

UNIVERSIDADE DA CORUÑA



APLICACIONES DE LA SVD: SINGULAR VALUE DECOMPOSITION
(MÉTODOS NUMÉRICOS PARA CIENCIA DE DATOS)

VERÓNICA VILA VIVERO

MIGUEL PLANAS DÍAZ

GRUPO 13

NOVIEMBRE 2025

Índice

1. Introducción	3
2. Implementación	4
3. Aplicaciones de SVD	5
3.1. Reducción de Dimensionalidad: PCA mediante SVD	5
3.2. Compresión de Imágenes: Aproximación de Bajo Rango	7
3.3. Procesamiento de Video: Separación de Fondo y Primer Plano	9
3.4. Conclusiones	11
Referencias	12

1. Introducción

En el ámbito de la Computación Científica y del Análisis Numérico, la *Descomposición en Valores Singulares* (SVD, *Singular Value Decomposition*) constituye una herramienta fundamental debido a su capacidad para descomponer una matriz A en el producto de dos matrices ortogonales, U y V , y una matriz diagonal de valores singulares, Σ , de forma que $A = U\Sigma V^t$. Esta representación aporta una interpretación geométrica clara de las transformaciones lineales e introduce propiedades algebraicas de gran relevancia; entre ellas, la caracterización del rango de una matriz y la estabilidad frente a perturbaciones.

La robustez numérica de la SVD ha favorecido su uso en un amplio conjunto de áreas, que abarcan desde el análisis numérico tradicional hasta disciplinas modernas como la ciencia de datos, el aprendizaje automático, el análisis de señales o la optimización. Su capacidad para descomponer estructuras matriciales complejas en componentes independientes facilita el estudio de problemas de gran escala, así como la extracción de patrones relevantes en datos de diferente naturaleza.

El objetivo de este trabajo es estudiar la SVD desde dos perspectivas complementarias. En primer lugar, abordaremos sus fundamentos teóricos: qué es la descomposición en valores singulares, cuáles son sus propiedades esenciales y cómo puede implementarse de manera constructiva. Aunque las bibliotecas científicas actuales incluyen algoritmos optimizados para calcular la SVD, reproducir el procedimiento manualmente permite comprender con mayor profundidad el papel de las transformaciones ortogonales, la reducción bidiagonal y los aspectos relacionados con la estabilidad numérica. Este estudio se desarrollará en el Punto 2 y se apoyará en el notebook `0_implementacion_svd`, donde implementaremos el algoritmo paso a paso.

En segundo lugar, exploraremos aplicaciones prácticas en las que la SVD desempeña un papel central. Entre ellas se incluyen métodos de reducción de la dimensionalidad, como el Análisis de Componentes Principales (PCA), técnicas de compresión de imágenes y procedimientos de eliminación de fondo o separación de componentes en datos visuales. Estas aplicaciones se desarrollarán en el Punto 3 mediante ejemplos implementados en los diferentes notebooks asociados.

En conjunto, esta memoria busca ofrecer una visión completa del papel que desempeña la SVD, integrando teoría, implementación y aplicaciones. El enfoque adoptado pretende no solo describir el método, sino también mostrar su relevancia práctica y su presencia transversal en diversos problemas actuales de la ciencia y la ingeniería.

2. Implementación

En esta sección abordamos la implementación práctica de la Descomposición en Valores Singulares (SVD) desde una perspectiva constructiva. El objetivo es reproducir los pasos fundamentales del algoritmo, permitiendo así analizar con detalle cómo se genera cada uno de los componentes de la descomposición y comprender las transformaciones internas que sustentan su funcionamiento.

La implementación se basa en los tres pasos algorítmicos:

1. Reducción de la matriz original A a una forma bidiagonal B .
2. El cálculo de la SVD de dicha matriz bidiagonal.
3. La composición final de los factores para obtener la SVD completa de A .

En primer lugar, el proceso genera de forma acumulada dos matrices ortogonales, U_1 y V_1 , tales que $A = U_1 B V_1^T$, donde B presenta la estructura bidiagonal esperada. La reducción bidiagonal es un paso esencial en los algoritmos modernos de SVD, ya que concentra toda la complejidad en una matriz cuya estructura simplifica el tratamiento posterior y garantiza una mayor estabilidad numérica.

