Tema: Transformada de Laplace

A transformada gera uma função de variável s (frequência) a partir de uma função de variável t (tempo).

Dada uma função que nos descreve matematicamente um sistema, a transformada de Laplace fornece uma descrição alternativa que, no maior número de casos, diminui a complexidade do processo de análise do comportamento desse sistema ou sintetiza um novo sistema baseado em características específicas.
Por exemplo, a transformada de Laplace converte uma equação diferencial em equação algébrica.

Definição:

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, chama-se transformada de Laplace de f à função F definida por

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

nos pontos $s \in \mathbb{R}$ em que este integral impróprio é convergente.

Notação: $F(s)$ ou $\mathcal{L}\{f\}(s)$ ou $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ou, simplesmente, $\mathcal{L}\{f\}$.

Podemos representar das três formas

Rever integrais impróprios de 1ª espécie

Exemplos

① $\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} 1\, e^{-st}\, dt$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-st}\,dt = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{s}\int_0^t -s\,e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{s}\left(e^{-st}-1\right)$$

0 se $s>0$
$+\infty$ se $s<0$

$$= \frac{1}{s}, \quad s>0$$

② $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{at}\,e^{-st}\,dt = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{(a-s)t}\,dt$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a-s}\int_0^t (a-s)\,e^{(a-s)t}\,dt$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a-s}\left(e^{(a-s)t}-1\right)$$

① e ②

$$= \frac{1}{a-s}\times(-1) = \frac{1}{s-a}$$

$s>a$

① se $a-s>0$ $\quad e^{(a-s)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

② se $\underbrace{a-s<0}_{s>a}$ $\quad e^{(a-s)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

• $f(t) = t$

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} t e^{-st} \, dt$$ ↙ Integral impróprio de 1ª espécie

$$= \lim_{t \to +\infty} \int_0^t t e^{-st} \, dt$$

Auxiliar:

$$\left| \begin{array}{l} f' = e^{-st} \\ g = t \\ f = -\frac{1}{s} e^{-st} \\ g' = 1 \end{array} \right.$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\left[-\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{s} e^{-st} \, dt \right]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} \right) \int_0^t -s e^{-st} \, dt \right]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} \left[e^{-st} - e^0 \right] \right]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} + \frac{1}{s^2} \right]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \underbrace{\left[\frac{-t}{e^{st}} - \frac{e^{-st}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right]}_{\text{converge se } s>0} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$$

(com $\frac{-t}{e^{st}} \to 0$ e $\frac{e^{-st}}{s^2} \to 0$)

<u>nota</u>: rever integrais impróprios C1

Outros casos:

- $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
- $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R})$
- $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R})$

Será dado no formulário do teste e exame

Linearidade da transformada

Proposição:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponha-se que existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_f$ e $s > s_g$, respectivamente. Então:

(i) $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \qquad s > \max\{s_f, s_g\};$

(ii) $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f\}(s), \qquad s > s_f.$

Exemplos

a) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right\}(s)$

$= \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\}(s) - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+1}$

$s > 1 \wedge s > -1$

$\Leftrightarrow s > 1$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s+1-(s-1)}{s^2 - 1^2}\right), \quad s > 1$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{s^2-1}\right) = \dfrac{1}{s^2-1}, \quad s > 1$

b) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\}(s)$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}(s)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)$$

$$= \frac{1}{2}\underset{(s>a)}{\frac{1}{s-a}} - \frac{1}{2}\underset{(s>-a)}{\frac{1}{s+a}}$$

$$= \frac{s+a-(s-a)}{2(s-a)(s+a)} = \frac{2a}{2(s^2-a^2)} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$s > |a|$ $\rightsquigarrow$ se $a>0 \Rightarrow s>|a| \Leftrightarrow s>a$

se $a<0 \Rightarrow s>|a| \Leftrightarrow s>-a$

c) $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s)$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}(s)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s)$$

$$= \frac{1}{2}\underset{(s>a)}{\frac{1}{s-a}} + \frac{1}{2}\underset{(s>-a)}{\frac{1}{s+a}}$$

$$= \frac{s+a+(s-a)}{2(s-a)(s+a)} = \frac{2s}{2(s^2-a^2)} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$s > |a|$

Concluindo...

