

EDO'S lineares de ordem superior - Filipa Santana

Aula

Uma EDO diz-se Linear de ordem superior se tem a forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

onde

$$b: I \rightarrow \mathbb{R};$$

$$a_i: I \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, \dots, n, \text{ com } a_0(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in I.$$



coeficientes da equação

- Se $b \equiv 0$, a equação diz-se **incompleta** (ou homogénea); Caso contrário, a equação diz-se **completa** (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de **linear de coeficientes constantes**.

!

✓ Já tinhemos usado as mesmas designações nas EDO's Lineares de 1ª ordem.

Se na equação

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

tomarmos $b(x) \equiv 0$, obtemos a chamada equação homogénea associada.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

Solução de uma EDO Linear

Teorema:

A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

$$y = y_h + y_p$$

Soluções da EDO linear homogénea associada

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

num dado intervalo I (a_0, a_1, \dots, a_n contínuas em I ; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, linearmente independentes e qualquer sua solução, y , pode escrever-se como sua combinação linear, i.e.,

$$y = C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n, \text{ para } C_j \in \mathbb{R}.$$

$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ é uma base do subespaço vetorial das soluções da EDO linear homogénea associada.

Dizemos que $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ é um conjunto fundamental de soluções (SFS) da EDO linear homogénea associada.

Se nos for dado um conjunto de soluções podemos verificar se é um SFS através da matriz Wronskiana

Proposição:

Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ soluções de uma EDOL homogénea de ordem n , nas condições do slide anterior. $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ é um conjunto fundamental de soluções se e só se a matriz

$$\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

é invertível, para todo o $x \in I$.

Se $\det[\mathcal{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)] \neq 0 \Rightarrow \mathcal{W}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é invertível ALGA

Exemplo 1

$y'' + y = 0$ $\varphi_1(x) = \cos(x)$ e $\varphi_2(x) = \sin(x)$
são soluções da EDO.

(φ_1, φ_2) será um sistema fundamental de soluções?

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

$$\det(W(\varphi_1, \varphi_2)) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

∴ $(\cos x, \sin x)$ é um S.F.S.

$$\Rightarrow y_R = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Algumas notas:

- 1 A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para $n > 1$, não existe método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
- 2 Se a EDO linear homogénea tiver **coeficientes constantes**, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do **conhecimento das raízes do chamado polinómio caraterístico** (ver slides seguintes).

- ① Se $n=1$ temos que a EDO linear homogénea associada tem a forma:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$$

que é sempre uma EDO de variáveis separáveis.

Então a solução geral é dada por:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0(x)y' = -a_1(x)y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}y' = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

Então, $\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx$

$$\Leftrightarrow \ln|y| + C = \int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx, C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx + K, K = -C$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx + K}$$

$$\Leftrightarrow y = C_1 e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}, C_1 = e^K$$

↳ Solução da homogênea associada

②

Se $n > 1$ sendo os coeficientes constantes a EDO fica com a forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

com $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$

Chamamos **polinómio característico** ao polinómio da forma:

$$P(R) = a_0 R^n + a_1 R^{n-1} + \cdots + a_{n-1} R + a_n R^0$$

as potências de R têm expoente igual à ordem das derivadas

As **raízes** deste polinómio vão permitir-nos calcular/determinar as soluções da EDO linear homogénea

! **Raízes = zeros do polinómio**
 $(P(R) = 0)$

Consoante o tipo e multiplicidade das raízes de $P(R)$ teremos diferentes formatos do SFS.



1º Caso: Raízes reais simples (multiplicidade 1)

Então as funções $e^{R_1 x}, e^{R_2 x}, \dots, e^{R_n x}$ formam um SFS.

Exemplo:

$$y''' + 4y'' - 5y' = 0$$

↓
Polinómio característico

$$P(R) = R^3 + 4R^2 - 5R$$

↓
Raízes de P

$$P(R) = 0$$

$$\Leftrightarrow R^3 + 4R^2 - 5R = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 + 4R - 5 = 0 \vee R = 0$$

$$\Leftrightarrow R = 1 \vee R = -5 \vee R = 0$$

{}

Raízes distintas e simples

Então e^{1x} , e^{-5x} e e^{0x} formam um SFS

$$\text{e } y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} + C_3 e^{0x}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

↳ solução geral da EDO linear homogênea.

