UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Integral de Riemann-Integral de Lebesgue: un estudio comparativo

Presentado por:
Miguel Rodríguez Losada

Curso académico 2024-2025

Integral de Riemann-Integral de Lebesgue: un estudio comparativo

Miguel Rodríguez Losada

Miguel Rodríguez Losada *Integral de Riemann-Integral de Lebesgue: un estudio comparativo*.
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2024-2025.

Responsable de tutorización Antonio Cañada Villar
Departamento de Análisis Matemático

Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D. Miguel Rodríguez Losada

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2024-2025, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 17 de julio de 2025

Fdo: Miguel Rodríguez Losada

Aos meus pais, polo seu apoio incondicional e por seren sempre o meu espello onde mirar.

Abstract

Title: *The Riemann Integral and the Lebesgue Integral: A Comparative Study*

The concept of integration has long stood as one of the central pillars of mathematical analysis. While its origins trace back to problems in ancient geometry, notably in the 3^{rd} century BC, it was not until the 17^{th} century that calculus provided a systematic framework for its application. Over time, the increasing need for precision and generality in the integration of more complex functions led to the development of various integration theories, each shaped by distinct motivations and degrees of analytical rigor.

This project undertakes a comparative and historically grounded investigation of the two principal frameworks of integration: the **Riemann integral**, introduced by Bernhard Riemann in the 19^{th} century, and the **Lebesgue integral**, formulated by Henri Lebesgue in the early 20^{th} century. While both serve to assign a notion of area under a curve, they diverge significantly in their conceptual underpinnings and in the scope of functions they are able to integrate.

The core aim of this study is to examine the theoretical motivations, structural properties, and pedagogical significance of these two approaches. To that end, we explore their foundational definitions, the types of functions they admit, the nature and strength of their convergence theorems, and the formulation and consequences of the Fundamental Theorem of Calculus in each context. Through this comparative lens, the project also aims to highlight the broader conceptual contributions that each theory has made to real analysis and mathematical education.

Historical Motivation and Development

The Riemann integral arises from the classical idea of summing areas of rectangles formed by partitioning the domain of a function. Its construction is geometrically intuitive and closely aligned with the early formulations of calculus. Though widely applicable and central to the mathematical curriculum, the Riemann integral exhibits several theoretical limitations, particularly when addressing functions with intricate sets of discontinuities or in the context of puntual limits. These shortcomings prompted the search for a more general theory of integration, capable of accommodating a broader class of functions and ensuring greater stability under limiting processes.

Lebesgue's approach, by contrast, revolutionized the theory of integration by introducing a framework grounded in measure theory. Rather than partitioning the domain of a function, the Lebesgue integral partitions its range and evaluates contributions from level sets, leading to a more versatile and robust definition. This perspective, developed between 1901 and 1902, has proven to have far-reaching implications, particularly in the study of convergence theorems and L^p spaces. The resulting theory not only overcame many deficiencies of Riemann integration but also laid the groundwork for significant advances in functional analysis, probability theory and partial differential equations.

Objectives and Structure of the Study

The project is structured into four major chapters, corresponding to the specific objectives defined in the official proposal:

- **Historical Foundations:** A chronological overview of the evolution of the concept of integral, from ancient methods to the rigorous frameworks of Riemann and Lebesgue. This section contextualizes their emergence as responses to specific mathematical challenges, and illustrates the gradual development of increasingly precise definitions of integration.
- **The Riemann Integral:** A formal exposition of the Riemann integral and its extension to improper and multidimensional settings. Emphasis is placed on integrability conditions, the limitations of the theory in handling irregular functions, and its intuitive geometric interpretation. Several classical examples and counterexamples are included to illustrate its strengths and limitations.
- **The Lebesgue Integral:** A comprehensive development of Lebesgue's theory, beginning with measurable sets and functions, followed by the construction of the integral and its fundamental properties. Emphasis is placed on the broader class of functions integrable in the Lebesgue sense compared to the Riemann approach, as well as on the connection between the Lebesgue integral and improper Riemann integrals. Special attention is given to the space of Lebesgue integrable functions and its structure.
- **Comparative Frameworks for Convergence and the Fundamental Theorem of Calculus:** A unified analysis of the major convergence theorems in both settings, with special attention to the Monotone and Dominated Convergence Theorems in the Lebesgue context. The application and formulation of the Fundamental Theorem of Calculus are also compared, with a particular focus on the role of absolute continuity of functions.

Throughout the study, illustrative examples and geometric interpretations are employed to clarify the theoretical developments. The exposition is guided by a pedagogical concern: to assess not only the analytical robustness of each theory but also its didactic appropriateness in the context of undergraduate education.

Methodology

The methodology is predominantly theoretical and expository. Definitions, propositions, and theorems are rigorously formulated and accompanied by either proofs or bibliographic references. The content is based on a careful selection of classical sources and modern references, including textbooks and lecture notes that are standard in real analysis courses.

Conclusion and Future Work

This comparative analysis substantiates the notion that the Lebesgue integral, by virtue of its conceptual foundation in measure theory, generalizes and significantly extends the Riemann integral. Its capacity to integrate a broader class of functions and to handle limit processes with elegance and precision makes it a cornerstone of modern analysis.

While the Riemann integral remains fundamental for its intuitive appeal and foundational role in introductory courses, the Lebesgue integral emerges as the natural evolution of the

concept, essential in advanced mathematics and in disciplines such as probability theory, functional analysis, and the theory of differential equations.

