Curso Relativista de Relatividad General

Darío Núñez

Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM

Escuela de Relatividad General y Ondas Gravitatorias
Reunión de la Red Temática de Agujeros Negros vibrantes y emisión de ondas gravitatorias
Guadalajara, Jalisco, 7-11 de noviembre de 2016

Agradecimiento

Este evento se lleva a cabo gracias a

- CОnsejo NAcional de Ciencia y Tecnología.

Agradecimiento

Este evento se lleva a cabo gracias a

- COnsejo NAcional de Ciencia y Tecnología.
- Universidad de Guadalajara, Universidad Michoacana.

Agradecimiento

Este evento se lleva a cabo gracias a

- COnsejo NAcional de Ciencia y Tecnología.
- Universidad de Guadalajara, Universidad Michoacana.
- Dirección General de Apoyo al Personal Académico, Proyecto PAPIIT IN-103514.

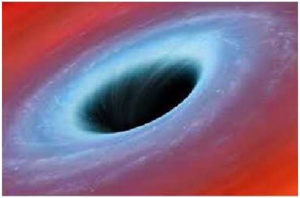
Es un repaso (mención para los que no lo han visto) de los conceptos fundamentales de la Relatividad General y cómo nos lleva a las ecuaciones de Einstein, una de cuyas soluciones son las ondas gravitatorias.

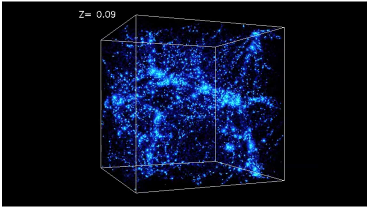
Básicamente queremos llegar a las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R + \Lambda\, g_{\mu\nu} = 8\,\pi \frac{G}{c^4}\; T_{\mu\nu},$$

Intro

Estas ecuaciones nos describen a los hoyos negros, al modelo cosmológico Λ-CDM, a las estrellas de bosones y las de neutrones

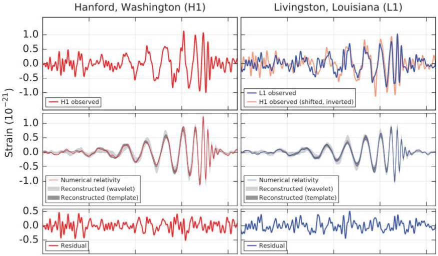




Leyenda : Bellezas que hay en las ecuaciones de Einstein.

Intro

Y a las ondas gravitatorias



Leyenda : Señal GW150914, detectada por el LIGO

Charla 1

Para ello, tenemos este curso relativista de 3 horas, formaremos equipos de 4 personas para resolver algunos problemas para fijar ideas y avanzaremos de la siguiente manera:
Charla 1, ésta

- Sistemas de Referencia Inercial y transformaciones de Lorentz
- Concepto de espacio tiempo
- Elemento de línea y otros escalares
- objetos geométricos
- Coordenadas curvilíneas

Charla 2

En la siguiente charla veremos

- Tensores
- Ecuación de las geodésicas
- Ecuaciones de la física reescritas en el cuadri-espacio
- Límite newtoniano de las ecuaciones geodésicas,
- Descripción de la materia con el $T^{\mu}{}_{\nu}$ y ecuación de conservación
- ¿sugiere la geometría a la gravedad?

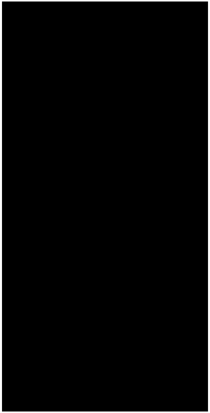
Charla 3

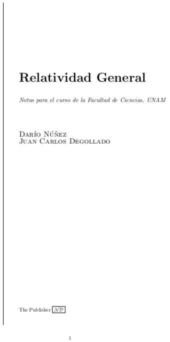
Y finalmente, en la Charla 3 de mañana veremos