En segundo lugar, se calcula la SVD de la matriz bidiagonal B , basandose en la observación de que los vectores singulares derechos, que pueden obtenerse como auto-vectores de $B^T B$, mientras que los vectores singulares izquierdos se derivan mediante $u_i = \frac{1}{\sigma_i} B v_i$. Este procedimiento se complementa con un proceso de ortonormalización y alineamiento de signos para asegurar que las matrices resultantes mantengan la estructura ortogonal requerida y permitan reconstruir A con una precisión próxima al error de redondeo en doble precisión.

El tercer paso consiste en recomponer la descomposición completa mediante $U = U_1 U_2$ y $V = V_1 V_2$, donde U_2 y V_2 provienen de la SVD de B . El resultado final es una factorización $A = U \Sigma V^T$ coherente con la teoría.

A partir de esta descomposición se implementan otras operaciones, como la aproximación de rango bajo $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$, donde se reduce eficazmente la energía retenida según el espectro singular. Así como la pseudoinversa de Moore–Penrose, $A^+ = V \Sigma^+ U^T$, que satisface con precisión las cuatro propiedades caracterizadoras y reproduce la solución de mínimos cuadrados.

La implementación desarrollada reproduce la estructura algorítmica que siguen las bibliotecas científicas y los resultados obtenidos validan la robustez del enfoque.

3. Aplicaciones de SVD

Tras haber establecido los fundamentos matemáticos y la implementación algorítmica de la Descomposición en Valores Singulares, en esta sección exploramos su versatilidad en problemas reales de ingeniería de datos y procesamiento de señales. A continuación, se detallan tres aplicaciones implementadas en los cuadernos de trabajo adjuntos: la reducción de dimensionalidad mediante PCA, la compresión de imágenes digitales y la segmentación de imagen y video para eliminación de fondo.

3.1. Reducción de Dimensionalidad: PCA mediante SVD

El Análisis de Componentes Principales (PCA) es una técnica estadística fundamental para la reducción de dimensionalidad, cuyo objetivo es transformar un conjunto de datos correlacionados en un conjunto de variables no correlacionadas llamadas componentes principales. En el notebook `1_pca_usando_svd.ipynb`, se demuestra cómo existe una relación intrínseca y directa entre la SVD y el PCA[1], permitiendo calcular este último sin necesidad de computar explícitamente la matriz de covarianza, lo cual es ventajoso numéricamente.

Matemáticamente, si consideramos una matriz de datos $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ previamente centrada (donde cada columna tiene media cero), la matriz de covarianza viene dada por $C = \frac{1}{n-1}X^T X$. Al aplicar la SVD directamente sobre la matriz de datos centrada $X = U\Sigma V^T$, obtenemos que:

$$X^T X = (V\Sigma U^T)(U\Sigma V^T) = V\Sigma^2 V^T$$

Esto revela que los vectores singulares derechos V de X son, de hecho, los autovectores de la matriz de covarianza (las direcciones principales), y los valores singulares σ_i están relacionados con los autovalores λ_i de la covarianza mediante la relación $\lambda_i = \frac{\sigma_i^2}{n-1}$.

En la práctica desarrollada, se ha aplicado este método al conjunto de datos *digits* de MNIST [2] que está formado como se puede ver en la figura 1 por imágenes de dígitos manuscritos. Al proyectar los datos de alta dimensión (imágenes de 28x28 píxeles) sobre las dos primeras componentes principales, se logra visualizar la estructura latente de los datos en un plano 2D como se puede ver en la figura 2, facilitando la distinción de clusters correspondientes a los diferentes dígitos.

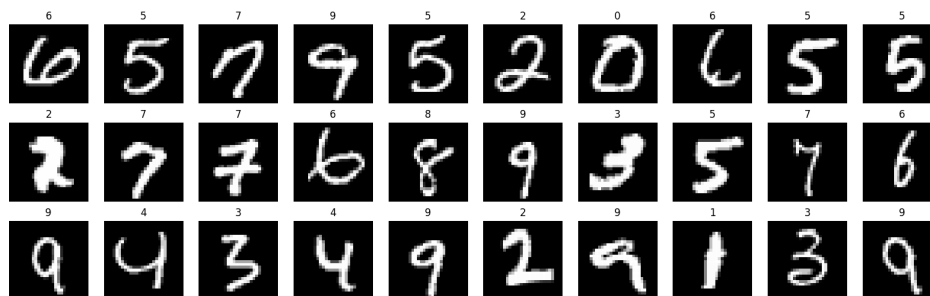


Figura 1: Visualización de los 30 primeros datos del conjunto *digits* con su respectiva etiqueta.

