Curso Relativista de Relatividad General

Darío Núñez

Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM

Escuela de Relatividad General y Ondas Gravitatorias
Reunión de la Red Temática de Agujeros Negros vibrantes y emisión de ondas gravitatorias
Guadalajara, Jalisco, 7-11 de noviembre de 2016

Ley Gravitacional de Newton y Ecuación de Poisson

Ya vimos entonces cómo ir traduciendo las leyes de la física descritas en la forma newtoniana, a una forma covariante válida en el espacio tiempo.

- Para expresar a una de las leyes más fundamentales de la Física, la ley de la Gravitación Universal de Newton, a una forma covariante, la escribimos como la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional por unidad de masa, Φ

$$\vec{F} = -G \, \frac{m \, M}{r^2} \, \hat{r} \implies \nabla^2 \, \Phi = 4 \, \pi \, G \, \rho$$

Ley Gravitacional de Newton y Ecuación de Poisson

Ya vimos entonces cómo ir traduciendo las leyes de la física descritas en la forma newtoniana, a una forma covariante válida en el espacio tiempo.

- Para expresar a una de las leyes más fundamentales de la Física, la ley de la Gravitación Universal de Newton, a una forma covariante, la escribimos como la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional por unidad de masa, Φ

$$\vec{F} = -G \, \frac{m \, M}{r^2} \, \hat{r} \implies \nabla^2 \, \Phi = 4 \, \pi \, G \, \rho$$

- Siguiendo la idea sugerida con la que nos quedamos de que el potencial gravitacional, Φ se puede relacionar con el tensor métrico $(g_{00} = -1 - 2 \, \epsilon \, \Phi / c^2)$

Ley Gravitacional de Newton y Ecuación de Poisson

Ya vimos entonces cómo ir traduciendo las leyes de la física descritas en la forma newtoniana, a una forma covariante válida en el espacio tiempo.

- Para expresar a una de las leyes más fundamentales de la Física, la ley de la Gravitación Universal de Newton, a una forma covariante, la escribimos como la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional por unidad de masa, Φ

$$\vec{F} = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\hat{r} \implies \nabla^2\,\Phi = 4\,\pi\,G\,\rho$$

- Siguiendo la idea sugerida con la que nos quedamos de que el potencial gravitacional, Φ se puede relacionar con el tensor métrico $(g_{00} = -1 - 2\,\epsilon\,\Phi/c^2)$
- De la ecuación de Poisson, vemos que hay que buscar un objeto geométrico que involucre a segundas derivadas de la métrica: $g_{\mu\,\nu\,,\,\alpha\,\beta}$.

Riemann

- Ya desde hacía tiempo se contaba con el trabajo monumental de Bernard Riemann sobre geometría diferencial, en el que mostró que existe y es único, un tensor formado por el tensor métrico y hasta sus segundas derivadas. Es un tensor que describe a la curvatura

Riemann

- Ya desde hacía tiempo se contaba con el trabajo monumental de Bernard Riemann sobre geometría diferencial, en el que mostró que existe y es único, un tensor formado por el tensor métrico y hasta sus segundas derivadas. Es un tensor que describe a la curvatura
- Este tensor tiene la forma

$$R^{\alpha}{}_{\nu\,\lambda\,\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\,\rho\,,\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\,\lambda\,,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\,\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\,\mu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\,\lambda},$$

Riemann

- Ya desde hacía tiempo se contaba con el trabajo monumental de Bernard Riemann sobre geometría diferencial, en el que mostró que existe y es único, un tensor formado por el tensor métrico y hasta sus segundas derivadas. Es un tensor que describe a la curvatura
- Este tensor tiene la forma

$$R^{\alpha}{}_{\nu\lambda\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho,\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda},$$

- Es una cantidad tensorial, de hecho, La Cantidad Tensorial, se le conoce como **el tensor de Riemann**

Leyenda : Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 - 1866.

