Principios básicos de la radiación gravitacional.

Juan Carlos Degollado

Instituto de Ciencias Físicas, UNAM.

Escuela de gravitación y ondas gravitacionales.

Noviembre-2016.

Plan del curso

Introducción

Las observaciones de las ondas gravitacionales GW150914 y GW151226 por aLIGO nos brindan por primera vez, la oportunidad de aprender sobre la física en un ambiente de gravedad extrema como lo es el de dos agujeros negros en colisión.

Definición

La existencia de la radiación gravitacional es una consecuencia de cualquier descripción relativista de la interacción gravitacional.
Para entender la naturaleza de las ondas gravitacionales, debemos introducir algunos conceptos de Relatividad General.

- Sobre el espacio tiempo-definimos un tensor de rango 2 que actúa sobre vectores del espacio tangente, y define el producto escalar entre dos vectores

$$g_{ab}u^a v^b = u \cdot v \tag{1}$$

La métrica que consideraremos es lorentziana con signatura $(-,+,+,+)$

- La descripción tensorial de la geometría es el tensor de curvatura de Riemann, que puede expresarse en términos de los símbolos de Christoffel y sus primeras derivadas.
  Los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ dependen de la métrica y de sus derivadas

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\beta\nu,\alpha} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu}) \ , \tag{2}$$

- El tensor de Riemann tiene las componentes

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\rho\lambda} (\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\eta}\Gamma^{\eta}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\sigma}) \ . \tag{3}$$

- El tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu}. \tag{4}$$

  Su traza define el escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \ . \tag{5}$$

- Finalmente el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{6}$$

Las ecuaciones de Einstein que relacionan la geometría del espacio-tiempo con las fuentes del campo gravitacional representadas por el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \ . \tag{7}$$

Utilizaremos mayoritariamente unidades geométricas en las que $G = 1 = c$.

Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein se reducen a la ecuación de Poisson de la gravedad de Newton en el límite de velocidades bajas y gravedad débil.

Una vez que se ha escogido un sistema de coordenadas, las ecuaciones de Einstein se escriben como un sistema de diez ecuaciones de segundo orden acopladas para las componentes del tensor métrico, $g_{\alpha\beta}$.

La Relatividad general es una teoría no lineal, por lo tanto en el caso general no es clara la distinción entre las partes radiativas de la métrica. Sin embargo, se puede tener una noción de onda en ciertas situaciones límite como:

- En teoría linealizada.
- Como pequeñas perturbaciones en una métrica de fondo.
- En teoría Post-Newtoniana.

Estudiaremos los dos primeros casos.

Teoría linealizada de las Ecuaciones de Einstein

Lejos de un objeto compacto, como un agujero negro o una estrella de neutrones, la gravitación es débil en el sentido que la geometría es casi plana. Por lo tanto la métrica $g_{\alpha\beta}$, puede escribirse en términos de la métrica plana de Minkowski

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \ , \tag{8}$$

y requeriremos que en el sistema en que $\eta_{\alpha\beta} =$diag$(-1, +1, +1, +1)$, las componentes de $h_{\alpha\beta}$ satisfagan

$$|h_{\alpha\beta}| << 1 \tag{9}$$

Si despreciamos, los términos a segundo orden en $h_{\alpha\beta}$, podemos escribir la métrica inversa

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \ , \tag{10}$$

con $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\delta}h_{\sigma\delta}$.
En lo subsecuente, trabajaremos a primer orden en $h_{\alpha\beta}$ y omitiremos términos cuadráticos y de orden superior. Todos los índices pueden subirse y bajarse utilizando la métrica $\eta_{\alpha\beta}$ y su inversa $\eta^{\alpha\beta}$. Escribiremos las ecuaciones de Einstein en el régimen lineal con respecto a la perturbación métrica $h_{\alpha\beta}$.

