

Temas: Convergência uniforme de séries de potências (em subintervalos fechados e limitados do domínio de convergência). Derivação e integração termo a termo de séries de potências. Unicidade de representação de uma função em série de potências (de Taylor)

Uma vez que a série de potências é um caso particular de uma série de funções, em que condições esta será **uniformemente convergente**?

Teorema:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$. Então a série converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência $[c - R, c + R]$.

Prova para $c = 0$

$$x \in [a, b] \subseteq [-R, R]$$

$$\hookrightarrow |x| \leq \max \{ |a|, |b| \} = M$$

$$\text{Assim } |f_n(x)| = |a_n x^n| \leq |a_n| M^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| M^n \text{ é convergente pois } M \in [0, R[$$

Pelo critério de Weierstrass a série converge uniformemente em $[a, b]$.

Desafio: prova para $c \neq 0$

Teorema de Abel:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$. Se a série converge no ponto $x = c + R$ (resp., no ponto $x = c - R$), então ela converge uniformemente em $[c, c + R]$ (resp., em $[c - R, c]$).

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}} \quad \text{Vamos verificar que } D = [-7, 3].$$

$$a_n = \frac{1}{5^n \sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Usando a fórmula do raio

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5^n \sqrt{n+1}}}{\frac{1}{5^{n+1} \sqrt{n+2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \sqrt{n+2}}{5^n \sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 5$$

Como o centro é -2 , em $\left] -2-\overset{-7}{5}, -2+\overset{3}{5} \right[$ a série conv. absolutamente. Resta ver o que acontece nos limites do intervalo.

$$x = -7 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{5^n}}{\cancel{5^n} \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow \text{alternada}$$

Série dos módulos: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 \in \mathbb{R}^+ \text{ harmónica } \propto \frac{1}{n} < 1 \text{ divergente}$$

\Rightarrow Séries têm a mesma natureza.

Crit. Leibniz $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

- $n \geq 0 \Leftrightarrow n+1 \geq 1$
- $\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \geq \sqrt{1} \quad \therefore u_n > 0$
- $\Leftrightarrow \sqrt{n+1} \geq 1$
- $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$

• $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ é decrescente?

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} \times \sqrt{n+2}} < 0 \end{aligned}$$

• $\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \quad \therefore \text{Há conv. simples em } x = -7$

$x = 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Já vimos que é divergente.

$\therefore D = [-7, 3[$ ↗ Conv. unif. em $[-7, -2]$
e em $[a, b] \subset]-7, 3[$

Consequentemente, uma série de potências é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado do seu intervalo de convergência. Deste modo (no seu intervalo de convergência):

- A função soma é contínua.
- Podemos integrar termo-a-termo
- Podemos derivar termo-a-termo

Assim, temos:

Teorema: Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ uma série de potências, $I =]c - R, c + R[$

o seu intervalo de convergência, e $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$. Então:

- (i) A função f é contínua em todo o domínio (de convergência da série).
- (ii) A função f é diferenciável em I e $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - c)^{n-1}$, $\forall x \in I$.
- (iii) A função F , definida por $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - c)^{n+1}$, é a primitiva de f em I tal que $F(c) = 0$.
- (iv) A função f é integrável em qualquer subintervalo $[a, b]$ do domínio de convergência e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n (x - c)^n dx.$$

Unicidade de representação de uma função em série de potências:

Teorema:

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n, \quad x \in I =]c - R, c + R[,$$

então f possui derivadas finitas de qualquer ordem em I e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

O teorema anterior mostra-nos que sempre que uma série de potências converge para $f(x)$ numa vizinhança de $x=c$ então essa série coincide com a série de Taylor de f centrada em c .

Usando os teoremas e propriedades vistas anteriormente vamos resolver os seguintes exercícios:

Exercício

Representa em série de potências as seguintes funções:

a) $\frac{1}{(1-x)^2}$ $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} xe^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} n xe^{n-1}, \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

Como uma série de potências converge uniformemente em $[c-R, c+R]$ podemos aplicar derivação e integração termo a termo.

b) $\ln(x)$

$$\frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \quad |1-x| < 1$$

$$\int_1^x \frac{1}{x} dx = \int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_1^x (x-1)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$|1-x| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-x < 1$$

$$\Leftrightarrow -2 < -x < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 2$$

c) $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \left[\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \right]' = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x}$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1-x} dx &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

d) $\arctan(x)$ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x \frac{1}{1-(-x^2)} dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx \\ &\quad \left. \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

$$|-x^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

e) $\ln(x+1)$ ($c=0$) $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$

$$\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \int_0^x \frac{1}{1+(-x)} dx =$$

$$\downarrow \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^n dx$$

$$|x| < 1 \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$$

Exercício

6. (a) Verifique que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$, $-2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.

(Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

a) $a_n = \frac{n}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times 2^{n+1}}{(n+1) \times 2^n}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 2 \text{ c.q.m}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{x}{2}\right)$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]' = x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right]'$$

$$= xe \times \left(\frac{1}{1 - \frac{xe}{2}} \right)' = xe \left(\frac{2}{2-xe} \right)' = xe \left(\frac{2}{(2-xe)^2} \right) = \frac{2xe}{(2-xe)^2}$$

$$\left| \frac{xe}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{xe}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < xe < 2$$

Exercício

9. Sabendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

(a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de \mathbb{R} em que esta representação é válida;

(b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\int_0^1 xe^{x^3} dx$.

$$a) xe e^{x^3} = xe \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = xe \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{xe^{3n+1}}{n!}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

b) Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}$ conv. absolutamente em \mathbb{R}

\Rightarrow conv. uniformemente em $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$

\Rightarrow É válida integração termo a termo

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{xe^{3n+1}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{3n+1} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{x^{3n+2}}{3n+2} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \times \frac{1}{3n+2}$$

Exercício

5. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}; \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}; \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}.$$

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n)!} = \cos(2\pi) = 1$$

$$b) \text{Relembrar: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{2n}}{(2n)!} = \cosh(1)$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n+1} = 3 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n+1}}_{\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{3}} x^n dx} = -3 \ln \frac{2}{3}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1-x} dx = - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{-1}{1-x} dx$$

$$= - \left[\ln|1-x| \right]_0^{\frac{1}{3}} = - \ln \frac{2}{3}$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = e^x = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

* Podemos tirar $n=0$ pois dá zero.

Exercício

1. [50] Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n} x^n$.

- (a) Determine o domínio de convergência da série.
- (b) Justifique que

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{para todo } x \in]-1, 1[.$$

[Sugestão: use convenientemente um dos desenvolvimentos indicados no formulário]

- (c) Usando a representação indicada da alínea (b), determine a soma $f(x)$ da série dada (no respetivo intervalo de convergência).

→ Desafio: a discutir numa próxima aula

Bom trabalho!

Filipa Santana