Riemann

- Con algo de álgebra, se puede mostrar que el tensor de Riemann con los cuatro índices covariante se reescribe como

$$
\begin{aligned}
R_{\beta\,\nu\,\lambda\,\rho} &= \frac{1}{2}\left(g_{\nu\,\lambda\,,\rho\,\beta} - g_{\beta\,\lambda\,,\rho\,\nu} + g_{\beta\,\rho\,,\lambda\,\nu} - g_{\nu\,\rho\,,\lambda\,\beta}\right) \\
&\quad - g_{\eta\,\sigma}\left(\Gamma^{\eta}{}_{\lambda\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\,\rho} - \Gamma^{\eta}{}_{\rho\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\,\lambda}\right),
\end{aligned}
$$

Riemann

- Con algo de álgebra, se puede mostrar que el tensor de Riemann con los cuatro índices covariante se reescribe como

$$R_{\beta\,\nu\,\lambda\,\rho} = \frac{1}{2}\left(g_{\nu\,\lambda\,,\rho\,\beta} - g_{\beta\,\lambda\,,\rho\,\nu} + g_{\beta\,\rho\,,\lambda\,\nu} - g_{\nu\,\rho\,,\lambda\,\beta}\right) \\ -g_{\eta\,\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\lambda\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\,\rho} - \Gamma^{\eta}_{\rho\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\,\lambda}\right),$$

- Que vemos claramente que es como lo queríamos, un tensor *bona fide* que involucra a las segundas derivadas del tensor métrico.

Riemann

- Con algo de álgebra, se puede mostrar que el tensor de Riemann con los cuatro índices covariante se reescribe como

$$
\begin{aligned}
R_{\beta\,\nu\,\lambda\,\rho} &= \frac{1}{2}\left(g_{\nu\,\lambda\,,\rho\,\beta} - g_{\beta\,\lambda\,,\rho\,\nu} + g_{\beta\,\rho\,,\lambda\,\nu} - g_{\nu\,\rho\,,\lambda\,\beta}\right) \\
&\quad - g_{\eta\,\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\lambda\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\,\rho} - \Gamma^{\eta}_{\rho\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\,\lambda}\right),
\end{aligned}
$$

- Que vemos claramente que es como lo queríamos, un tensor *bona fide* que involucra a las segundas derivadas del tensor métrico.
- Podemos considerar que, la expresión que reescribe a la ley Gravitacional de Newton de forma covariante en el espacio tiempo va a involucrar al tensor de Riemann.

Riemann

- Con algo de álgebra, se puede mostrar que el tensor de Riemann con los cuatro índices covariante se reescribe como

$$
\begin{aligned}
R_{\beta\,\nu\,\lambda\,\rho} \;&=\; \frac{1}{2}\left(g_{\nu\,\lambda\,,\rho\,\beta} - g_{\beta\,\lambda\,,\rho\,\nu} + g_{\beta\,\rho\,,\lambda\,\nu} - g_{\nu\,\rho\,,\lambda\,\beta}\right) \\
&\quad - g_{\eta\,\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\lambda\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\,\rho} - \Gamma^{\eta}_{\rho\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\,\lambda}\right),
\end{aligned}
$$

- Que vemos claramente que es como lo queríamos, un tensor *bona fide* que involucra a las segundas derivadas del tensor métrico.
- Podemos considerar que, la expresión que reescribe a la ley Gravitacional de Newton de forma covariante en el espacio tiempo va a involucrar al tensor de Riemann.
- Es un objeto con unidades de inverso de área, es decir, curvatura.

Riemann

- Con algo de álgebra, se puede mostrar que el tensor de Riemann con los cuatro índices covariante se reescribe como

$$R_{\beta\,\nu\,\lambda\,\rho} = \frac{1}{2}\left(g_{\nu\,\lambda\,,\rho\,\beta} - g_{\beta\,\lambda\,,\rho\,\nu} + g_{\beta\,\rho\,,\lambda\,\nu} - g_{\nu\,\rho\,,\lambda\,\beta}\right)$$
$$-g_{\eta\,\sigma}\left(\Gamma^{\eta}_{\lambda\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\,\rho} - \Gamma^{\eta}_{\rho\,\beta}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\,\lambda}\right),$$

- Que vemos claramente que es como lo queríamos, un tensor *bona fide* que involucra a las segundas derivadas del tensor métrico.
- Podemos considerar que, la expresión que reescribe a la ley Gravitacional de Newton de forma covariante en el espacio tiempo va a involucrar al tensor de Riemann.
- Es un objeto con unidades de inverso de área, es decir, curvatura.
- Tiene muchas propiedades interesantes, aunque adolece de redundancias.