Usando as técnicas de integração e as propriedades de linearidade temos:

- $\mathcal{L}\{1\}(s) = \dfrac{1}{s}$, $s>0$
- $\mathcal{L}\{t\}(s) = \dfrac{1}{s^2}$, $s>0$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s-a}$, $s>a$, $a\in\mathbb{R}$
- $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s>0$, $a\in\mathbb{R}$
- $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s>0$, $a\in\mathbb{R}$
- $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$, $n\in\mathbb{N}_0$

Casos particulares de t^n

- $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2-a^2}$, $s>|a|$
  $a\in\mathbb{R}$
- $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$, $s>|a|$
  $a\in\mathbb{R}$

relembrar: $\cosh(t) = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$

$\operatorname{senh}(t) = \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$

Condições para a existência de transformada de Laplace

Definição:

Sejam função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$. f diz-se uma função de ordem exponencial k (à direita) se existem constantes $M > 0$, $T > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M\, e^{kt}, \qquad \forall t \geq T.$$

→ f é majorada por uma exponencial

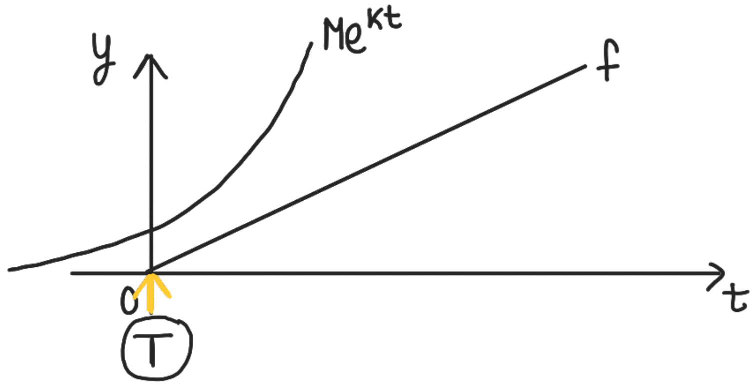
Teorema:

Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e f é de ordem exponencial k (para algum $k \in \mathbb{R}$) então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > k$.

Para que exista transformada de Laplace f tem de obedecer às condições.

Exemplo

- $f(t) = t$



$\forall t > 0 \quad |f(t)| < Me^{kt}$

- $f(t) = e^{t^2} \longrightarrow$ já não é de ordem exponencial

a partir de um certo intante T, $e^{t^2} \geqslant Me^{kt}$,
$\forall M > 0, \forall T > 0, \forall t \geqslant T$

Propriedades das transformadas

① (deslocamento na transformada)
$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s - \lambda), \text{ para } s > \lambda + s_f$$

ou $= \mathcal{L}\{f(t)\}(s-\lambda)$

Exemplo

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\operatorname{sen}(t)\}(s) =$$

$\lambda = 2$

$$= \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\}(s-2)$$

$$= \frac{1}{(s-2)^2+1} \qquad s > 0+2 \Leftrightarrow s > 2$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$
$s > 0$

② (transformada do deslocamento)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$, $H_a(t)$ a função degrau unitário[1] em $t = a$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{H_a(t) f(t - a)\}(s) = e^{-as} F(s), \text{ para } s > s_f$$

$$H_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

← Também chamada de função Heaviside

ou, simplesmente, $\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s)$

$$= e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Exemplo

① $\mathcal{L}\{(t-1)^2\}(s) =$

$a=1$

$$= e^{-1s}\,\mathcal{L}\{t^2\}(s)$$

$$= e^{-s}\,\frac{2!}{s^3}\,, \quad s>0$$

② $\mathcal{L}\{H(t)\times 1\}(s) =$

$a=1$

$$= e^{-1s}\,\mathcal{L}\{1\}(s)$$

$$= e^{-s}\times\frac{1}{s}\,, \quad s>0$$

③ (transformada da expansão/contração)

$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$.

Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo o $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \text{ para } s > a\, s_f.$$

ou $= \frac{1}{a}\,\mathcal{L}\{f\}\left(\frac{s}{a}\right)$

Exemplo

Sabemos que $\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\}(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ $\quad s>0$

Então,

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}(s) = \frac{1}{a}\,\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\}\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\times\frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad s>a\times 0$$

$$s>0$$

4 (derivada da transformada)
$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \text{ para } s > s_f.$$

onde $F^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função F.

