Examen de Aprendizaje Automático

ETSINF, Universitat Politècnica de València, 21 de enero de 2020

Apellidos: | **Nombre:** | **Grupo:**

Cuestiones (2 puntos; tiempo estimado: 30 minutos)

Marca cada recuadro con una única opción de entre las dadas. Cada acierto suma 1/2 puntos y cada fallo resta 1/6 puntos.

1 $\boxed{\text{D}}$ Para un problema de clasificación en dos clases, sea $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\theta}^t\mathbf{x} + \theta_0$ una función discriminante lineal (FDL) y sea H el hiperplano de decisión definido por $\phi(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = 0$. Entre las siguientes supuestas propiedades hay una que es falsa:

A) El valor de $\phi(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ es proporcional a la distancia de $\mathbf{x}$ a H

B) La distancia del origen de coordenadas a H es $\dfrac{\theta_0}{\|\boldsymbol{\theta}\|}$

C) H también está definido por un número infinito de FDL $\phi' \neq \phi$

D) Solo hay una única FDL que define a H

2 $\boxed{\text{A}}$ Se ha evaluado un sistema de Aprendizaje Automático mediante un proceso de *exclusion individual* ("Leaving One Out") usando 1000 muestras etiquetadas. En este proceso se han producido 15 errores en total. Indicar cuál de las afirmaciones siguientes es razonable:

A) La talla de entrenamiento efectiva es de 999 muestras y el error estimado es $1.5\,\% \pm 0.75\,\%$

B) La talla de entrenamiento efectiva es de 1000 muestras y el error estimado es $1.5\,\% \pm 0.15\,\%$

C) La talla de test efectiva es de 999 muestras y el error estimado es $1.5\,\% \pm 0.15\,\%$

D) Las tallas de entrenamiento y de test efectivas son de 1000 muestras y el error estimado es $1.5\,\% \pm 0.75\,\%$

3 $\boxed{\text{D}}$ Se desea ajustar por mínimos cuadrados la función $f : \mathbb{R}^2 \to R$, definida como: $y = f(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} ax_1x_2 + bx_1 + cx_2$ a una secuencia de N pares entrada-salida: $S = (\boldsymbol{x}_1, y_1), (\boldsymbol{x}_2, y_2) \ldots, (\boldsymbol{x}_N, y_N))$. La técnica empleada es minimizar por descenso por gradiente la función de error cuadrático:

$$q(a,b,c) = \sum_{n=1}^{N} (f(\boldsymbol{x}_n) - y_n)^2$$

Identifica la afirmación acertada de entre las siguientes:

A) El gradiente es $ax_1 + bx_2 + cx_1x_2$

B) El vector gradiente es: $2\sum_{n=1}^{N}(f(\boldsymbol{x}_n) - y_n) \cdot \boldsymbol{x}_n^t$

C) La técnica de descenso por gradiente no es aplicable en este caso ya que la función a ajustar, $f(\cdot)$, no es lineal.

D) El vector gradiente es: $2\sum_{n=1}^{N}(f(\boldsymbol{x}_n) - y_n) \cdot (x_{n1}x_{n2},\ x_{n1},\ x_{n2}\ )^t$

4 $\boxed{\text{C}}$ Considerar el aprendizaje mediante máquinas de vectores soportes y márgenes blandos con una muestra de aprendizaje $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ no separable linealmente. Si un multiplicador de Lagrange óptimo α_j^*, asociado a la restricción $c_j\ (\boldsymbol{\theta}^t\boldsymbol{x}_j + \theta_0)\ \geq\ 1 - \zeta_j$, $1 \leq j \leq N$, es cero, entonces:

A) La muestra $\boldsymbol{x}_j$ está mal clasificada

B) La muestra $\boldsymbol{x}_j$ está clasificada correctamente pero $\boldsymbol{\theta}$ y θ_0 no es canónico con respecto a la muestra

C) La muestra $\boldsymbol{x}_j$ está clasificada correctamente

D) La muestra $\boldsymbol{x}_j$ es un vector soporte

Problema 1 (3 puntos; tiempo estimado: 30 minutos)