Riemann

- Usando las operaciones tensoriales válidas, como la contracción, podemos definir al **tensor de Ricci**

$$R_{\alpha\,\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\,\mu\,\beta},$$

que es un tensor simétrico.

Riemann

- Usando las operaciones tensoriales válidas, como la contracción, podemos definir al **tensor de Ricci**

$$R_{\alpha\,\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\,\mu\,\beta},$$

  que es un tensor simétrico.

- Ya en este camino, ahora le podemos subir el índice a Ricci y volver a contraer

$$R = R^{\mu}{}_{\mu},$$

  lo que nos da un escalar, el **escalar de curvatura**.

- Usando las operaciones tensoriales válidas, como la contracción, podemos definir al **tensor de Ricci**

$$R_{\alpha\,\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\,\mu\,\beta},$$

que es un tensor simétrico.

- Ya en este camino, ahora le podemos subir el índice a Ricci y volver a contraer

$$R = R^{\mu}{}_{\mu},$$

lo que nos da un escalar, el **escalar de curvatura**.

- Otro tensor relacionado con la curvatura es el **tensor de Weyl**

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\lambda\tau} \quad &= \quad R_{\mu\nu\lambda\tau} - \frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda}\,R_{\nu\tau} + g_{\nu\tau}\,R_{\mu\lambda} - g_{\nu\lambda}\,R_{\mu\tau} - g_{\mu\tau}\,R_{\nu\lambda}\right) + \\ &\quad\ \frac{1}{6}\left(g_{\mu\lambda}\,g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}\,g_{\nu\lambda}\right)\,R, \end{aligned}$$

muy útil para describir a las ondas gravitacionales.

tensor de Bianchi-Einstein

- Otro de los tensores relacionados con la curvatura, lo descubre Bianchi

$$G_{\mu\,\nu} = R_{\mu\,\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\,\nu}\,R$$

que es el tensor de Bianchi-Einstein.

- Otro de los tensores relacionados con la curvatura, lo descubre Bianchi

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

que es el tensor de Bianchi-Einstein.

- Este tensor tiene una propiedad muy curiosa

$$G^{\mu}{}_{\nu\,;\mu} = 0$$

Su divergencia es cero...

- Estos objetos nos dan ya una buena idea de cómo construir la buscada expresión de la ecuación de Poisson covariante. $\nabla^2 \, \Phi = 4 \, \pi \, G \, \rho$.

generalización de la ecuación de Poisson al cuadriespacio

- Estos objetos nos dan ya una buena idea de cómo construir la buscada expresión de la ecuación de Poisson covariante. $\nabla^2 \Phi = 4\,\pi\,G\,\rho$.
- Del lado derecho tendremos un objeto que debe estar geometricamente bien definido, que describa a la materia. Ya platicamos que tenemos a los tensores $T^{\mu}{}_{\nu}$ que describen a diferentes tipos de materia y que las ecuaciones de campo vienen dadas por la divergencia del tensor igualada a cero, $T^{\mu}{}_{\nu\,;\,\mu} = 0$.

generalización de la ecuación de Poisson al cuadriespacio

- Estos objetos nos dan ya una buena idea de cómo construir la buscada expresión de la ecuación de Poisson covariante. $\nabla^2 \Phi = 4\,\pi\,G\,\rho$.
- Del lado derecho tendremos un objeto que debe estar geometricamente bien definido, que describa a la materia. Ya platicamos que tenemos a los tensores $T^{\mu}{}_{\nu}$ que describen a diferentes tipos de materia y que las ecuaciones de campo vienen dadas por la divergencia del tensor igualada a cero, $T^{\mu}{}_{\nu\,;\,\mu} = 0$.
- Por ende, del lado izquierdo podremos un tensor relacionado con la curvatura; que sea de segundo orden y que tenga divergencia cero...