- Ley Gravitacional de Newton y Ecuación de Poisson
- generalización de la ecuación de Poisson al cuadriespacio
- Postular la relación materia - geometría
- tensor de Bianchi-Einstein
- postulación de las ecuaciones de Einstein
- Perturbación geométrica como onda gravitatoria
- Desviación geodésica

Libro

Con esto tendremos una idea general sobre la Teoría. Para ver todos los detalles y **ejercicios resueltos** pueden consultar





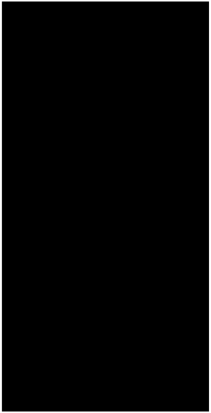
Relatividad General

Notas para el curso de la Facultad de Ciencias, UNAM

Darío Núñez
Juan Carlos Degollado

The Publisher

1

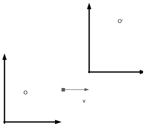


Leyenda : Libro de Relatividad General, disponible en la página del evento.

Sistemas de Referencia Inercial y transformaciones de Lorentz

Entonces, entrando en materia, en los conceptos fundamentales está

- Los sistemas de referencia inercial, que son aquellos que se mueven uno respecto al otro con una velocidad constante

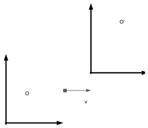


Leyenda : Sistemas inerciales galileanos

Sistemas de Referencia Inercial y transformaciones de Lorentz

Entonces, entrando en materia, en los conceptos fundamentales está

- Los sistemas de referencia inercial, que son aquellos que se mueven uno respecto al otro con una velocidad constante



Leyenda : Sistemas inerciales galileanos

- Y el que las leyes de la Física (que describen correctamente a la Naturaleza) deben ser invariantes bajo transformaciones de un sistema de referencia inercial, a otro.

Sistemas de Referencia Inercial y transformaciones de Lorentz

- Se entendió que las tranformaciones entre los sistemas de referencia, debían involucrar al tiempo de cada sistema y mantener a la velocidad de la luz constante en todos los sistemas. Lorentz, para dos sistemas moviéndose con velocidad $\vec{v} = (v, 0, 0)$, lo describe como

$$
\begin{aligned}
c\,t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(c\,t - \frac{v}{c}\,x\right), \\
x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x - \frac{v}{c}\,c\,t\right), \\
y' &= y, \\
z' &= z.
\end{aligned}
$$

Sistemas de Referencia Inercial y transformaciones de Lorentz

- Se entendió que las tranformaciones entre los sistemas de referencia, debían involucrar al tiempo de cada sistema y mantener a la velocidad de la luz constante en todos los sistemas. Lorentz, para dos sistemas moviéndose con velocidad $\vec{v} = (v, 0, 0)$, lo describe como

$$
\begin{aligned}
c\, t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(c\, t - \frac{v}{c}\, x \right), \\
x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(x - \frac{v}{c}\, c\, t \right), \\
y' &= y, \\
z' &= z.
\end{aligned}
$$

- El tiempo transcurrido en un sistema de referencia, el largo de los cuerpos medidos en él, el que los objetos ocurran *al mismo tiempo*, dejan de ser conceptos absolutos.

Concepto de espacio tiempo

Se postula a la relatividad especial

- - Todos los sitemas de referencia inerciales son equivalentes
  - La velocidad de la luz tiene una magnitud constante para todos los sietemas inerciales

Concepto de espacio tiempo

Se postula a la relatividad especial

-
  - Todos los sitemas de referencia inerciales son equivalentes
  - La velocidad de la luz tiene una magnitud constante para todos los sietemas inerciales
- Y se introduce el concepto de espacio-tiempo, que es la entidad física donde se describen correctamente los fenómenos.

