RELATIVIDAD NUMÉRICA, TAREA

PROBLEMA I (Foliación inclinada en Minkowski)
Considere el espacio tiempo de Minkowski en 2 dimensiones con las coordenadas usuales (t, x). Suponga ahora que elegimos una foliación dada por líneas espacialoides inclinadas a un ángulo $\theta < \pi/4$ de la horizontal.

a) Dibuje la foliación y encuentre explícitamente las componentes del vector normal unitario n^μ en las coordenadas (t, x). Dibuje dicho vector.

b) Considere ahora una nuevas coordenadas $(\bar{t}, \bar{x})$ tales que: $\bar{t} = t - x \tan\theta$, $\bar{x} = x$ (ojo: esto NO es una transformación de Lorentz). Muestre que la nueva coordenada $\bar{t}$ esta adaptada a la foliación, es decir, su valor es constante en cada hoja. Encuentre la transformación inversa, y las matrices jacobianas $\Lambda^{\bar{\mu}}_{\nu}$ y $\Lambda^{\mu}_{\bar{\nu}}$.

c) Transforme el vector normal unitario n^μ a las nuevas coordenadas adaptadas a la foliación $(\bar{t}, \bar{x})$. Muestre la "función de lapso" y el "vector de corrimiento" están dados por: $\alpha = 1/(1 - \tan^2\theta)^{1/2}$, $\beta_{\bar{x}} = -\tan\theta$. Explique por qué el vector de corrimiento resulta ser distinto de cero en estas coordenadas.

d) Transforme el tensor métrico de las coordenadas originales de Minkowski a las nuevas coordenadas $(\bar{t}, \bar{x})$ utilizando las matrices jacobianas. Muestre explícitamente que se cumple que: $g_{\bar{t}\bar{t}} = -\alpha^2 + \beta_{\bar{x}}\beta^{\bar{x}}$, $g_{\bar{x}\bar{x}} = \beta_{\bar{x}}$.

PROBLEMA II (Aceleración de observadores de Euler)
En el formalismo 3+1, asuma que el vector de corrimiento es cero $\beta^i = 0$. Muestre que es ese caso los símbolos de Christoffel asociados a la 4 métrica son tales que $\Gamma^0_{00} = \partial_t \ln\alpha$, y $\Gamma^0_{0i} = \partial_i \ln\alpha$. Utilice este hecho para mostrar que la aceleración propia de los observadores de Euler $a_\mu := n^\nu \nabla_\nu n_\mu$ es tal que:

$$a_0 = 0 \; , \qquad a_i = \partial_i \ln\alpha \; .$$

Es decir, si elegimos $\alpha = 1$ los observadores de Euler tienen aceleración propia igual a cero, y por lo tanto se mueven en geodésicas.
(Recuerde que para $\beta^i = 0$ se tiene $n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$, $n^\mu = (1/\alpha, 0, 0, 0)$, y que los símbolos de Christoffel se definen como $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})/2$.)

PROBLEMA III (Evolución de la traza de K)
Partiendo de las ecuaciones de evolución de ADM para γ_{ij} y K_{ij} con $\beta^i = 0$, y utilizando las constricciones, muestre que la ecuación de evolución para la traza de la curvatura extrínseca esta dada por

$$\partial_t K = -D^2\alpha + \alpha K_{ij}K^{ij} + 4\pi\left(\rho + S\right) \; ,$$

donde $D^2 := \gamma^{mn} D_m D_n$.

PROBLEMA IV (Constricciones en simetría esférica)
Considere una métrica en simetría esférica de la siguiente forma:

$$dl^2 = A(r,t)dr^2 + r^2 B(r,t) d\Omega^2 \; ,$$

Defina, además, $K_A := K^r_r$, $K_B := K^\theta_\theta = K^\phi_\phi$ y $D_A := \partial_r \ln A$, $D_B := \partial_r \ln B$. Muestre que las constricciones Hamiltoniana y de momento se reducen a:

$$\begin{aligned}
\partial_r D_B &= \frac{1}{r^2 B}\left(A - B\right) + A K_B \left(2K_A + K_B\right) \\
&+ \frac{1}{r}\left(D_A - 3D_B\right) + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4} - 8\pi A\rho \; , \\
\partial_r K_B &= \left(K_A - K_B\right)\left[\frac{1}{r} + \frac{D_B}{2}\right] - 4\pi J_r \; ,
\end{aligned}$$

donde J_r es la densidad de momento en la dirección radial.

PROBLEMA V (Problema numérico: ecuación de onda)
Escriba un código numérico (en Fortran o C) para resolver la ecuación de onda en una dimensión con el método explícito visto en clase:

$$\delta_t^2\, \phi_m^n - \rho^2\, \delta_x^2\, \phi_m^n = 0\ .$$

con δ^2 el operador de segundo orden para la segunda derivada, y $\rho = c\Delta t/\Delta x$. Estudie los casos: a) $\rho = 0{,}5$, b) $\rho = 1{,}0$, y c) $\rho = 1{,}1$. Para la tarea, presente gráficas de la evolución en cada caso, y un listado del código.