- Estos objetos nos dan ya una buena idea de cómo construir la buscada expresión de la ecuación de Poisson covariante. $\nabla^2 \Phi = 4\,\pi\, G\,\rho$.
- Del lado derecho tendremos un objeto que debe estar geometricamente bien definido, que describa a la materia. Ya platicamos que tenemos a los tensores $T^{\mu}{}_{\nu}$ que describen a diferentes tipos de materia y que las ecuaciones de campo vienen dadas por la divergencia del tensor igualada a cero, $T^{\mu}{}_{\nu\,;\,\mu} = 0$.
- Por ende, del lado izquierdo podremos un tensor relacionado con la curvatura; que sea de segundo orden y que tenga divergencia cero...
- ¡Pues Bianchi!

generalización de la ecuación de Poisson al cuadriespacio

- Estos objetos nos dan ya una buena idea de cómo construir la buscada expresión de la ecuación de Poisson covariante. $\nabla^2 \Phi = 4\,\pi\, G\, \rho$.
- Del lado derecho tendremos un objeto que debe estar geometricamente bien definido, que describa a la materia. Ya platicamos que tenemos a los tensores $T^{\mu}{}_{\nu}$ que describen a diferentes tipos de materia y que las ecuaciones de campo vienen dadas por la divergencia del tensor igualada a cero, $T^{\mu}{}_{\nu\,;\,\mu} = 0$.
- Por ende, del lado izquierdo podremos un tensor relacionado con la curvatura; que sea de segundo orden y que tenga divergencia cero...
- ¡Pues Bianchi!
- entonces

$$G^{\mu}{}_{\nu} \propto T^{\mu}{}_{\nu}.$$

- Por unidades, la constante de proporcionalidad debe ser un múltiplo de $\frac{G}{c^4}$.

generalización de la ecuación de Poisson al cuadriespacio

- Por unidades, la constante de proporcionalidad debe ser un múltiplo de $\frac{G}{c^4}$.
- Y, para fijar la constante, vemos esta expresión en el caso del límite newtoniano donde
  - Consideramos el caso del fluido y tenemos que $\rho\, c^2 >> p$.
  - Consideramos que las velocidades no son relativistas, $v << c$.
  - Que el espacio es casi plano, $g_{\alpha\,\beta} = \eta_{\alpha\,\beta} + \epsilon\, h_{\alpha\,\beta}$, con $h_{00} = -2\Phi/c^2$ y con el potencial estático.

generalización de la ecuación de Poisson al cuadriespacio

- Por unidades, la constante de proporcionalidad debe ser un múltiplo de $\frac{G}{c^4}$.
- Y, para fijar la constante, vemos esta expresión en el caso del límite newtoniano donde
    - Consideramos el caso del fluido y tenemos que $\rho\, c^2 >> p$.
    - Consideramos que las velocidades no son relativistas, $v << c$.
    - Que el espacio es casi plano, $g_{\alpha\,\beta} = \eta_{\alpha\,\beta} + \epsilon\, h_{\alpha\,\beta}$, con $h_{00} = -2\Phi/c^2$ y con el potencial estático.
- En este caso, la ecuación propuesta se reduce a la ecuación de Poisson, al fijar la constante a $8\,\pi$.

generalización de la ecuación de Poisson al cuadriespacio

- Por unidades, la constante de proporcionalidad debe ser un múltiplo de $\frac{G}{c^4}$.
- Y, para fijar la constante, vemos esta expresión en el caso del límite newtoniano donde
  - Consideramos el caso del fluido y tenemos que $\rho\, c^2 >> p$.
  - Consideramos que las velocidades no son relativistas, $v << c$.
  - Que el espacio es casi plano, $g_{\alpha\,\beta} = \eta_{\alpha\,\beta} + \epsilon\, h_{\alpha\,\beta}$, con $h_{00} = -2\Phi/c^2$ y con el potencial estático.
- En este caso, la ecuación propuesta se reduce a la ecuación de Poisson, al fijar la constante a $8\,\pi$.
- Voilà!

$$G^{\mu}{}_{\nu} = 8\,\pi\,\frac{G}{c^4}\,T^{\mu}{}_{\nu}$$

son ecuaciones perfectamente tensoriales, que se reducen en el límite a la ecuación gravitacional.

