



Operaciones Aritméticas y Lógicas

©Alejandro Echeverría, Hans Löbel

1. Motivación

Para poder desarrollar un computador, el primer paso es implementar un mecanismo que automáticamente sea capaz de realizar operaciones básicas, como suma y resta. Dado que hay varias operaciones y además varios tipos de representaciones de datos (complemento a dos, punto flotante, etc.) necesitamos múltiples «máquinas» capaces de realizar estos cálculos e idealmente alguna técnica que nos permita diseñar estas máquinas de manera que sean matemáticamente correctas y que utilicen componentes físicamente construibles.

2. Representación física de números binarios

Para poder realizar cálculos sobre números binarios, debemos primero definir una representación física para estos. Dado que los números binarios trabajan con sólo dos símbolos (0 y 1) es sencillo definir representaciones física del tipo «tener X cantidad de algo = 1» y «no tener nada = 0». Por ejemplo, se podría pensar en ocupar una representación basada en líquidos: tener flujo del líquido se podría interpretar como un 1 no tener nada, como un 0.

Además de la representación se requiere un mecanismo de control que permita definir el valor de un bit. En el caso del líquido, por ejemplo, podría tenerse una válvula de control, que si esta cerrada deja pasar el líquido, representando un 1 binario, y si está abierta no deja pasar líquido, representando un 0 binario. El problema de esto es que ahora además de el líquido necesitamos un mecanismo de control, que podría implementarse a su vez con líquido, pero resulta complejo. Una mejor alternativa corresponde a usar flujo eléctrico en vez de ocupar flujo de un líquido. En esta representación, la presencia de una corriente eléctrica simboliza un 1; la ausencia de corriente un 0. La principal ventaja de esta representación es que la apertura de la válvula puede ser controlada a su vez por electricidad, y de esta forma simplificamos el funcionamiento del sistema.

Un componente eléctrico que cumple con las funciones que necesitamos para representar 1s y 0s son los relés. Los relés están formados por un cable de entrada, dos de salida y un cable de control. Si el cable de control no tiene corriente, la entrada está conectada a la 2da salida (este es el estado por defecto). Si se pasa corriente por el cable de control, la entrada estará conectada a la 1era salida. De esta forma, no tener corriente en el cable control, implica que no habrá corriente en la 1era salida (lo que podemos interpretar como un 0) y si tener corriente, implica que si habrá corriente en la 1era salida (lo que podemos interpretar como un 1).

Saber la representación física de los números binarios, sin embargo, no nos ayuda a solucionar el problema de como realizar cálculo con ellos. Lo que sabemos es que debemos diseñar sistemas que sean capaces de funcionar con corriente eléctrica, pero necesitamos otras herramientas conceptuales para poder determinar que hacer con dicha corriente.

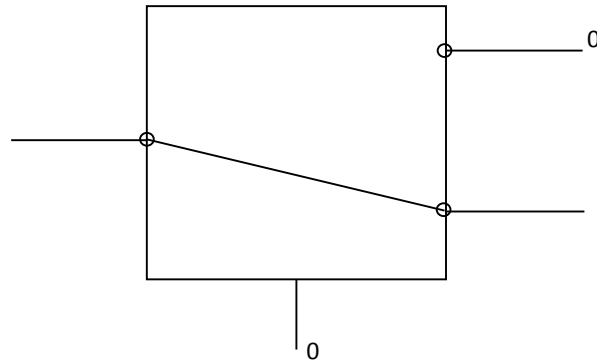


Figura 1: Relé abierto, representando un 0 binario.

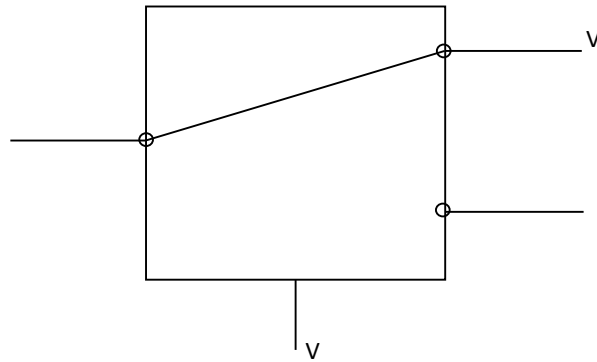


Figura 2: Relé cerrado, representando un 1 binario

3. Lógica booleana

George Boole, un matemático inglés del siglo XIX, desarrolló un sistema formal para analizar la lógica. Este sistema lógico, denominado Lógica Booleana en su honor, fue creado sin ninguna relación directa con la problemática de automatizar el cálculo numérico, pero resultaría de suma relevancia en el siglo XX cuando se empezaron a construir los primeros computadores.

A continuación revisaremos los principales aspectos de la lógica de Boole, para luego hacer el vínculo con nuestro problema de cálculo numérico.

3.1. Propositiones lógicas

La lógica booleana se basa en el concepto de proposiciones lógicas. Una proposición lógica es una oración o sentencia que puede ser verdadera o falsa. Por ejemplo, la sentencia: «*está lloviendo.*» será verdad si se dice un día que efectivamente está lloviendo, y será falsa si se dice en un día que no está lloviendo. La sentencia «*hoy es Viernes.*» será verdadera todos los días Viernes, y falsa todo el resto de los días.

Las proposiciones lógicas en el sistema definido por Boole, pueden tomar solamente uno de dos valores: verdadero (V) o falso (F). En este sistema no existe espacio para la ambigüedad («*Puede estar lloviendo.*» ni para las probabilidades «*Lloverá con un 60 % de probabilidad.*», sólo se consideran válidas sentencias que tiene una respuesta de verdad exacta.

3.2. Condiciones lógicos

La lógica booleana permite también conectar una secuencia de proposiciones ocupando una serie de condiciones lógicas básicas:

- podemos decir «*está lloviendo.*» **y** «*hoy es Viernes.*», lo cual forma una nueva proposición combinada que sólo será verdadera aquellos días Viernes que esté lloviendo (esta condición se conoce por su nombre en inglés como **and**);
- podríamos decir también «*está lloviendo.*» **o** «*hoy es Viernes.*», lo cual será verdadero todos los días que llueva, será verdadero todos los días Viernes y en particular también será verdadero todos los días Viernes que llueva (esta condición se conoce por su nombre en inglés como **or**);
- podemos tener también una condición que se aplique sobre una sola proposición: **no** «*está lloviendo.*» la cual será verdadera todos los días que no llueva y falsa sólo los días que llueva (esta condición se conoce por su nombre en inglés como **not**).