Future research directions include a deeper exploration of alternative integration theories, such as the *Henstock–Kurzweil integral*, and potential generalizations of the Lebesgue theory to abstract measure spaces and non-Euclidean domains. These extensions would further emphasize the flexibility and structural depth of integration in the broader mathematical landscape.

Índice general

Introducción

El presente Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo principal desarrollar un estudio comparativo riguroso entre las dos teorías principales de integración en el ámbito del análisis real: la **integral de Riemann** y la **integral de Lebesgue**.

Dicha comparación se plantea desde una doble perspectiva: por un lado, se aborda el estudio histórico de ambas teorías, con el fin de comprender el contexto en el que surgieron y las motivaciones que impulsaron su desarrollo; por otra parte, se realiza un análisis teórico riguroso centrado en sus fundamentos conceptuales y en los resultados subyacentes más relevantes.

De acuerdo con la propuesta oficial, el trabajo se estructura en torno a los siguientes cuatro objetivos fundamentales:

- Elaborar un recorrido histórico que contextualice el origen y la evolución de las nociones de integral de Riemann e integral de Lebesgue.
- Realizar un estudio comparativo de ambas teorías desde el punto de vista de las funciones integrables, incluyendo las integrales impropias de Riemann.
- Analizar los principales resultados relativos al paso al límite, con especial atención a los teoremas de convergencia más representativos de cada teoría.
- Examinar el papel que desempeña el Teorema Fundamental del Cálculo en ambas teorías, subrayando sus fundamentos y formulaciones respectivas.

Todos los objetivos establecidos han sido alcanzados de manera satisfactoria. El desarrollo del trabajo permite articular una visión coherente y estructurada de ambas teorías de integración, subrayando tanto las motivaciones históricas que propiciaron su formulación como su vigencia en el panorama actual de la enseñanza y la investigación matemática.

En particular, se ha evidenciado cómo el enfoque de Lebesgue emerge como una respuesta natural a las limitaciones que presenta el planteamiento de Riemann, constituyendo una generalización más robusta desde el punto de vista analítico, especialmente en lo que respecta al tratamiento riguroso del paso al límite.

El contenido del trabajo se distribuye en cuatro capítulos, organizados de forma que cada uno aporte, de manera progresiva, los conceptos y herramientas necesarios para comprender con profundidad las teorías estudiadas.

- **Capítulo 1.** Se realiza una exposición cronológica del origen y evolución del concepto de integral, desde los métodos clásicos de cuadratura hasta las formulaciones rigurosas de Riemann y Lebesgue. Este análisis histórico, centrado en las contribuciones de Arquímedes, Cavalieri, Fermat, Newton y Leibniz, entre otros, permite comprender el contexto intelectual que motivó la aparición de cada teoría y sitúa con precisión su papel dentro del desarrollo del análisis.

- **Capítulo 2.** Se presenta una exposición formal de la **integral de Riemann**, incluyendo su definición en una y varias variables, así como su extensión al caso de las integrales impropias. Se analizan las condiciones de integrabilidad, las limitaciones del enfoque ante funciones con comportamientos irregulares y su interpretación geométrica.

- **Capítulo 3.** Se desarrolla de manera sistemática la **integral de Lebesgue**, desde los conceptos de conjuntos y funciones medibles hasta la construcción de la integral y el estudio de sus propiedades fundamentales. Se examina la amplitud de funciones integrables en este marco, la relación con las integrales impropias de Riemann, y se presta especial atención a la estructura del espacio $L^1(\Omega)$.

- **Capítulo 4.** Se lleva a cabo un análisis comparativo de los principales **teoremas de convergencia**, con especial atención al Teorema de la Convergencia Monótona y al Teorema de la Convergencia Dominada en el contexto de Lebesgue. Asimismo, se compara la formulación del **Teorema Fundamental del Cálculo** en ambos marcos, destacando el papel de la continuidad absoluta en el enfoque de Lebesgue.

En lo que respecta a las fuentes bibliográficas, el trabajo se apoya en una cuidada selección de textos clásicos y actuales. Destacan, por su profundidad teórica, las obras de Robert G. Bartle [Bar95, Bar96] y de Robert L. Wheeden y Antoni Zygmund [WZ15], referencias clave en análisis e integración.

Para el enfoque histórico y didáctico, han resultado especialmente útiles los materiales docentes de Francisco Javier Pérez González [Gon21] y Antonio Cañada Villar [Vil25], del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, así como los trabajos de Kirsti Andersen [And84], H. J. M. Bos [Bos84], Pedro M. González Urbanea [Urb] e Israel Kleiner [Kle01], que han enriquecido la perspectiva histórica del estudio.

En conjunto, el trabajo aspira a ofrecer una visión estructurada de dos construcciones fundamentales del análisis real, articulando el desarrollo histórico con la rigurosidad teórica. Esta aproximación permite no solo comparar ambas teorías desde un enfoque crítico, sino también valorar su trascendencia en el marco actual de la formación matemática.

1. Orígenes históricos de la integral de Riemann e integral de Lebesgue

La noción de integral que se estudia hoy es fruto de un extenso desarrollo histórico donde convergen intuiciones geométricas, problemas físicos y formalismos matemáticos cada vez más precisos. Desde la Antigüedad, el problema de las cuadraturas, es decir, la determinación de áreas mediante construcciones geométricas, ha sido una preocupación central en el pensamiento matemático.

