Cálculo 2 - filipa Santana

Extremos de FRVVR

Para estudarmos a existência de extremos de uma função real de várias variáveis reais temos de conhecer o conceito de ponto crítico ou ponto de estacionaridade.

Teorema de Fermat:

Sejam $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in int(D)$. Se $f(a)$ for extremo relativo de f, então ou uma das derivadas parciais não existe em a ou $\underbrace{\nabla f(a) = \vec{0}}_{\text{Todas as derivadas parciais são nulas.}}$

Aos pontos $a \in D$ que anulam o gradiente de f, ou seja, tal que $\nabla f = \vec{0}$, chamamos pontos críticos de f ou pontos de estacionaridade de f.

* **Exemplo 1:**

$f(x,y) = 3x^2y \qquad D_f = \mathbb{R}^2$

① Os pontos críticos são solução da equação:

$$\nabla f = \vec{0}$$

$f'_x(x,y) = 3y2x = 6xy \qquad f'_y(x,y) = 3x^2$

$$\begin{cases} 6xy=0 \\ 3x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0y=0 \rightarrow y\in\mathbb{R} \\ x=0 \end{cases}$$

$\therefore$ Todos os pontos $\{(0,y).\ y\in\mathbb{R}\}$ são pontos críticos.

* Exemplo 2:

$f(x,y) = x^2 + xy$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^2$

① $\nabla f = \vec{0}$

$f'_x(x,y) = 2x+y$

$f'_y(x,y) = x$

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$\therefore$ $(0,0)$ é ponto crítico de f.

Os pontos críticos de f serão os candidatos a extremantes de f.

De seguida vamos ver duas formas de verificar se o ponto é ou não extremante e, no caso de o ser, ver como o classificar como minimizante ou maximizante.

Para tal precisamos de conhecer mais um conceito: Matriz Hessiana

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2.

Chamamos **Matriz Hessiana de f no ponto (a,b)**:

$$H_f(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

(*) menor de ordem 1.

(*) menor de ordem 2 (submatriz 2x2)

(*) A própria Hessiana coincide com o menor de ordem n

no caso particular de $\mathbb{R}^2$:

$$H_f(a,b) = \begin{bmatrix} f''_{x^2}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{y^2}(a,b) \end{bmatrix}$$

Usam-se as derivadas de 2ª ordem de f

O Primeiro método para a classificação dos pontos críticos chama-se $\boxed{\text{Teste da 2ª Derivada}}$.

(1) se todos os menores principais (*) de $H_f(a,b)$ são positivos então f(a,b) é um mínimo local ou relativo de f

(2) se os menores principais são alternadamente positivos e negativos, sendo o primeiro negativo, então f(a,b) é máximo local ou relativo de f

(3) se existir um menor de ordem par negativo ou dois menores de ordem impar com sinais diferentes, então (a,b) é ponto de sela, não é

extremante.

Método de Sylvester

No caso particular de $\mathbb{R}^2$

(1) se $f''_{x^2}(a,b) > 0$ e $\det H_f(a,b) > 0$ então $f(a,b)$ é um mínimo relativo

(2) se $f''_{x^2}(a,b) < 0$ e $\det H_f(a,b) > 0$ então $f(a,b)$ é um máximo relativo

(3) se $\det H_f(a,b) < 0$ então (a,b) é ponto de sela.

* Exemplo 3:

$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 - x + 12 \qquad D = \mathbb{R}^2$

Para encontrar e classificar os pontos críticos:

① $f'_x = 2x + 2y - 1$

$f'_y = 2x - 2y$

$$\begin{cases} 2x+2y-1=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2y+1 \\ -2y+1-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -4y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -2 \times \frac{1}{4} + 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{1}{2} + 1 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Então $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ é ponto crítico de f

$$H_f(a,b) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$f''_{x^2} = 2$

$\left.\begin{array}{l} f''_{xy} = 2 \\ f''_{yx} = 2 \end{array}\right\}$ são sempre iguais!

$f''_{y^2} = -2$

$f''_{x^2} = (2x+2y+1)'_x = 2$

$f''_{xy} = (2x+2y-1)'_y = 2$

$f''_{y^2} = (2x-2y)'_y = -2$

Menores principais:

menor de ordem 1 : $2 > 0$

menor de ordem 2 : $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\times(-2) - 2\times 2 = -4-4 = -8 < 0$

$\therefore \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ é ponto de sela.

