Curso Relativista de Relatividad General

Darío Núñez

Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM

Escuela de Relatividad General y Ondas Gravitatorias
Reunión de la Red Temática de Agujeros Negros vibrantes y emisión de ondas gravitatorias
Guadalajara, Jalisco, 7-11 de noviembre de 2016

Tensores

Continuando con la idea de que los objetos que describirán a la Física, se caracterizan por su comportamiento bajo transformaciones entre sistemas de referencia inercial, definimos a los tensores, objetos con índices covariantes o contravariantes, donde cada índice se transforma con la regla mostrada antes.

- Así, un objeto ${R^\alpha}_{\beta\,\gamma\,\delta}$, será un tensor mixto si, bajo transformaciones entre sistemas de referencia inercial, satisface:

$${R^\alpha}_{\beta\,\gamma\,\delta} \to {R^{\alpha'}}_{\beta'\,\gamma'\,\delta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\sigma}\,\frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\gamma'}}\,\frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\delta'}}\,{R^\sigma}_{\tau\rho\omega}$$

Tensores

Continuando con la idea de que los objetos que describirán a la Física, se caracterizan por su comportamiento bajo transformaciones entre sistemas de referencia inercial, definimos a los tensores, objetos con índices covariantes o contravariantes, donde cada índice se transforma con la regla mostrada antes.

- Así, un objeto $R^{\alpha}{}_{\beta\,\gamma\,\delta}$, será un tensor mixto si, bajo transformaciones entre sistemas de referencia inercial, satisface:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\,\gamma\,\delta} \rightarrow R^{\alpha'}{}_{\beta'\,\gamma'\,\delta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\sigma}}\,\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\beta'}}\,\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\gamma'}}\,\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\delta'}}\,R^{\sigma}{}_{\tau\rho\omega}$$

- $g_{\mu\nu}$ será un tensor de segundo orden covariante si, bajo estas transformaciones satisface

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu'\,\nu'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}\,g_{\alpha\beta}$$

Tensores

Los tensores forman un álgebra. Satifacen las siguientes operaciones Sean $a, b, B^\alpha, T^\alpha{}_\beta, S^\alpha{}_\beta, R^\mu{}_{\nu\sigma\tau}$ tensores, entonces:

- Combinación lineal: $P^\alpha{}_\beta = a\, T^\alpha{}_\beta + b\, S^\alpha{}_\beta$ es un tensor. Noten que para sumar dos tensores éstos deben ser del mismo tipo.
- Producto directo $T^\alpha{}_\beta{}^\gamma = S^\alpha{}_\beta\, B^\gamma$, es tensor
- Contracción. Un índice covariante, abajo, con un índice contravariante, arriba. Se tiene una suma implícita y el índice desaparece, se obtiene un tensor de grado dos veces menor que el inicial: $T_{\nu\tau} = R^\mu{}_{\nu\mu\tau}$.

Y, para tener el cálculo, no es difícil ver que el concepto de derivada debe modificarse para tener la **derivada covariante**

$$\begin{aligned} A^{\mu}{}_{;\nu} &= A^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\,\alpha}\, A^{\alpha}, \\ B_{\mu;\nu} &= B_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\,\nu}\, B_{\alpha}, \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma^{\tau}_{\sigma\,\alpha} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu\prime}}\, \frac{\partial^2 x^{\mu\prime}}{\partial x^{\sigma}\, \partial x^{\alpha}}.$$

se conoce como la **conexión afín**.

Dados los objetos A^{μ}, B_{μ} vectores contra y co variantes, los objetos $A^{\mu}{}_{;\nu}$ y $B_{\mu;\nu}$ son tensores mixto y covariante, geométricamente bien definidos.

Así, tenemos objetos que, definidos en un sistema de referencia sabemos cómo se comportarán en cualquier otro sistema de referencia inercial a él.

ecuación de las geodésicas

- Para ver a las leyes de la física descritas en el cuadriespacio, podemos empezar por la ecuación para el movimiento libre de fuerzas. En física newtoniana es $\vec{a} = 0$.

ecuación de las geodésicas

- Para ver a las leyes de la física descritas en el cuadriespacio, podemos empezar por la ecuación para el movimiento libre de fuerzas. En física newtoniana es $\vec{a} = 0$.
- En el cuadriespacio tendríamos $a^\mu = \frac{d\,u^\mu}{d\,\tau}$, pero como $u^\mu = u^\mu(x^\nu)$

ecuación de las geodésicas

- Para ver a las leyes de la física descritas en el cuadriespacio, podemos empezar por la ecuación para el movimiento libre de fuerzas. En física newtoniana es $\vec{a} = 0$.
- En el cuadriespacio tendríamos $a^\mu = \frac{d\,u^\mu}{d\,\tau}$, pero como $u^\mu = u^\mu(x^\nu)$
- $$\frac{d\,u^\mu}{d\,\tau} = u^\mu{}_{,\nu}\,\frac{d\,x^\nu}{d\,\tau} = u^\mu{}_{,\nu}\,u^\nu,$$

  donde hemos usado regla de la cadena y la definición de la cuadrivelocidad.