Este capítulo recorre algunas etapas clave de esta evolución: los métodos de Arquímedes, el uso de indivisibles por Cavalieri, la aproximación geométrica de Fermat y la interpolación numérica de Wallis. Asimismo, se examina la conexión entre el cálculo de áreas y el de tangentes, que culmina en el Teorema Fundamental del Cálculo formulado por Newton y Leibniz.

Finalmente, se introduce el cambio de perspectiva que aportaron Riemann y Lebesgue, cuyas definiciones de integral sentaron las bases del análisis moderno y de la teoría de la medida.

> *Este capítulo se apoya tanto en los materiales docentes [Gon21] como en diversas fuentes clásicas y contemporáneas de referencia, entre las que destacan [And84], [Bos84], [Urb] y [Kle01], fundamentales para el estudio histórico del concepto de integral.*

1.1. El problema clásico de las cuadraturas

En la antigua Grecia, uno de los desafíos geométricos más importantes era el de las *cuadraturas*. El objetivo de dicho problema matemático era el siguiente: dado un objeto plano, se trataba de construir, mediante procedimientos geométricos, un cuadrado que tuviera la misma área.

Las reglas permitidas para realizar estas construcciones eran estrictas, limitándose al uso de una regla no graduada y un compás, conforme a los postulados recogidos en los *Elementos* de Euclides (c. 300 a.C.). Toda construcción válida debía realizarse en un número finito de pasos elementales, entre los que se incluyen:

- El trazado de una línea recta entre dos puntos.
- La construcción de una circunferencia con centro y radio arbitrarios.
- La determinación de puntos de intersección entre líneas y/o circunferencias.

Problemas clásicos como la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo o la inscripción de polígonos regulares en una circunferencia eran abordados bajo estas restricciones. Se sabe que los geómetras griegos eran capaces de cuadrar con exactitud cualquier figura poligonal.

Veamos ejemplos ilustrativos de esta forma de calcular en distintas figuras.

1.1.1. Cuadratura de un rectángulo y el nacimiento del *método de exhaución*

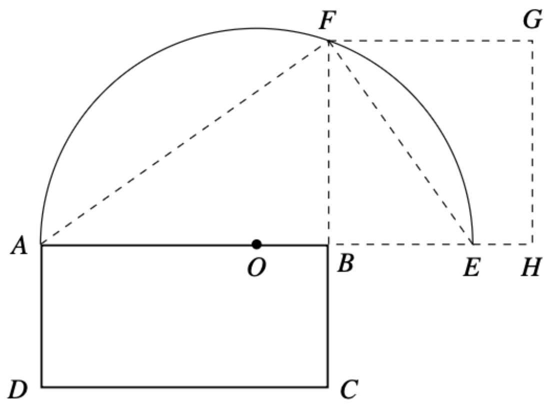


Figura 1.1.: Cuadratura del rectángulo

Para cuadrar el rectángulo $ABCD$ de la figura 1.1, se procede del modo siguiente:

1. Se prolonga el lado AB y se determina sobre él un punto E tal que $BE = BC$.

2. Se traza, con centro en el punto medio O del segmento AE, una semicircunferencia de radio OE.

3. Se traza por B una perpendicular a AE y se determina su punto de corte F con la semicircunferencia.

4. El segmento FB es el lado de un cuadrado cuya área es igual a la del rectángulo $ABCD$. Esto se justifica observando que la altura FB del triángulo rectángulo AFE es media proporcional entre las dos partes en que divide a la hipotenusa, es decir:

$$\frac{FB}{AB} = \frac{BE}{FB} \quad \Rightarrow \quad FB^2 = AB \cdot BE = AB \cdot BC.$$

Una vez comprendido cómo cuadrar un rectángulo, resulta sencillo deducir el procedimiento para cuadrar un triángulo, y, en consecuencia, extenderlo a cualquier polígono, ya que todo polígono puede descomponerse en una suma finita de triángulos.

Este razonamiento fue fundamental para los geómetras griegos, quienes desarrollaron un ingenioso método para calcular áreas más complejas: el *método de exhaución*. Dicho método, considerado un precursor del concepto moderno de límite, permitía aproximar áreas de figuras curvilíneas mediante figuras poligonales inscritas o circunscritas. La invención de este procedimiento se atribuye a Eudoxo de Cnido (c. 400–347 a.C.), aunque alcanzó su máximo desarrollo en la obra de Arquímedes (c. 287–212 a.C.), quien lo empleó con gran maestría para obtener resultados precisos sobre figuras curvas.

A continuación se expone un célebre ejemplo, atribuido a Arquímedes, que ejemplifica la aplicación de dicho método.

1.1.2. Área del segmento parabólico según Arquímedes

Teorema 1.1. *El área del segmento parabólico delimitado por una cuerda con extremos P, Q y el arco de parábola comprendido entre esos puntos es igual a $\frac{4}{3}$ del área del triángulo inscrito.*

Demostración. Esta demostración aparece en la obra de Arquímedes *Sobre la cuadratura de la parábola*, dirigida a su amigo Dositeo. En ella, Arquímedes emplea una descomposición sistemática del segmento parabólico en una sucesión de triángulos inscritos, usando el *método de exhaución*.