Cada una de estas condiciones lógicas define lo que se denomina una «tabla de verdad», es decir una tabla que asocia cuando será verdadera (V) o falsa (F) una proposición creada a partir de una o más proposiciones combinadas con estas condiciones, detallando para todas las posibles combinaciones de verdad o falsedad de éstas, cuál será el resultado.

La tabla de verdad de la condición lógica **not** al combinarla con una proposición A es:

A	not(A)
F	V
V	F

La tabla de verdad de la combinación de dos proposiciones lógicas A y B con la condición lógica **and** es:

A	B	A and B
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

La tabla de verdad de la condición lógica **or** es:

A	B	A or B
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

3.3. Álgebra booleana

Boole desarrolló un sistema algebraico a partir de su lógica, en la cual las condiciones lógicas representaban las operaciones posibles y las proposiciones, las variables. Con este sistema, se podían construir sentencias lógicas complejas que se ajustarán a un determinada tabla de verdad, construyendo nuevas condiciones lógicas basadas en las tres básicas.

Por ejemplo, podríamos querer definir una condición lógica similar al **or** pero que sea verdadera sólo si una de las dos proposiciones es verdad y no si ambas lo son (lo que se conoce como un o exclusivo, en inglés como **exclusive or** o **xor**). La tabla de verdad de la condición lógica **xor** es:

A	B	A xor B
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

A través del álgebra diseñada por Boole, podemos construir una expresión ocupando **and**, **or** y **not** que represente esta tabla de verdad:

$$A \text{ xor } B = \text{not}(A) \text{ and } B \text{ or } A \text{ and not } (B)$$

4. Máquinas de cálculo basadas en lógica booleana

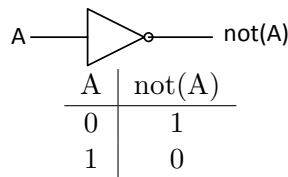
4.1. Compuertas binarias

En 1937, Claude Shannon, ingeniero del MIT, se dio cuenta que el álgebra booleana podía ser utilizada para trabajar con números binarios: bastaba reemplazar todos los valores «Verdadero» por 1s y los «Falso» por 0s, y todas las técnicas y procedimientos del álgebra descrita por Boole podían ser usados también para hacer álgebra con números binarios. El gran aporte de esta idea fue que entregó una herramienta poderosa para diseñar componentes que permitieran realizar cálculos con números binarios.

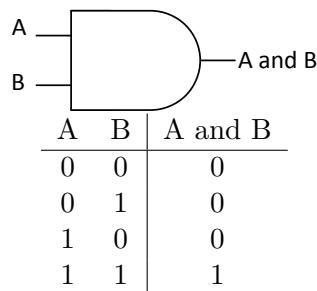
Shannon definió el concepto de «compuertas binarias» las cuales corresponden a componentes que implementan una de las condiciones lógicas definidas por Boole. Cada compuerta se comporta según las tablas de verdad de Boole, pero en vez de asociar valores de verdad, asocia valores binarios. Las compuertas, de esta manera, representan «cajas negras» que reciben como input valores binarios y entregan un determinado output. A cada compuerta se le asignó un símbolo, de manera de permitir diseñar gráficamente combinaciones de estás.

A continuación se muestran la tabla de valores y símbolo de las compuertas básicas:

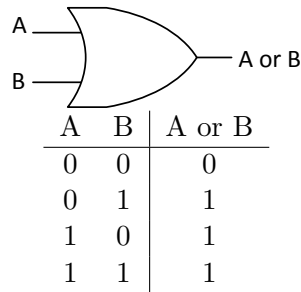
- Tabla de valores y símbolo de la compuerta **not**:



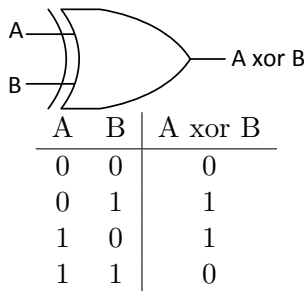
- Tabla de valores y símbolo de la compuerta **and**:



- Tabla de valores y símbolo de la compuerta **or**:



- Tabla de valores y símbolo de la compuerta **xor**:



4.2. Implementación física de compuertas

El gran salto conceptual de Shannon de la lógica booleana a las compuertas binarias no tendría mayor utilidad si no hubiese también definido como implementar de manera física dichas compuertas. Shannon observó que una compuerta **and** se podía representar como un conjunto de dos relé ubicados en serie, dado que estos cumplen con la tabla de valores de la compuerta: habrá corriente en la salida, sólo si ambos relé dejan pasar corriente.

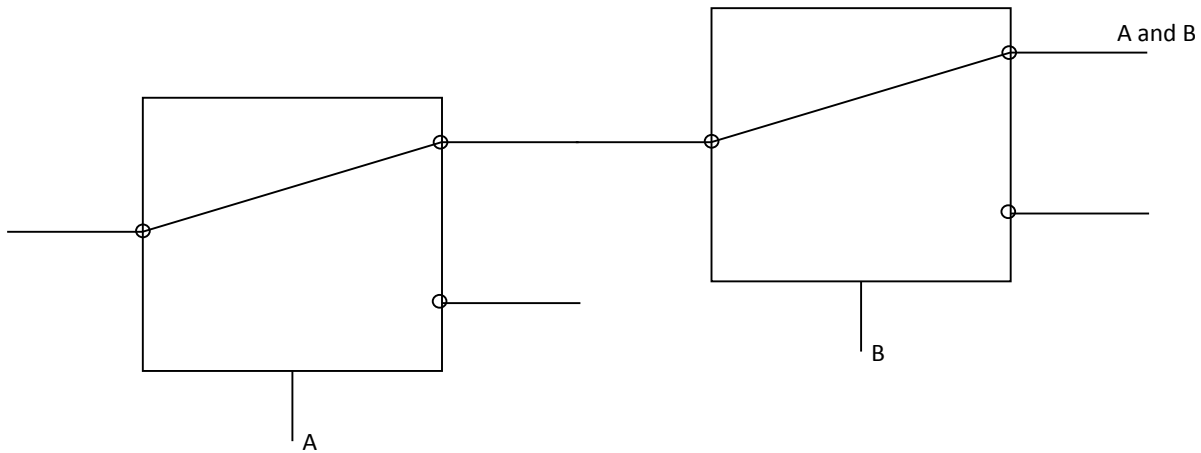


Figura 3: Compuerta **and** construida con relés. Se muestra el caso $A=1$, $B=1$.

De manera similar, una compuerta **or** se podía representar como un circuito en paralelo, es decir, como dos relés que funcionan independientes y que se conectan sus salidas, cumpliendo con que la corriente pasa al final, si pasa por cualquiera.