- Para ver a las leyes de la física descritas en el cuadriespacio, podemos empezar por la ecuación para el movimiento libre de fuerzas. En física newtoniana es $\vec{a} = 0$.
- En el cuadriespacio tendríamos $a^\mu = \frac{d\,u^\mu}{d\,\tau}$, pero como $u^\mu = u^\mu(x^\nu)$
- $$\frac{d\,u^\mu}{d\,\tau} = u^\mu{}_{,\nu}\,\frac{d\,x^\nu}{d\,\tau} = u^\mu{}_{,\nu}\,u^\nu,$$
  donde hemos usado regla de la cadena y la definición de la cuadrivelocidad.
- Como mencionamos, la derivada normal no es una operación geométricamente bien definida, por lo que la reemplazamos por la derivada covariante y tenemos nuestra primera ecuación para el movimiento en ausencia de fuerzas
  $$u^\mu{}_{;\nu}\,u^\nu = 0$$
  que se conoce como la **ecuación de las geodésicas**

ecuación de las geodésicas

- Esta ecuación es **perfectamente covariante**, en cuanto a que está formada por objetos y operaciones bien definidas en el cuadriespacio.

ecuación de las geodésicas

- Esta ecuación es **perfectamente covariante**, en cuanto a que está formada por objetos y operaciones bien definidas en el cuadriespacio.
- Al desarrollarla tenemos

$$u^{\mu}{}_{;\nu}\, u^{\nu} = \frac{d\, u^{\mu}}{d\, \tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\, u^{\nu}\, u^{\sigma} = 0$$

- Esta ecuación es **perfectamente covariante**, en cuanto a que está formada por objetos y operaciones bien definidas en el cuadriespacio.
- Al desarrollarla tenemos

$$u^{\mu}{}_{;\nu}\, u^{\nu} = \frac{d\, u^{\mu}}{d\, \tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\, u^{\nu}\, u^{\sigma} = 0$$

- Si se describe en coordenadas cartesianas, la conexión afín es cero y la derivada covariante se reduce a la derivada usual por lo que la ecuación toma la forma usual

$$\frac{d\, u^{\mu}}{d\, \tau} = 0$$

ecuación de las geodésicas

- Esta ecuación es **perfectamente covariante**, en cuanto a que está formada por objetos y operaciones bien definidas en el cuadriespacio.
- Al desarrollarla tenemos

$$u^{\mu}{}_{;\nu}\, u^{\nu} = \frac{d\, u^{\mu}}{d\,\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\, u^{\nu}\, u^{\sigma} = 0$$

- Si se describe en coordenadas cartesianas, la conexión afín es cero y la derivada covariante se reduce a la derivada usual por lo que la ecuación toma la forma usual

$$\frac{d\, u^{\mu}}{d\,\tau} = 0$$

- con solución

$$x^{\nu}(\tau) = k_0{}^{\mu}\,\tau + k_1{}^{\mu}$$

con $k_0{}^{\mu}, k_1{}^{\mu}$ constantes.

ecuación de las geodésicas

- Esta ecuación es **perfectamente covariante**, en cuanto a que está formada por objetos y operaciones bien definidas en el cuadriespacio.
- Al desarrollarla tenemos

$$u^{\mu}{}_{;\nu}\, u^{\nu} = \frac{d\, u^{\mu}}{d\, \tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\, u^{\nu}\, u^{\sigma} = 0$$

- Si se describe en coordenadas cartesianas, la conexión afín es cero y la derivada covariante se reduce a la derivada usual por lo que la ecuación toma la forma usual

$$\frac{d\, u^{\mu}}{d\, \tau} = 0$$

- con solución

$$x^{\nu}(\tau) = {k_0}^{\mu}\, \tau + {k_1}^{\mu}$$

  con ${k_0}^{\mu}, {k_1}^{\mu}$ constantes.
- Es decir, son, como era de esperarse, rectas.

ecuación de las geodésicas

- Otra manera de ver a la ecuación de las geodésicas es como la trayectoria que minimiza la distancia entre dos eventos del espacio tiempo caracterizados por un elemento de línea $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, con $g_{\mu\nu}$ es la generalización del tensor de Minkowski, conocido como el **tensor métrico**:

$$\delta \int ds = 0$$

- Otra manera de ver a la ecuación de las geodésicas es como la trayectoria que minimiza la distancia entre dos eventos del espacio tiempo caracterizados por un elemento de línea $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, con $g_{\mu\nu}$ es la generalización del tensor de Minkowski, conocido como el **tensor métrico**:

$$\delta \int ds = 0$$

- Al hacer el desarrollo se obtiene nuevamente la ecuación de geodésicas

$$u^\mu{}_{;\nu}\, u^\nu = \frac{d\, u^\mu}{d\, \tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\, u^\nu\, u^\sigma = 0$$

donde ahora las $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$, la conexión afín, toman la forma