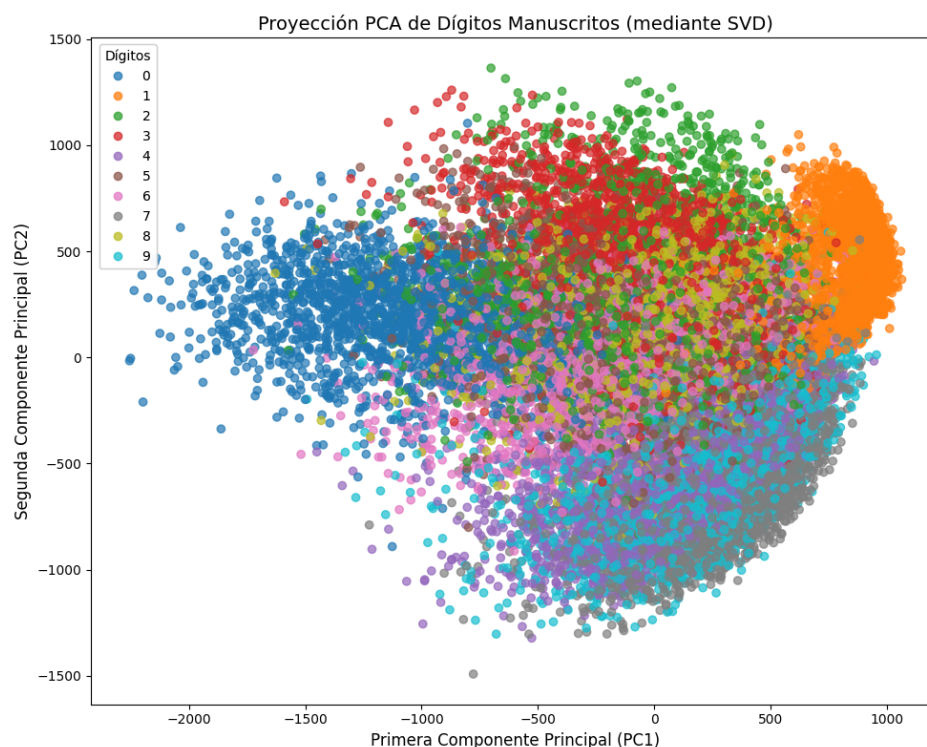


Figura 2: Visualización de los datos del conjunto *digits* proyectados sobre las dos primeras componentes principales calculadas mediante SVD. Se observa la agrupación natural de las clases tras la reducción de dimensionalidad.

Además, el análisis de los valores singulares permite cuantificar la *varianza explicada* por cada componente. Como se observa en la figura 3, retener un número reducido de componentes suele ser suficiente para preservar la mayor parte de la información (varianza) del conjunto original, demostrando la eficacia de la SVD para comprimir la información estadística de los datos.

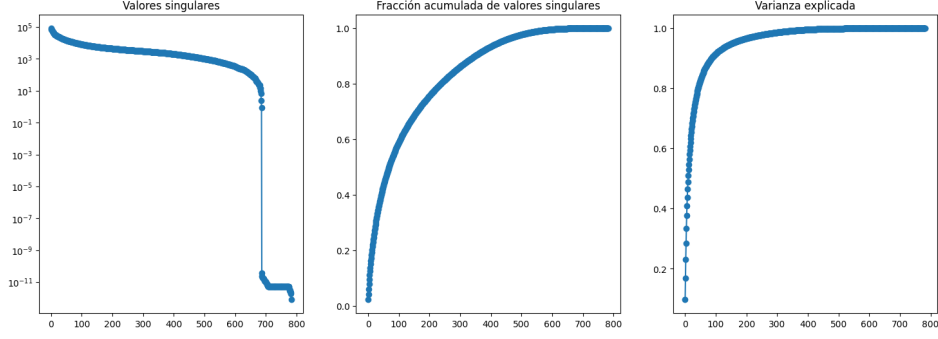


Figura 3: Análisis del espectro de valores singulares. De izquierda a derecha: (1) Decaimiento de la magnitud de los valores singulares σ_k en escala logarítmica; (2) Fracción acumulada de la suma de los valores singulares; y (3) **Varianza explicada acumulada** (proporcional a la energía de la imagen, $\sum \sigma_i^2$). La rápida saturación de la tercera curva hacia el 100 % demuestra matemáticamente que la información estructural relevante se concentra en los primeros modos de la descomposición.

