Principios básicos de la radiación gravitacional.

Juan Carlos Degollado

Instituto de Ciencias Físicas, UNAM.

Escuela de gravitación y ondas gravitacionales.

Noviembre-2016.

Plan del curso

1. Fuentes de las ondas gravitacionales
2. Expansiones asintóticas
3. Fórmula cuadrupolar
4. La energía de las ondas gravitacionales

Fuentes de las ondas gravitacionales

En la teoría linealizada, las ecuaciones de Einstein son:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

cuya solución es

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x'), \tag{2}$$

en donde la función de Green satisface

$$\Box G(x - x') = \delta^4(x - x'), \tag{3}$$

Como en electromagnetismo, para problemas de radiación la solución apropiada es la función de Green retardada

$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi |x - x'|} \delta(x^0_{ret} - x'^0) \tag{4}$$

$$t_{ret} = t - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \tag{5}$$

Es posible relacionar a la perturbación en la norma de Lorenz con la perturbación en la norma TT. Primero se define el operador de proyección

$$P_{ij} = \delta_{ij} + n_i n_j \tag{6}$$

asumiendo que la onda se propaga en la dirección $\hat{\mathbf{n}}$ y luego

$$\Lambda_{ij,kl} = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \tag{7}$$

de modo que

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}h_{kl} \tag{8}$$

y en general

$$S_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}S_{kl} \tag{9}$$

La solución a la ecuación de onda es

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{4G}{c^4}\int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right). \tag{10}$$

Fuera de la fuente podemos expresar esta solución en la norma TT como

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} = \Lambda_{ij,kl}\bar{h}_{kl}, \tag{11}$$

es decir

$$h_{\mu\nu}^{\mathrm{TT}} = \frac{4G}{c^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right). \tag{12}$$

Si denotamos como d el radio típico de la fuente en $r >> d$ podemos expandir

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = r - \mathbf{x}'\cdot\mathbf{n}' + O\left(\frac{d^2}{r}\right), \tag{13}$$

y

$$h_{\mu\nu}^{\mathrm{TT}} = \frac{1}{r}\frac{4G}{c^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{n}'}{c}, \mathbf{x}'\right). \tag{14}$$

$\mathbf{x} = r\ \mathbf{n}$

Expansión en términos de velocidades bajas

Las ecuaciones se simplifican considerablemente si trabajamos en el límite de velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.
Si ω_s es la frecuencia típica del movimiento dentro de la fuente y d es el tamaño de la fuente, las velocidades típicas dentro de la fuente son $v \sim \omega_s d$.
La frecuencia ω de la radiación será del orden de ω_s y por lo tanto $\omega \sim \omega_s \sim v/d$ que en términos de la longitud de onda reducida $\lambdabar := \lambda/2\pi$

$$\lambdabar \sim \frac{c}{v} d. \tag{15}$$

En el límite de velocidades bajas tendremos

$$\lambdabar >> d. \tag{16}$$

En este límite podemos hacer una expansión de las fuentes.

Primero escribamos T_{kl} en términos de su transformada de Fourier

$$T_{kl}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n}'}{c}, \mathbf{x}'\right) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{T}_{kl}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n}'}{c}) + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \quad (17)$$

Para una fuente no relativista, $\tilde{T}_{kl}(\omega, \mathbf{k})$ esta centrada alrededor de una frecuencia típica ω_s con $\omega_s d << c$. Por otro lado el tensor de energía momento se anula fuera de la fuente por lo que la integral anterior se restringe a $|\mathbf{x}'| < d$.

La contribución dominante de h_{ij}^{TT} proviene de las frecuencias ω que satisfacen

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} \lesssim \frac{\omega_s d}{c} << 1 \tag{18}$$

y por lo tanto podemos expandir la exponencial en (17) como

$$e^{-i\omega(t-\frac{r}{c}+\frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{n}'}{c})+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} = e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}\left[1 - i\frac{\omega}{c}x'^i n^i + \frac{1}{2}\left(-i\frac{\omega}{c}\right)^2 x'^i x'^j n^i n^j + ...\right]$$