* Exemplo 4:

$f(x,y) = -3x^2y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$

$f'_x(x,y) = -6xy + 4x$

$f'_y(x,y) = -3x^2 - 3y^2 + 4y$

$$\begin{cases} -6xy + 4x = 0 \\ -3x^2 - 3y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-6y+4) = 0 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \vee \quad y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ -3y^2 + 4y = 0 & \quad -3x^2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \vee \quad y = \frac{2}{3} \\ y(-3y+4) = 0 & \quad -3x^2 = -\frac{8}{3} + \frac{12}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \vee \quad y = \frac{2}{3} \\ y = 0 \vee y = \frac{4}{3} & \quad -3x^2 = \frac{-12}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \vee \quad y = \frac{2}{3} \\ y = 0 \vee y = \frac{4}{3} & \quad x = \pm \frac{2}{3} \end{cases}$$

Pontos críticos: $(0,0)$ $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Hessiana de f : $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4-6y & -6x \\ -6x & 4-6y \end{bmatrix}$

$f''_{x^2}(x,y) = (-6xy+4x)'_x = -6y+4$

$f''_{xy}(x,y) = (-6yx+4x)'_y = -6x$

$f''_{yx}(x,y) = -6x$

$f''_{y^2}(x,y) = (-3x^2-3y^2+4y)'_y = -6y+4$

$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ → positivo

$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$

f(0,0) é um Mínimo Local

$H_f(0,\frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ → negativo

$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0$

$f(0,4/3)$ é um máximo local

$H_f(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$

$H_f(\frac{2}{3},\frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$

Pontos de sela

Rever ALGA

O 2º método para classificar os pontos críticos é usando o valores próprios da Matriz Hessiana de f no ponto p.

<u>Teorema</u>: Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais de 2ª ordem são contínuas na vizinhança de $p \in int(D)$

Se p é ponto crítico de f:

(1) Se todos os valores próprios são negativos, então f(p) é máximo Local de f

(2) se todos os valores próprios são positivos, então $f(p)$ é mínimo local de f.

(3) se H_f tem valores próprios positivos e negativos, então p é ponto de sela.

Voltando ao exemplo 4:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular os valores próprios:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

$\lambda = 4 \vee \lambda = 4$ Valores próprios todos positivos

$\therefore$ $f(0,0)$ é mínimo local, como já tinhamos concluido anteriormente.

Extremos Globais/Absolutos e Teorema de Weierstrass

Quando queremos resolver problemas de otimização, isto é, problemas em que procuramos o valor máximo (ou mínimo) que a função pode tomar, estamos à procura dos extremos absolutos.

O Teorema de Weierstrass que conhecemos das f.r.v.r generaliza-se para as f.r.v.v.r.

Teorema de Weierstrass:

se $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua definida num Compacto D, então f atinge um máximo e um mínimo absolutos em D.

Conjunto fechado e limitado

Então como resolvemos um problema de otimização?

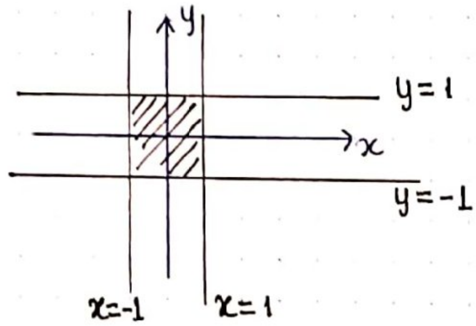
① Encontrar os pontos críticos de f no interior de D

② Encontrar os extremantes sujeitos à restrição da fronteira de D

③ Encontrar os valores da função para os pontos obtidos em ① e ②

* Exemplo 5:

$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1 \qquad D = [-1,1] \times [-1,1]$



1. Pontos críticos:

$f'_x(x,y) = 8x - 4yx$

$f'_y(x,y) = -2y - 2x^2$

$$\begin{cases} 8x - 4yx = 0 \\ -2y - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(8-4y) = 0 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \vee \ y = 2 \\ -2y = 0 \ \vee \ -2x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \quad \underset{\text{Cond. Imp.}}{y = 2}$$

$\therefore$ $(0,0)$ é o único ponto crítico de f e pertence ao interior de D.

2. Considerando $y = 1$

$$f(x,1) = 4x^2 - 1 - 2x^2 + 1$$
$$= 2x^2 = g(x)$$

Podemos estudar a existência de extremo usando os conceitos das f.R.V.R

$$g'(x) = 4x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

o ponto $(0,1)$ é candidato a extremante.

