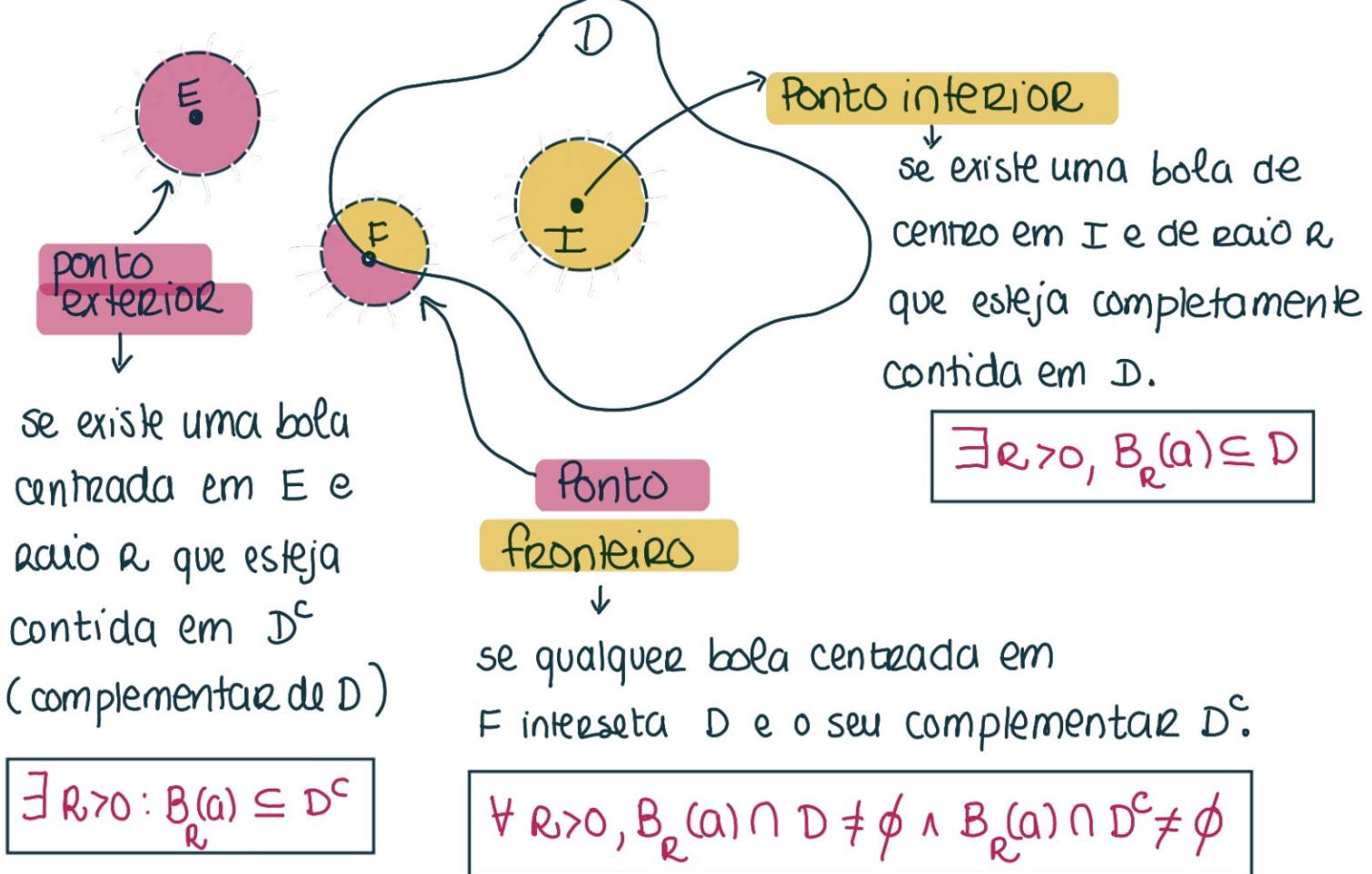
$n=2$



$n=3$

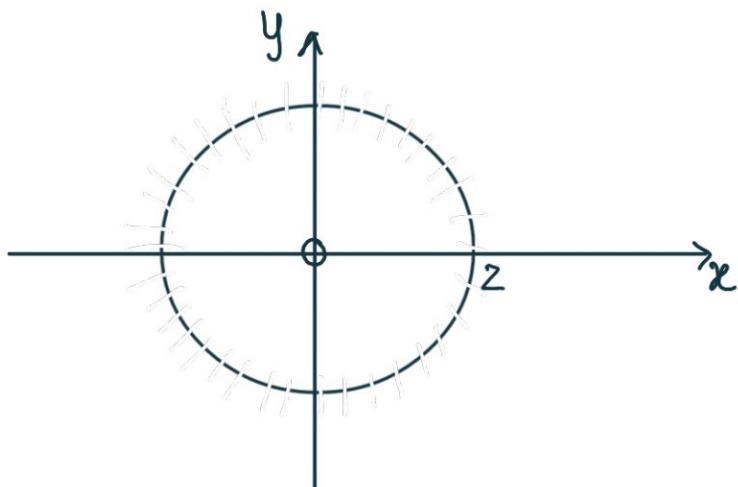
Interior da esfera de centro \underline{a} e raio \underline{R}