Por último la compuerta **not** también podía implementarse con relés, básicamente considerando la 2da salida como la negación de la 1era.

La implementación física de estas tres compuertas nos permite construir sistemas más complejos, dado que al estar ocupando el álgebra de Boole, sabemos que podemos construir el resto de las combinaciones lógicas en base a estas tres compuertas.

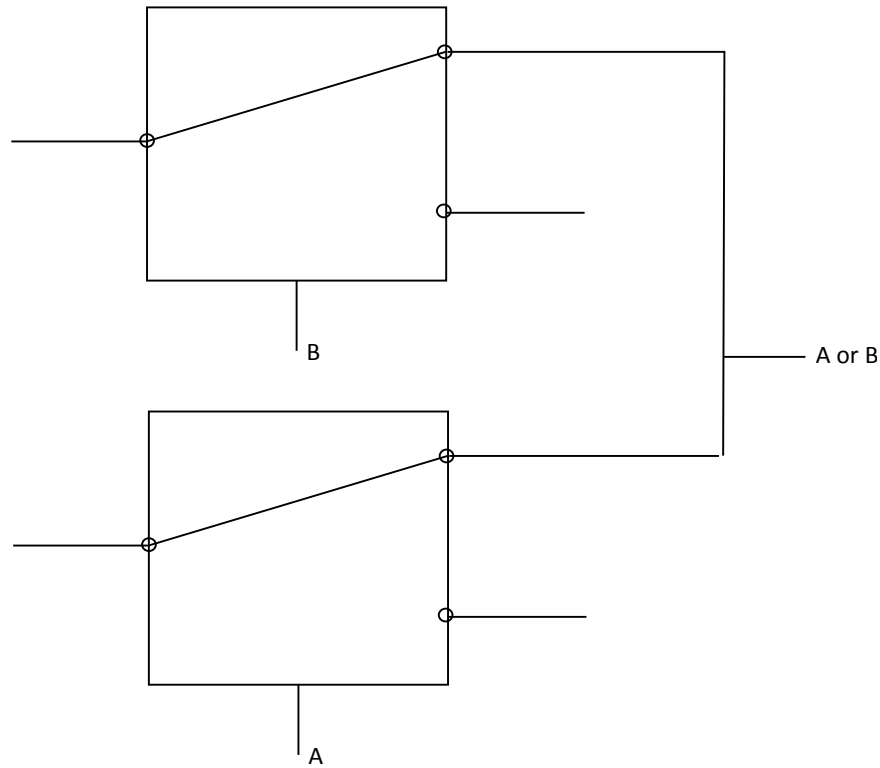


Figura 4: Compuerta **or** construida con relés. Se muestra el caso $A=1$, $B=1$.

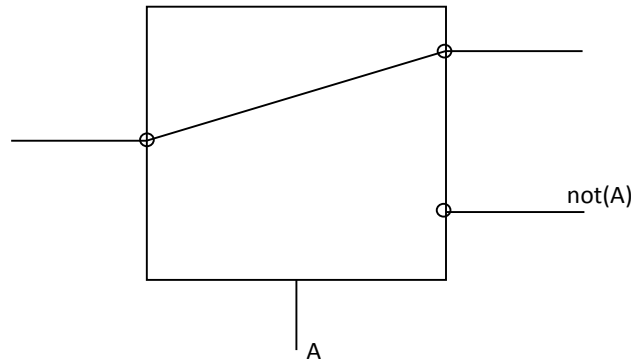


Figura 5: Compuerta **not** construida con relés. Se muestra el caso $A=1$.

4.3. Circuitos binarios

El diseño a través de compuertas binarias sumado a su implementación física, nos entrega todo lo necesario para comenzar a construir circuitos de cálculo numérico. Vamos a comenzar con la operación más sencilla: suma de 1 bit.

4.3.1. Sumador de 1 bit

Para ocupar las técnicas del diseño lógico, tenemos que pensar nuestras operaciones como tablas de verdad. La suma de 1 bit puede interpretarse como la siguiente tabla:

A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Observamos que la suma de 1 bit resulta en un número de 2 bits, y por tanto debemos diseñar dos circuitos binarios. Los bits de salida de la suma se denominan habitualmente como S o bit de suma y C o bit de carry. Si observamos cada salida de manera independiente, se observa que el bit de carry tiene la misma tabla de verdad que la compuerta **and** y el bit de suma, la misma tabla que la compuerta **xor**. De esta forma el circuito de un sumador de 1 bit queda de la siguiente manera:

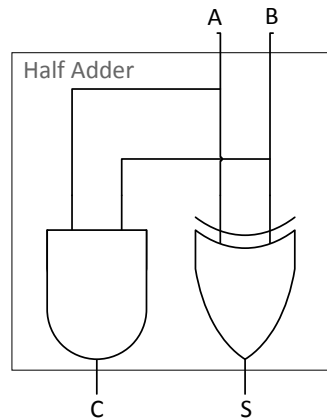


Figura 6: Medio sumador de 1 bit (half-adder).

4.3.2. Sumador de 4 bits

Nos gustaría ahora escalar nuestro circuito para poder realizar operaciones con más bits. Para eso, sin embargo, no nos basta con el circuito sumador antes visto, lo que podemos entender viendo el siguiente ejemplo de suma:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 + & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

El problema está en que para la suma del segundo bit, necesitamos sumar también el acarreo, osea se requieren sumar tres valores, y nuestro circuito previo sólo es capaz de sumar dos valores (por eso habitualmente se le denomina half-adder). Podemos utilizar el circuito anterior para construir nuestro sumador de 3 entradas (conocido como full-adder):

El circuito completo del sumador de 4 bits consiste en simplemente unir 4 full-adders, conectando la salida de acarreo de cada uno, con la entrada de acarreo del siguiente, resultando en el siguiente circuito:

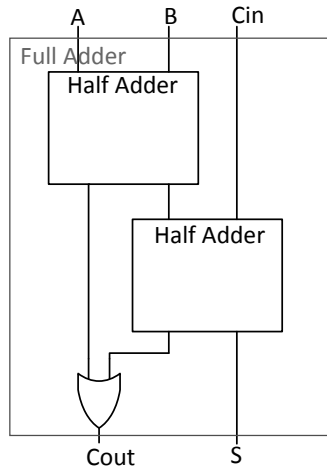


Figura 7: Sumador de 1 bit (full-adder).

