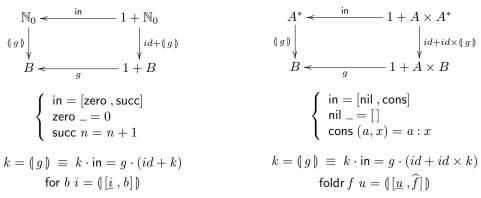
Cálculo de Programas

Lic. C. Computação (2º ano) Lic./Mest. em Engenharia Informática (3º ano) UNIVERSIDADE DO MINHO

2021/22 - Ficha nr.º 6

1. Os diagramas seguintes representam as **propriedades universais** que definem o combinador **catamorfismo** para dois tipos de dados — números naturais \mathbb{N}_0 à esquerda e listas finitas A^* à direita:



onde \widehat{f} abrevia uncurry f.

(a) Tendo em conta o diagrama da esquerda, codifique, em Haskell

$$(\!(g)\!) = g \cdot (id + (\!(g)\!)) \cdot \mathsf{out}$$

e

for
$$b$$
 $i = ([\underline{i}, b])$

em que out foi calculada numa ficha anterior. De seguida, codifique

$$f = \pi_2 \cdot aux \text{ where } aux = \text{for } \langle \text{succ} \cdot \pi_1, \text{mul} \rangle \ (1, 1)$$

e inspeccione o comportamento de f. Que função é essa?

- (b) Identifique como catamorfismos de listas as funções seguintes, indicando o gene g para cada caso:¹
 - i. k é a função que multiplica todos os elementos de uma lista
 - ii. k = reverse
 - iii. $k = \mathsf{concat}$
 - iv. k é a função map f, para um dado $f:A\to B$
 - v. k é a função que calcula o máximo de uma lista de números naturais (\mathbb{N}_0^*) .
 - vi. k =filter p onde

$$\begin{array}{l} \text{filter } p \; [\;] = [\;] \\ \text{filter } p \; (h:t) = x \; +\! + \text{filter } p \; t \; \text{where } x = \text{if } (p \; h) \; \text{then } [h] \; \text{else} \; [\;] \end{array}$$

¹Apoie a sua resolução com diagramas.

2. Sabendo que for f $i=([\underline{i},f])$ para F f=id+f (naturais), recorra à lei de fusão-cata para demonstrar a propriedade:

$$f \cdot (\text{for } f \ i) = \text{for } f \ (f \ i) \tag{F1}$$

3. Mostre que as funções

$$f = \text{for } id \ i$$

 $g = \text{for } \underline{i} \ i$

são a mesma função. (Qual?)

4. A função seguinte, em Haskell

$$\begin{array}{l} sumprod \ a \ [\] = 0 \\ sumprod \ a \ (h:t) = a*h + sumprod \ a \ t \end{array}$$

é o catamorfismo de listas

$$sumprod \ a = ([zero, add \cdot ((a*) \times id)])$$
 (F2)

onde zero $= \underline{0}$ e add (x, y) = x + y. Mostre, como exemplo de aplicação da propriedade de **fusão-cata** para listas, que

$$sumprod \ a = (a*) \cdot sum \tag{F3}$$

onde sum = ([zero, add]). **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.

5. Considere o functor

$$\begin{array}{l} \mathsf{T} \; X = X \times X \\ \mathsf{T} \; f = f \times f \end{array}$$

e as funções

$$\mu = \pi_1 \times \pi_2$$
$$u = \langle id, id \rangle.$$

Mostre que a propriedade $\mu \cdot \mathsf{T} \ u = id = \mu \cdot u$ se verifica.

6. Sejam dados os functores elementares seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\,X = \mathbb{Z} \\ \mathsf{F}\,f = id \end{array} \right. \ \, \mathrm{e} \ \, \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{G}\,X = X \\ \mathsf{G}\,f = f \end{array} \right.$$

Calcule Hfe Kfpara

$$HX = FX + GX$$
 e $KX = GX \times FX$