Ponto interior, exterior e fronteiro



Exemplo 2

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4 \}$$



conjunto dos
pontos →
interiores

$$\text{Int}(S) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4 \}$$

Relembrae:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
circunferência
de raio r e
centro (a, b)

Conjunto dos pontos exteriores

$$\text{Ext}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4\}$$

Conjunto dos pontos fronteiriços

$$f_R(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \vee x^2 + y^2 = 0\}$$

fecho ou aderência

Chamamos fecho ou aderência de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ao conjunto $\bar{D} = D \cup f_R(D)$.

Conjunto Aberto / Fechado

Um conjunto diz-se **aberto** se coincide com o seu interior, isto é, $D = \text{int}(D)$

E diz-se **fechado** se coincide com o seu fechado, isto é, $D = \bar{D} = D \cup f_R(D)$

Exemplo 2 (voltando)

$S = \text{int}(S) \rightsquigarrow S$ é aberto

$\bar{S} = S \cup f_R(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \neq S$

\rightsquigarrow Não é fechado

Exemplo 3

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$$

Relembrar: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{elipse}$

$$\text{int}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$$

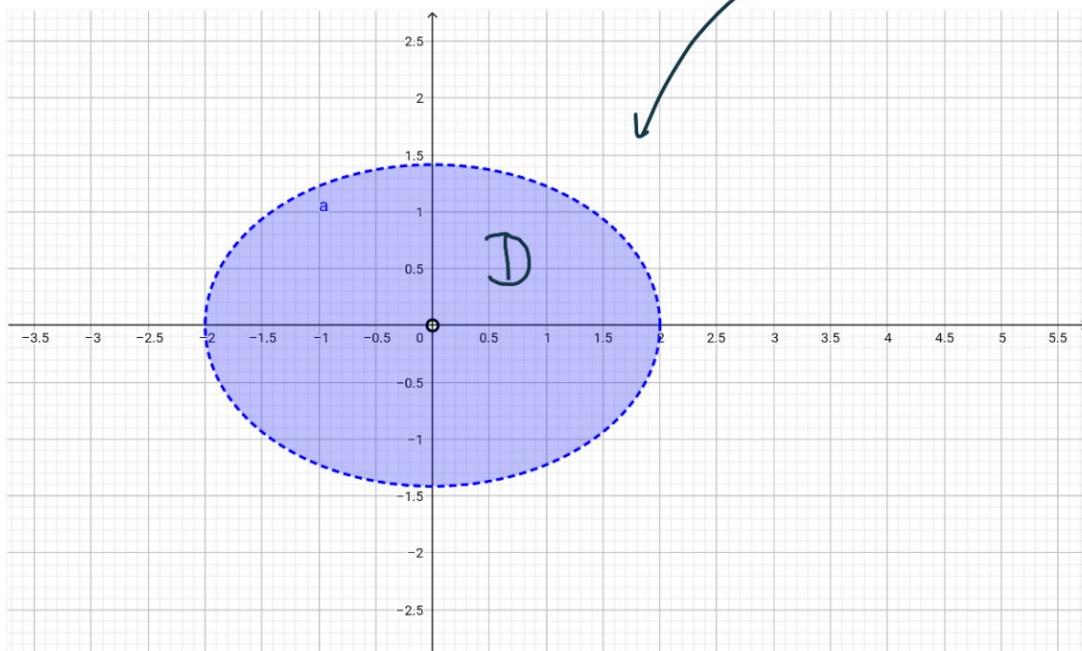
$$\text{ext}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 > 4\}$$

$$\text{fr}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 4\} \cup \{(0, 0)\}$$

$$\bar{D} = D \cup \text{fr}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4\}$$

$D = \text{int } D \rightarrow D$ é aberto

$D \neq \bar{D} \rightarrow D$ não é fechado



Exemplo 4

Slides disciplina

→ Toda a bola (aberta) $B_r(a)$ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n .

$$D = B_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < R\}$$

$$\text{int}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < R\}$$

$$\text{ext}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| > R\}$$

$$f_R(D) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = R\}$$

$$\bar{D} = D \cup f_R(D) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \leq R\}$$

Diferentes
então D
não é
fechado

iguais

Então D é
Aberto pois
 $D = \text{int}(D)$

Ponto de acumulação / isolado

Um ponto a diz-se de **acumulação** de D se:

$$\forall R > 0, B_a(R) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

Se qualquer bola centrada em a interseca sempre o conjunto, sem contarmos com o próprio ponto a .

Ao conjunto
dos pontos de
acumulação
chamamos

Derivado, D'

Caso a intersecção da bola centrada em a e o conjunto seja apenas o próprio ponto a , então dizemos que

temos um ponto isolado.