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\,\lambda}\, \left(g_{\lambda\,\nu\,,\sigma} + g_{\lambda\,\sigma\,,\nu} - g_{\nu\,\sigma\,,\lambda}\right),$$

que se conocen como los **símbolos de Christoffel**.

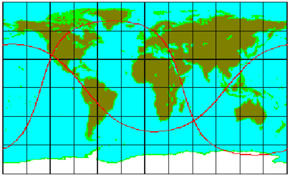
- nótese que la ecuación de geodésicas, por ser covariante, es válida en cualquier sistema de referencia.

ecuación de las geodésicas

- nótese que la ecuación de geodésicas, por ser covariante, es válida en cualquier sistema de referencia.
- Si usamos coordenadas curvilíneas en vez de cartesianas, la ecuación de las geodésicas sigue siendo válida, pero ahora, la conexión afín no es cero y la ecuación describe las trayectorias rectas, pero ahora descritas en coordenadas curvilíneas.

ecuación de las geodésicas

También puede ser que la superficie estudiada sea curva y la ecuación de las geodésicas nos da la ecuación que satisfacen las partículas moviéndose libremente sobre dicha superficie curva



Leyenda : Las partículas al moverse libremente sobre la superficie de la Tierra siguen las geodésicas

Ecuaciones de la física reescritas en el cuadri-espacio

- Las leyes de la física pueden ser reescritas de forma covariante.

Ecuaciones de la física reescritas en el cuadri-espacio

- Las leyes de la física pueden ser reescritas de forma covariante.
- La ecuación de continuidad en fluidos toma la forma

$$j^{\mu}{}_{;\mu} \equiv (\rho\, u^{\mu})_{;\mu} = 0$$

Ecuaciones de la física reescritas en el cuadri-espacio

- Las leyes de la física pueden ser reescritas de forma covariante.
- La ecuación de continuidad en fluidos toma la forma

$$j^{\mu}{}_{;\mu} \equiv (\rho\, u^{\mu})_{;\mu} = 0$$

- Para las ecuaciones de Maxwell, por ejemplo, el campo eléctrico y magnético se unen en un sólo objeto, el **tensor de Faraday**, $F_{\mu\,\nu}$ y las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$F^{\mu}{}_{\nu\,;\,\mu} = 4\,\pi\, j^{\mu}; \qquad F_{[\mu\,\nu\,;\,\lambda]} = 0$$

todo perfectamente covariante y, muy estético.

Límite newtoniano de las ecuaciones geodésicas,

- Regresando a la ecuación de las geodésicas, es interesante ver su forma en el caso de una métrica, un espacio-tiempo, casi plano, donde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}$.

Límite newtoniano de las ecuaciones geodésicas,

- Regresando a la ecuación de las geodésicas, es interesante ver su forma en el caso de una métrica, un espacio-tiempo, casi plano, donde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}$.
- Respecto al segundo sumando, se puede mostrar que el término dominante es $c^2\, \Gamma^{\mu}{}_{00}$ y, al evaluar a la conexión tenemos que

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\,\beta}\, \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\, \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \rightarrow_{v<<c,\; g=\eta+\epsilon\, h} \epsilon\, c^2\, \eta^{\mu\,\sigma}\, \phi_{,\,\sigma}.$$

donde $h_{00} = -2\,\phi$, con ϕ una función adimensional.

Límite newtoniano de las ecuaciones geodésicas,

- Regresando a la ecuación de las geodésicas, es interesante ver su forma en el caso de una métrica, un espacio-tiempo, casi plano, donde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\, h_{\mu\nu}$.
- Respecto al segundo sumando, se puede mostrar que el término dominante es $c^2\, \Gamma^{\mu}{}_{00}$ y, al evaluar a la conexión tenemos que

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\,\beta}\, \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\, \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \rightarrow_{v<<c,\ g=\eta+\epsilon\, h}\, \epsilon\, c^2\, \eta^{\mu\,\sigma}\, \phi_{,\,\sigma}.$$

donde $h_{00} = -2\,\phi$, con ϕ una función adimensional.