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Concepto de espacio tiempo

El tiempo y el espacio se convierten en meras sombras del espacio-tiempo, que es la arena que tiene realidad Física (Minkowski)

Leyenda : Pierde su carácter absoluto e, inclusive, realidad física.

La separación física, invariante, entre dos eventos es la que queda determinada por el **elemento de línea**

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

con $\eta_{\mu\nu}$ la matriz (tensor) de Minkowski $= \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Notación de Einstein (*índices repetidos arriba y abajo, se suman*).

Elemento de línea y otros escalares

- El elemento de línea, la separación etnre dos eventos que ocurren en el espacio tiempo es, básicamentepor construcción, invariante bajo transformaciones de Lorentz de un sistema de referencia inercial a otro.

Elemento de línea y otros escalares

- El elemento de línea, la separación etnre dos eventos que ocurren en el espacio tiempo es, básicamentepor construcción, invariante bajo transformaciones de Lorentz de un sistema de referencia inercial a otro.
- A estas cantidades, las funciones cuyo valor en un punto del espacio tiempo no cambia al pasar de un sistema de referencia nercial a otro se les llama **escalares**

Elemento de línea y otros escalares

- El elemento de línea, la separación etnre dos eventos que ocurren en el espacio tiempo es, básicamentepor construcción, invariante bajo transformaciones de Lorentz de un sistema de referencia inercial a otro.
- A estas cantidades, las funciones cuyo valor en un punto del espacio tiempo no cambia al pasar de un sistema de referencia nercial a otro se les llama **escalares**
- Las constantes, las magnitudes de los cuadri-vectores, son ejemplos de cantidades escalares y, por ende, físicas

Elemento de línea y otros escalares

- El elemento de línea, la separación etnre dos eventos que ocurren en el espacio tiempo es, básicamentepor construcción, invariante bajo transformaciones de Lorentz de un sistema de referencia inercial a otro.
- A estas cantidades, las funciones cuyo valor en un punto del espacio tiempo no cambia al pasar de un sistema de referencia nercial a otro se les llama **escalares**
- Las constantes, las magnitudes de los cuadri-vectores, son ejemplos de cantidades escalares y, por ende, físicas
- *El tiempo propio*, definido como $c^2\, d\tau^2 = -ds^2$, que coincide con el tiempo coordenado, t, para un observador en reposo con respecto al objeto observado, $c^2\, d\tau^2 = c^2\, dt^2$, es otra cantidad escalar.

objetos geométricos

- La diferencial de la posición, dx^μ, en el espacio tiempo, vista desde otro sistema de referencia, $dx^\mu(x^{\nu'})$, por regla de la cadena es

$$dx^\mu(x^{\nu'}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}}\, dx^{\nu'}$$

- La diferencial de la posición, dx^μ, en el espacio tiempo, vista desde otro sistema de referencia, $dx^\mu(x^{\nu'})$, por regla de la cadena es

$$dx^\mu(x^{\nu'}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}}\, dx^{\nu'}$$

- A todas las cantidades que, bajo una transformación de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales, se comporten de este modo, se les llamará **vectores contravariantes**.

objetos geométricos

- La diferencial de la posición, dx^μ, en el espacio tiempo, vista desde otro sistema de referencia, $dx^\mu(x^{\nu'})$, por regla de la cadena es

$$dx^\mu(x^{\nu'}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}}\, dx^{\nu'}$$

- A todas las cantidades que, bajo una transformación de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales, se comporten de este modo, se les llamará **vectores contravariantes**.
- Un **vector covariante**, A_μ, es un objeto geométrico que, bajo una transformación de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales, se transforma de acuerdo a la regla

$$A_\mu \to A_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}}\, A_\mu$$

- **Los objetos se caracterizan de acuerdo a su comportamiento bajo tranformaciones entre sistemas de referencia.**

objetos geométricos

- **Los objetos se caracterizan de acuerdo a su comportamiento bajo tranformaciones entre sistemas de referencia**.
- La cuadrivelocidad