Exemplo 5

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(3,0)\}$$

$$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$$

$$\text{ext}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\} \setminus \{(3,0)\}$$

$$f_R(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(3,0)\}$$

$$\bar{D} = D \cup f_R(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(3,0)\}$$

$$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Pontos isolados: $(3,0)$

Aberto / fechado: $D \neq \text{int}(D) \rightarrow$ Não aberto
 $D \neq \bar{D} \rightarrow$ Não fechado

Conjunto limitado

Um conjunto diz-se limitado se existir uma bola que o contenha.

Exemplo 5 → conjunto é limitado!

Domínio e gráfico de uma f.R.V.V.R

Uma função real de várias variáveis reais $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ faz corresponder a cada elemento $X = (x_1, \dots, x_n)$ de D um único número real $z = f(x_1, \dots, x_n)$. Isto é,

$$X = (x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{f} z = f(x_1, \dots, x_n)$$

A D chamamos domínio de f e determina-se tendo em conta as restrições da expressão analítica de f .

Seja $X = (x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{A(X)}{B(X)} \Rightarrow B(X) \neq 0$$

$$\sqrt[n]{A(X)} \stackrel{n \text{ par}}{\Rightarrow} A(X) \geq 0$$

$$\ln(A(X)) \Rightarrow A(X) > 0$$

As restrições que conhecíamos para f.R.V.R são generalizadas para o caso f.R.V.V.R

O Gráfico de f é um subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} e representa-se por:

$$G_f = \left\{ (x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x_1, \dots, x_n) \right\}$$

n variáveis independentes 1 var. dependente

Vejamos alguns exemplos dos slides (com Geogebra)

Algumas funções (de domínio \mathbb{R}^2 , exceto a última)

1 $f(x, y) = 2x - y;$ $CD_f = \mathbb{R}.$

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x - y\}$$
 ► Esboço gráfico (plano)

2 $f(x, y) = x^2 + y^2;$ $CD_f = \mathbb{R}_0^+.$

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$$
 ► Esboço gráfico (parabolóide circular)

3 $g(x, y) = 4 - y^2;$ $CD_g =]-\infty, 4].$ ► esboço gráfico (cilindro parabólico)

4 $h(x, y) = x^2 - y^2;$ $CD_h = \mathbb{R}.$ ► esboço gráfico (parabolóide hiperbólico)

5 $s(x, y) = \sin(x^2 + y^2);$ $CD_s = [-1, 1].$ ► esboço gráfico

6 $u(x, y) = \sin(x);$ $CD_u = [-1, 1].$

7 $v(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2);$ $CD_v = \mathbb{R}_0^+.$

8 $w(x, y) = \ln(x^2 + y^2);$ $D_w = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ $CD_w = \mathbb{R}.$

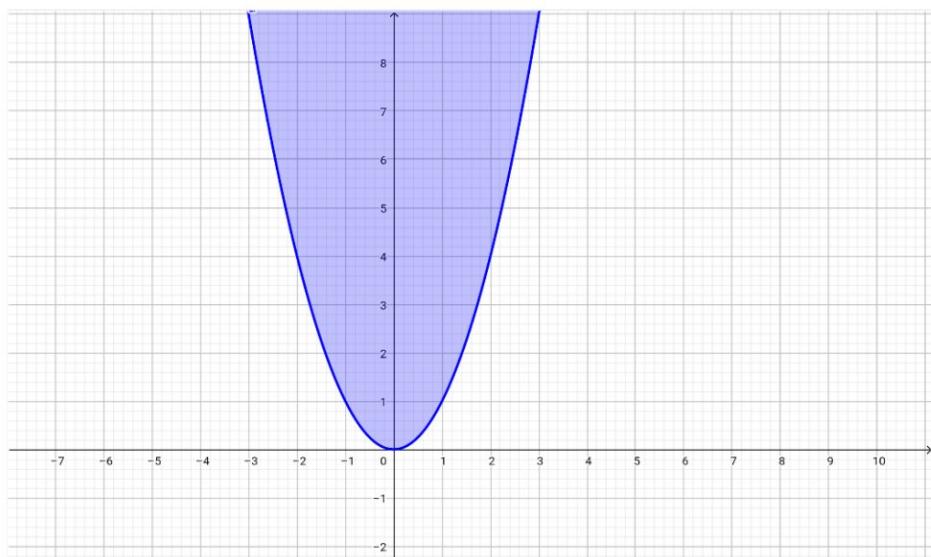
Exemplo 6

FT3 2.a)