Exemplo

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2+4} \quad s>0$$

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen}(2t)\}(s) =$$

$n=1$

$$= (-1)^1 \left(\frac{2}{s^2+4}\right)', \quad s>0$$

$$= -\left(\frac{-2 \times 2s}{(s^2+4)^2}\right), \quad s>0$$

$$= \frac{4s}{(s^2+4)^2}, \quad s>0$$

Muito útil mais à frente na resolução de EDO's (PVI's)

5 (transformada da derivada)
Suponha-se que $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ funções ordem exponencial s_0, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$;
Se $f^{(n)}$ existe e é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$, então existe $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$, para $s > s_0$, e

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$\hookrightarrow \mathcal{L}\{f'\}(s) = s^1 F(s) - \cancel{s^0}^{\,1} f(0)$

$\hookrightarrow \mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2 F(s) - s^1 f(0) - \cancel{s^0}^{\,1} f'(0)$

$\hookrightarrow \mathcal{L}\{f'''\}(s) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$

Exemplo:

$$\mathcal{L}\{\cos^2(t)\}(s) = ?$$

Sabemos que $(\cos^2 t)' = -2\cos t \, \text{sen}\, t = -\text{sen}(2t)$

Então,

$$\mathcal{L}\{(\cos^2 t)'\}(s) = -\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\}(s)$$

$$\Leftrightarrow s^1 \mathcal{L}\{\cos^2 t\}(s) - s^0 \cos^2(0) = -\frac{2}{s^2+4}, \quad s>0$$

$$\Leftrightarrow s\, \mathcal{L}\{\cos^2 t\}(s) - 1 = -\frac{2}{s^2+4}, \quad s>0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{\cos^2 t\}(s) = \frac{-2+s^2+4}{s(s^2+4)}, \quad s>0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{\cos^2 t\}(s) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}, \quad s>0$$

Exemplo

Vamos considerar o PVI

$$y'' + 2y' + 10y = 1 \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

se $y'' + 2y' + 10y = 1$ Podemos aplicar transformada

então $\mathcal{L}\{y''+2y'+10y\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s)$

$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 10\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\}$$

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 10\, Y(s) = \frac{1}{s}, \; s>0$$

usar aqui esta notação pode ser mais simples

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 10 Y(s) = \frac{1}{s}, \; s>0$$

$$\Leftrightarrow Y(s)\left[s^2+2s+10\right] = \frac{1}{s}, \; s>0$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+10)}$$

Transformada da função que estamos à procura. Então, só temos de ter maneira de a partir da transformada chegar à função que lhe corresponde.

Transformada de Laplace Inversa

Dada uma tranformada de Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s)$ ou $F(s)$ interessa determinar a função f (definida em $\mathbb{R}_0^+$) tal que:

$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ $\longrightarrow$ f, caso exista, chama-se:

transformada de Laplace inversa de F e escreve-se

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \quad \text{ou} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$$

Mas por exemplo:

$$f(t) = 1 \quad \text{e} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & t \neq 1 \text{ e } t \neq 2 \\ 2 & , \; t = 1 \\ 0 & , \; t = 2 \end{cases}$$

têm a mesma transformada de Laplace, $\frac{1}{s}$, $s>0$. Pelo que se coloca uma ambiguidade:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \; ?$$

Este problema é resolvido se escolhermos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \, , \; t \geqslant 0$$

Porquê? → Não existem funções contínuas diferentes com a mesma transformada de Laplace.

Teorema: Sejam f e g funções seccionalmente contínuas em $\mathbb{R}_0^+$ tais que:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) \quad \text{para } s>\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

se f e g são contínuas nos pontos $t \in \mathbb{R}^+$, então:

$$f(t) = g(t)$$

Será possível estabelecer uma condição para a existência de Transformada inversa??

Sim! ⇝ Vimos que se f é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}_0^+$ e de ordem exponencial

$\Longrightarrow$ Existia transformada de Laplace

$\Longrightarrow \lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0$

Podemos facilmente provar!

Assim, se $\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) \neq 0$ então podemos concluir que não podemos determinar!

Propriedades da transformada inversa

(linearidade da transformada inversa)
Suponha-se que F e G admitem transformada de Laplace inversa. Então as funções $F + G$ e αF ($\alpha \in \mathbb{R}$) também admitem tansformada inversa e

(i) $\mathcal{L}^{-1}\{F + G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$;

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Exemplo:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}\right)\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s+1}\right\} \quad (*)$$

C. Aux

$A(s+1) + Bs = 1$

$As + A + Bs = 1$

$\underbrace{(A+B)}_{=0}s + \underbrace{A}_{=1} = 1$

$A = 1 \wedge B = -1$

Relembra:

$$\mathcal{L}\{H_a(t) f(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$

Então,

$$* = H_1(t)\times 1 - H_1(t)e^{-(t-1)}, \quad t \geq 0$$

$$= H_1(t)\left(1 - e^{-t+1}\right), \; t \geq 0$$

(transformada inversa do deslocamento)
Se F admite transformada de Laplace inversa, então $F(s-\lambda)$ também admite transformada inversa para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Aplicação da regra ao contrário!