En la siguiente tabla se presenta una muestra de entrenamiento no linealmente separable en $\mathbb{R}^2$ y los correspondientes multiplicadores de Lagrange óptimos obtenidos al entrenar una máquina de vectores soporte con esta muestra (y C=10):

i	1	2	3	4	5	6
x_{i1}	2	4	3	2	1	4
x_{i2}	3	2	2	2	2	1
Clase	+1	–1	+1	–1	+1	–1
$\alpha_i^\star$	0.67	3.78	10.00	10.00	3.11	0.00

a) Obtener la función discriminante lineal correspondiente y el valor del margen.

b) Representar gráficamente la frontera lineal de separación entre clases, los márgenes y las muestras de entrenamiento, indicando cuáles son vectores soporte.

c) Clasificar la muestra $(4,4)^t$.

a) Pesos de la función discriminante:

$$\boldsymbol{\theta}^\star = c_1\ \alpha_1^\star\ \mathbf{x_1} + c_2\ \alpha_2^\star\ \mathbf{x_2} + c_3\ \alpha_3^\star\ \mathbf{x_3} + c_4\ \alpha_4^\star\ \mathbf{x_4} + c_5\ \alpha_5^\star\ \mathbf{x_5}$$

$$\theta_1^* \ = \ (+1)\ (0.67)\ (2) + (-1)\ (3.78)\ (4) + (+1)\ (10)\ (3) + (-1)\ (10)\ (2) + (+1)\ (3.11)\ (1) \ \approx \ -0.67$$
$$\theta_2^* \ = \ (+1)\ (0.67)\ (3) + (-1)\ (3.78)\ (2) + (+1)\ (10)\ (2) + (-1)\ (10)\ (2) + (+1)\ (3.11)\ (2) \ \approx \ +0.67$$

Usando el vector soporte $\mathbf{x_2}$ (que verifica la condición : $0 < \alpha_2^* < C = 10$)

$$\theta_0^* = c_2 - \boldsymbol{\theta}^{\star t}\mathbf{x_2} = -1 - ((-0.67)\ (4) + (0.67)\ (2)) \ = \ 0.34$$

Margen: $\dfrac{2}{\|\boldsymbol{\theta}\|} \approx 2.11$

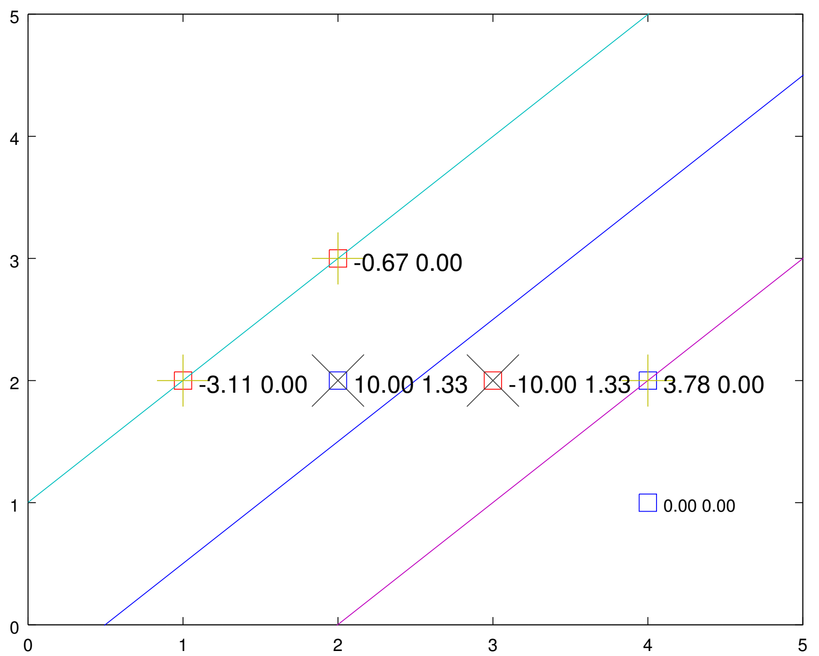
b) Frontera de separación y representación gráfica:

Ecuación de la frontera lineal de separación: $\ -0.67\ x_1 + 0.67\ x_2 + 0.34 \ = \ 0$

Los vectores de entrenamiento son todos los de la tabla. De ellos, los vectores soporte son: $(2,3)^t, (4,2)^t, (3,2)^t, (2,2)^t\ (1,2)^t$.