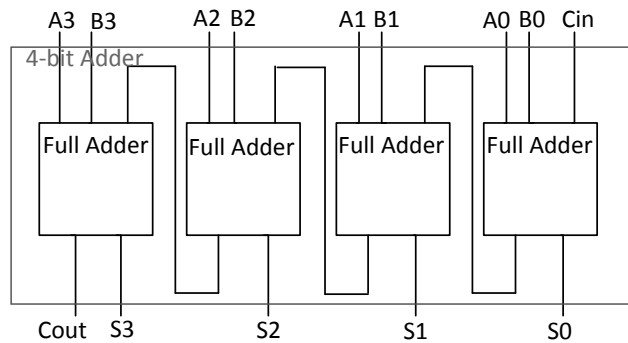


Figura 8: Sumador de 4 bits.

4.3.3. Restador de 4 bits

El siguiente nivel de dificultad en operaciones está en la resta, para la cual debemos primero convertir el restando a complemento a dos, y luego hacer la suma normal. Con el circuito anterior ya tenemos lista esta última etapa, nos faltan la conversión a complemento a 2.

El algoritmo de conversión a complemento a 2 tenía dos pasos:

- Invertir los bits
- Sumar 1

Para invertir los bits, podemos ocupar la compuerta **not** que justamente realiza esto. Para la suma de 1, podríamos ocupar otro sumador más, pero una mejor solución es usar el mismo sumador que ya tenemos, e insertar el 1 como carry in para el primer bit. Con esto nos resulta el siguiente circuito:

Podemos observar que ocupando las técnicas de la lógica booleana aplicadas a número binarios representados por circuitos eléctricos somos capaces de construir máquinas que realicen operaciones numéricas. Esta combinación de lógica con circuitos es el fundamento básico del diseño de los principales componentes de los computadores modernos. La única diferencia respecto a lo estudiado ahora, es que en vez de ocupar relés se utilizan transistores, que son componentes eléctricos conceptualmente equivalentes, pero de mucho menor tamaño y mayor velocidad.

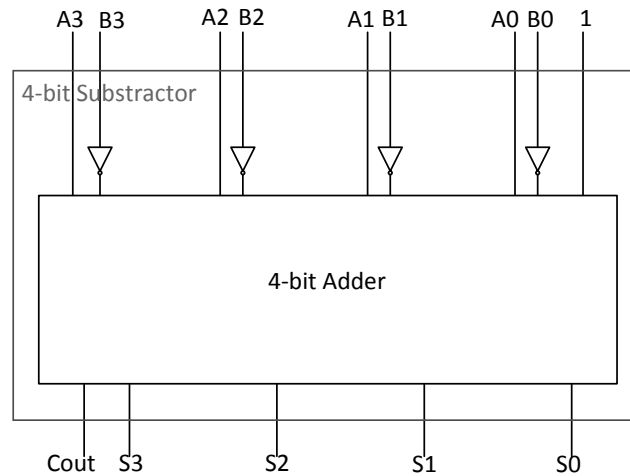


Figura 9: Restador de 4 bits.

5. Combinación de circuitos de operación

Los circuitos del sumador y restador de 4 bits vistos previamente representan dos ejemplos de máquinas de cálculo que pueden diseñarse para realizar operaciones dentro de un computador. Para permitir combinar estas distintas máquinas se requieren mecanismos especiales de control, y también abstracciones que permitan diseñar de manera más sencilla estas combinaciones.

5.1. Abstracción de componentes

Como se vio anteriormente, la base del diseño de componentes basados en compuertas binarias está en la modularización y abstracción. Para el sumador de 4 bits, por ejemplo, primero diseñamos el circuito del *Half-Adder* a nivel de compuertas, luego el *Full-Adder* como una combinación de *Half-Adders* y finalmente el sumador de 4 bits como un conjunto de *Full-Adders*. De esta manera pudimos ir aumentando el nivel de abstracción, lo que nos permite trabajar con módulos de más alto nivel que las compuertas básicas (por ejemplo el sumador de 4 bits) bastándonos saber que entradas y salidas tiene y que operación está realizando.

Otro elemento que permite abstraer el diseño de estos componentes es el concepto de **bus**. Un **bus** se puede definir como un conjunto de cables o líneas de corriente que agrupados representan un valor o unidad. Por ejemplo en el caso de los circuitos de sumador y restador antes vistos, podemos agrupar los 4 bits del operando A, los 4 bits del operando B y los bits del resultado S en tres **buses** de 4bits.

El concepto de buses nos entrega una notación que simplifica el diseño de estos circuitos, y nos permite trabajar con un nivel de abstracción mayor, conceptualizando las operaciones directamente sobre los operandos completos (como A y B en los casos anteriores) en vez de operaciones unitarias sobre bits. Hay que señalar, sin embargo, que también podemos hablar de buses de 1 bit, en los casos que corresponda, de manera de generalizar toda señal que interactúe con circuitos como buses.

Un aspecto interesante de la notación de buses es que nos permite escalar los circuitos a operaciones de mayor precisión, por ejemplo 8 o 32 bits, si tener que realizar modificaciones mayores **en el componente dibujado**. Es evidente que por debajo de la abstracción si será necesario realizar modificaciones para que dicho circuito funcione: en el caso del sumador de 8 bits necesitamos 8 Full-Adders conectados.

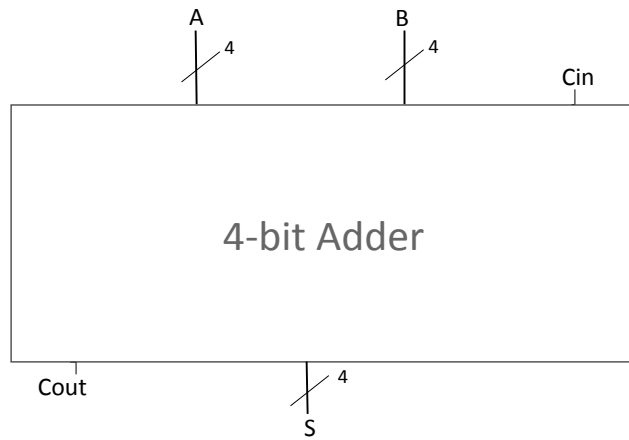


Figura 10: Sumador de 4 bits con notación de buses.

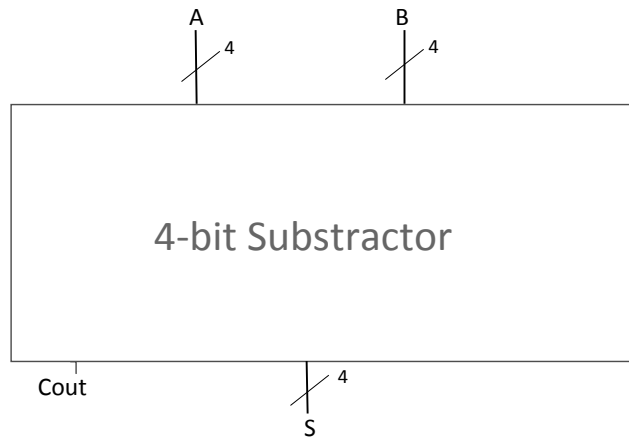


Figura 11: Restador de 4 bits con notación de buses.