Exemplo

$$F(s) = \frac{3}{(s-2)^3}$$

Se considerarmos $f(t) = t^2$:

$$\frac{2!}{(s-2)^3} = \mathcal{L}\{t^2\}(s-2) = F(s-2)$$

Então,

$$f(t) = \frac{3}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{(s-2)^3}\right\} = \frac{3}{2}e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}e^{2t}t^2, \; t \geq 0 \; //$$

Voltando ao problema do PVI:

Tinhamos " $Y(s) = \dfrac{1}{s(s^2+2s+10)}$ "

Vamos aplicar as propriedades anteriores:

Para tal precisamos sempre de escrever numa soma de frações simples.

$s^2+2s+10=0 \Leftrightarrow s = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4\times 10}}{2}$ c. imp.

↳ ñ é possível fatorizar mais.

Sabemos ainda que: $s^2+2s+10 =$

$= s^2+2s+\underline{1^2} - \underline{1^2} + 10$

$= (s+1)^2+9$

$$\frac{1}{s(s^2+2s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+10}$$

<u>C. Aux</u>: $A(s^2+2s+10)+(Bs+C)s = 1$

$As^2+2As+10A+Bs^2+Cs=1$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=0 \\ 10A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \Leftrightarrow B=-1/10 \\ C=-2A = 2B = -\frac{2}{10} \\ A=\frac{1}{10} \end{cases}$$

Então temos

$$Y(s) = \frac{-1/10}{s} - \frac{1/10\, s + 2/10}{(s+1)^2+3^2}$$

Então a função que procuramos é:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/10}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/10\, s + 2/10}{(s+1)^2+3^2}\right\}$$

linearidade

$$= -\frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1-1}{(s+1)^2+3^2}\right\} - \frac{2}{10}\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\times 3}{(s+1)^2+3^2}\right\}$$

deslocada

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\Bigg\{\underbrace{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}}_{\substack{F(s+1)\\ \text{com } f=\cos(3t)}}\Bigg\} + \frac{1}{3}\frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\Bigg\{\underbrace{\frac{1\times 3}{(s+1)^2+3^2}}_{\substack{F(s+1)\\ \text{com } f=\operatorname{sen}(3t)}}\Bigg\}$$

$$- \frac{2}{30}\mathcal{L}^{-1}\Bigg\{\underbrace{\frac{3}{(s+1)^2+3^2}}_{\substack{F(s+1)\\ \text{com } f=\operatorname{sen}(3t)}}\Bigg\}$$

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-t}\cos(3t) + \frac{1}{30}e^{-t}\operatorname{sen}(3t) - \frac{2}{30}e^{-t}\operatorname{sen}(3t), t\geq 0$$

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-t}\cos(3t) - \frac{1}{30}e^{-t}\operatorname{sen}(3t), t\geq 0 \,/\!/$$

Exercícios

Calcula a transformada inversa:

① $F(s) = \dfrac{2s}{s^2-9}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2-9}\right\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-3^2}\right\}$$

$$= 2\cosh(3t), \quad t\geq 0$$

② $F(s) = \frac{4}{s^7}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^7}\right\} = 4 \times \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^7}\right\}$$

$$\mathcal{L}\{t^6\}(s) = \frac{6!}{s^7}$$

$s > 0$

$$= \frac{4}{6!}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6!}{s^7}\right\} = \frac{4}{6!}\,t^6 \;,\; t \geq 0$$

③ $F(s) = \frac{1}{s^2+6s+9} = \frac{1}{(s+3)^2}$

C. Aux: $s^2+6s+9=0$

$$s = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4\cdot 9}}{2}$$

$$s = -3 \lor s = -3$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{(s+3)^2}}_{F(s+3)}\right\} = e^{-3t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} =$$

com $f(t) = t$

$$= e^{-3t}\,t \;,\; t \geq 0$$

④ $F(s) = \frac{1}{s^2+s-2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1}$

C. Aux: $s^2+s-2=0$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-2)}}{2}$$

$$s = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$s = -2 \lor s = 1$$

Cálculo das constantes:

$$A(s-1) + B(s+2) = 1$$

$$(A+B)s + (2B-A) = 1$$

$$A+B=0 \;\land\; 2B-A=1$$

$$B=-A \;\land\; -3A=1$$

$$B=\frac{1}{3} \;\land\; A=-\frac{1}{3}$$

$$f(t) = -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} \quad , \ t \geqslant 0$$