Ecuaciones de Einstein

Son, **las ecuaciones de Einstein**:

$$R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}{}_{\nu}\,R = 8\,\pi\,\frac{G}{c^4}\,T^{\mu}{}_{\nu}.$$

Ecuaciones de Einstein

- Vemos que nos relacionan materia con geometría.

Ecuaciones de Einstein

- Vemos que nos relacionan materia con geometría.
- Se reducen perfectamente a la ecuación de Poisson, por ende, incluyen todas las predicciones que ya tenía la Ley Gravitacional de Newton, pero...

Ecuaciones de Einstein

- Vemos que nos relacionan materia con geometría.
- Se reducen perfectamente a la ecuación de Poisson, por ende, incluyen todas las predicciones que ya tenía la Ley Gravitacional de Newton, pero...
- ¡Sin la fuerza gravitacional! La materia se mueve en este espacio no por una fuerza, sino por la geometría de él.

Ecuaciones de Einstein

- Vemos que nos relacionan materia con geometría.
- Se reducen perfectamente a la ecuación de Poisson, por ende, incluyen todas las predicciones que ya tenía la Ley Gravitacional de Newton, pero...
- ¡Sin la fuerza gravitacional! La materia se mueve en este espacio no por una fuerza, sino por la geometría de él.
- Al ser prefectamente covariantes, incluyen cualquier tipo de espacio-tiempo

Ecuaciones de Einstein

- Vemos que nos relacionan materia con geometría.
- Se reducen perfectamente a la ecuación de Poisson, por ende, incluyen todas las predicciones que ya tenía la Ley Gravitacional de Newton, pero...
- ¡Sin la fuerza gravitacional! La materia se mueve en este espacio no por una fuerza, sino por la geometría de él.
- Al ser prefectamente covariantes, incluyen cualquier tipo de espacio-tiempo
- Tiene predicciones falseables

Ecuaciones de Einstein

- Vemos que nos relacionan materia con geometría.
- Se reducen perfectamente a la ecuación de Poisson, por ende, incluyen todas las predicciones que ya tenía la Ley Gravitacional de Newton, pero...
- ¡Sin la fuerza gravitacional! La materia se mueve en este espacio no por una fuerza, sino por la geometría de él.
- Al ser prefectamente covariantes, incluyen cualquier tipo de espacio-tiempo
- Tiene predicciones falseables
- Ha pasado con mucho éxito, todas los experimentos en los que se ha probado.

Ecuaciones de Einstein

- Vemos que nos relacionan materia con geometría.
- Se reducen perfectamente a la ecuación de Poisson, por ende, incluyen todas las predicciones que ya tenía la Ley Gravitacional de Newton, pero...
- ¡Sin la fuerza gravitacional! La materia se mueve en este espacio no por una fuerza, sino por la geometría de él.
- Al ser prefectamente covariantes, incluyen cualquier tipo de espacio-tiempo
- Tiene predicciones falseables
- Ha pasado con mucho éxito, todas los experimentos en los que se ha probado.
- Es uno de los pilares de la Ciencia actual.

Ecuaciones de Einstein

- Vemos que nos relacionan materia con geometría.
- Se reducen perfectamente a la ecuación de Poisson, por ende, incluyen todas las predicciones que ya tenía la Ley Gravitacional de Newton, pero...
- ¡Sin la fuerza gravitacional! La materia se mueve en este espacio no por una fuerza, sino por la geometría de él.
- Al ser prefectamente covariantes, incluyen cualquier tipo de espacio-tiempo
- Tiene predicciones falseables
- Ha pasado con mucho éxito, todas los experimentos en los que se ha probado.
- Es uno de los pilares de la Ciencia actual.
- Son, muy estéticas.