Que es equivalente a

$$T_{kl}\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{n}'}{c},\mathbf{x}'\right)\sim T_{kl}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{x'^{i}n^{i}}{c}\partial_t T_{kl}+\frac{1}{2c^2}x'^{i}x'^{j}n^{i}n^{j}\partial_{tt}T_{kl}+..$$

En donde todas las derivadas deben evaluarse en el punto $(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}')$.
$r=|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$

Definimos ahora los momentos:

$$S^{ij} = \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}), \tag{19}$$

$$S^{ij,k} = \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k, \tag{20}$$

$$S^{ij,kl} = \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k x^l, \tag{21}$$

y entonces

$$h_{\mu\nu}^{\mathrm{TT}} = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{1}{2c^2} n_m n_p \dot{S}^{kl,mp} + ... \right] \tag{22}$$

También es útil definir los momentos sobre T^{00}

$$M = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}),$$

$$M^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i,$$

$$M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j,$$

$$M^{ijk} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j x^k,$$

y así sucesivamente, mientras que la densidad de momentos T^{oi}

$$P^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}),$$

$$P^{i.j} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^j,$$

$$P^{i,jk} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^j x^k,$$

Mediante la ley de conservación

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i}, \tag{23}$$

se pueden relacionar los respectivos momentos

$$c\dot{M} = \int d^3x \partial_0 T^{00} = -\int d^3x \partial_i T^{0i} = -\int dS^i T^{0i} = 0 \tag{24}$$

$$
\begin{aligned}
c\dot{M}^i &= \int d^3x x^i \partial_0 T^{00} = \int d^3x x^i \partial_j T^{0j} \\
&= \int d^3x (\partial_j x^i) T^{0j} = \int d^3x \delta^i_j T^{0j} \\
&= cP^i
\end{aligned}
$$

De la misma forma se obtienen identidades con derivadas superiores

$$
\begin{aligned}
\dot{M} &= 0 \\
\dot{M}^i &= P^i \\
\dot{M}^{ij} &= P^{i,j} + P^{j,i} \\
\dot{M}^{ij} &= P^{i,jk} + P^{j,kl} + P^{k,ij}
\end{aligned}
$$

y

$$\begin{aligned}\dot{P}^{i} &= 0\\ \dot{P}^{i,j} &= S^{ij}\\ \dot{P}^{i,jk} &= S^{ij,k} + S^{ik,j},\end{aligned}$$

Podemos combinar estas ecuaciones para escribir los momentos S en términos de los momentos M y P

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\ddot{M}^{ij} \tag{25}$$

y

$$\dot{S}^{ij,k} = \frac{1}{6}M^{ijk} + \frac{1}{3}\left(\ddot{P}^{i,jk} + \ddot{P}^{j,ik} - 2\ddot{P}^{k,ij}\right) \tag{26}$$

$$h_{\mu\nu}^{\mathrm{TT}}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{r}\frac{2G}{c^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\ddot{M}^{kl}(t-r/c). \tag{27}$$

por construcción no tiene traza de modo que la contribución viene únicamente por

$$Q^{ij} = M^{ij} - \delta^{ij}M_{kk} \tag{28}$$

$\rho = \frac{1}{c^2}T^{00}$,

$$Q^{ij} = \int d^3x\rho(t,\mathbf{x})(x^i x^j - \frac{1}{3}r^2\delta^{ij}) \tag{29}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{\mathrm{TT}}(t,\mathbf{x}) &= \frac{1}{r}\frac{2G}{c^4}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\ddot{Q}_{kl}(t-r/c), & (30)\\ &= \frac{1}{r}\frac{2G}{c^4}\ddot{Q}_{kl}^{\mathrm{TT}}(t-r/c). & (31)\end{aligned}$$

Cuando la propagación es en la dirección z, P_{ij} es el proyector en el plano (x, y) de modo que