2º caso: P possui n raízes reais e pelo menos uma delas tem multiplicidade > 1

seja R a raiz de P com multiplicidade k

e^{Rx} , $x e^{Rx}$, ..., $x^{k-1} e^{Rx}$ são soluções da EDO que correspondem à raiz R

Depois juntamos as restantes como no 1º Caso

Exemplo:

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$$

↓
Polinómio Característico

$$P(R) = R^3 - 5R^2 + 8R - 4$$

↓ Raízes de $P(R)$

$$P(R) = 0$$

$$(\Rightarrow) (R-1)(R^2-4R+4) = 0$$

$$(\Rightarrow) R-1=0 \vee R^2-4R+4=0$$

$$\Leftrightarrow R=1 \vee R = \frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow R=1 \vee R=2 \vee R=2$$

raiz real dupla

$$\text{SFS: } \{ e^{1x}, e^{2x}, xe^{2x} \}$$

Regra de Ruffini:

	1	-5	8	-4	
1		1	-4	4	<u>$0 = R$</u>
	1	-4	4		

Devemos tentar com divisores do termo independente (-4)

$$\therefore y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

↳ solução geral da EDO linear homogénea.

3º Caso: P tem pelo menos uma raiz complexa simples

Seja $R = \alpha \pm \beta i$ raiz complexa de P
então $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ são duas soluções linearmente independentes da EDO linear homogénea.

As restantes raízes são abordadas como nos

1º caso ou/e 2º caso

Exemplo:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

↓
Polinómio Característico

$$P(R) = R^2 + 2R + 5$$

↓
Raízes do Polinómio Característico

$$P(R) = 0 \Leftrightarrow R = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{-2 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow R = -1 \pm 2i$$

Raiz complexa
simples

$$SFS: \left\{ e^{-1x} \cos(2x), e^{-1x} \sin(2x) \right\} = \left\{ e^{-x} \cos(2x), e^{-x} \sin(2x) \right\}$$

$$\therefore y_h = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

↳ solução geral da EDO linear homogénea.

4º caso: P tem pelo menos uma raiz complexa de multiplicidade $k > 1$

Seja $R = \alpha \pm \beta i$ raiz de P de multiplicidade k, então:

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

As restantes raízes são abordadas como nos

1º caso, 2º caso e/ou 3º caso

Exemplo:

$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$$

$$P(R) = R^4 + 4R^2 + 4$$

Polinómio
característico

$$P(R) = 0 \Leftrightarrow R^4 + 4R^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (R^2)^2 + 4R^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow R^2 = -2 \quad \vee \quad R^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow R = \pm \sqrt{2}i \quad \vee \quad R = \pm \sqrt{2}i$$

Raiz complexo
dupla

SFS: $\left\{ e^{0x} \cos(\sqrt{2}x), x e^{0x} \cos(\sqrt{2}x), e^{0x} \sin(\sqrt{2}x), x e^{0x} \sin(\sqrt{2}x) \right\}$

$$\therefore y_h = C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 x \cos(\sqrt{2}x) + C_3 \sin(\sqrt{2}x) + C_4 x \sin(\sqrt{2}x)$$

$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

Exercícios extra:

19. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

- (a) $y' + y = \sin x;$
- (b) $y'' - y + 2 \cos x = 0;$
- (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x;$
- (d) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x};$
- (e) $y'' + y' = e^{-x};$
- (f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x);$
- (g) $y''' + y' = \sin x;$
- (h) $y'' + 9y = \sin x - e^{-x}.$

Vamos, para já, encontrar a solução das EDO's lineares homogéneas associadas a cada EDO linear.

Caso $n=1$ a) $y' + y = \sin x$

EDO Linear homogénea associada

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -x + C, C \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow y = e^{-x+C}$$

$$\Leftrightarrow y = K e^{-x}, K = e^C, C \in \mathbb{R} //$$

Ou usando
diretamente a
fórmula:

$$y = C_1 e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

$$\downarrow \\ y = C_1 e^{\int -\frac{1}{1} dx}$$

$$y = C_1 e^{-x}, C_1 \in \mathbb{R} //$$

$$b) \quad y'' - y = -2 \cos x$$

EDO Linear homogénea associada: $y'' - y = 0$

$$P(R) = R^2 - 1$$

$$P(R) = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow R = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow R = 1 \vee R = -1$$

Raízes reais simples

$$SFS: \{e^{ix}, e^{-ix}\}$$

$$\therefore y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$c) \quad y'' + y' - 2y = 3 - 6x$$

EDO Linear homogénea associada: $y'' + y' - 2y = 0$

$$P(R) = R^2 + R - 2$$

$$P(R) = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 + R - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$SFS: \{e^{-2x}, e^{1x}\}$$

$$\Leftrightarrow R = -2 \vee R = 1 \quad \begin{matrix} \nearrow \text{Raízes} \\ \searrow \text{Raízes simples} \end{matrix}$$

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$d) \quad y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$$

EDO Linear homogénea associada: $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$P(R) = R^2 - 4R + 4$$

$$\begin{aligned} P(R) = 0 &\Leftrightarrow R^2 - 4R + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (R - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow R - 2 = 0 \quad (\text{raiz dupla}) \\ &\Leftrightarrow R = 2 \end{aligned}$$

$$\text{SFS: } \{e^{2x}, xe^{2x}\}$$

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$e) \quad y'' + y' = e^{-x}$$