Transformaciones de norma

Las transformaciones de norma son transformaciones infinitesimales de coordenadas de la forma:

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta}) \tag{11}$$

en donde las funciones ξ^{α} son pequeñas en el sentido que

$$|\partial_{\beta}\xi^{\alpha}| << 1. \tag{12}$$

Si construimos la matriz de transformación

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \partial_{\beta}\xi^{\alpha}, \tag{13}$$

y

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} - \partial_{\beta}\xi^{\alpha} + O((\partial\xi)^2). \tag{14}$$

La transformación anterior aplicada a las componentes de la métrica es

$$g'_{\sigma\rho} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\nu} \ , \tag{15}$$

a primer orden se escribe como

$$g'_{\sigma\rho} = (\delta^{\mu}_{\sigma} - \xi^{\mu}_{,\sigma})(\delta^{\nu}_{\rho} - \xi^{\nu}_{,\rho})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}). \tag{16}$$

Simplificando podemos escribir las componentes de la métrica en las nuevas coordenadas en términos de las componentes de las coordenadas viejas.

Las componentes de la métrica en las nuevas coordenadas

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha + O(h\partial\xi, (\partial\xi)^2), \tag{17}$$

con $\xi_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\xi^\beta$.
Que pueden escribirse como

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} + O(h\partial\xi, (\partial\xi)^2), \tag{18}$$

con

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha \tag{19}$$

Como las componentes de la derivada del vector ξ^α son pequeñas, la nueva métrica satisface

$$|h'_{\mu\nu}| << 1. \tag{20}$$

Hay que resaltar que bajo una transformación infinitesimal de coordenadas, las componentes del tensor de Riemann no cambian a primer orden.
Esto implica que la curvatura de un espacio tiempo con gravedad débil no cambian por una transformación de este estilo. Esta es la razón por la que se les llama *transformaciones de norma*.
La situación es análoga al electromagnetismo en donde se tiene la libertad de elegir los potenciales escalar Φ y vectorial $\vec{A}$.

Elección de norma en electromagnetismo

Si definimos las transformaciones de los potenciales mediante

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \qquad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \tag{21}$$

con Λ una función –lo suficientemente diferenciable– pero arbitraria. Observamos que transformaciones de este estilo dejan invariantes a los campos eléctrico y magnético

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{22}$$

El tensor de curvatura

A orden lineal en $h_{\mu\nu}$, el tensor de Riemann es

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \Gamma_{\alpha\mu\nu,\beta} - \Gamma_{\alpha\mu\beta,\nu} \tag{23}$$

En donde

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\mu,\nu} + h_{\alpha\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) \tag{24}$$

y por lo tanto

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}(h_{\nu\alpha,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - \Box h_{\mu\nu}) \tag{25}$$

y el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h^{\alpha}_{\nu,\alpha\mu} + h^{\alpha}_{\mu,\alpha\nu} - h_{\mu\nu} - \Box h_{\mu\nu}) \tag{26}$$

Contrayendo una vez mas con $\eta^{\mu\nu}$

$$R = h^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \Box h \qquad h = h^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{27}$$

El tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha}_{\nu,\alpha\mu} + h^{\alpha}_{\mu,\alpha\nu} - h_{,\mu\nu} - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \Box h)\right). \qquad (28)$$

Definamos la variable

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \qquad (29)$$

de modo que el tensor de Einstein se escribe

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\bar{h}^{\alpha}_{\nu,\alpha\mu} + \bar{h}^{\alpha}_{\mu,\alpha\nu} - \Box\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}\right). \qquad (30)$$

De entre todas las transformaciones de coordenadas podemos escoger unas para las cuales:

$$\partial^\beta \bar{h}_{\beta\alpha} = 0. \tag{31}$$

que se le conoce como condición de norma armónica o condición de norma de Lorenz.