Véase de manera intuitiva dicha construcción geométrica a través de la siguiente figura:

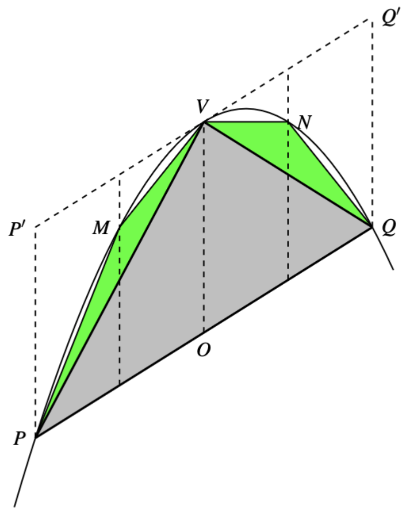


Figura 1.2.: Cuadratura de un segmento parabólico por Arquímedes

Consideramos una cuerda PQ de una parábola y el arco correspondiente. La región comprendida entre la cuerda y el arco se denomina *segmento parabólico*. El punto V es el vértice del segmento parabólico, caracterizado por ser aquel en el que la tangente a la parábola es paralela a la cuerda PQ. Este vértice se halla como punto medio del segmento que une P' y Q' en dirección horizontal.

El triángulo $\triangle PVQ$, que une los extremos de la cuerda con el vértice del segmento parabólico, se denomina *triángulo inscrito*. En la figura también se observan los triángulos inscritos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$ en los segmentos parabólicos secundarios definidos por las cuerdas PV y VQ, respectivamente.

Arquímedes demuestra que:

$$\text{área}(\triangle VNQ) = \frac{1}{4}\text{área}(\triangle VOQ), \quad \text{área}(\triangle PMV) = \frac{1}{4}\text{área}(\triangle VOP),$$

de modo que:

$$\text{área}(\triangle VNQ) + \text{área}(\triangle PMV) = \frac{1}{4}\text{área}(\triangle PVQ).$$

Si denotamos por S el área del triángulo principal $\triangle PVQ$, entonces la suma de las áreas de los nuevos triángulos añadidos en esta primera iteración es $\frac{1}{4}S$. Reiterando el proceso en los cuatro nuevos segmentos parabólicos, obtenemos una suma de áreas $\frac{1}{16}S$, y así sucesivamente. La suma total de áreas añadidas es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} S = \frac{4}{3} S,$$

lo que confirma que el área del segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ veces la del triángulo inscrito.

Arquímedes, sin utilizar el lenguaje moderno de series convergentes, aplica un razonamiento de tipo «reductio ad absurdum» basado en el *principio de exhaución* griego, fundamentado en la llamada *propiedad arquimediana*, formulada siglos antes por Eudoxo:

> *Dadas dos magnitudes cualesquiera $a > 0$ y $b > 0$, es posible, por pequeña que sea a y grande que sea b, encontrar un número natural n tal que $na > b$.*

A partir de esta propiedad, se deduce el *principio de convergencia de Eudoxo*, que permite justificar el valor límite del área.

Para cerrar la demostración, Arquímedes plantea un argumento por doble reducción al absurdo:

(i) Supone que el área del segmento parabólico (denotaremos esta por K) es mayor que $\frac{4}{3}S$ y deduce una contradicción con la propiedad arquimediana.

(ii) Luego, asume que K es menor que $\frac{4}{3}S$ y obtiene también una contradicción.

Ambas contradicciones obligan a concluir que:

$$K = \frac{4}{3} S. \qquad \square$$

1.2. La integración antes de la llegada del Cálculo

1.2.1. El método de los indivisibles de Cavalieri

Durante la primera mitad del siglo XVII, el método geométrico más aceptado para calcular áreas y volúmenes era el conocido como *método de exhaución*, desarrollado por Eudoxo y perfeccionado posteriormente por Arquímedes. No obstante, este método buscaba evitar explícitamente el uso del infinito, recurriendo a procedimientos indirectos basados en la reducción al absurdo.

A medida que avanzaba el siglo XVII, comenzó a extenderse entre los matemáticos la idea de encontrar un método alternativo, más directo, que no sólo ofreciera resultados, sino que también sirviera para fundamentar nuevas demostraciones. Este cambio de paradigma condujo a una visión más intuitiva de las magnitudes geométricas, en la que las áreas y volúmenes eran concebidos como formados por un número infinito de elementos indivisibles.

Johannes Kepler ya había realizado avances en esta dirección al aplicar métodos infinitesimales en el cálculo de volúmenes de barriles de vino. En su obra *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615), propuso una aproximación en la que los sólidos de revolución eran considerados como compuestos por una suma infinita de discos o elementos planos.

Inspirado por estas ideas, Galileo Galilei pretendía escribir un tratado sobre lo que denominó «indivisibles», aunque dicho proyecto nunca vio la luz. Sin embargo, su discípulo

Bonaventura Cavalieri (1598–1647), profesor en la Universidad de Bolonia, sí logró desarrollar formalmente esta idea. En 1635 publicó su obra *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota*, en la que estableció una nueva técnica geométrica para calcular áreas y volúmenes, conocida como el *método de los indivisibles*.