- Respecto al primer término de la ecuación de geodésicas, se puede mostrar que en este límite newtoniano se reduce a

$$\left(u^{\mu}{}_{,\,t} + u^{\mu}{}_{,\,i}\, v^{i}\right) + \epsilon\, \eta^{\mu\,\sigma}\, (c^2\, \phi)_{,\,\sigma} = 0.$$

Viendo cada uno de los componentes, vemos que cuando $\mu = 0$, considerando un campo estático, y que a este orden, $u^0 = c$, la ecuación se satisface idénticamente.

Límite newtoniano de las ecuaciones geodésicas

- La componente espacial, $\mu = j$, considerando $u^0 = c$ y de nuevo usando que$u^j = u^0 \, \frac{v^j}{c} \to v^j$, implica entonces:

$$\partial_t \, \vec{v} + \vec{v} \cdot \, \vec{\nabla} \, \vec{v} + \vec{\nabla}(\epsilon \, c^2 \, \phi) = 0,$$

al identificar a $\epsilon \, c^2 \phi$ con el potencial gravitatorio, Φ adimensional, obtenemos ¡la ecuación de Euler de los fluidos! En el caso sin presión y en presencia de un potencial gravitatorio.

Límite newtoniano de las ecuaciones geodésicas

- La componente espacial, $\mu = j$, considerando $u^0 = c$ y de nuevo usando que$u^j = u^0\,\frac{v^j}{c} \to v^j$, implica entonces:

$$\partial_t\,\vec{v} + \vec{v}\cdot\,\vec{\nabla}\,\vec{v} + \vec{\nabla}(\epsilon\,c^2\,\phi) = 0,$$

  al identificar a $\epsilon\,c^2\phi$ con el potencial gravitatorio, Φ adimensional, obtenemos ¡la ecuación de Euler de los fluidos! En el caso sin presión y en presencia de un potencial gravitatorio.

- **¡El límite newtoniano de la ecuación de las geodésicas son las ecuaciones de Euler!** Muy sorprendente.

Descripción de la materia con el $T^{\mu}{}_{\nu}$ y ecuación de conservación

- Podemos describir, de un modo covariante a los diferentes tipos de materia

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} \rho\, c^2\, h\, \frac{u_\mu\, u_\nu}{c^2} + p\, g_{\mu\nu},\ \text{fluido} \\ \rho_f\ < u_\mu\, u_\nu >,\ \text{Coleccion de particulas} \\ \phi_{,\mu}\, \phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, \left(\phi^{,\alpha}\, \phi_{,\alpha} + 2\, V(|\phi|^2)\right),\ \text{Campo escalar} \end{cases}$$

Descripción de la materia con el $T^{\mu}{}_{\nu}$ y ecuación de conservación

- Podemos describir, de un modo covariante a los diferentes tipos de materia

$$T_{\mu\nu} = \begin{cases} \rho\, c^2\, h\, \frac{u_\mu\, u_\nu}{c^2} + p\, g_{\mu\nu}, \ \text{fluido} \\ \rho_f\ < u_\mu\, u_\nu >, \ \text{Coleccion de particulas} \\ \phi_{,\mu}\, \phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\ \left(\phi^{,\alpha}\, \phi_{,\alpha} + 2\, V(|\phi|^2)\right), \ \text{Campo escalar} \end{cases}$$

- Las ecuaciones dinámicas se determinan al pedir que se anule la divergencia del tensor:

$$T^{\mu\,\nu}{}_{;\,\nu} = 0$$

¿sugiere la geometría a la gravedad?

- Estamos viendo que la geometría, la métrica, en las ecuaciones de Euler aparece, juega el papel del potencial gravitacional.

¿sugiere la geometría a la gravedad?

- Estamos viendo que la geometría, la métrica, en las ecuaciones de Euler aparece, juega el papel del potencial gravitacional.
- Las trayectorias curvas pueden ser debidas a que el espacio donde se mueven es curvo, no a que se tenga una fuerza que actue sobre las partículas

¿sugiere la geometría a la gravedad?

- Estamos viendo que la geometría, la métrica, en las ecuaciones de Euler aparece, juega el papel del potencial gravitacional.
- Las trayectorias curvas pueden ser debidas a que el espacio donde se mueven es curvo, no a que se tenga una fuerza que actue sobre las partículas
- Esto es muy sugerente

Ejercicios 2

- Demuestra que, dados u^μ y u_λ vectores, el producto directo $T^\mu{}_\lambda = u^\mu\, u_\lambda$, es un tensor.
- Demuestra que la ecuación de geodésica, en efecto $u^\mu{}_{;\nu}\, u^\nu = \frac{d\, u^\mu}{d\, \tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\, u^\nu\, u^\sigma = 0$.
- Obtén y resuelve las ecuaciones de las geodésicas en una esfera.
- Obtén las ecuaciones de campo, $T^{\mu\,\nu}{}_{;\,\nu} = 0$ para los tres tensores de materia presentados.