$$u^\mu = \frac{d\,x^\mu}{d\,\tau}$$

- **Los objetos se caracterizan de acuerdo a su comportamiento bajo tranformaciones entre sistemas de referencia**.
- La cuadrivelocidad

$$u^\mu = \frac{d\,x^\mu}{d\,\tau}$$

- y el cuadrimomento

$$p^\mu = m\,u^\mu$$

m es la masa de la partícula (una cantidad escalar, constante)

objetos geométricos

- **Los objetos se caracterizan de acuerdo a su comportamiento bajo tranformaciones entre sistemas de referencia**.
- La cuadrivelocidad

$$u^\mu = \frac{d\,x^\mu}{d\,\tau}$$

- y el cuadrimomento

$$p^\mu = m\,u^\mu$$

  m es la masa de la partícula (una cantidad escalar, constante)
- Son vectores contravariantes.

- **Los objetos se caracterizan de acuerdo a su comportamiento bajo tranformaciones entre sistemas de referencia**.
- La cuadrivelocidad

$$u^{\mu} = \frac{d\,x^{\mu}}{d\,\tau}$$

- y el cuadrimomento

$$p^{\mu} = m\,u^{\mu}$$

  m es la masa de la partícula (una cantidad escalar, constante)
- Son vectores contravariantes.
- La matriz de Minkowski nos permite generar un vector covariante a partir de uno contravariantes y viceversa

$$u_{\mu} = \eta_{\mu\,\nu}\,u^{\nu} \qquad u^{\mu} = \eta^{\mu\,\nu}\,u_{\nu}$$

  con $\eta^{\mu\,\nu}$ la inversa de $\eta_{\mu\,\nu}$: $\eta^{\mu\,\lambda}\,\eta_{\lambda\,\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$.

- La magnitud del vector de cuadrivelocidad de cualquier cuerpo masivo y del vector cuadrimomento son cantidades fijas

$$u^\mu\, u_\mu = -c^2; \qquad p^\mu\, p_\mu = -m^2\, c^2;$$

- La magnitud del vector de cuadrivelocidad de cualquier cuerpo masivo y del vector cuadrimomento son cantidades fijas

$$u^{\mu}\, u_{\mu} = -c^2; \qquad p^{\mu}\, p_{\mu} = -m^2\, c^2;$$

- El vector cuadrimomento une los conceptos clásicos de energía y momento en un sólo objeto, de nuevo, es éste el que tiene sentido físico

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

- La magnitud del vector de cuadrivelocidad de cualquier cuerpo masivo y del vector cuadrimomento son cantidades fijas

$$u^{\mu}\, u_{\mu} = -c^2; \qquad p^{\mu}\, p_{\mu} = -m^2\, c^2;$$

- El vector cuadrimomento une los conceptos clásicos de energía y momento en un sólo objeto, de nuevo, es éste el que tiene sentido físico

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

- Y las leyes de conservación se unen en una sola

$${p^{\mu}}_{\mathrm{inicial}} = {p^{\mu}}_{\mathrm{final}}$$

en ausencia de fuerzas externas.

Coordenadas curvilíneas

- La relación entre los sistemas de referencia inerciales puede ser ambién por cambios de coordenadas, *e. g.* Cartesianas a esféricas $(ct, x, y, z) \to (ct, r, \theta, \varphi)$ y el elemeto de línea toma la forma

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \to -c^2\, dt^2 + dr^2 + r^2\, \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right).$$

manteniendo, por supuesto, su caracter escalar

Ejercicios 1

- Obtén la expresión para la suma de velocidades en el espacio tiempo y comprueba que satisfacen a los postulados de la relatividad especial.
- Demuestra la dilatación temporal entre dos sistemas de referencia inerciales.
- Demuestra que la norma del momento es siempre una constante, $-m^2\,c^2$, discute qué significa esto.
- Resuelve, en el contexto de la relatividad especial, el problema de dispersión de Compton. El resultado ¿Se diferencía del resultado obtenido clásicamente? Discute.