

Temas: Regras da Disciplina

Breve revisão de séries numéricas

Introdução das séries de potências.

- raio, domínio e intervalo de convergência.

Revisões:

Série Geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 R^{n-1} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_0 R^n$$

R = razão

a_1 e a_0 → 1ºs termos da sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Convergente se $|R| < 1$

- Divergente caso contrário

- Soma da série - $S = \lim S_n = \frac{a}{1-R}$

1º termo

Série de Dirichlet (Harmónica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- Se $\alpha > 1$ converge
- Caso contrário, diverge

Convergência simples e absoluta

A série é **absolutamente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge e é **simplesmente convergente** se a série dos módulos diverge mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Critérios para o estudo da convergência

Critério de Comparação

majorar por convergente
minorar por divergente

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

Critério de comparação por passagem ao limite

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Série com que
comparamos e
da qual sabemos
a natureza

\textcircled{1} Se $L \in \mathbb{R}^+$, as séries têm a mesma natureza

\textcircled{2} Se $L = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

\textcircled{3} Se $L = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Critério de Cauchy (raiz)

Útil com potências
de índice n

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- ① Se $L < 1$, a série converge absolutamente
- ② Se $L > 1$, a série diverge
- ③ Se $L = 1$, nada se conclui por este processo

Critério de D' Alambert (quociente)

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Útil com
fatoriais

- ① Se $L < 1$, a série converge absolutamente
- ② Se $L > 1$, a série diverge
- ③ Se $L = 1$, nada se conclui por este processo

Critério de Leibniz

$$\textcircled{1} \quad u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

\textcircled{2} u_n é decrescente

$$\textcircled{3} \quad \lim u_n = 0$$

Avalia convergência simples de séries alternadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

Se \textcircled{1}, \textcircled{2} e \textcircled{3} se verificarem então a série alternada converge simplesmente.

Séries de Potências

→ generalização de um polinómio

Chamamos série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$ a toda a série na forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

↓

$(a_n) \in \mathbb{N}_0$ é uma sucessão de números reais e cada a_n é chamado **coeficiente da série**.

Exemplo 1:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

- ① Série de potências **centrada em 0**
- ② Coeficientes são todos 1 ($a_n = 1$)
- ③ Podemos também pensar na série como uma **série geométrica** de razão igual a x ($R = x$)

↳ soma da série: $S = \frac{1}{1-x}$

se $|x| < 1$

↳ para garantir a convergência

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$



Muitas funções podem ser representadas por séries.

Muito útil no cálculo de aproximações!

Outra coisa muito importante é saber quando uma série de potências converge e para que valores de x isso acontece.

Para tal estudo, vamos usar:

- Critério de D'Alembert (Quociente)
- Critério de Cauchy (Raiz)

Exemplo 2:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \xrightarrow{\text{Coeficientes da Série:}} \quad a_n = \frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

série de potências centrada
em $c = 0$

1º Passo: Análise da convergência no centro ($x=c$)

$$x = c = 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \rightarrow \text{absolutamente convergente}$$

2º Passo: Análise da convergência nos restantes valores de x ($x \neq c$)

$x \neq 0$ Vamos aplicar o crit. D'Alembert:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1} \times n!|}{|x^n \times (n+1)!|}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| xe^{n+1-1} \times \frac{n!}{(n+1)n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |xe| \times \frac{1}{n+1} \\
 &= |xe| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow A série é absolutamente convergente em \mathbb{R}



Domínio de convergência: \mathbb{R}



Intervalo de valores de x para os quais a série converge.

Mas será que este intervalo pode assumir qualquer formato?

Para qualquer série de potenciais apenas um destes formatos se verifica.

- ① A série converge absolutamente em \mathbb{R}
- ② A série converge absolutamente apenas para $x=c$
- ③ Existe um $R > 0$, chamado **raio de convergência**, tal que a série converge absolutamente se $|x-c| < R$



$$D =]c-R; c+R[$$

No caso de encontrarmos o ③ cenário, com $R \neq 0$ e $R \neq \infty$, num 3º passo iremos analisar o que acontece nos limites do intervalo.

Caso haja convergência absoluta ou simples
acrescentamos ao domínio de convergência

Chamamos
Intervalo de convergência

Intervalo de valores de x onde a série converge absolutamente na forma $[C-R; C+R]$

Resulta diretamente da aplicação dos crit. da raiz ou quociente.

