## Cálculo de Programas

Lic. C. Computação (2º ano) Lic./Mest. em Engenharia Informática (3º ano) UNIVERSIDADE DO MINHO

2021/22 - Ficha nr.º 4

1. Recorde a função

$$\label{eq:ap:condition} \begin{split} \operatorname{ap}: (C^B \times B) \to C \\ \operatorname{ap} (f, x) = f \ x \end{split}$$

(a) Mostre, através da adição de variáveis, que a função f definida a seguir

$$f k = ap \cdot (k \times id)$$

é a função

uncurry :: 
$$(a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a, b) \rightarrow c$$
  
uncurry  $f(a, b) = f(a, b)$ 

disponível em Haskell.

(b) Mostre que a igualdade

$$\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{curry} \ f \times id) = f \tag{F1}$$

corresponde à definição curry f a b = f (a,b) da função curry ::  $((a,b) \to c) \to a \to b \to c$  também disponível em Haskell.

2. Abreviando curry f por  $\overline{f}$ , identifique a propriedade (F1) no formulário e diga como a deriva da propriedade universal da exponenciação, que a seguir se descreve através de um diagrama:

$$\begin{array}{cccc} C^B & & C^B \times B \xrightarrow{ap} C & & k = \overline{f} \; \equiv \; \operatorname{ap} \cdot (k \times id) = f \\ & & & & \\ k & & & \\ A & & & A \times B & & \\ \end{array}$$

3. Considere o isomorfismo de ordem superior flip definido pela composição de isomorfismos seguinte:

• Mostre que flip, acima definida por flip  $f=\overline{\widehat{f}\cdot\mathsf{swap}}$ , é um isomorfismo por ser a sua própria inversa, isto é, por

$$flip (flip f) = f (F2)$$

se verificar.

- Mostre ainda que flip f x y = f y x.
- 4. Apresente justificações para a demonstração da igualdade

$$\overline{f} \ a = f \cdot \langle \underline{a}, id \rangle \tag{F3}$$

que se segue:

- 5. Prove a igualdade  $\overline{f \cdot (g \times h)} = \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g$  usando as leis das exponenciais e dos produtos.
- 6. Considere o isomorfismo

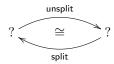
$$A^{B+C} \stackrel{\text{unjoin}}{\cong} A^B \times A^C$$
 (F4)

onde

$$\begin{aligned} & \text{join } (f,g) = [f \;, g] \\ & \text{unjoin } k = (k \cdot i_1, k \cdot i_2) \end{aligned}$$

Mostre que join  $\cdot$  unjoin = id e que unjoin  $\cdot$  join = id.

7. Complete os "?"do diagrama



onde

8. Prove a igualdade  $g = \overline{g \cdot \pi_2}$  sabendo que

$$\overline{\pi_2} = \underline{id} \tag{F5}$$

se verifica.