3.2. Compresión de Imágenes: Aproximación de Bajo Rango

Una imagen digital en escala de grises puede representarse matemáticamente como una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, donde cada elemento A_{ij} corresponde a la intensidad de un píxel. La aplicación de la SVD en este contexto se basa en una propiedad fundamental de la descomposición, la cual garantiza que la mejor aproximación de rango k a la matriz A (aquella que minimiza el error en la norma de Frobenius) se obtiene precisamente truncando su serie de valores singulares.

En el notebook `2_compresion_imagen.ipynb`, utilizamos una imagen de alta resolución de una galaxia para ilustrar este fenómeno, dado que su complejidad estructural y riqueza de detalles permiten apreciar con mayor claridad las diferencias de resolución. El procedimiento algorítmico se articula en tres etapas: el cálculo de la descomposición completa $A = U\Sigma V^T$, el truncamiento de la serie conservando únicamente los primeros k valores singulares (con $k < \min(m, n)$), y finalmente la obtención de la imagen aproximada A_k .

La compresión de imágenes se basa en el rápido decaimiento de los valores singulares [3]. Para evaluar la calidad visual, se comparan matrices de rango- k con $k \in \{1, 10, 20, 50, 100, 300\}$. Los valores bajos ($k = 1, 10$) solo esbozan la iluminación. A $k = 50$ el resultado es funcional, con estructura global reconocible (Figura 4), aunque se pierden detalles de alta frecuencia/texturas finas. Al aumentar el rango a $k = 100$ y $k = 300$, la pérdida de información se vuelve imperceptible (convergencia visual), pues

estos valores singulares de pequeña magnitud codifican la información de alta frecuencia (texturas y bordes).

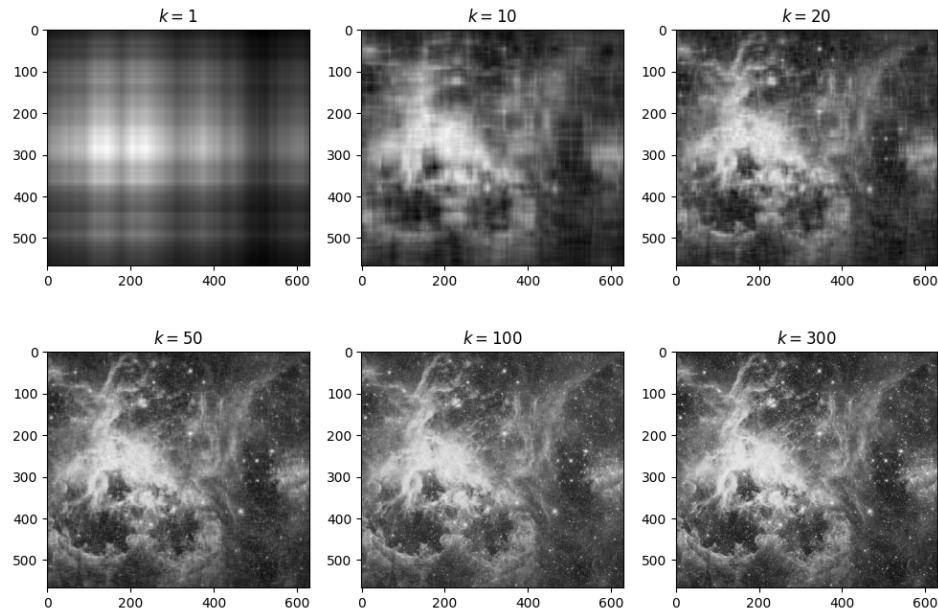


Figura 4: Evolución de la compresión: Visualización de las mejores matrices de rango- k reconstruidas para la secuencia de valores $k = 1, 10, 20, 50, 100, 300$.

La calidad de la reconstrucción se evalúa visualmente comparando la matriz original con sus aproximaciones de rango- k .