Esto siempre es posible porque de la ecuación (19) se obtiene la regla de transformación para la perturbación $\bar{h}_{\alpha\beta}$ bajo una transformación de norma

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu \xi^\mu \tag{32}$$

de tal forma que

$$\partial^\beta \bar{h}'_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \Box \xi_\alpha = \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}. \tag{33}$$

En la norma de Lorenz, $\bar{h}^{\beta}{}_{\alpha,\beta} = 0$, el tensor de Einstein se reduce :

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu} + O(h^2), \tag{34}$$

y las ecuaciones de Einstein toman forma de una ecuación de onda en el espacio plano de Minkowski

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} + O(h^2) = -16\pi T_{\mu\nu}. \tag{35}$$

Las soluciones dependientes del tiempo de estas ecuaciones se interpretan como ondas gravitacionales débiles.

Propagación en vacío

Consideremos que no hay contenido de materia en el espacio-tiempo $T_{\alpha\beta} = 0$. Las ecuaciones de Einstein son

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{36}$$

Propagación en vacío

La solución general a la ecuación de onda puede escribirse como una superposición de ondas monocromáticas. De modo que podemos hacer una descomposición de Fourier:

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x) = \mathrm{Re} \int a_{\alpha\beta} e^{ik_\mu x^\mu} d^4k. \tag{37}$$

Cada modo de Fourier tiene una amplitud $a_{\alpha\beta}$. Sustituyendo esta forma en la ecuación (36) se encuentra:

$$\eta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0 \ . \tag{38}$$

Es decir, k^α son las componentes de un vector nulo, con respecto a la métrica de Minkowski.
Por otro lado, la condición de norma de Lorenz implica que el tensor de amplitud es ortogonal a la dirección de propagación de las onda

$$k^\alpha a_{\alpha\beta} = 0 \ . \tag{39}$$

La contracción $k_\alpha x^\alpha$ puede escribirse como:

$$k_\alpha x^\alpha = k_0 x^0 + \sum_{i=1}^{3} k_i x^i = k_0 x^0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \tag{40}$$

en donde hemos introducido los 3-vectores $\mathbf{k} : (k^1, k^2, k^3)$ y
$\mathbf{x} : (x^1, x^2, x^3)$. Si adicionalmente introducimos la cantidad $\omega := k^0$
La solución de la ecuación de onda puede expresarse para cada modo como

$$h_{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) = a_{\alpha\beta} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \tag{41}$$

por lo que ω es la frecuencia angular de la onda.

También definimos la frecuencia de la onda f medida en hertz o ciclos por segundo, relacionada con ω mediante

$$\omega = 2\pi f. \tag{42}$$

El vector $\mathbf{k}$ es el vector de onda y apunta en la dirección de propagación de la onda y su longitud euclídea está relacionada con la longitud de onda como

$$\lambda|\mathbf{k}| = 2\pi \ , \tag{43}$$

y por lo tanto definimos la relación de dispersión:

$$\omega = |\mathbf{k}|, \tag{44}$$

que implica que las velocidades de fase y de grupo son iguales a $(c = 1)$.

Descripción en el sistema TT

Consideremos un sistema de coordenadas del espacio-tiempo x^α. Sea u^μ el vector tipo tiempo normalizado:

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1. \tag{45}$$

Sea una transformación de norma, ξ^α

Es posible escoger las coordenadas de tal forma que con la transformación $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}$ las siguientes condiciones se satisfagan

$$\bar{h}'_{\mu\nu} u'^{\nu} = 0, \qquad \eta^{\mu\nu} \bar{h}'_{\mu\nu} = 0. \tag{46}$$

La transformación de norma preserva la condición

$$\bar{h}'_{\mu\nu} k'^{\nu} = 0. \tag{47}$$

Notemos que como consecuencia de (46)

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu}. \tag{48}$$

Las ecuaciones (46) definen al sistema TT (Transverso y sin traza) relacionado con el campo u^{μ}.