EDO Linear homogénea associada: $y'' + y' = 0$

$$P(R) = R^2 + R$$

$$\begin{aligned} P(R) = 0 &\Leftrightarrow R^2 + R = 0 \\ &\Leftrightarrow R(R+1) = 0 \quad \rightarrow \begin{array}{l} \text{Raizes reais} \\ \text{simples} \end{array} \\ &\Leftrightarrow R = 0 \vee R = -1 \end{aligned}$$

$$\text{SFS: } \{e^{0x}, e^{-1x}\} = \{1, e^{-x}\}$$

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} //$$

$$f) \quad y'' + 4y = \tan(2x)$$

EDO Linear homogénea associada: $y'' + 4y = 0$

$$P(R) = R^2 + 4$$

$$P(R) = 0 \Leftrightarrow R^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2 = -4 \quad \begin{matrix} \text{raiz complexa} \\ \Leftrightarrow R = \pm 2i \end{matrix}$$

$$\text{SFS: } \left\{ e^{0x} \cos(2x), e^{0x} \sin(2x) \right\} = \left\{ \cos(2x), \sin(2x) \right\}$$

$$y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$g) \quad y''' + y' = \sin(x)$$

EDO Linear homogénea associada: $y''' + y' = 0$

$$P(R) = R^3 + R$$

$$P(R) = 0 \Leftrightarrow R^3 + R = 0$$

$$\Leftrightarrow R(R^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow R = 0 \vee R^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow R = 0 \vee R = \pm 1i$$

$$\text{SFS: } \left\{ e^{0x}, e^{0x} \cos(1x), e^{0x} \sin(1x) \right\} = \left\{ 1, \cos(x), \sin(x) \right\}$$

$$y_h = C_1 + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x), C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} //$$

Como vamos encontrar a solução particular da EDO dada?

① Método dos Coeficientes indeterminados
(coeficientes constantes)

② Método da variação das constantes
(caso geral)

① Método dos coeficientes indeterminados

Seja $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b(x)$

Tendo em atenção a forma de $b(x)$

$b(x)$
Tem de ter
uma destas
formas

1) Se $b(x)$ for de uma das seguintes formas:

$$\rightarrow P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$
$$\rightarrow P_m(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

↓
polinómio
grau m

2) Então existe uma solução da EDO do tipo:

$$y_p = x^k e^{\alpha x} (P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x))$$

↓
grau m ←

• K é a multiplicidade de $R = \alpha \pm \beta i$ como raiz de $P(R)$

↳ se R não é raiz de $P(R)$ então $K=0$
 se R é raiz simples então $K=1$
 ...

Polinómio
Característico

- $P(x)$ e $\Theta(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes têm de ser determinados.

Vejamos como ...

Exemplo:

$$y' - 3y = e^{3x}$$

$$e^{3x} = \frac{1}{P_m(x)} e^{3x} \cos(0x)$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $P_m(x)$ α β
 grau 0

Então $y_p = x^k e^{3x} (P(x) \cos(0x) + \Theta(x) \sin(0x))$

$K: R = 3 \pm 0i = 3 \quad P(R) = R - 3$

multiplicidade
de R como
raiz de $P(R)$

↓
 Raiz simples
de $P(R)$

Então $k=1 //$

$$\therefore y_p = x e^{3x} P(x) \longrightarrow P(x) = A \quad (\text{grau 0})$$

$A \in \mathbb{R}$

↓

mesmo grau
que $P_m(x)$

Para determinar
o coeficiente A

Como y_p é solução da EDO então verifica a condição da mesma (isto é, podemos substituir y na EDO por y_p)

$$y'_p = Ae^{3x} + 3Axe^{3x} \quad \text{e} \quad y_p = Axe^{3x}$$

Substituindo,

$$y'_p - 3y_p = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow Ae^{3x} + 3Axe^{3x} - 3(Axe^{3x}) = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow A = 1 //$$

$$\therefore y_p = 1xe^{3x}$$

Outra forma de calcular uma solução particular, é pelo método da variação das constantes.

Método da variação das constantes

↳ Método que permite encontrar uma solução particular de uma qualquer EDO Linear completa.

- pressupõe o conhecimento da solução geral da equação homogénea associada:

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x), \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R},$$

onde $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é um sistema fundamental de soluções desta equação.