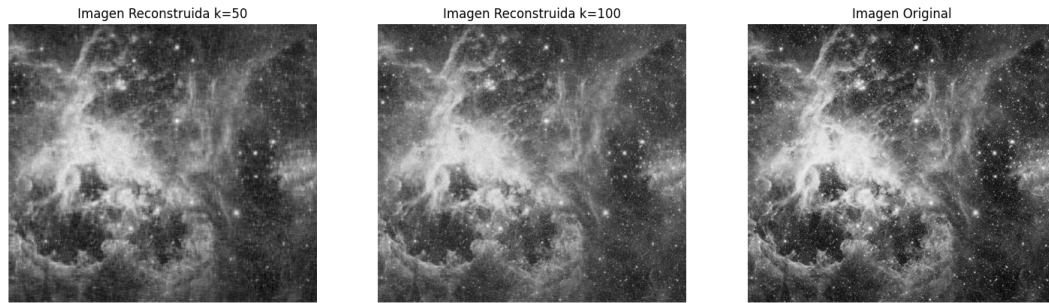


Figura 5: Evaluación comparativa de la calidad de imagen. Reconstrucción con $k = 50$ (donde se aprecia cierto desenfoque), la reconstrucción con $k = 100$ (con una notable recuperación de nitidez) y la imagen original de referencia.

Como se evidencia en la Figura 5, el panel central ($k = 100$) ofrece una representación visualmente muy cercana al original, lo que demuestra la robustez de la estructura global. A pesar de esta alta fidelidad, la versión comprimida demanda solo $k(m + n + 1)$ valores en lugar de $m \times n$, lo que representa un ahorro drástico de memoria.

3.3. Procesamiento de Video: Separación de Fondo y Primer Plano

La tercera aplicación, desarrollada en el notebook `3_eliminacion_fondo.ipynb`, extiende el concepto de SVD al procesamiento de video para la tarea de extracción de fondo[4]. Un video puede interpretarse como una secuencia de fotogramas que, al ser “aplanados” (convertidos en vectores columna), forman una gran matriz M , donde cada columna representa un instante de tiempo.

La hipótesis subyacente es que el fondo de una escena estática es constante a lo largo del tiempo, lo que induce una alta correlación entre las columnas de M . En términos de álgebra lineal, esto significa que el fondo reside en un subespacio de dimensión muy baja (rango 1 o cercano a 1). Por el contrario, los objetos en movimiento (primer plano) introducen variabilidad que es capturada por los componentes de rango superior o queda relegada a los residuos.

El algoritmo implementado sigue estos pasos:

1. Construcción de la matriz M apilando las columnas de los fotogramas del video.
2. Cálculo de la SVD
3. Reconstrucción del fondo utilizando únicamente el primer valor singular.
4. Obtención del primer plano mediante la sustracción: $M_{primer_plano} = |M - M_{fondo}|$.

Para ilustrar esta aplicación, utilizaremos un vídeo de vigilancia caracterizado por un plano fijo constante con movimiento de personas en primer plano, como se muestra en la figura 6. La estructura de este vídeo es ideal para aplicar la SVD, ya que permite distinguir claramente entre la parte constante de la escena (el fondo estático) y el primer plano dinámico (las personas en movimiento). Esta distinción hace que el caso de uso sea idóneo para la separación de componentes mediante la Descomposición en Valores Singulares.