Exercícios

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x e^{n+1}}{n+1}$$

FT1-1c

$$\textcircled{4} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x e^{3n}}{\ln n}$$

FT1-1i

$$\textcircled{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$$

FT1-1a

$$\textcircled{5} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^6} (3x-2)^n$$

FT1-1j

$$\textcircled{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$$

FT1-1e

$$\textcircled{6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} (x+2)^n$$

FT1-1g

Nota: Já podem resolver FT1-Ex1

Ver texto de Apoio: pág. 5-8

⑤ e ⑥

Desafio

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$$

FT1.1c

$$x = 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \rightarrow \text{absolutamente convergente}$$

$x \neq 0$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{n+2} \right|}{\left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \right|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+2}|(n+1)}{|x^{n+1}|(n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |x^{n+2-(n+1)}| \times \frac{n+1}{\cancel{n+2}}^1$$

$$= |x|$$

Para haver convergência, $|x| < 1$
 $\Leftrightarrow -1 < x < 1$

$x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ → série numérica alternada

série dos módulos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

Comp. passagem ao limite:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

\therefore As séries têm a mesma natureza,
logo não existe conv. absoluta

Critério de Leibniz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

- $u_n = \frac{1}{n+1}$

$n \geq 1 \Leftrightarrow n+1 \geq 1+1$
 $\Leftrightarrow n+1 \geq 2$
 $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$$\therefore u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - (n+2)}{(n+1)(n+2)}$
 $= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$ decrescente

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

\therefore A série converge simplesmente.

$\boxed{x = -1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$$

Vimos atrás que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ é divergente
então:

$$(-1) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ também diverge.}$$

\therefore Dom.conv: $]-1, 1]$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

FT1_1a

$x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)0^n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \rightarrow \text{conv. absolutam.}$$

$x \neq 0$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(n+1)(n+2)x^{n+1}|}{|n(n+1)x^n|}$$

$$= |x| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = |x|$$

Para que haja convergência:

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n(n+1)] = +\infty \neq 0 \quad \text{Falta a cond. necessária de convergência.}$$

$x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-1)^n \Rightarrow \text{série numérica alternada}$$

série dos módulos: $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$

Já vimos antes que diverge
 \Rightarrow Não há conv. absoluta

Critério de Leibniz: Falha!

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} [n(n+1)] = +\infty \neq 0$$

∴ Não há conv. simples em $x = -1$

Dom. conv = Int. conv = $] -1, 1 [$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} xe^n$

FT1_1e

$x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0 \rightarrow \text{conv. absolutamente}$$

$x \neq 0$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} xe^{n+1} \right|}{\left| \frac{n^2}{n!} xe^n \right|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n^2 (n+1)!} |x|$$

$$= |x| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n^2 (n+1) \cancel{n!}}$$

$$= |x| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = |x| \times 0 = 0 < 1$$

∴ A série converge absolutamente
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D} = \mathcal{I} = \mathbb{R}$$

$$④ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x e^{3n}}{\ln n}$$

FT1 - 1i

$x = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 0 \rightarrow \text{absolutam. convergente}$$

$x \neq 0$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x e^{3(n+1)}}{\ln(n+1)} \right|}{\left| \frac{x e^{3n}}{\ln n} \right|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x e^{3n+3} \cdot \ln(n)|}{|x e^{3n} \cdot \ln(n+1)|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |x e^3| \times \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

$$= |x e^3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$$

$$= |x e^3| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1} \times (n+1)\right)}{\ln(n+1)}$$

$$= |x e^3| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(n+1)}{\ln(n+1)}$$

$$= |x e^3| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\ln(n+1)} + 1 \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &\rightarrow 1 \\ \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) &\rightarrow 0 \\ \ln(n+1) &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$= |x e^3|$$

Para que haja convergência absoluta, pelo crit. de D'Alembert, $|x e^3| < 1$

$$-1 < x e^3 < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1$$

$$x = 1 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1^{3n}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

Crit. comp. passagem ao limite:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln(n)}{n}} = +\infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → Dirichlet divergente

$$l = +\infty \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \text{ também diverge.}$$

$$x = -1 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{\ln(n)} \rightarrow \text{alternada}$$

Série dos módulos: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ Divergente (ver passo anterior)

Crit. Leibniz:

- $n \geq 2 \Rightarrow \ln(n) \geq \ln(2)$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

$$\therefore u_n = \frac{1}{\ln(n)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n)}$

$$= \frac{\ln(n) - \ln(n+1)}{\ln(n+1)\ln(n)} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\ln(n+1)\ln(n)} - < 0$$

C.Aux:

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \begin{matrix} n \\ -n-1 \\ -1 \end{matrix} \quad \frac{\ln(n+1)}{1}$$

Enquad. $n \geq 2$

$$n+1 \geq 3$$

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{n+1} < 0$$

$$\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \ln(1)$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \underbrace{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{\text{negativo}} < 0$$

$\therefore u_n = \frac{1}{\ln(n)}$ é de crescente

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

\therefore Pelo Crit. de Leibniz, a série conv. simplesmente
se $\infty = -1$

$$\therefore D = [-1, 1[$$

Bom Trabalho!

Filipa.