La ecuaciones (46,47) dejan únicamente dos grados de libertad, llamados polarizaciones.
El modo mas simple de describir estas polarizaciones es haciendo una elección adecuada de coordenadas.

Podemos elegir el sistema de coordenadas tal que el vector u^μ tenga componentes

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \tag{49}$$

y por lo tanto

$$\bar{h}_{\mu 0} = 0. \tag{50}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{30} & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}.$$

Además, podemos orientar los ejes coordenados de tal forma que la onda se propague en la dirección $+z$ entonces $\mathbf{k} = (0, 0, \omega)$, $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$.

De modo que por la condición (47) y (50) se obtiene

$$\bar{h}_{\mu 3} = 0. \tag{51}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ 0 & h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ 0 & h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}.$$

La condición sobre la traza, $\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$ determina la condición:

$$\bar{h}_{11} + \bar{h}_{22} = 0. \tag{52}$$

Es común utilizar la siguiente notación

$$h_+ := \bar{h}_{11} = -\bar{h}_{22}, \qquad h_\times := \bar{h}_{12} = \bar{h}_{21} \tag{53}$$

Las funciones h_+ y $h_\times$ son las polarizaciones $+$ y $\times$ de la onda.

En términos de una matriz podemos escribir

$$h_{\mu\nu}^{TT}(t,\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t,\mathbf{x}) & h_\times(t,\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & h_\times(t,\mathbf{x}) & -h_+(t,\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

En donde las polarizaciones h_+ y $h_\times$ son de una onda plana con frecuencia ω que viaja en la dirección z

$$h_+(t,\mathbf{x}) = A_+ \cos\left(\omega(t-z) + \alpha_+\right) \tag{54}$$

$$h_\times(t,\mathbf{x}) = A_\times \cos\left(\omega(t-z) + \alpha_\times .\right) \tag{55}$$

Resumiendo

- Cualquier onda gravitacional puede representarse como una superposición de ondas planas.
- Las condiciones que describen a la norma TT,

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0, \qquad u^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0, \qquad \bar{h}^{\mu}{}_{\mu} = 0, \tag{56}$$

  son lineales en $\bar{h}_{\mu\nu}$, es posible encontrar la norma TT para cualquier onda gravitacional.
- Si nos restringimos a ondas planas y orientamos los ejes de tal forma que se propaguen en la dirección z entonces las ecuaciones

$$\bar{h}_{\mu 0} = 0, \qquad \bar{h}_{\mu 3} = 0, \qquad \bar{h}_{11} + \bar{h}_{22} = 0, \tag{57}$$

  siguen siendo válidas.

Cualquier onda gravitacional que se propague en la dirección z descrita en la norma TT podemos escribirla como una matriz de la forma

$$h_{\mu\nu}^{TT}(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t-z) & h_\times(t-z) & 0 \\ 0 & h_\times(t-z) & -h_+(t-z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si introducimos los tensores de polarización e^+ y $e^\times$ por medio de las ecuaciones:

$$e_{xx}^+ = -e_{yy}^+ = 1, \qquad e_{xy}^\times = e_{yx}^\times = 1, \tag{58}$$

y todas las demás componentes cero.
Podemos describir a la onda con la siguiente notación:

$$h_{\mu\nu}^{TT}(t,\mathbf{x}) = h_+(t,\mathbf{x})e_{\mu\nu}^+ + h_\times(t,\mathbf{x})e_{\mu\nu}^\times. \tag{59}$$

Consideremos la ecuación de geodésicas en la norma TT.
El movimiento de una partícula que esta en reposo a $\tau = 0$

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2}|_{\tau=0} = -\left[\Gamma^i_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}\right]_{\tau=0} = -\left[\Gamma^i_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2\right]_{\tau=0}, \tag{60}$$

en donde hemos utilizado que la partícula esta en reposo inicialmente. Por otro lado

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}(2\partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}). \tag{61}$$

Pero en la norma TT esta cantidad es cero pues $h_{0i} = 0 = h_{00}$. Por lo tanto si a $\tau = 0$, $dx^i/d\tau = 0$, en la norma TT, la partícula permanecerá en reposo incluso después del paso de la onda gravitacional.