El margen lo definen las dos rectas paralelas a la frontera de separación, cada una de ellas situada a una distancia de $2.11/2 \approx 1.05$ y cuyas ecuaciones son: $\ -0.67\ x_1 + 0.67\ x_2 + 0.34 \ = \ +1 \quad$ y $\quad -0.67\ x_1 + 0.67\ x_2 + 0.34 \ = \ -1$

Representación gráfica:



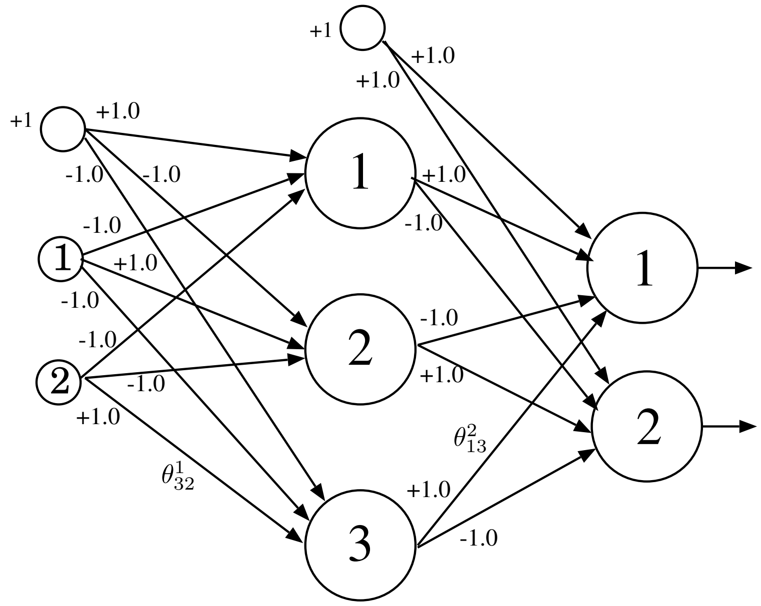
c) Clasificación de la muestra $(4,4)^t$:

El valor de la función discriminante para este vector es:

$$\theta_0^* + \theta_1^*\ x_1 + \theta_2^*\ x_2 \ = +0.34 + (-0.67) * 4 + (0.67) * 4 = +0.34 > 0 \ \Rightarrow \ \text{clase } +1.$$

Problema 2 (3 puntos; tiempo estimado: 30 minutos)

El perceptrón multicapa de la figura se utiliza para resolver un problema de regresión, con función de activación de los nodos de la capa de salida de tipo lineal y de la capa oculta de tipo *sigmoide*, y factor de aprendizaje $\rho = 1.0$.



Dado un vector de entrada $\boldsymbol{x}^t = (+2, +2)$, las salidas de las unidades de la capa de salida son $s^2_1 = 1.0474$ y $s^2_2 = 0.9526$ y las de las unidades ocultas son $s^1_1 = 0.0474$, $s^1_2 = 0.2689$ y $s^1_3 = 0.2689$. Si el valor deseado de salida es $\boldsymbol{t}^t = (+1, 0)$, calcular:

a) Los correspondientes errores en los nodos de la capa de salida y en los nodos de la capa oculta.

b) Los nuevos valores de los pesos de las conexiones θ^1_{32} y θ^2_{13}.

a) Los errores en la capa de salida (función de activación lineal) son:

$$\delta^2_1 = (t_1 - s^2_1) = -0.0474$$
$$\delta^2_2 = (t_2 - s^2_2) = -0.9526$$

Los errores en la capa de oculta son:

$$\delta^1_1 = (\delta^2_1\ \theta^2_{11} + \delta^2_2\ \theta^2_{21})\ s^1_1\ (1 - s^1_1) = +0.0409;$$
$$\delta^1_2 = (\delta^2_1\ \theta^2_{12} + \delta^2_2\ \theta^2_{22})\ s^1_2\ (1 - s^1_2) = -0.1780;$$
$$\delta^1_3 = (\delta^2_1\ \theta^2_{13} + \delta^2_2\ \theta^2_{23})\ s^1_3\ (1 - s^1_3) = +0.1780$$

b) El nuevo peso θ^2_{13} es: $\theta^2_{13} = \theta^2_{13} + \rho\ \delta^2_1\ s^1_3 = 0.9872;$