En este enfoque, una figura plana se concibe como formada por un número infinito de segmentos paralelos, mientras que un volumen se considera como la suma de un número infinito de secciones transversales. Cada uno de estos elementos se interpreta como una línea o una superficie indivisible que contribuye al total. En sus *Exercitationes Geometricae Sex* (1647), Cavalieri sintetiza esta idea con una poderosa metáfora:

> *Una línea está hecha de puntos como una sarta de cuentas; el plano está hecho de líneas, como un tejido de hebras, y un sólido de áreas planas como un libro de hojas.*

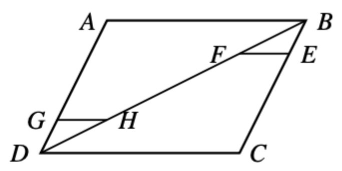


Figura 1.3.: Ilustración del principio de Cavalieri

Una aplicación elemental del principio de Cavalieri puede observarse en la Figura 1.3. En ella se muestra cómo demostrar que el paralelogramo $ABCD$ tiene el doble de área que los triángulos ABD o BCD. Si se traza un punto E sobre BC y uno G sobre AD tales que $GD = BE$, y se construyen los segmentos GH y FE de igual longitud, se observa que ambos triángulos contienen el mismo número de líneas paralelas, dispuestas de forma idéntica. Por lo tanto, sus áreas deben coincidir, y como el paralelogramo está compuesto por ambos, su área es el doble.

1.2.2. El análisis geométrico de Fermat sobre parábolas e hipérbolas

Fermat desarrolló un método geométrico para determinar el área bajo curvas de la forma $y = x^n$, donde $n \in \mathbb{N}$ o $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Aunque los casos con $n = 1, 2, \ldots, 9$ ya habían sido tratados por Cavalieri mediante su método de los indivisibles, e incluso Arquímedes había resuelto algunos de los primeros casos mediante construcciones geométricas, Fermat consiguió extender el procedimiento a curvas más generales, como las definidas por ecuaciones del tipo $x^m y^n = 1$, con $m, n \in \mathbb{N}$.

Su enfoque partía del método clásico de exhaución, pero incorporaba una idea innovadora: aproximaba el área mediante una suma de rectángulos inscritos y circunscritos cuyas bases se encontraban en progresión geométrica creciente. Entre otras, aplicó este razonamiento a las hipérbolas generalizadas del tipo $yx^n = k$, afirmando:

> *Todas estas infinitas hipérbolas, salvo la de Apolonio, que es la primera, pueden cuadrarse por el método de la progresión geométrica, según un procedimiento general y uniforme.*

Para ilustrar su razonamiento en notación moderna, consideremos la hipérbola $y = x^{-2}$ y el área bajo su gráfica en el intervalo $[a, +\infty)$.

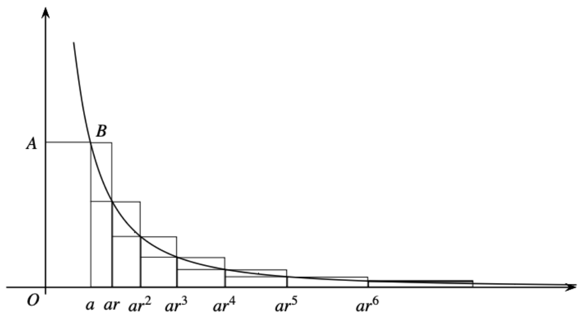


Figura 1.4.: Ilustración del método de la progresión geométrica

Elegimos un número $r > 1$ y tomamos como puntos de partición $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

Los rectángulos circunscritos generan la siguiente suma de áreas:

$$(ar - a)\frac{1}{a^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2} + \cdots = \frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{r}{a}$$

Los rectángulos inscritos, por su parte, generan una suma de áreas de la forma:

$$(ar - a)\frac{1}{(ar)^2} + (ar^2 - ar)\frac{1}{(ar^2)^2} + (ar^3 - ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2} + \cdots = \frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k} = \frac{1}{ar}$$

Por tanto, si denotamos por S el área real bajo la curva, se tiene que:

$$\frac{1}{ar} < S < \frac{r}{a}.$$

Dado que esta desigualdad es válida para cualquier $r > 1$, se deduce que el valor límite es:

$$S = \frac{1}{a},$$

que coincide con el área del rectángulo $OABa$, como puede observarse en la Figura 1.4.

Para justificar rigurosamente este resultado, Fermat recurrió a una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad. Si llamamos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ a las áreas de los rectángulos y S a su suma total, se cumple:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1} \quad \Rightarrow \quad S - R_1 = OA \cdot AB = \frac{1}{a}.$$

Fermat señala:

> *"Si ahora añadimos a ambos miembros esta cantidad R_1, que por efecto de las infinitas subdivisiones tiende a desaparecer, se alcanza la conclusión buscada, que puede confirmarse mediante una demostración más prolija al estilo de Arquímedes. [...] No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas previamente definidas, salvo la indicada, que corresponde a Apolonio."*

Es evidente que este procedimiento anticipa de forma notable elementos esenciales del cálculo integral:

- La descomposición del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.
- La aproximación mediante sumas de áreas de rectángulos cuya altura está dada por la función evaluada en puntos particulares.
- La tendencia a un valor límite cuando el número de subdivisiones crece indefinidamente.