Descripción en el Sistema de referencia propio

Consideremos dos observadores cercanos cayendo libremente en el campo de una onda gravitacional débil.

En consecuencia, la onda produce pequeñas variaciones en la distancia propia entre los observadores. Describiremos estas variaciones desde el punto de vista de uno de estos observadores al cual llamaremos observador básico.

Equipamos a ése observador con su propio sistema de referencia, que le permite medir distancias y sus relojes están sincronizados.

El tiempo coordenado $\hat{t}$ de ese sistema mide el tiempo propio a lo largo de la línea de mundo del observador mientras que las coordenadas espaciales $\hat{x}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ miden distancias propias a lo largo del eje i.

Las coordenadas ($\hat{x}^0$,$\hat{x}^1$,$\hat{x}^2$,$\hat{x}^3$) son localmente lorentzianas a lo largo de la geodésica del observador básico, es decir el elemento de línea de este observador en sus coordenadas es

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + \delta_{ij} d\hat{x}^i d\hat{x}^j + O((x^i)^2) d\hat{x}^\alpha d\hat{x}^\beta \ , \tag{62}$$

es decir se diferencía del espacio de Minkowski por términos que son al menos cuadráticos en las coordenadas $\hat{x}^i$

Sea el observador básico A localizado en el origen de su sistema de referencia, entonces, sus coordenadas son: $\hat{x}^\alpha_A(\hat{t}) = (\hat{t}, 0, 0, 0)$. Un observador B se mueve a lo largo de la geodésica cercana y tiene coordenadas $\hat{x}^\alpha_B(\hat{t}) = (\hat{t}, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$

Definimos el vector de desviación $\hat{\xi}^{\alpha}$ como aquel que describe la posición relativa instantánea del observador B con respecto al observador A.

$$\hat{\xi}^{\alpha} := \hat{x}^{\alpha}_{B}(\hat{t}) - \hat{x}^{\alpha}_{A}(\hat{t}) = (0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) \tag{63}$$

La aceleración relativa $\frac{D^2\hat{\xi}^{\alpha}}{d\hat{t}^2}$ entre los observadores esta relacionada con el tensor de Riemann a travé́s de la ecuación de desviación geodésica

$$\frac{D^2\hat{\xi}^{\alpha}}{d\hat{t}^2} = -\hat{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\hat{u}^{\beta}\hat{\xi}^{\gamma}\hat{u}^{\delta} \ , \tag{64}$$

en donde $\hat{u}^{\beta}$ es la 4-velocidad de los observadores básicos. Hay que recordar que todas estas cantidades están evaluadas sobre las geodésicas de los observadores básicos de modo que solo dependen del tiempo.

Si uno escoge las coordenadas TT de modo que la 4-velocidad, necesaria para definir las coordenadas coincida con la 4-velocidad del observador básico, entonces las coordenadas TT (t, x^i) y las coordenadas $(\hat{t}, \hat{x}^i)$ difieren entre sí por cantidades lineales en h.
Esto significa que las componentes del tensor de Riemann en ambos sistemas coinciden hasta orden cuadráticos en h

$$\hat{R}_{i0j0} = R^{\mathrm{TT}}_{i0j0} + O(h^2). \tag{65}$$

Haciendo uso de la relación anterior y despreciando términos cuadráticos, la ecuación de desviación geodésica queda como

$$\frac{d^2\hat{x}^i}{d\hat{t}^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{\mathrm{TT}}_{ij}}{\partial\hat{t}^2}\hat{x}^j, \tag{66}$$

en donde la segunda derivada esta evaluada a lo largo de la geodésica $\hat{x} = \hat{y} = \hat{z} = 0$.