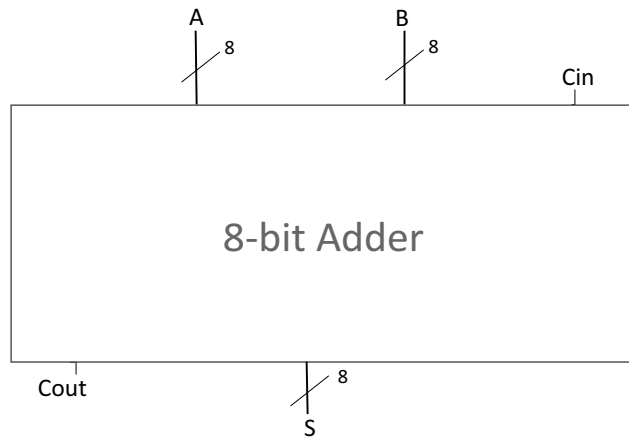


Figura 12: Sumador de 8 bits con notación de buses.

5.2. Circuitos de control

Una vez definida las abstracciones de los componentes con las que trabajaremos, debemos agregar mecanismos que permitan controlar y combinar estos distintos componentes de cálculo para construir una unidad funcional de cálculo para el computador.

5.2.1. Enabler

Una primera funcionalidad que nos interesa agregar a nuestras máquinas de cálculo es la capacidad de controlar su salida. Los circuitos que hemos diseñado hasta ahora están siempre entregando en su salida el resultado, es decir el flujo de datos no está siendo controlado. En algunas circunstancias podría ser relevante tener el control para **habilitar** o **deshabilitar** que la salida del componente sea el resultado.

En particular nos interesaría que dado un bit de datos $A0$ podamos a través de otro valor E controlar si la salida $A0'$ tendrá el valor de $A0$, es decir, «se deja pasar el flujo», o tendrá un valor 0, es decir, «se corta el flujo», lo que podemos representar con la siguiente tabla:

E	$A0'$
0	0
1	$A0$

Una compuerta que cumple exactamente con lo anterior es la compuerta **and** la cual en caso de tener una de sus entradas en 0 tendrá siempre salida 0 y en caso de tener una de sus entradas en 1 tendrá como salida el valor de la segunda entrada. Si consideramos como una de las entradas de la compuerta a E y a la otra como $A0$ tenemos un circuito que cumple exactamente con la tabla anterior, el cual se denomina *Enabler* o *Habilitador* ya que permite o habilitar o deshabilitar el flujo de datos.

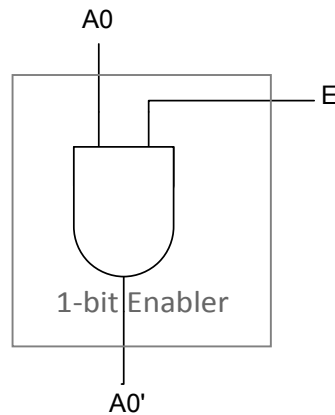


Figura 13: Enabler de 1 bit.

Podemos extender este circuito a datos con mayor número de bits. Lo interesante está en que mantenemos una sola señal E para controlar la habilitación y deshabilitación.

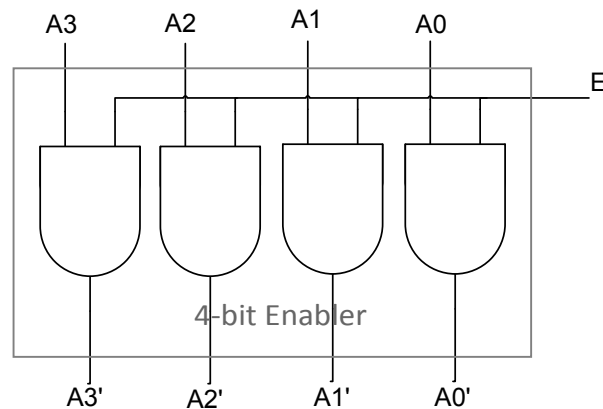


Figura 14: Enabler de 4 bits.

5.2.2. Multiplexor

El circuito del enabler nos permite regular el flujo de datos de una máquina de cálculo. Sin embargo no nos ayuda en el objetivo de tener múltiples operaciones simultáneamente. Necesitamos otro circuito que nos permita controlar que operación vamos a realizar, de manera de que dada una salida común podamos obtener mediante esta tanto la suma o resta de dos operandos, dependiendo de un valor de control.

Veamos el problema primero a nivel de bits: supongamos que tenemos dos datos $A0$ y $B0$ y una salida común $M0$. Nos gustaría poder controlar que dato sale dependiendo de una señal de selección S que cuando sea 0 entregue el valor de $A0$ y cuando sea 1 entregue el valor de $B0$, lo que se representa en la siguiente tabla:

S	$M0$
0	$A0$
1	$B0$

Para construir el circuito podemos utilizar el circuito del enabler (es decir la compuerta and) de la siguiente forma: podemos ocupar la señal S como señal de habilitación/deshabilitación de manera de que cuando sea 1 habilite una de las dos salidas, por ejemplo $B0$ y **simultáneamente** deshabilite $A0$. De manera equivalente con un valor 0 habilitará $A0$ y deshabilitará $B0$. Con esto nos aseguramos que dado un valor de S estamos obteniendo en las dos salidas siempre un valor y un 0. Si combinamos estas dos salidas mediante una compuerta **or** obtendremos como única salida el valor que hayamos seleccionado, circuito que se denomina *Multiplexor* o *Mux*.

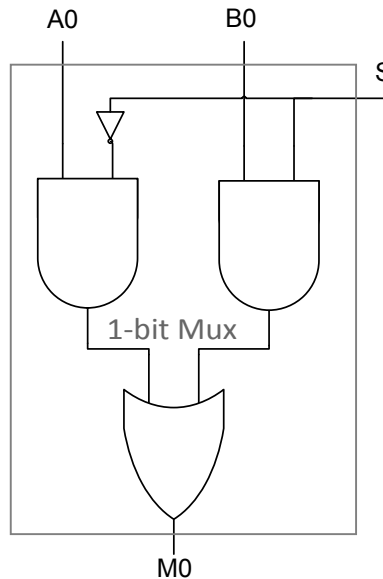


Figura 15: Multiplexor de 2 entradas de 1 bit de datos.