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y

$$\Lambda_{ij,kl} A_{kl} = [P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}] A_{kl} \tag{32}$$

que en forma matricial

$$\Lambda_{ij,kl} A_{kl} = \begin{pmatrix} (A_{11} - A_{22})/2 & A_{12} & 0 \\ A_{21} & -(A_{11} - A_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cuando la dirección de propagación es $n = z$

$$\Lambda_{ij,kl}\ddot{M}_{kl} = \begin{pmatrix} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})/2 & \ddot{M}_{12} & 0 \\ \ddot{M}_{21} & -(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$h_+ = \frac{1}{r}\frac{G}{c^4}(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}), \quad (33)$$

$$h_\times = \frac{1}{r}\frac{G}{c^4}\ddot{M}_{12} \quad (34)$$

Para calcular las amplitudes de una onda que en el sistema (x, y, z) se propaga en una dirección arbitraria $\hat{\mathbf{n}}$, introducimos dos vectores unitarios. $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$, ortogonales a $\hat{\mathbf{n}}$, de modo tal que $\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{n}}$. Entonces en el sistema (x', y', z'), cuyos ejes coinciden con los vectores $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{n}}$. Para una onda que se propaga en la dirección z' se obtiene:

$$h_+(t, \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{r}\frac{G}{c^4}(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}), \quad (35)$$

$$h_\times(t, \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{r}\frac{G}{c^4}\ddot{M}_{12} \quad (36)$$

Si consideramos que el vector $\hat{\mathbf{n}} : (0,0,1)$ en (x,y,z) será:

$$n_i = (\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, \cos\theta), \tag{37}$$

Ambos sistemas estarán relacionados por una rotación compuesta por dos rotaciones una alrededor del eje z y otra alrededor del eje x:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

De forma semejante un tensor de rango 2 M se transforma como:

$$M_{ij} = R_{ik}R_{jl}M'_{kl} \ . \tag{38}$$

Aplicando esta transformación, las componentes de la onda quedan

$$
\begin{aligned}
h_+(t;\theta,\phi) &= \frac{1}{r}\frac{G}{c^4}[\ddot{M}_{11}(\cos^2\phi - \sin^2\phi\cos^2\theta) \\
&\quad + \ddot{M}_{22}(\sin^2\phi - \cos^2\phi\cos^2\theta) \\
&\quad - \ddot{M}_{33}\sin^2\theta - \ddot{M}_{12}\sin 2\phi(1+\cos^2\theta) \\
&\quad + \ddot{M}_{13}\sin\phi\sin 2\theta + \ddot{M}_{23}\cos\phi\sin 2\theta],
\end{aligned} \tag{39}
$$

y

$$
\begin{aligned}
h_+(t;\theta,\phi) &= \frac{1}{r}\frac{G}{c^4}[(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})\sin 2\phi\cos\theta \\
&\quad + 2\ddot{M}_{12}\cos 2\phi\cos\theta - 2\ddot{M}_{13}\cos\phi\cos\theta \\
&\quad + 2\ddot{M}_{23}\sin\phi\sin\theta].
\end{aligned} \tag{40}
$$

Estas expresiones permiten calcular la distribución angular de la radiación cuadrupolar dado el tensor M_{ij}.

La energía de las ondas gravitacionales

La descripción de las ondas gravitacionales fuera de un espacio plano no es tan simple. No podemos determinar los grados de libertad radiativos.

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| << 1, \tag{41}$$

Una separación natural del espacio-tiempo puede ser cuando alguna distinción ocurre de forma natural como cuando la métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ tiene una escala asociada L_B y la longitud de onda de tal forma que

$$\lambdabar << L_B, \tag{42}$$

equivalentemente se puede trabajar en el dominio de frecuencias de tal forma que

$$f >> f_B, \tag{43}$$

Como primer paso, debemos expandir hasta términos cuadráticos en $h_{\mu\nu}$. Las ecuaciones de Einstein se pueden reescribir como

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{44}$$

Expandimos el tensor de Ricci a orden $O(h^2)$

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} + ... \tag{45}$$

en donde por construcción $\bar{R}_{\mu\nu}$ depende de $\bar{g}_{\mu\nu}$ solamente (baja frecuencia) y $R^{(1)}_{\mu\nu}$ contiene términos que dependen de h (alta frecuencia) y $R^{(2)}_{\mu\nu}$ contiene términos en h y g.