$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0\}$$

C. aux: $y - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2$



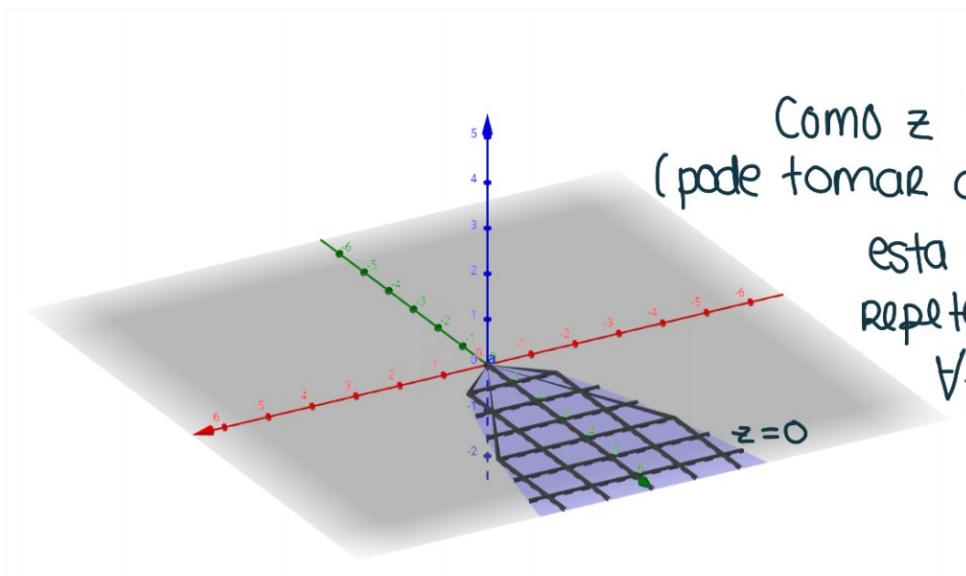
Exemplo 7

FT3 2.b)

$$f(x,y,z) = \sqrt{y - x^2}$$

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - x^2 \geq 0\}$$

C. Aux: $y \geq x^2$



$$f(x, y, z) = 2 + \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$$

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1-x^2-y^2-z^2 \geq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

esfera de centro em
(0, 0, 0) e raio 1

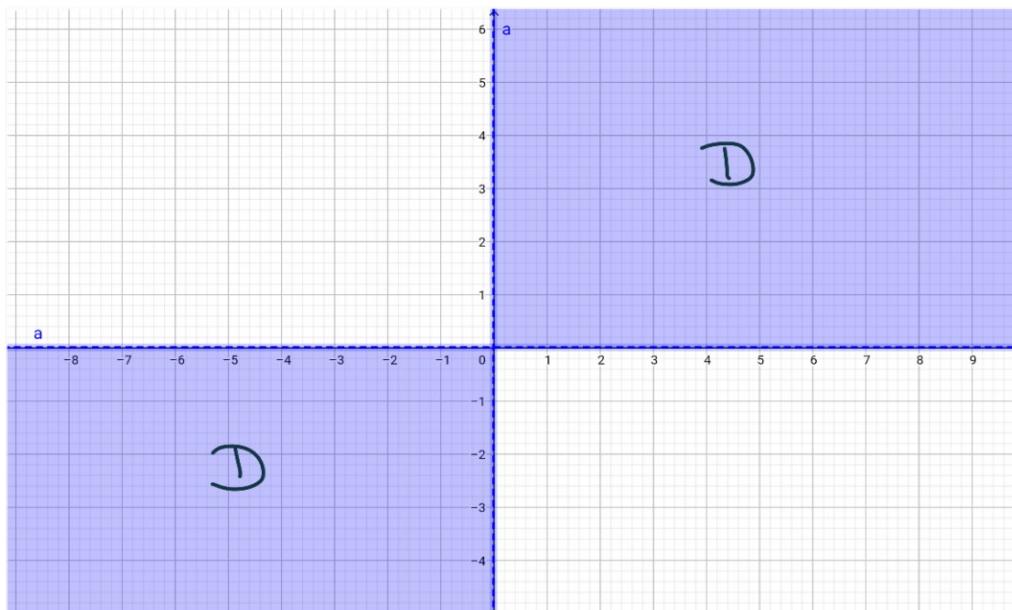
Exemplo 9

FT3

$$f(x, y) = \ln(xy)$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$

 tem mesmo sinal



Conjuntos de nível

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Chama-se conjunto de nível k , $k \in \mathbb{R}$, de f ao conjunto:

$$N_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = k\}$$

→ $n=2$ curva de nível k
 → $n=3$ superfície de nível k

Exemplos

Calculus, Stewart

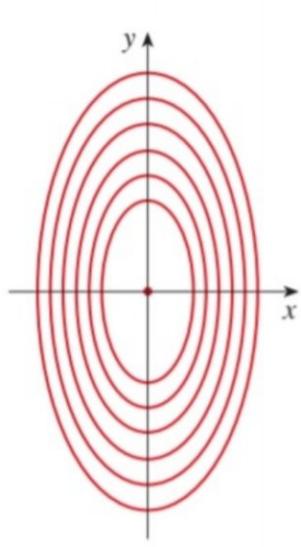
EXAMPLE 12 Sketch some level curves of the function $h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

SOLUTION The level curves are

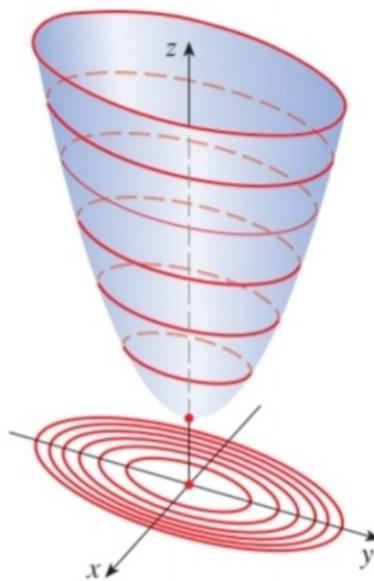
curvas de nível

$$4x^2 + y^2 + 1 = k \quad \text{or} \quad \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$$