El nuevo peso θ^1_{32} es: $\theta^1_{32} = \theta^1_{32} + \rho\ \delta^1_3\ x_2 = 1.3559$

Problema 3 (2 puntos; tiempo estimado: 20 minutos)

Las variables aleatorias A, B, C, D toman valores en el conjunto $\{0, 1\}$. La distribución de probabilidad conjunta de estas variables viene dada por $P(A, B, C, D) = P(A)\ P(B)\ P(C \mid A, B)\ P(D \mid A, B)$, donde las distribuciones de probabilidad asociadas son:

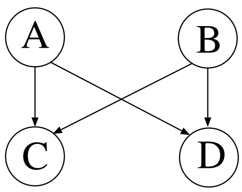
$$
\begin{array}{rclrcl}
P(A=1) & = & 0.3 & P(A=0) & = & 0.7 \\
P(B=1) & = & 0.4 & P(B=0) & = & 0.6 \\
P(C=1 \mid A=0, B=0) & = & 0.1 & P(C=0 \mid A=0, B=0) & = & 0.9 \\
P(C=1 \mid A=0, B=1) & = & 0.2 & P(C=0 \mid A=0, B=1) & = & 0.8 \\
P(C=1 \mid A=1, B=0) & = & 0.3 & P(C=0 \mid A=1, B=0) & = & 0.7 \\
P(C=1 \mid A=1, B=1) & = & 0.4 & P(C=0 \mid A=1, B=1) & = & 0.6 \\
P(D=1 \mid A=0, B=0) & = & 0.9 & P(D=0 \mid A=0, B=0) & = & 0.1 \\
P(D=1 \mid A=0, B=1) & = & 0.8 & P(D=0 \mid A=0, B=1) & = & 0.2 \\
P(D=1 \mid A=1, B=0) & = & 0.7 & P(D=0 \mid A=1, B=0) & = & 0.3 \\
P(D=1 \mid A=1, B=1) & = & 0.6 & P(D=0 \mid A=1, B=1) & = & 0.4
\end{array}
$$

a) Representar gráficamente la red bayesiana correspondiente

b) Obtener una expresión simplificada de $P(A \mid B, C, D)$ y calcular su valor para $A = 1$ cuando $B = 1, C = 1$ y $D = 1$.

c) Dados $B = 1, C = 1$ y $D = 1$, ¿Cuál es el mejor valor de A que se puede predecir?

a) Representar gráficamente la red bayesiana correspondiente



b) Obtener una expresión simplificada de $P(A \mid B, C, D)$ y calcular su valor para $A = 1$ cuando $B = 1, C = 1$ y $D = 1$.

$$
\begin{aligned}
P(A \mid B, C, D) &= \frac{P(A, B, C, D)}{P(B, C, D)} = \frac{P(A)\ \cancel{P(B)}\ P(C \mid A, B)\ P(D \mid A, B)}{\cancel{P(B)}\ \sum_a P(A=a)\ P(C \mid A=a, B)\ P(D \mid A=a, B)} \\
&= \frac{P(A)\ P(C \mid A, B)\ P(D \mid A, B)}{P(A=0)\ P(C \mid A=0, B)\ P(D \mid A=0, B) + P(A=1)\ P(C \mid A=1, B)\ P(D \mid A=1, B)}
\end{aligned}
$$

$$
P(A=1 \mid B=1, C=1, D=1) = \frac{0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.6}{0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.8\ +\ 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 0.391
$$

c) Dados $B = 1, C = 1$ y $D = 1$, ¿Cuál es el mejor valor de A que se puede predecir?

$a^\star = \arg\max_{a \in \{0,1\}} P(A = a \mid B = 1, C = 1, D = 1)$

$P(A = 0 \mid B = 1, C = 1, D = 1) = 1 - 0.391 = 0.609 \geq 0.391 \Rightarrow$ valor óptimo de A es $a^\star = 0$