- Tienen como solución a los hoyos negros

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)\,c^2\,d\,t^2 + \frac{d\,r^2}{\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)} + r^2\,d\,\Omega^2,$$

Ecuaciones de Einstein

- Tienen como solución a los hoyos negros

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)\,c^2\,d\,t^2 + \frac{d\,r^2}{\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)} + r^2\,d\,\Omega^2,$$

- Al Universo de Friedmann

$$ds^2 = -c^2\,d\,t^2 + a^2(t)\,\left(\frac{d\,r^2}{1 - k\,r} + r^2\,d\,\Omega^2\right),$$

- Tienen como solución a los hoyos negros

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)\,c^2\,d\,t^2 + \frac{d\,r^2}{\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)} + r^2\,d\,\Omega^2,$$

- Al Universo de Friedmann

$$ds^2 = -c^2\,d\,t^2 + a^2(t)\,\left(\frac{d\,r^2}{1 - k\,r} + r^2\,d\,\Omega^2\right),$$

- Wormholes, estrellas de neutrones y de bosones, la historia con la Λ.

Ecuaciones de Einstein

- Tienen como solución a los hoyos negros

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)\,c^2\,d\,t^2 + \frac{d\,r^2}{\left(1 - 2\frac{G\,M}{c^2\,r}\right)} + r^2\,d\,\Omega^2,$$

- Al Universo de Friedmann

$$ds^2 = -c^2\,d\,t^2 + a^2(t)\,\left(\frac{d\,r^2}{1 - k\,r} + r^2\,d\,\Omega^2\right),$$

- Wormholes, estrellas de neutrones y de bosones, la historia con la Λ.
- Y, a las ondas gravitacionales.

Ecuaciones de Einstein

- En efecto, al considerar la métrica casi plana

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}$$

y substituirla en las ecuaciones de Einstein, empezando por Riemann covariante a orden ϵ los términos principales son

$$\delta\, R_{\beta\,\nu\,\lambda\,\rho} \sim \frac{1}{2}\left(h_{\nu\,\lambda\,,\rho\,\beta} - h_{\beta\,\lambda\,,\rho\,\nu} + h_{\beta\,\rho\,,\lambda\,\nu} - h_{\nu\,\rho\,,\lambda\,\beta}\right)$$

Ecuaciones de Einstein

- En efecto, al considerar la métrica casi plana

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}$$

y substituirla en las ecuaciones de Einstein, empezando por Riemann covariante a orden ϵ los términos principales son

$$\delta\, R_{\beta\,\nu\,\lambda\,\rho} \sim \frac{1}{2}\left(h_{\nu\,\lambda\,,\rho\,\beta} - h_{\beta\,\lambda\,,\rho\,\nu} + h_{\beta\,\rho\,,\lambda\,\nu} - h_{\nu\,\rho\,,\lambda\,\beta}\right)$$

- Con el que construimos $\delta\, R_{\mu\nu}$, $\delta\, R$ y $\delta\, G_{\mu\nu}$ llegando finalmente a una ecuación para la perturbación con un término de la forma

$$\Box\, h_{\mu\nu} = 8\,\pi\,\frac{G}{c^4}\,\delta\, T_{\mu\nu}$$

donde $\Box = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2} + \nabla^2$

Ecuaciones de Einstein

- En efecto, al considerar la métrica casi plana

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}$$

y substituirla en las ecuaciones de Einstein, empezando por Riemann covariante a orden ϵ los términos principales son

$$\delta\, R_{\beta\,\nu\,\lambda\,\rho} \sim \frac{1}{2}\left(h_{\nu\,\lambda\,,\rho\,\beta} - h_{\beta\,\lambda\,,\rho\,\nu} + h_{\beta\,\rho\,,\lambda\,\nu} - h_{\nu\,\rho\,,\lambda\,\beta}\right)$$

- Con el que construimos $\delta\, R_{\mu\nu}$, $\delta\, R$ y $\delta\, G_{\mu\nu}$ llegando finalmente a una ecuación para la perturbación con un término de la forma

$$\Box\, h_{\mu\nu} = 8\,\pi\,\frac{G}{c^4}\,\delta\, T_{\mu\nu}$$

donde $\Box = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2} + \nabla^2$

- ¡Una ecuación de onda!