Al igual que en el enabler podemos escalar en el número de datos, usando varios multiplexores de 1 bit para obtener, por ejemplo, un multiplexor que elige entre dos valores de 4 bits.

Podemos extender aún más la noción de multiplexor, pensando por ejemplo en un caso de que existan 4 entradas distintas que queramos seleccionar. La opción más simple sería escalar 4 multiplexores, de manera que con 4 bits de control podemos controlar las 4 entradas. Podemos, sin embargo, optimizar este circuito de manera de ocupar sólo 2 bits de control: dado que 2 bits son capaces de representar 4 números ($0 = 00$, $1 = 01$, $2 = 10$, $3 = 11$), podemos diseñar un circuito que dependiendo de la combinación de los dos bits de control entregue una de las cuatro entradas, como se observa en la siguiente tabla:

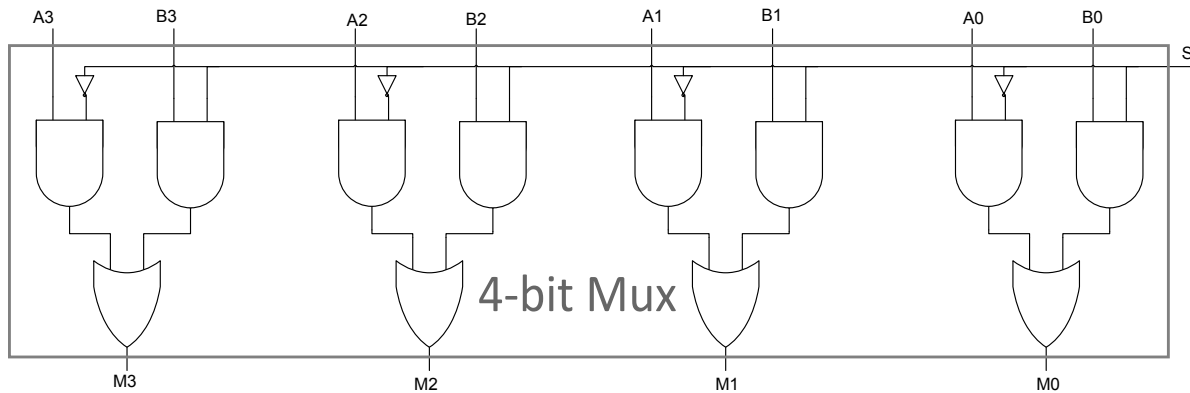


Figura 16: Multiplexor de 2 entradas de 4 bit de datos.

S1	S0	M
0	0	A
0	1	B
1	0	C
1	1	D

La implementación específica de este circuito no es relevante. Sólo nos interesa que existe como componente, y podemos trabajar con este abstrayéndonos de los detalles de su implementación:

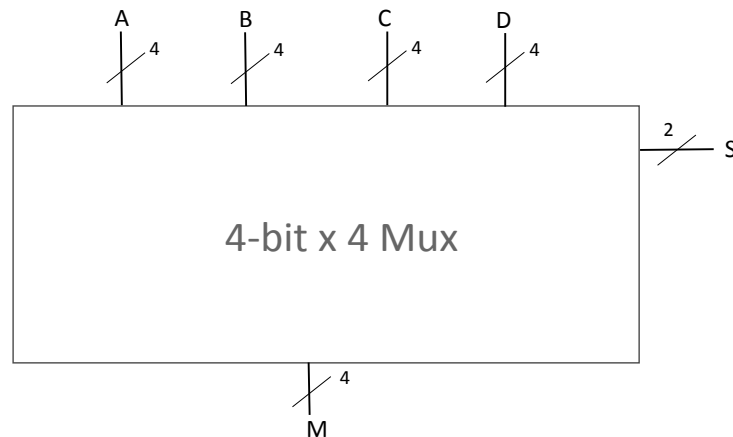


Figura 17: Multiplexor de 4 entradas de 4 bit de datos.

5.3. Buses de datos y control

Hay un elemento importante que surge como consecuencia del diseño de estos componentes. Los circuitos previamente estudiados (sumador y restador) los buses contenían los operandos y resultados, es decir eran **buses de datos**. En el caso del circuito enabler y multiplexor, en cambio, existen dos tipo de buses. Por una parte están los buses de datos, que transportan la información que sera habilitada/deshabilitada o seleccionada, según el circuito que se utilice. Sin embargo, además se cuentan con las señales de control o **buses de control**, como el bit *E* en el enabler o los bits de selección en el mux. La importancia de esta diferencia es que para ambos buses estamos ocupando la misma representación numérica (números binarios) y física, por lo que, como veremos más adelante, podemos combinar la información de los distintos buses si lo necesitamos.

6. Unidades de ejecución

Ahora que conocemos los circuitos de control, podemos combinar las distintas máquinas de cálculo para armar una unidad de cálculo o **unidad de ejecución**. Nos enfocaremos en diseñar la unidad más básica de un computador, denominada **unidad aritmética y lógica** o **ALU** por sus siglas en inglés. Como su nombre lo señala, esta unidad permite realizar operaciones aritméticas básicas (suma y resta) y también operaciones lógicas simples (and, or, not, etc). Algunos computadores tienen otras unidades de ejecución además de la ALU, por ejemplo una unidad aritmética para números de punto flotante o **FPU**, pero por ahora nos enfocaremos sólo en la ALU.

6.1. Sumador/Restador

El primer paso para completar la ALU es armar la unidad aritmética, que consta de un sumador y un restador. Ocupando el multiplexor de 4 bits de datos definido previamente podemos diseñar un sumador/-restador de una salida M , y con una señal de control S que cumpla con:

S	M
0	Suma
1	Resta

Combinando los circuitos de sumador y restador con el multiplexor obtenemos un circuito sumador/restador:

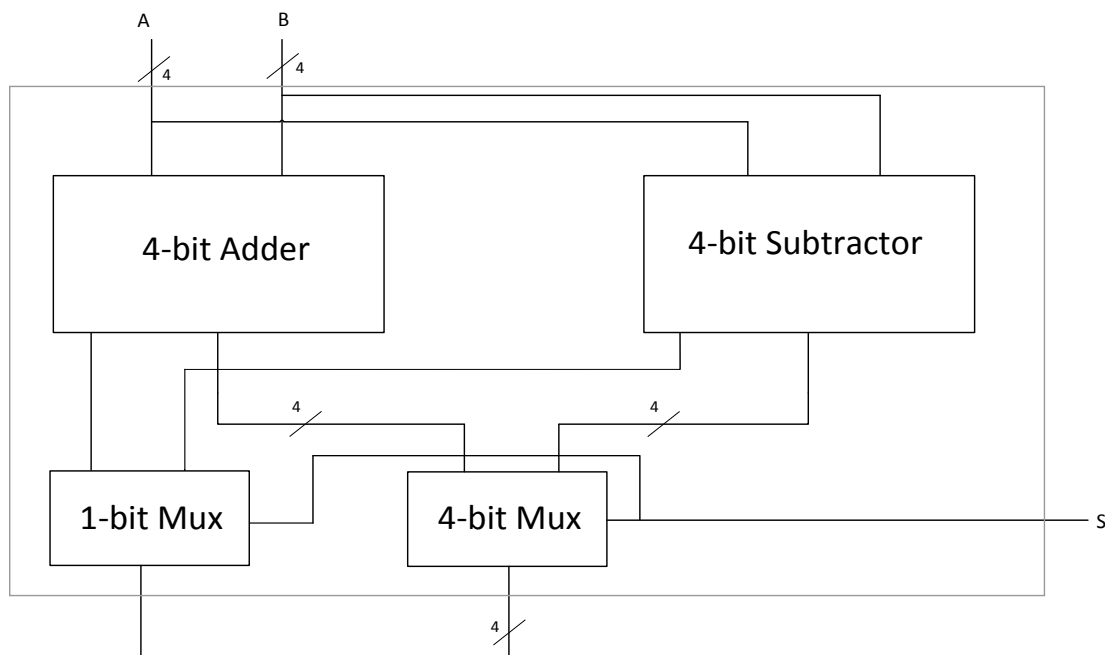


Figura 18: Sumador-Restador de 4 bits de datos.

Este circuito cumple con permitir sumar y restar dos valores, entregando el resultado por la misma salida. Existe, sin embargo, una optimización que podemos hacer y tiene relación con el hecho de que el restador ocupa internamente un sumador, por lo que este circuito sumador/restador necesita de dos circuitos sumadores. Una forma en que se optimiza este circuito, es reutilizando un único sumador para ambas operaciones y agregando multiplexores a las entradas para seleccionar si entra directamente el segundo operando o su negación (para el caso de la resta). Este circuito es un ejemplo de lo que mencionamos

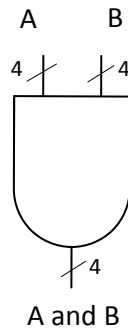


Figura 20: AND de 4 bit de datos.

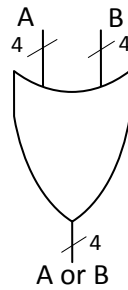


Figura 21: OR de 4 bit de datos.



Figura 22: OR de 4 bit de datos.

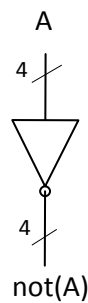


Figura 23: NOT de 4 bit de datos.

6.3. Operaciones de desplazamiento o **shifting**

Otra operación relevante que es posible implementar con compuertas lógicas es la operación de desplazamiento o shifting. Esta operación permite, dado un cierto número binario, «desplazarlo» hacia la izquierda o la derecha. Por ejemplo si se tiene almacenado el número de 4 bits 0101, al hacer un *shift* o desplazamien-

to a la izquierda obtenemos el número 1010, es decir se movieron los bits una posición a la izquierda. Si hubiésemos hecho un *shift* a la derecha, habríamos obtenido el número 0010.

La relevancia de esta operación tiene que ver con la interpretación aritmética de la operación de shift. Un shift a la izquierda puede ser interpretado como una multiplicación por 2; Un shift a la derecha puede ser interpretado como una división por 2. Esta característica hace que este circuito sea muchas veces agregado junto a la ALU como una unidad de ejecución adicional denominada **shifter**, permitiendo hacer shifts a la izquierda y a la derecha.

6.4. Unidad aritmética y lógica: ALU

Ya con todas las operaciones de la ALU definidas, nos interesa diseñar el componente completo. Dado que las operaciones que queremos agregar son 8: 2 operaciones aritméticas (suma y resta), 4 operaciones lógicas (and, or, xor, y not) y 2 operaciones de desplazamiento (shift left y shift right), necesitamos un multiplexor de 8 entradas y 3 señales de control, que cumpla con la siguiente tabla:

S2	S1	S0	M
0	0	0	Suma
0	0	1	Resta
0	1	0	And
0	1	1	Or
1	0	0	Not
1	0	1	Xor
1	1	0	Shift left
1	1	1	Shift right

El componente completo de la ALU lo podemos representar con la abstracción de la figura que aparece a continuación. Es importante destacar que para estos componentes ya no nos basta con el «dibujo» y el nombre del componente para saber la funcionalidad (como si era el caso del sumador). Acá necesitamos tener también la información de la tabla anterior, indicando que operaciones se realizan con que señales de control.

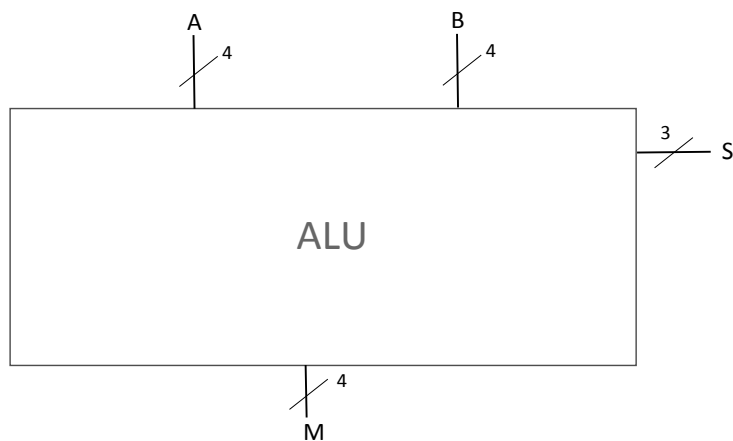


Figura 24: ALU de 4 bit de datos y 5 operaciones.

7. Ejercicios

- Implemente un circuito 2 bit Multiplier, que realice la multiplicación entre dos valores de 2 bits.

- Escriba un programa que simule el funcionamiento de un multiplexor de 2 entradas 4 bits, ocupando variables boolean para representar bits, y los operadores lógicos $\&$, \neg , \wedge y para representar compuertas lógicas.

8. Referencias

- Shannon, C.; A Symbolic Analysis of Relays and Switching Circuits, MIT Press, 1937.