En la derivación de la relación anterior no es necesario asumir que la onda se propaga en dirección $+z$ de modo que es una relación válida cuando la onda se propaga en cualquier dirección. Consideremos que para tiempos $\hat{t} \leq 0$ no hay ondas ($h_{ij}^{\mathrm{TT}} = 0$) en la vecindad de dos observadores,

$$\hat{x}^i(\hat{t}) = \hat{x}_0^i = \mathrm{cte}, \qquad \hat{t} \leq 0. \tag{67}$$

y que a $\hat{t} = 0$ una onda llega.

Esperamos que $\hat{x}^i(\hat{t}) = \hat{x}^i_0 + O(h)$ para $\hat{t} > 0$ por lo que podemos escribir

$$\frac{d^2\hat{x}^i}{d\hat{t}^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{\mathrm{TT}}_{ij}}{\partial \hat{t}^2}\hat{x}^j, \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2\hat{x}^i}{d\hat{t}^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{\mathrm{TT}}_{ij}}{\partial \hat{t}^2}\hat{x}^j_0, \tag{68}$$

que puede integrarse de forma inmediata

$$\hat{x}^i(\hat{t}) = \left(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{ij}(\hat{t})\right) x^i_0, \qquad \hat{t} > 0 \tag{69}$$

Orientemos los ejes espaciales del sistema de referencia propio de tal forma que la onda se propague en dirección $+z$. Podemos entonces escribir, reemplazando $z = 0$ y t por $\hat{t}$.

$$h_{\mu\nu}^{TT}(\hat{t}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(\hat{t}) & h_\times(\hat{t}) & 0 \\ 0 & h_\times(\hat{t}) & -h_+(\hat{t}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las posiciones (69) quedan como

$$\hat{x}(\hat{t}) = \hat{x}_0 + \frac{1}{2}\left(h_+(\hat{t})\hat{x}_0 + h_\times(\hat{t})\hat{y}_0\right), \tag{70}$$

$$\hat{y}(\hat{t}) = \hat{y}_0 + \frac{1}{2}\left(h_+(\hat{t})\hat{x}_0 + h_\times(\hat{t})\hat{y}_0\right), \tag{71}$$

Que indican que la onda gravitacional es transversa y produce desplazamientos en las partículas de prueba solo en el plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

Consideremos un observador básico, que monitorea el movimiento de partículas cercanas el momento que llega una onda gravitacional. Consideremos además que las ondas forman un anillo en el plano $(\hat{x}, \hat{y})$. Sea r_0 el radio del anillo y diremos que el centro del anillo coincide con el origen del sistema de referencia propio del observador. Entonces las coordenadas de las partículas sobre el anillo pueden parametrizarse por un ángulo $\phi \in [0, 2\pi]$ de la forma

$$\hat{x}_0 = r_0 \cos\phi, \qquad \hat{y}_0 = r_0 \sin\phi, \qquad \hat{z}_0 = 0. \tag{72}$$

Primero notamos que el anillo permanecerá en el plano $(\hat{x}, \hat{y})$:

$$\hat{z}(\hat{t}) = 0, \tag{73}$$

Polarización +

La onda gravitacional está en el modo + cuando $h_\times = 0$. utilizando las ecuaciones (69) se obtiene

$$\hat{x}(\hat{t}) = r_0 \cos\phi \left(1 + \frac{1}{2} h_+(\hat{t})\right), \tag{74}$$

$$\hat{y}(\hat{t}) = r_0 \sin\phi \left(1 - \frac{1}{2} h_+(\hat{t})\right), \tag{75}$$

Inicialmente las partículas estén sobre un anillo perfectamente circular, pero cuando pasa la onda, la forma se ve modificada. Podemos obtener la forma del anillo si tratamos a las ecuaciones anteriores como una curva parametrizada por el ángulo ϕ