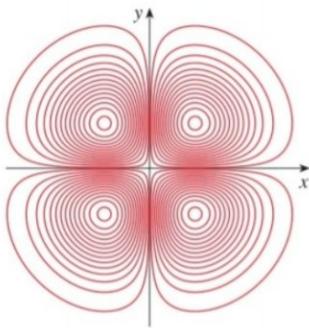
which, for $k > 1$, describes a family of ellipses with semiaxes $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$ and $\sqrt{k-1}$. Figure 18(a) shows a contour map of h drawn by a computer. Figure 18(b) shows these level curves lifted up to the graph of h (an elliptic paraboloid) where they become horizontal traces. We see from Figure 18 how the graph of h is put together from the level curves.



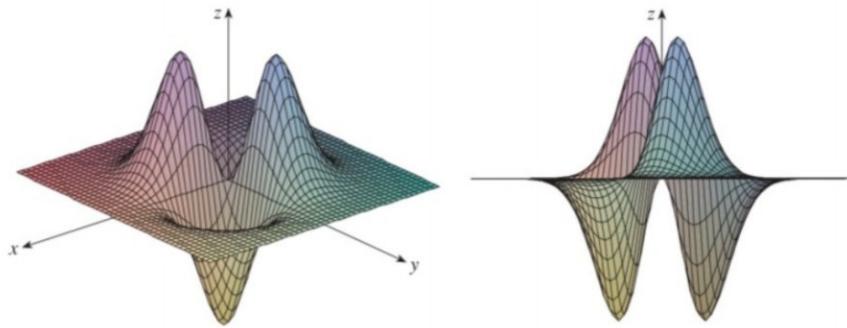
(a) Contour map



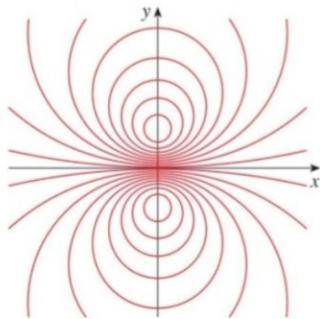
(b) Horizontal traces are raised level curves.



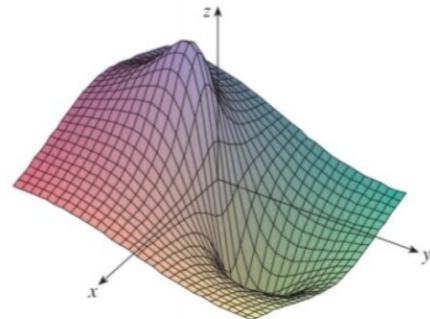
(a) Level curves of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Two views of $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(c) Level curves of $f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$