1.2.3. Interpolación e integración en el enfoque de Wallis

Wallis analizó las áreas bajo curvas de la forma $y = x^k$, considerando subdivisiones del intervalo en una cantidad infinitamente grande de partes iguales, procediendo de una manera similar a la siguiente:

Si el segmento $PQ = AB = a$ se divide en n partes de longitud $h = \frac{a}{n}$, entonces la suma de los valores de la función evaluada en estos puntos da lugar a expresiones del tipo:

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \cdots + (nh)^k$$

Análogamente, el área del rectángulo de referencia $ABCD$, compuesto por n columnas de altura constante a^k, se aproxima por:

$$a^k + a^k + \cdots + a^k = na^k = (nh)^k + (nh)^k + \cdots + (nh)^k$$

Por tanto, la razón entre el área bajo la curva $y = x^k$ y la del rectángulo completo resulta ser:

$$\frac{\text{Área PQR}}{\text{Área ABCD}} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n \cdot n^k}$$

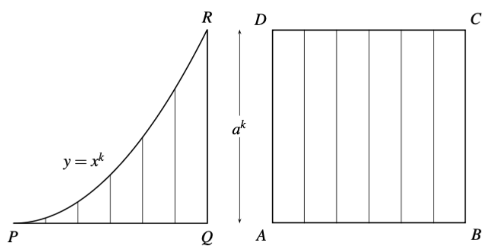


Figura 1.5.: Comparación entre suma de indivisibles y área rectangular en $y = x^k$

Estudiando esta expresión para distintos valores de k y n, Wallis observó que al tomar el límite cuando $n \to \infty$, se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Lo cual permite deducir que el área bajo la curva queda expresada como:

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{\text{Área } PQR}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \text{Área } PQR = \frac{a^{k+1}}{k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Aunque esta fórmula era conocida, Wallis dio un paso más al intentar extender su validez más allá de los exponentes enteros. Propuso un método de interpolación mediante el cual asignaba significados coherentes a expresiones con exponentes racionales.

Para ello, introdujo una noción que hoy podríamos expresar como el *índice* de una función. Dado un conjunto de valores $f(0), f(1), \ldots, f(n)$, definió el índice $\sigma(f)$ como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)}{f(n) + f(n) + \cdots + f(n)} = \frac{1}{\sigma(f) + 1}$$

Por ejemplo, si $f_k(x) = x^k$, entonces $\sigma(f_k) = k$.

Wallis también exploró sucesiones de potencias de x de la forma $x^1, x^3, x^5, \ldots$, observando que sus índices forman una progresión aritmética. A partir de esta regularidad, dio el salto hacia una interpolación basada en raíces fraccionarias, concluyendo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[q]{0})^p + (\sqrt[q]{1})^p + \cdots + (\sqrt[q]{n})^p}{(\sqrt[q]{n})^p + \cdots} = \frac{1}{\frac{p}{q} + 1}$$

De esta forma, Wallis anticipaba que:

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

Aunque sin una demostración rigurosa, esta audaz extrapolación sirvió de inspiración a Newton para formalizar el uso de potencias fraccionarias y negativas en el cálculo infinitesimal.

Finalmente, Wallis llega a conjeturar que:

$$\int_0^a x^r \, dx = \frac{a^{r+1}}{r+1} \quad \text{para todo } r > 0$$

Aunque no proporcionó justificación completa, afirmó que el resultado era aplicable incluso para valores irracionales como $r = \sqrt{3}$, extendiendo de facto el dominio de la integral más allá de los exponentes racionales.

Partiendo de su regla de integración para x^r, Wallis intentó evaluar la integral:

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2} \, dx$$

Esta integral representa el área bajo la semicircunferencia de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$, cuyo valor es conocido: $\frac{\pi}{8}$. Aunque Wallis no logró calcularla de forma directa, su exploración le condujo a obtener una célebre identidad conocida como la **fórmula de Wallis**:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}$$

El razonamiento de Wallis constituye una transición entre los métodos geométricos de la Antigüedad y las ideas algebraicas del cálculo infinitesimal, y sirvió de inspiración directa a Newton en el desarrollo de la teoría integral.

1.3. El vínculo esencial entre las cuadraturas y el problema de las tangentes

1.3.1. El Teorema Fundamental del Cálculo según Newton

Newton elaboró tres formulaciones distintas de su cálculo. Una de las más influyentes aparece en su obra *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, un manuscrito entregado a su maestro Isaac Barrow en 1669, que puede considerarse uno de los textos fundacionales del Cálculo. En él, Newton utiliza argumentos basados en cantidades infinitesimales de forma similar a como lo hacía Barrow, aunque con una visión más sistemática y con aplicación a problemas más generales.

En este trabajo, además de formular el Teorema generalizado del binomio y estudiar series infinitas, Newton identifica con claridad la relación recíproca entre el cálculo de áreas (cuadraturas) y el problema de las tangentes (derivadas). A través de un ejemplo geométrico, deja patente esta correspondencia esencial, que posteriormente se formalizará como el Teorema Fundamental del Cálculo.

Newton parte de una curva $y = y(x)$ y define $z(x)$ como el área comprendida entre dicha curva y el eje de abscisas en el intervalo $[0, x]$. En la figura 1.6, puede observarse esta construcción.