9. Apéndice: Operaciones Bitwise (lógicas y shifts) en lenguajes de programación

Las operaciones lógicas bit a bit **and**, **or**, **xor** y **not**, así como las operaciones de desplazamiento o **shift**, pueden ser ocupadas en los lenguajes de programación tradicionales como C, C++, Java y C#. A continuación se presentan los símbolos habitualmente usados:

Sean las variables **a**, **b** y **n**:

- la operación **a and b** se escribe como:

a & b;

- la operación **a or b** se escribe como:

a | b;

- la operación **a xor b** se escribe como:

a ^ b;

- la operación **not a** se escribe como:

~ a

- la operación **shift left a en n bits** se escribe como:

a << n;

- la operación **shift right a en n bits** se escribe como:

a >> n;

Las operaciones bitwise tienen la ventaja de permitir modificar valores en bits específicos de un determinado número, debido a esto permiten implementar una serie de funcionalidades útiles:

- **Máscaras:** La idea de una máscara numérica es similar al de una máscara física, en este caso una máscara numérica corresponde a un valor que al ser «superpuesto» en otro valor, «deja ver» solamente parte del número original. Esto es importante en casos que las distintas partes de un número representen distinta información. Un ejemplo práctico son las máscaras de subred, usadas en las configuraciones de red de los computadores. La utilidad en este caso es que dado un IP en un computador (por ejemplo 10.10.10.101), una parte de este IP se puede ocupar para enviar un mensaje a la subred completa de computadores en la cual se encuentra el computador. Una subred posible es la 10.10.10.0, otra la 10.10.0.0. En general el IP de subred se puede obtener al aplicar una máscara al IP, y dependiendo de la máscara se obtendrá la subred requerida. La operación de máscara numérica corresponde a realizar un and bit a bit entre la máscara y el valor a enmascarar. En el ejemplo anterior, una posible máscara de subred es 255.255.255.0, que en binario corresponde a una secuencia de 24 unos seguidas de 8 ceros (cada valor entre puntos de un IP es un número de 8 bits). Al aplicar esa máscara al IP 10.10.10.101, los primeros 24 bits se conservan, dado que un and con 1 conserva el valor. Los 8 bits finales en cambio se pasan a 0, obteniendo 10.10.10.0, que sería en este caso el IP de subred.

A continuación se presenta un ejemplo en Java de la operación de enmascaramiento, ocupando representación hexadecimal para los números, lo que permite ver más fácilmente el resultado del enmascaramiento:

```

static void mascarar()
{
    int num1 = 0xF0;

    int num2 = 0xA1;

    int num3 = num1 & num2;

    System.out.println(String.format("%x", num3));
}

```

- **Flags:** Otra utilidad práctica de las operaciones bitwise es la posibilidad de guardar múltiple información en un solo número binario. Un ejemplo de esto son los flags, valores que pueden estar activos o no activos indicando con eso alguna propiedad. El sistema de permisos de archivos de Linux, por ejemplo, define tres posibles permisos: Lectura (Read), Escritura (Write), Ejecución (Execute). Para almacenar la información de si los flags están activos o no necesitamos solamente 1 bit por flag, por lo cual podemos ocupar un número binario de 3 bits para codificar esta información.

Para ocupar flags de 1 bit son necesarias dos funcionalidades: poder setear si cada flag está activo o no, **de manera independiente**, y poder obtener la información del estado de cada flag. Para realizar lo primero, si se quiere setear como activo el flag, basta con hacer un or con una máscara que tenga un uno el bit en la posición del flag, y ceros en el resto de los bits. Con esto, al hacer or con ceros no se pierden los estados de los otros flags, y se modifica a uno el bit correspondiente. En el caso de necesitar setear el flag en 0, basta con hacer un and con una máscara que tenga unos en todos los bits, menos en el que se quiere dejar en 0.

Para poder obtener información de cada flag, se requiere ocupar las mismas máscaras de seteo de flag activo, pero esta vez se aplica un and con el valor. Al hacer esto, el número será distinto de cero, solo si el bit del cual se quiere tener información estaba en cero, con lo cual se puede revisar esa condición para saber el estado.

A continuación se muestran ejemplos de código que implementa el seteo y obtención de valores de flags.

```

static void setFlagsOn()
{
    int permisos = 0x0;

    int mascara0 = 0x1;
    int mascara1 = 0x2;
    int mascara2 = 0x4;

    permisos = permisos | mascara0 | mascara1 | mascara2;

    System.out.println(permisos);
}

static void setFlagsOff()
{
    int permisos = 0x7;

    int mascara0 = 0x6;
    int mascara1 = 0x5;
    int mascara2 = 0x3;

    permisos = permisos & mascara0 & mascara1 & mascara2;

    System.out.println(permisos);
}

```

```

}

static void getFlags()
{
    int permisos = 0x7;

    int mascara0 = 0x1;
    int mascara1 = 0x2;
    int mascara2 = 0x4;

    int get0 = permisos & mascara0;

    if(get0 == 0)
        System.out.println("No tiene permiso 0");
    else
        System.out.println("Tiene permiso 0");

    int get1 = permisos & mascara1;

    if(get1 == 0)
        System.out.println("No tiene permiso 1");
    else
        System.out.println("Tiene permiso 1");

    int get2 = permisos & mascara2;

    if(get2 == 0)
        System.out.println("No tiene permiso 2");
    else
        System.out.println("Tiene permiso 2");
}

```

- **Xor Clear:** El xor también es un operando bitwise que permite realizar funcionalidades útiles. Un ejemplo que se muestra continuación es que un número aplicado xor con sí mismo resulta siempre en 0, por lo cual se puede esta operación como un «clear» para setear en 0 un cierto número:

```

static void xorClear()
{
    int num1 = 0x7;

    int num2 = num1 ^ num1;

    System.out.println(String.format("%x", num2));
}

```

■ División y Multiplicación por potencias de 2:

Las operaciones de desplazamiento tienen una importante utilidad, dado que un shift a la derecha de un número binario, por ejemplo $(1010)_2 = 10$ resulta en $(0101)_2 = 5$ el cual corresponde al número original dividido en 2. De manera similar, un shift a la izquierda corresponde a multiplicar por 2, en el ejemplo: $(10100)_2 = 20$. El hecho de que ocurra esto es evidente, si pensamos que en base de 10, desplazar un dígito a la derecha o izquierda se interpreta también como dividir o multiplicar por 10. En el caso de un número binario, como la base es 2, las operaciones que se logran son multiplicar y dividir por 2.

El siguiente código muestra la operación de shift en Java:

```
static void shift()
{
    int num1 = 10;

    int num2 = num1 >> 1;

    int num3 = num1 << 1;

    System.out.println(num2);
    System.out.println(num3);
}
```