La ecuación resultante es

$$\frac{\hat{x}^2}{(a_+(\hat{t}))^2} + \frac{\hat{y}^2}{(b_+(\hat{t}))^2} = 1, \tag{76}$$

en donde

$$a_+(\hat{t}) := r_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_+(\hat{t})\right), \qquad b_+(\hat{t}) := r_0 \left(1 - \frac{1}{2} h_+(\hat{t})\right) \tag{77}$$

Las ecuación (76) describe una elipse cuyo centro esta en el origen del sistema de coordenadas. Los semi-ejes de la elipse son $a_+(\hat{t})$ y $b_+(\hat{t})$ paralelos a los ejes $\hat{x}$ y $\hat{y}$ respectivamente.

Si $h_+(\hat{t})$ es una función oscilatoria, que cambia de signo con el tiempo, entonces la deformación del circulo inicial será como sigue:

$$a_+(\hat{t}) := r_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_+(\hat{t})\right), \qquad b_+(\hat{t}) := r_0 \left(1 - \frac{1}{2} h_+(\hat{t})\right) \tag{78}$$

- En los intervalos de tiempo en los que $h_+(\hat{t}) > 0$, el círculo se estira en la dirección $\hat{x}$ y se comprime en la dirección $\hat{y}$.
- Cuando $h_+(\hat{t}) < 0$ la compresión es a lo largo del eje $\hat{y}$ y el estiramiento es en la dirección $\hat{x}$

Consideremos ahora una solo partícula sobre el anillo. El movimiento de la partícula con respecto al origen esta dado por la ecuación (69) para algún valor fijo de ϕ. Si del conjunto de ecuaciones (69) eliminamos a la función $h_+(\hat{t})$. El resultado es

$$\frac{\hat{x}}{r_0 \cos\phi} + \frac{\hat{y}}{r_0 \sin\phi} - 2 = 0. \tag{79}$$

Lo que significa que una sola partícula sobre el anillo se mueve alrededor de su posición inicial a lo largo de una línea recta.

Polarización $\times$

La onda gravitacional esta en la polarización $\times$ cuando $h_+ = 0$ de modo que

$$\hat{x}(\hat{t}) = r_0 \left(\cos\phi + \frac{1}{2} \sin\phi h_\times(\hat{t}), \right) \tag{80}$$

$$\hat{y}(\hat{t}) = r_0 \left(\sin\phi + \frac{1}{2} \cos\phi h_\times(\hat{t}), \right) \tag{81}$$

Introduzcamos en el plano $(\hat{x}, \hat{y})$ unas nuevas coordenadas $(\hat{x}', \hat{y}')$ relacionadas con las anteriores pero rotadas alrededor del eje z' por un ángulo de $\alpha = 45$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

Si reescribimos las trayectorias en términos de las coordenadas (x', y')

$$\hat{x}'(\hat{t}) = \frac{1}{\sqrt{2}} r_0 (\sin\phi + \cos\phi)\left(1 + h_\times(\hat{t})\right), \tag{82}$$

$$\hat{y}'(\hat{t}) = \frac{1}{\sqrt{2}} r_0 (\sin\phi - \cos\phi)\left(1 - h_\times(\hat{t})\right), \tag{83}$$

Que después de eliminar el parámetro ϕ se obtiene

$$\frac{\hat{x}'^2}{(a_\times(\hat{t}))^2} + \frac{\hat{x}'^2}{(b_\times(\hat{t}))^2} = 1, \tag{84}$$

con

$$a_\times(\hat{t}) := r_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_\times(\hat{t})\right), \qquad a_\times(\hat{t}) := r_0 \left(1 - \frac{1}{2} h_\times(\hat{t})\right). \tag{85}$$

Que tienen la misma forma que la polarización $+$. El anillo circular inicial se deformará en una elipse cuyo centro es el origen de coordenadas pero cuyos ejes están rotados 45 con respecto a los ejes $\hat{x}$, $\hat{y}$.