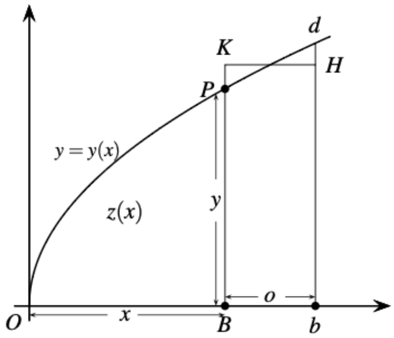


Figura 1.6.: Visualización de la función área según Newton

Para describir el área bajo la curva, Newton propone la fórmula:

$$z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$$

donde los parámetros m y n corresponden a exponentes racionales que describen la dependencia funcional.

A continuación, Newton razona sobre el comportamiento infinitesimal del área ante pequeños incrementos o en la variable independiente. Tomando por comidad $r = \frac{m+n}{n}$, el incremento del área se expresa como:

$$\text{área incrementada} = z(x+o) - z(x) = \frac{a}{r}(x+o)^r - \frac{a}{r}x^r$$

y desarrollando este término en potencias de o aplicando el binomio general:

$$\frac{a}{r}(x+o)^r = \frac{a}{r}x^r\left(1+\frac{o}{x}\right)^r = \frac{a}{r}x^r\left(1+r\frac{o}{x}+\frac{r(r-1)}{2}\frac{o^2}{x^2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{6}\frac{o^3}{x^3}+\cdots\right)$$

Sustituyendo esta expansión en la fórmula propuesta inicialmente y dividiendo el incremento por o, Newton obtiene:

$$y = \frac{dz}{dx} = ax^{r-1}\left(1+\frac{(r-1)}{2}\frac{o}{x}+\cdots\right) \to ax^{r-1} \quad \text{cuando } o \to 0$$

Es decir, la ordenada de la curva en el punto $P = (x, y)$ coincide con la derivada de la función $z(x)$, lo que confirma que $z'(x) = y(x)$. Este razonamiento puede invertirse para afirmar que $z(x)$ es una función primitiva de $y(x)$, esto es:

$$\int y(x)\,dx = z(x)$$

Newton no interpreta la integral como un límite de sumas de áreas, sino como la expresión cuya variación diferencial es proporcional a la función dada. En lenguaje moderno, Newton demuestra que:

$$\frac{z(x+o)-z(x)}{o} \to y(x) \quad \text{cuando } o \to 0$$

Es decir, «la derivada de la función área es igual a la función que describe la curva».

Este principio, formulado en términos geométricos, constituye el núcleo del Teorema Fundamental del Cálculo: integración y derivación son operaciones recíprocas. A partir de este resultado, calcular áreas puede reducirse a encontrar primitivas, y calcular tangentes puede hacerse a través del análisis de las funciones acumuladas de área.

1.3.2. Leibniz y el origen del *calculus summatorius*

Las ideas fundamentales que guiaron a Leibniz en su desarrollo del Cálculo diferencial e integral pueden resumirse en los siguientes principios:

- La introducción de un sistema simbólico sistemático que permitiera expresar de forma concisa y manipulable las operaciones del cálculo, favoreciendo el desarrollo de métodos generales de resolución.
- La intuición de que la formación de sucesiones de diferencias y su suma posterior constituyen procesos recíprocos, lo que sienta las bases de la relación entre derivación e integración.
- La representación de las curvas como límites de polígonos de infinitos lados de longitud infinitesimal, y de las variables como sucesiones cuyos valores consecutivos son infinitesimalmente próximos.

En el archivo Leibniz, conservado en Hannover, se encuentran los manuscritos donde desarrolló sus primeras ideas sobre cuadraturas. En textos fechados entre el 25 de octubre y el 11 de noviembre de 1675, explora la posibilidad de expresar los problemas de áreas mediante símbolos formales. En estos documentos aparece el embrión de la notación moderna para integrales y diferenciales.

Uno de los resultados más destacados que obtiene es una versión primitiva de la fórmula de integración por partes. Usando una notación moderna, y bajo la hipótesis $f(0) = 0$, dicha identidad puede escribirse así:

$$\int_0^a x f'(x)\,dx = a f(a) - \int_0^a f(x)\,dx = a \int_0^a f'(x)\,dx - \int_0^a \left(\int_0^x f'(t)\,dt \right) dx$$

Dicha fórmula se puede visualizar gráficamente como se muestra en la figura 1.7.

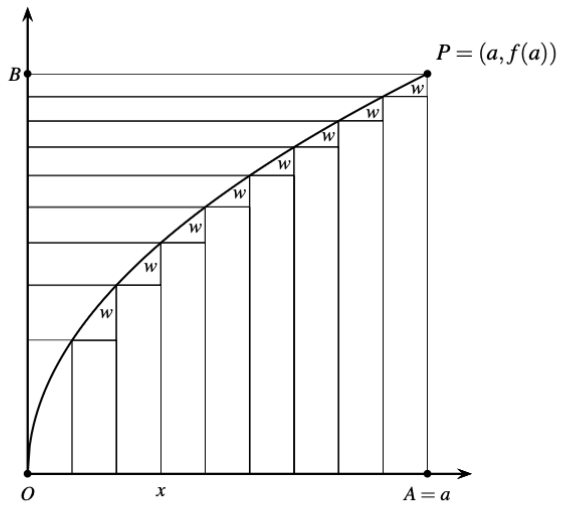


Figura 1.7.: Interpretación geométrica de la identidad de Leibniz

En esta figura:

- El área del rectángulo $OAPB$ es $af(a)$.
- La integral $\int_0^a f(x)dx$ representa el área bajo la curva f.
- La expresión $\int_0^a xf'(x)dx$ corresponde al área de la región por encima de la curva y por debajo del rectángulo.