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -[R^{(2)}_{\mu\nu}]^{\mathrm{lw}} + \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)^{\mathrm{lw}}, \tag{46}$$

y

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -[R^{(2)}_{\mu\nu}]^{\mathrm{sw}} + \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)^{\mathrm{sw}}, \tag{47}$$

La expresión explícita para $R^{(1)}_{\mu\nu}$

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\bar{D}^{\alpha}\bar{D}_{\mu}h_{\nu\alpha} + \bar{D}^{\alpha}\bar{D}_{\nu}h_{\mu\alpha} - \bar{D}^{\alpha}\bar{D}_{\alpha}h_{\mu\nu} - \bar{D}_{\nu}\bar{D}_{\mu}h\right), \tag{48}$$

mientras que

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} \quad = \quad & \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}[\frac{1}{2}\bar{D}_{\mu}h_{\rho\sigma}\bar{D}_{\nu}h_{\sigma\beta} + (\bar{D}_{\rho}h_{\nu\alpha})(\bar{D}_{\sigma}h_{\mu\beta} - \bar{D}_{\beta}h_{\mu\sigma}) \\ & +h_{\rho\alpha}(\bar{D}_{\nu}\bar{D}_{\mu}h_{\alpha\beta} + \bar{D}_{\beta}\bar{D}_{\sigma}h_{\mu\nu} - \bar{D}_{\beta}\bar{D}_{\nu}h_{\mu\sigma} - \bar{D}_{\beta}\bar{D}_{\mu}h_{\nu\sigma}) \\ & +(\frac{1}{2}\bar{D}_{\alpha}h_{\rho\sigma} - \bar{D}_{\rho}h_{\alpha\sigma})(\bar{D}_{\nu}h_{\mu\beta} + \bar{D}_{\mu}h_{\nu\beta} - \bar{D}_{\beta}h_{\mu\nu})]. \end{aligned}$$

Consideremos que existe una separación clara entre la longitud $\lambdabar$ de la onda gravitacional y la longitud L_B del sistema.
Introducimos una escala $\bar{l}$, tal que $\lambdabar << \bar{l} << L_B$.

Si promediamos sobre un volumen con escala $\bar{l}$, los modos con una longitud de onda del orden de L_B no se afectan, porque son básicamente constantes sobre el volumen utilizado, mientras que los modos con una longitud del orden de $\lambdabar$ oscilan muy rápido y su promedio es cero.

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -< R^{(2)}_{\mu\nu} > + \frac{8\pi G}{c^4} < T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T >, \tag{49}$$

y si escribimos:

$$< T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T > = \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T}. \tag{50}$$

Por definición $\bar{T}_{\mu\nu}$ es un promedio sobre varias longitudes de onda.

Definimos la cantidad

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} < R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{(2)} >, \tag{51}$$

y por lo tanto

$$- < R^{(2)}_{\mu\nu} >= \frac{8\pi G}{c^4} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} t \right) \tag{52}$$

con las identidades anteriores podemos escribir (49)

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} t \right) + \frac{8\pi G}{c^4} \left(\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{T} \right) \tag{53}$$

que de forma equivalente

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} = \frac{8\pi G}{c^4} (\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}). \tag{54}$$

En la norma de Lorenz y en el sistema TT, el escalar de Ricci se simplifica

$$< R^2_{\mu\nu} >= -\frac{1}{4} < \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} >, \tag{55}$$

y el tensor $t_{\mu\nu}$

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} < \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} >, \tag{56}$$

en particular la componente t^{00}

$$t^{00} = \frac{c^4}{32\pi G} < \dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ij} \dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ij} > . \tag{57}$$

en términos de las amplitudes de polarización

$$t^{00} = \frac{c^2}{16\pi G} < \dot{h}^2_+ + \dot{h}^2_\times > . \tag{58}$$

Un observador localizado a grandes distancias de la fuente ve un frente de onda plano y determina que la energía dentro de un volumen V satisface:

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dAt^{00} \tag{59}$$

$$\frac{dE_V}{dAdt} = +ct^{00} = \frac{c^4}{32\pi G} < \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} > \tag{60}$$

y si $dA = r^2 d\Omega$

$$\frac{dE_V}{dt} = \frac{c^2 r^2}{32\pi G} \int d\Omega < \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} > . \tag{61}$$