- En efecto, al considerar la métrica casi plana

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}$$

y substituirla en las ecuaciones de Einstein, empezando por Riemann covariante a orden ϵ los términos principales son

$$\delta\, R_{\beta\,\nu\,\lambda\,\rho} \sim \frac{1}{2}\,(h_{\nu\,\lambda\,,\rho\,\beta} - h_{\beta\,\lambda\,,\rho\,\nu} + h_{\beta\,\rho\,,\lambda\,\nu} - h_{\nu\,\rho\,,\lambda\,\beta})$$

- Con el que construimos $\delta\, R_{\mu\nu}$, $\delta\, R$ y $\delta\, G_{\mu\nu}$ llegando finalmente a una ecuación para la perturbación con un término de la forma

$$\Box\, h_{\mu\nu} = 8\,\pi\,\frac{G}{c^4}\,\delta\, T_{\mu\nu}$$

donde $\Box = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2} + \nabla^2$
- ¡Una ecuación de onda!
- Por ello, las perturbaciones métricas son las ondas de la geometría, las ondas gravitacionales.

Desviación geodésica

- Finalmente, consideremos dos trayectorias geodésicas que siguen líneas mundo cercanas, $x^\mu(\tau)$ y $x^\mu(\tau)+\epsilon^\mu(\tau)$, con ϵ^μ un cuadrivector con norma muy pequeña.

Desviación geodésica

- Finalmente, consideremos dos trayectorias geodésicas que siguen líneas mundo cercanas, $x^\mu(\tau)$ y $x^\mu(\tau)+\epsilon^\mu(\tau)$, con ϵ^μ un cuadrivector con norma muy pequeña.
- Se puede estudiar cuál es la ecuación que sigue este vector ϵ^μ, que es un problema que se conoce como *desviación geodésica*. Nombre poco afortunado.

Desviación geodésica

- Finalmente, consideremos dos trayectorias geodésicas que siguen líneas mundo cercanas, $x^\mu(\tau)$ y $x^\mu(\tau) + \epsilon^\mu(\tau)$, con ϵ^μ un cuadrivector con norma muy pequeña.
- Se puede estudiar cuál es la ecuación que sigue este vector ϵ^μ, que es un problema que se conoce como *desviación geodésica*. Nombre poco afortunado.
- Sí es un problema con su cuota de álgebra pero, como podíamos esperar, se relaciona con el famoso Quinto postulado de Euclides. Si el espacio es plano, las geodésicas serán rectas, paralelas y el vector se mantendrá constante.

Desviación geodésica

- Finalmente, consideremos dos trayectorias geodésicas que siguen líneas mundo cercanas, $x^\mu(\tau)$ y $x^\mu(\tau) + \epsilon^\mu(\tau)$, con ϵ^μ un cuadrivector con norma muy pequeña.
- Se puede estudiar cuál es la ecuación que sigue este vector ϵ^μ, que es un problema que se conoce como *desviación geodésica*. Nombre poco afortunado.
- Sí es un problema con su cuota de álgebra pero, como podíamos esperar, se relaciona con el famoso Quinto postulado de Euclides. Si el espacio es plano, las geodésicas serán rectas, paralelas y el vector se mantendrá constante.
- En general se obtiene que el vector satisface (pueden ver en el libro RG)

$$\frac{D^2\,\epsilon^\mu}{D\,\tau^2} = \epsilon^\rho\,R^\mu{}_{\nu\,\rho\,\lambda}\,u^\lambda\,u^\nu .$$

Y, cuando esta curvatura es debida al paso de la onda gravitatoria, las partículas cercanas sentirán en cambio en la distancia entre ellas. Esto se discutirá en el curso siguiente.