(d) $f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

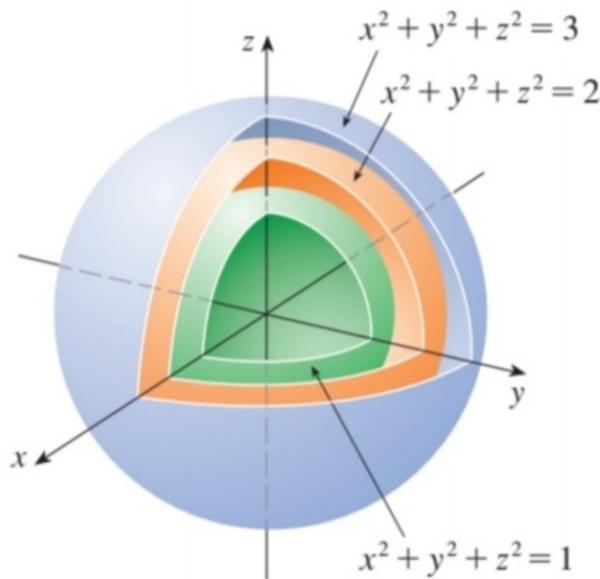
FIGURE 20

→ superficies de nivel

EXAMPLE 15 Find the level surfaces of the function

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

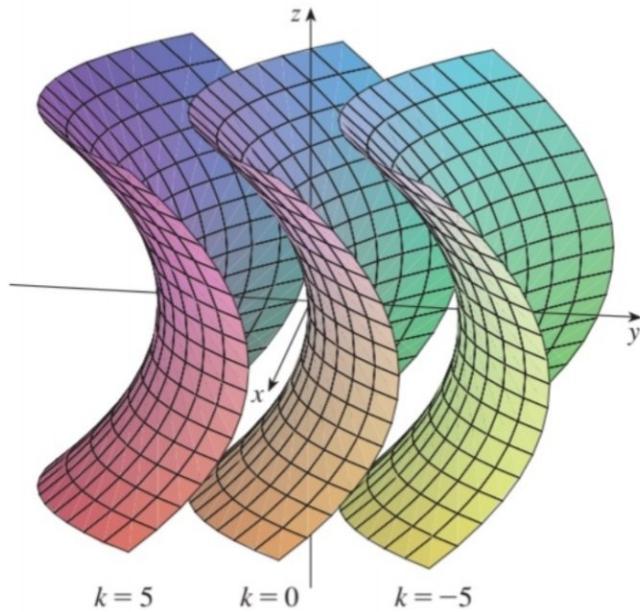
SOLUTION The level surfaces are $x^2 + y^2 + z^2 = k$, where $k \geq 0$. These form a family of concentric spheres with radius \sqrt{k} . (See Figure 21.) Thus, as (x, y, z) varies over any sphere with center O , the value of $f(x, y, z)$ remains fixed.



EXAMPLE 16 Describe the level surfaces of the function

$$f(x, y, z) = x^2 - y - z^2$$

SOLUTION The level surfaces are $x^2 - y - z^2 = k$, or $y = x^2 - z^2 - k$, a family of hyperbolic paraboloids. Figure 22 shows the level surfaces for $k = 0$ and $k = \pm 5$.



Exemplo 10

FT3

$$f(x, y) = e^{xy} \quad e^{xy} > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow k > 0$$

Como $n=2 \rightarrow$ curvas de nível

$$N_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{e^{xy}}_{} = k \right\}$$

$$xy = \ln(k) \quad x \neq 0 \rightarrow y = \frac{\ln(k)}{x}$$

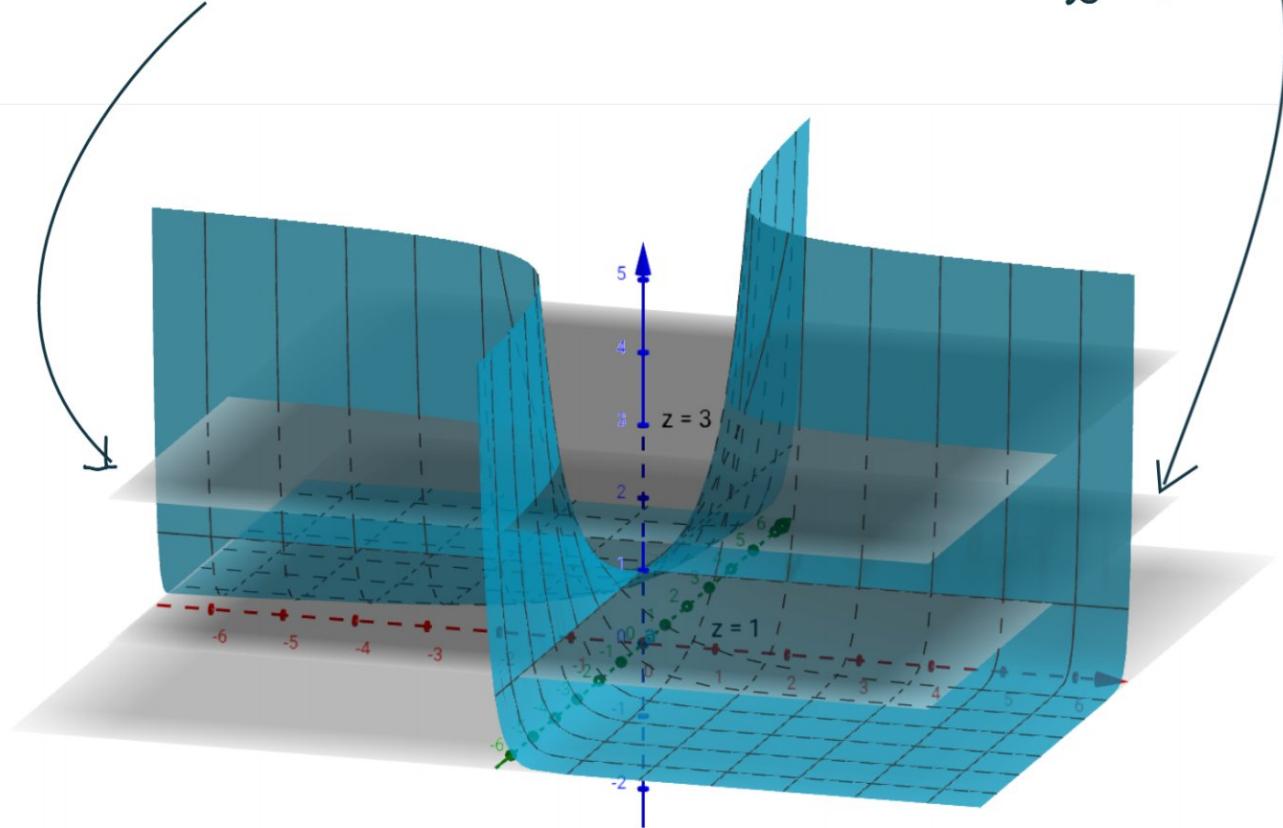
Caso

$$x=0 \rightarrow f(0, y) = e^0 = 1 \rightarrow \text{eixo } Oy > k=1$$

$$\text{ou } y=0 \rightarrow f(x, 0) = 1 \rightarrow \text{eixo } Ox$$

$$K=1 \quad N_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0 \vee x=0\}$$

$$K \neq 1 \text{ e } K > 0 \Rightarrow N_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\ln(K)}{x}\}$$