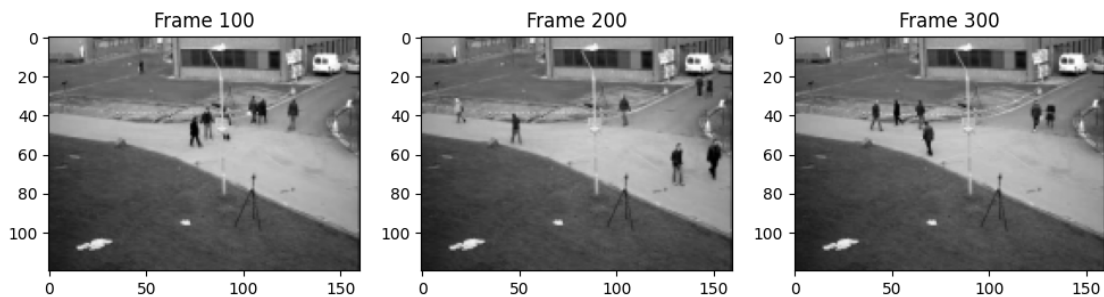
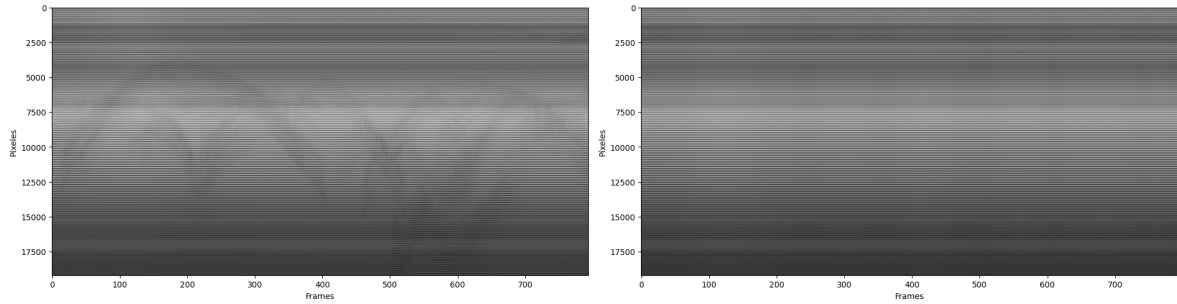


Figura 6: Tres fotogramas de ejemplo del video.

Como se detalla en la Figura 7, al representar el vídeo como una matriz donde las columnas corresponden a los fotogramas, la reconstrucción mediante el primer valor singular revela que las columnas (fotogramas) resultantes son visualmente idénticas a lo largo del tiempo. Esta homogeneidad es un indicador de que el primer valor singular captura predominantemente el componente estático y constante del vídeo, es decir, el fondo.



(a) Fotogramas del video original (las curvas se corresponden a objetos en movimiento)

(b) Fotogramas del video con solo el primer valor singular.

Figura 7: Comparación de los fotogramas originales del video y los fotogramas reconstruidos usando el primer valor singular.

Es importante notar, como se discute en el notebook, que la SVD convencional es computacionalmente costosa para vídeos de alta resolución debido al inmenso tamaño de la matriz M . Para mitigar esta carga computacional, se aplicó una reducción de la resolución antes de iniciar el procesamiento.

La Figura 8 ilustra el resultado final de la separación: el componente de rango 1 captura con éxito la estructura estática de la escena (el fondo), ignorando los objetos transitorios. Al restar esta aproximación de rango uno del vídeo original, se aíslan con precisión los elementos dinámicos (las personas), lo cual demuestra la potente capacidad de la SVD para separar fuentes de información basándose en su correlación temporal.



Figura 8: Resultados de la separación de fondo. De izquierda a derecha: fotograma original del video, fondo estático reconstruido mediante el primer componente de la SVD, y la máscara de primer plano resultante de la sustracción.

3.4. Conclusiones

Las aplicaciones prácticas desarrolladas en esta sección -desde la proyección estática del PCA hasta el procesamiento de señales visuales- evidencian la versatilidad de la SVD en la ciencia de datos. El denominador común en todos los experimentos es la explotación del decaimiento espectral de los valores singulares característico de los datos reales: esta propiedad permite discriminar eficazmente entre la estructura latente de la información (señal) y la redundancia o el ruido. En última instancia, la capacidad de generar aproximaciones de bajo rango convierte a la SVD en una herramienta indispensable para la compresión, el filtrado y la extracción de características en sistemas computacionales eficientes.

Referencias

- [1] M. E. Wall, A. Rechtsteiner, and L. M. Rocha, “Singular value decomposition and principal component analysis,” in *A practical approach to microarray data analysis*, pp. 91–109, Springer, 2003.
- [2] Wikipedia, “Base de datos mnist — wikipedia, la enciclopedia libre,” 2025. [Internet; descargado 11-febrero-2025].
- [3] S. Kahu and R. Rahate, “Image compression using singular value decomposition,” *International Journal of Advancements in Research & Technology*, vol. 2, no. 8, pp. 244–248, 2013.
- [4] G. Reitberger and T. Sauer, “Background subtraction using adaptive singular value decomposition,” *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 62, no. 8, pp. 1159–1172, 2020.