Temas: Série de Taylor/MacLaurin. Exemplos. Funções analíticas. Representação de uma função através da série de Taylor.
Exemplos de desenvolvimento de funções em série de Taylor/MacLaurin e resolução de exercícios

Série de Taylor / MacLaurin (c=0)

Em que condições podemos escrever:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad ?$$

1ª condição:

Teorema: Sejam I um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em I e $c \in I$. Então:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n \to +\infty} R_c^n(f(x)) = 0$$

Condição suficiente para que o de cima aconteça.

2ª condição:

Teorema: Sejam I um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em I e $c \in I$. Se,

$$\exists\, M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M \quad , \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Se uma destas condições se verificar e a função puder ser representada por uma série de potências, a função diz-se **analítica**.

Exemplo 1

Usa os teoremas anteriores para mostrar que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Vimos na **aula 3** que:

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{T_0^n(e^x)} + \underbrace{\frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_0^n(e^x)} \quad , \theta \text{ entre } x \text{ e } 0$$

Vimos também na aula 1 que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ é absolutamente convergente } \forall x \in \mathbb{R}$$

então, pela cond. necessária de convergência:

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Como $R_0^n(e^x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}$

fácil ver por mud. variável

$$\lim_{n\to+\infty} R_c^n(e^x) = \lim_{n\to+\infty} e^\theta \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{0} = e^\theta \times 0 = 0$$

Pela <u>1ª cond</u>, podemos então afirmar que:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Da aula 1 vimos também que:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1}$$

Usando isto podiamos também dizer:

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \quad \text{se} \quad |2x|<1$$

$$-1<2x<1$$

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\text{se} \quad |-x|<1 \iff -1<-x<1$$

$$\iff -1<x<1$$

ou

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ou

$$e^{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

... entre outros ...

Será que podemos representar sen x por uma série de Potências?

Vamos encontrar $T_0^n(\text{sen}(x))$:

$$f^{(4)}(x) = f(x) = \text{sen}(x) \overset{x=0}{\leadsto} f(0) = f^{(4)}(0) = 0 \quad \times$$
$$f^{(5)}(x) = f'(x) = \cos(x) \leadsto f'(0) = f^{(5)}(0) = 1$$
$$f^{(6)}(x) = f''(x) = -\text{sen}(x) \leadsto f''(0) = f^{(6)}(0) = 0 \quad \times$$
$$f^{(7)}(x) = f'''(x) = -\cos(x) \leadsto f'''(0) = f^{(7)}(0) = -1$$

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

impares

começamos com positivo

$$T_0^n(\text{sen}(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \, x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Como $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ então, pela 2ª condição,

$\exists\, M > 0 : |f^{(n)}(x)| < M \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Podemos afirmar que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Será que podemos representar $\cos x$ por uma série de potências?

Vamos encontrar $T_0^n(\cos(x))$:

$$f^{(4)}(x)=f(x)=\cos(x) \xrightarrow{x=0} f(0)=f^{(4)}(0)=1$$

$$f^{(5)}(x)=f'(x)=-\operatorname{sen}(x) \longrightarrow f'(0)=f^{(5)}(0)=0 \quad \times$$

$$f^{(6)}(x)=f''(x)=-\cos(x) \longrightarrow f''(0)=f^{(6)}(0)=-1$$

$$f^{(7)}(x)=f'''(x)=\operatorname{sen}(x) \longrightarrow f'''(0)=f^{(7)}(0)=0 \quad \times$$

$$f^{(2n)}(0)=(-1)^n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$T_0^n(\cos(x))=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Como $|f^{(n)}(x)| \leq 1$

então $\exists\, M>0 : |f^{(n)}(x)| < M \quad , \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ Podemos afirmar que:

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Resumindo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad , |x|<1$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercícios

Representa em série de Potências:

a) $f(x) = e^{-x^2}$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{n!} x^n\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{2}}{(2n)!} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cálculo aux:

$$(1+(-1)^n) \begin{cases} \xrightarrow{n \text{ par}} 2 \\ \xrightarrow{n \text{ impar}} 0 \end{cases}$$

c) $f(x) = \operatorname{senh}(3x)$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n - (-1)^n 3^n x^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n\left(1-(-1)^n\right)}{n!}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1} \times \cancel{2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

$$\left(1-(-1)^n\right) \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ \boxed{2, \text{ se } n \text{ impar}} & 2n+1 \end{cases}$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)}$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^{n+1}}$$

$$\left|-\frac{x^2}{4}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x^2}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |x^2| < 4$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-4 < x^2}_{\text{C. Univ.}} < 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 4$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 2$$

e) $f(x) = 2\cos^2 x$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$ (Fórmula introduzida em Cálc. 1)

$$f(x) = 1+\cos(2x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f) $$f(x) = \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n, \quad \text{se} \quad |3x|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n$$

$$-1 < 3x < 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3}$$

g) $$f(x) = \frac{2}{2+x} = 2 \times \frac{1}{2+x}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n, \quad \text{se} \quad \left|-\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{x}{2} < 1$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 2$$

$$\Leftrightarrow |x| < 2$$

h) $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1-1+x} = \frac{1}{1-(1-x)}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \quad , \quad |1-x| < 1$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$

$\Leftrightarrow -1 < 1-x < 1$

$\Leftrightarrow -2 < -x < 0$

$\Leftrightarrow 2 > x > 0$

$\Leftrightarrow 0 < x < 2$

Podem consultar Texto de apoio pág. 17 – 21

Exercícios extra

a) $f(x) = 2\,\text{sen}^2(x)$

b) $f(x) = \cos(x - \pi)$

c) $f(x) = \frac{x}{2 - 3x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{28}{(1-x)(1+x)}$

Bom Trabalho!

Filipa.