Considerando $y = -1$

$$f(x,-1) = 4x^2 - 1 + 2x^2 + 1$$
$$= 6x^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 12x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

o ponto $(0,-1)$ é candidato a extremante.

Considerando $x = 1$

$$f(1,y) = 4 - y^2 - 2y + 1$$
$$= -y^2 - 2y + 5 = g(y)$$

$$g'(y) = -2y - 2$$

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow -2y - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -2y = 2$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$$

O ponto $(1,-1)$ é candidato a extremante.

Considerando $x = -1$

$$f(-1,y) = -y^2 - 2y + 5 = g(y)$$

Então $(-1,-1)$ é candidato a extremante.

3. $f(0,0) = 1$

$f(0,1) = 0$

$f(0,-1) = 0$

$f(-1,-1) = 6$

$f(1,-1) = 6$

Então 0 é o mínimo Absoluto de f e é atingido em $(0,1)$ e $(0,-1)$.

6 é máximo absoluto e é atingido em $(-1,-1)$ e $(1,-1)$.

Extremos condicionados e os multiplicadores de Lagrange:

Muito útil para encontrar os extremos numa fronteira

Quando o nosso problema de otimização envolve o cálculo de extremos de uma função em que as variáveis independentes estão sujeitas a uma/ou várias condições, o método dos multiplicadores de Lagrange é uma boa opção.

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em D. Seja $S = \{x \in D : g(x) = K\}$, sendo K uma constante real. Se a restrição de f a S, tem um extremo local/relativo no ponto $p \in S$, tal que $\nabla g(p) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)}$$

A λ chamamos multiplicador de Lagrange.

A $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$ chamamos função de Lagrange ou Lagrangeano.

* Na prática, se queremos encontrar extremos de uma função f sujeita a uma restrição do tipo $\boxed{g(x,y) = 0}$ basta:

Conseguimos sempre transf. nesta forma. (Tudo no 1º membro)

① Encontrar os pontos críticos da função de Lagrange: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y))$

② Calcular os valores da função nos pontos obtidos no passo anterior.

*** Exemplo 6:**

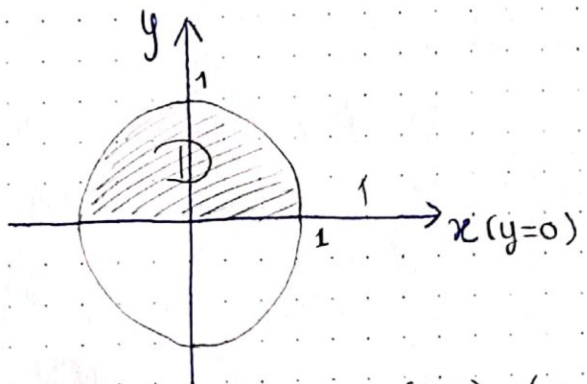
Determina os extremos globais (Absolutos) de $f(x,y) = xy$ no semi-círculo $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$

Como o conjunto D é limitado e fechado então pelo T. de Weierstrass a função atinge máximo e mínimo absolutos em D.

1º) Vamos determinar os candidatos a extremos no interior de D

2º) Vamos encontrar os candidatos a extremos na fronteira

3º) Selecionar o máximo e mínimo Absolutos



Interior:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

(0,0) é o único ponto crítico de f mas não está no interior de D, está na fronteira.

Então vamos estudar as fronteira:

Na fronteira podemos definir duas restrições

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \wedge y > 0\}$

e

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 1\}$

Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para estudar os candidatos a extremos de f em D_1:

- $g(x,y) = x^2+y^2-1$ $\qquad x^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+y^2-1 = 0}_{g(x,y)=0}$

Então,

$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x\lambda = 0 \\ x - 2y\lambda = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x\lambda \\ x - 2(2x\lambda)\lambda = 0 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x\lambda \\ x(1-4\lambda^2) = 0 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x\lambda \\ x = 0 \vee \lambda = \pm\frac{1}{2} \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ 0^2+0^2-1 \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = x \\ \lambda = 1/2 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -x \\ \lambda = -1/2 \\ 2x^2 = 1 \end{cases}$$

C.Imp

Como $y > 0$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontos críticos em D_1

Em D2 poderíamos usar a técnica vista antes (Exemplos) por ser um exemplo mais trivial (mais simples)

$g(x) = f(x,0) = 0$

$\hookrightarrow$ como g é constante então todos os pontos são máximos/mínimos de f em D2

Então, falta estudar as imagens.

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ Máximo Absoluto de f

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ Mínimo Absoluto de f

$f(x,0) = 0$