Desviación geodésica

- Con esto termina el curso relativista

Desviación geodésica

- Con esto termina el curso relativista
- Vimos como iniciando con las preguntas de quíen y cómo se observa, se mide, a los fenómenos en la Naturaleza, se llegó al concepto de espacio-tiempo, a la idea y necesidad de covarianza, que nos llevó a construir objetos geométricos covariantes y esto nos permitió reescribir a las leyes de la Física en el cuadriespacio de un modo covariante.

Desviación geodésica

- Con esto termina el curso relativista
- Vimos como iniciando con las preguntas de quíen y cómo se observa, se mide, a los fenómenos en la Naturaleza, se llegó al concepto de espacio-tiempo, a la idea y necesidad de covarianza, que nos llevó a construir objetos geométricos covariantes y esto nos permitió reescribir a las leyes de la Física en el cuadriespacio de un modo covariante.
- Al covariantizar a la ley de gravitación Universal, nos llevamos sorpresas y llegamos a las ecuaciones de Einstein, cpncluyendo que la materia y la geometría están relacionadas y se afectan.

Desviación geodésica

- Con esto termina el curso relativista
- Vimos como iniciando con las preguntas de quíen y cómo se observa, se mide, a los fenómenos en la Naturaleza, se llegó al concepto de espacio-tiempo, a la idea y necesidad de covarianza, que nos llevó a construir objetos geométricos covariantes y esto nos permitió reescribir a las leyes de la Física en el cuadriespacio de un modo covariante.
- Al covariantizar a la ley de gravitación Universal, nos llevamos sorpresas y llegamos a las ecuaciones de Einstein, cpncluyendo que la materia y la geometría están relacionadas y se afectan.
- Mencionamos la riqueza de éstas ecuaciones, con soluciones muy interesantes,

Desviación geodésica

- Con esto termina el curso relativista
- Vimos como iniciando con las preguntas de quíen y cómo se observa, se mide, a los fenómenos en la Naturaleza, se llegó al concepto de espacio-tiempo, a la idea y necesidad de covarianza, que nos llevó a construir objetos geométricos covariantes y esto nos permitió reescribir a las leyes de la Física en el cuadriespacio de un modo covariante.
- Al covariantizar a la ley de gravitación Universal, nos llevamos sorpresas y llegamos a las ecuaciones de Einstein, cpncluyendo que la materia y la geometría están relacionadas y se afectan.
- Mencionamos la riqueza de éstas ecuaciones, con soluciones muy interesantes,
- Que incluyen a las ondas gravitacionales.

Desviación geodésica

- Con esto termina el curso relativista
- Vimos como iniciando con las preguntas de quíen y cómo se observa, se mide, a los fenómenos en la Naturaleza, se llegó al concepto de espacio-tiempo, a la idea y necesidad de covarianza, que nos llevó a construir objetos geométricos covariantes y esto nos permitió reescribir a las leyes de la Física en el cuadriespacio de un modo covariante.
- Al covariantizar a la ley de gravitación Universal, nos llevamos sorpresas y llegamos a las ecuaciones de Einstein, cpncluyendo que la materia y la geometría están relacionadas y se afectan.
- Mencionamos la riqueza de éstas ecuaciones, con soluciones muy interesantes,
- Que incluyen a las ondas gravitacionales.
- ¡A seguir trabajando!

Ejercicios 2

- Demuestra, a partir de la defición del tensor de Riemann mixto, la expresión para el tensor con todos los índices covariantes.
- Muestra que, en la desripción de perturbación lineal, el tensor $h_{\mu\nu}$ satisface una ecuación tipo onda.
- ¿Cuál es la materia que curva al espacio en el caso de un hoyo negro?
- Cuando se habla de que la solución cosmológica que mejor describe al universo corresponde a un Universo plano, ¿quiere decir que es Minkowski?
- ¿Cómo detectarías a la onda gravitacional?