- procura obter uma solução particular da equação completa da forma

$$y_p = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x),$$

admitindo que as constantes são funções (de x) diferenciáveis,

As funções $C_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ determinam-se calculando as suas derivadas que constituem a solução do seguinte sistema de equações:

$$C'_i(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1\varphi_1 + \cdots + C'_n\varphi_n = 0 \\ C'_1\varphi'_1 + \cdots + C'_n\varphi'_n = 0 \\ \vdots \\ C'_1\varphi_1^{(n-2)} + \cdots + C'_n\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C'_1\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C'_n\varphi_n^{(n-1)} = \frac{b}{a_0} \end{array} \right. \quad (3)$$

Na forma
matricial:

$$\left[\begin{array}{c|c} W(\varphi_1, \dots, \varphi_n) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \frac{b}{a_0} \end{matrix} \\ \hline \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Wronskiano}}$$

Podemos resolver por substituição ou na forma matricial, usando a regra de Cramer aprendida em ALGA.

Regra de Cramer

Quando temos o sistema $AX = B$, com $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, cada x_i é dado por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

resulta de substituir a coluna i de A pela coluna dos termos independentes.

Exemplo 1

$$y'' + y = \operatorname{cosec} x \quad x \in]0, \pi[$$

Solução da homogénea associada:

$$y'' + y = 0 \quad P(R) = R^2 + 1$$

$$P(R) = 0 \iff R^2 = -1 \iff R = \pm i$$

$$\begin{aligned} \text{SFS: } & \left\{ e^{ix} \cos(x), e^{ix} \sin(x) \right\} \\ &= \left\{ \cos(x), \sin(x) \right\} \end{aligned}$$

Então,

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Solução particular: $y_p = C_1(x) \cos(x) + C_2(x) \sin(x)$

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\operatorname{cosec}(x)}{1} \end{bmatrix}$$

Podemos agora aplicar a regra de Cramer

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{cosec} x & \cos x \\ \hline \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & \operatorname{cosec} x \\ \hline \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x}{1} = -1$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & \operatorname{cosec} x \\ \hline \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & \operatorname{cosec} x \\ \hline \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{\cos(x) \operatorname{cosec}(x)}{1} = \operatorname{cotan}(x)$$

Calculando primitivas $G_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, das funções que se obtêm da resolução do sistema anterior, podemos escrever a seguinte solução particular da equação completa:

$$\begin{aligned} y_p &= G_1(x)\varphi_1(x) + \dots + G_n(x)\varphi_n(x). \\ &= C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x) \end{aligned}$$

Então,

$$C_1(x) = \int -1 \, dx = -x, //$$

$$\text{e } C_2(x) = \int \operatorname{cotan}(x) \, dx = \ln |\operatorname{sen}(x)| //$$

Assim, a solução geral é

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x) + (-x) \cos(x) + \ln |\operatorname{sen}(x)| \operatorname{sen}(x) \\ &= (C_1 - x) \cos(x) + (C_2 + \ln |\operatorname{sen}(x)|) \operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Embora por vezes possa ser de resolução mais longa, também é possível resolver o sistema por substituição.

$$\begin{cases} C'_1(x) \cos(x) + C'_2(x) \sin(x) = 0 \\ -C'_1(x) \sin(x) + C'_2(x) \cos(x) = \operatorname{cosec}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C'_1(x) = -C'_2(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ C'_2(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \sin(x) + C'_2(x) \cos(x) = \operatorname{cosec}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hline \\ C'_2(x) \left[\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} + \cos(x) \right] = \operatorname{cosec}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hline \\ C'_2(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = \operatorname{cosec}(x) \end{cases} \quad \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\begin{cases} C'_1(x) = -\cotan(x) \tan(x) = -1 \\ C'_2(x) = \operatorname{cosec}(x) \cos(x) = \cotan(x) \end{cases}$$

Então,

$$C_1(x) = \int -1 dx = -x$$

$$C_2(x) = \int \cotan(x) dx = \ln |\sin(x)| //$$

Curiosidade:

O resultado seguinte é muito útil no cálculo de uma solução particular de uma EDO linear completa, quando $b(x)$ resulta da soma de funções.

Princípio da Sobreposição

Suponha-se que y_k ($k = 1, 2$) é uma solução particular da equação

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b_k(x).$$

Então $y_p = y_1 + y_2$ é uma solução particular da equação

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b_1(x) + b_2(x).$$

Exemplo

$$y'' + 9y = \sin(x) - e^{-x}$$

Se considerarmos:

$$\textcircled{1} \quad y'' + 9y = \sin(x)$$

e

$$\textcircled{2} \quad y'' + 9y = -e^{-x}$$

A solução particular da EDO linear completa dada inicialmente pode ser determinada à custa das soluções particulares de \textcircled{1} e \textcircled{2}.

$$y_p = y_{p\textcircled{1}} + y_{p\textcircled{2}}$$

Agora podemos voltar ao ex 19 e completar a resolução com as respectivas soluções particulares.

Bom trabalho !

Filipa Santana.