Exemplo 11

FT3

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

fácil ver que
 $z = f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Como $n=2 \rightarrow$ Curvas de nível

$$N_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = K\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = K \Leftrightarrow \frac{1}{K} = \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{1}{K^2} = 1-x^2-y^2$$

\downarrow
 $K > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \underbrace{1 - \frac{1}{k^2}}_{\text{circunferências centro em } (0,0) \text{ e raio } \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}}$$

→ $k > 0 \wedge 1 - \frac{1}{k^2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow k > 0 \wedge 1 \geq \frac{1}{k^2}$$

$$\Leftrightarrow k > 0 \wedge k^2 \geq 1$$

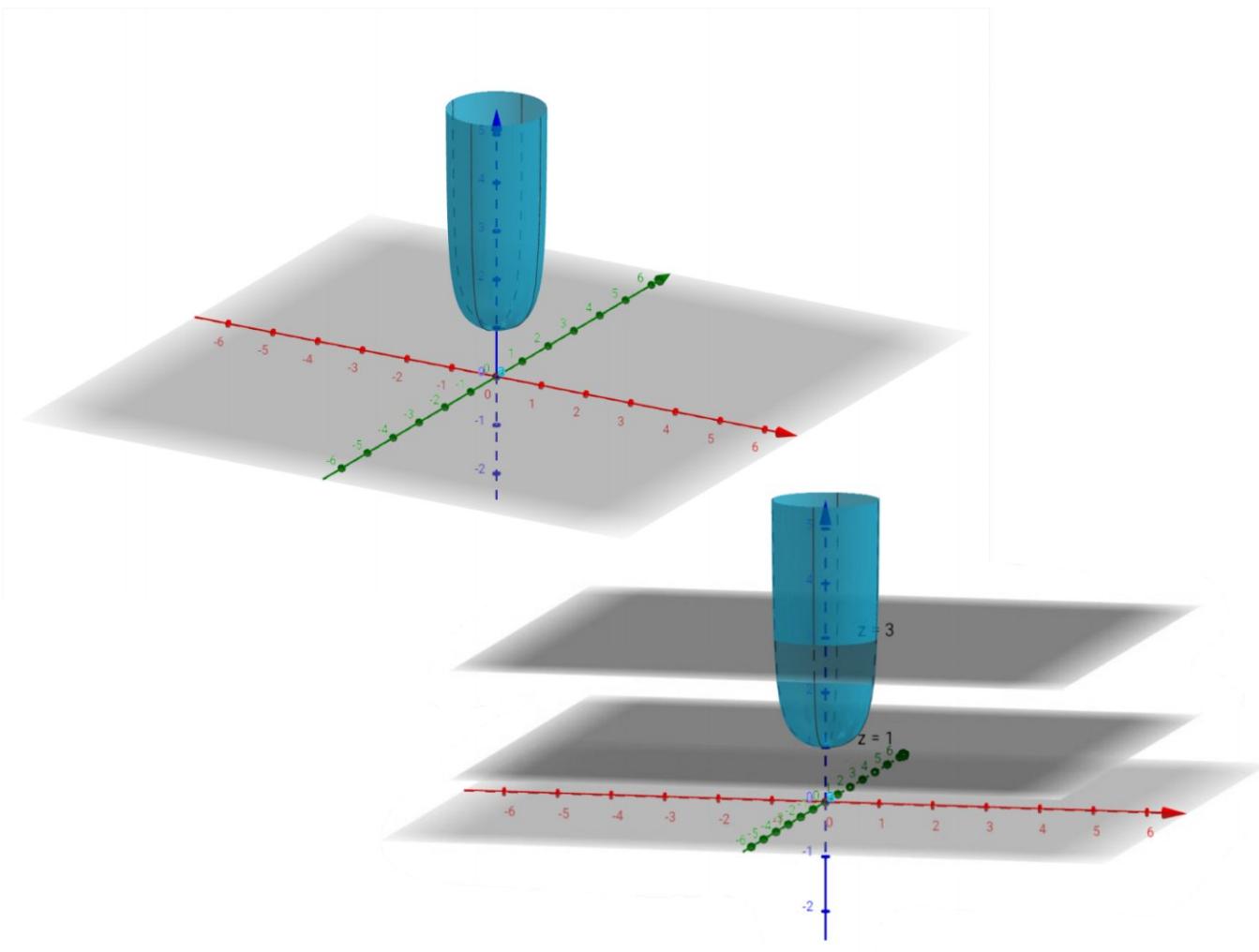
$$\Leftrightarrow k > 0 \wedge (k \leq -1 \vee k \geq 1)$$

$$k \geq 1$$

Se $k = 1$ $N_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$

$$= \{(0,0)\}$$

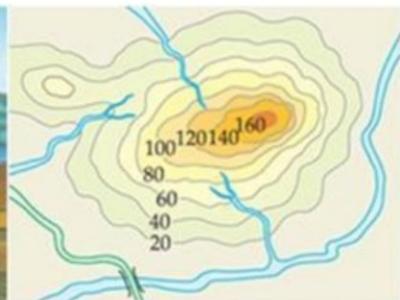
Se $k > 1$ $N_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{k^2}\}$



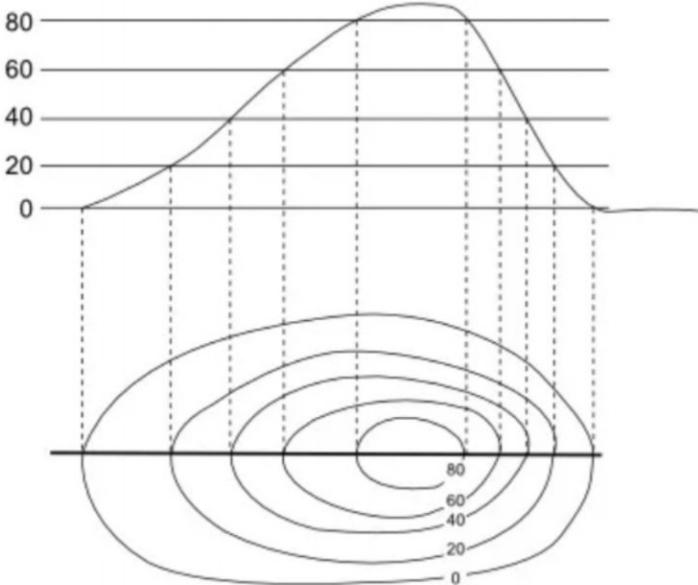
Aplicações dos conjuntos de nível

Importância do uso de curvas de nível

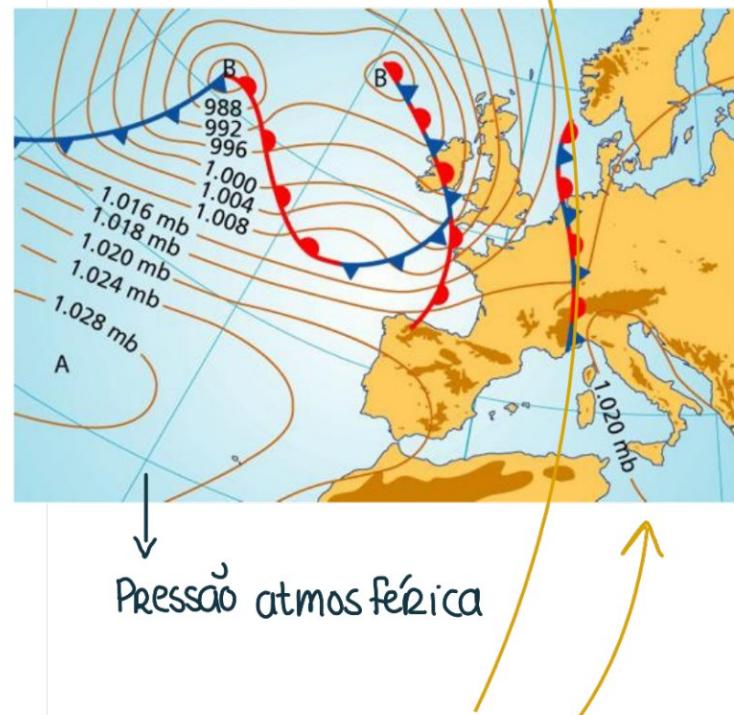
Por sua simplicidade e facilidade de reprodução, o uso de curvas de nível é a forma mais comum de se documentar o relevo na construção civil.



No mapa é informado as cotas que representam as curvas seja em relação ao nível do mar, ou outro referencial conhecido.



Representação de um perfil topográfico em curvas de nível



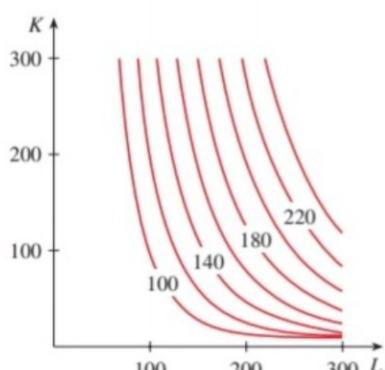
Existem muitas outras aplicações na **economia** e **engenharia**

EXAMPLE 13 Plot level curves for the Cobb-Douglas production function of Example 4.

SOLUTION In Figure 19 we use a computer to draw a contour plot for the Cobb-Douglas production function

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

Level curves are labeled with the value of the production P . For instance, the level curve labeled 140 shows all values of the labor L and capital investment K that result in a production of $P = 140$. We see that, for a fixed value of P , as L increases K decreases, and vice versa.



unidades de trabalho

unidades de capital