Es importante señalar que Leibniz no escribía con la notación actual. Muchas de las convenciones que hoy damos por sentadas (como los límites de integración o el signo $\int$) se introdujeron bastante después, por autores como Lagrange o Fourier. De hecho, el símbolo $\int$ fue ideado por Leibniz como una versión alargada de la “s”, evocando la palabra latina *summa*.

Leibniz distinguía entre dos aspectos de su cálculo:

- El *calculus differentialis*, orientado al estudio de tangentes y velocidades.
- El *calculus summatorius*, centrado en problemas de áreas y cuadraturas.

La notación que utiliza en sus manuscritos emplea símbolos tales como:

$$\text{omn. } \overline{xw} \sqcap \text{ ult. } x, \quad \overline{omn.}w, \quad \overline{-omn.omn.w}$$

donde:

- $\sqcap$ denota la igualdad.
- «ult. x» se refiere al último valor de la variable x.
- «omn». abrevia *omnes lineae*, es decir, "todas las líneas".

En un manuscrito posterior, Leibniz reformula la misma expresión usando:

$$\text{omn. } x\ell \sqcap \text{omn. } \ell - \text{omn. omn. } \ell$$

y, adoptando una notación más cercana a la moderna:

$$\int x\ell = x \int \ell - \iint \ell$$

Leibniz aplica esta fórmula, por ejemplo, para calcular:

$$\int x = \frac{x^2}{2}, \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

El razonamiento de Leibniz incluye además la interpretación diferencial de las ordenadas. Considerando $w = f'(x)dx$, asocia el valor de la función con la suma de sus diferenciales, que él designa por la letra w. De este modo, una sucesión de ordenadas puede entenderse como una acumulación de diferencias.

Aunque estas reglas ya eran conocidas, su gran mérito radica en haber concebido un sistema simbólico coherente que permitía su aplicación sistemática a problemas nuevos. Poco después, introducirá también el símbolo d para diferenciales, interpretado como una unidad de diferencia infinitesimal.

Leibniz llega a escribir:

> *Dada ℓ y su relación con x, hallar $\int \ell$. Esto se puede obtener mediante el cálculo inverso, es decir, si $\int \ell = ya$, entonces $\ell = ya/d$, con lo que:*
>
> $$\int \textit{aumenta dimensiones}, \quad d \textit{ las reduce.}$$

Esta reflexión le lleva a sustituir expresiones del tipo ya/d por $d(ya)$, y a adoptar definitivamente $\int$ y d como operadores abstractos, sin carga dimensional.

Es evidente el carácter constructivo e intuitivo del enfoque de Leibniz. Frente al rigor formal, prima la creatividad simbólica y la eficacia computacional, que marcarán profundamente el desarrollo del cálculo diferencial e integral en Europa.

Aunque la introducción del simbolismo del cálculo integral se atribuye comúnmente a Leibniz, fue Johann Bernoulli quien, en 1690, propuso designar el estudio de las cuadraturas como *calculus integralis*. Esta denominación contribuyó decisivamente a la consolidación del término «integral» en el sentido en que se emplea actualmente en matemáticas.

1.4. La transición conceptual hacia las integrales de Riemann y Lebesgue

En 1854, Bernhard Riemann (1826–1866) presentó su *Habilitationsschrift*, requisito indispensable para ejercer la docencia universitaria en Alemania. En dicho trabajo, abordó el problema de representar funciones mediante series trigonométricas del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

lo cual le condujo a replantearse la noción de integral como herramienta fundamental para formalizar el cálculo de los coeficientes a_n y b_n, y así poder definir y estudiar la convergencia de dichas series.

Este problema estaba profundamente vinculado al análisis de ecuaciones en derivadas parciales fundamentales en física matemática, como la ecuación de ondas (estudiada, entre otros, por D. Bernoulli, D 'Alembert y Euler en el siglo XVIII) o la ecuación del calor, trabajada con gran profundidad por Fourier a comienzos del siglo XIX. La necesidad de dotar de significado preciso a las soluciones expresadas en forma de serie obligó a revisar la definición clásica de integral.

Riemann llevó a cabo una reformulación y ampliación rigurosa del concepto de integral definida previamente introducido por Cauchy (1789–1857), permitiendo así integrar una clase más amplia de funciones, incluyendo funciones con discontinuidades. Esta nueva concepción, conocida actualmente como *integral de Riemann*, se fundamenta en la partición del intervalo de integración y en la construcción de sumas que aproximan el área bajo la curva mediante rectángulos sobre subintervalos del eje de abscisas. El valor de la integral se define como el límite de dichas sumas, siempre que este exista. La construcción formal de esta noción, así como las condiciones necesarias para la integrabilidad de una función en el sentido de Riemann, serán presentadas con detalle en el Capítulo 2.

Este enfoque permitió importantes avances, pero también reveló sus limitaciones: existen funciones cuya integral en sentido de Riemann no está bien definida, ya sea por presentar discontinuidades demasiado abundantes o por comportamientos altamente irregulares.

A comienzos del siglo XX, Henri Lebesgue (1875–1941), influido por la teoría de las series de Fourier, propuso un nuevo enfoque completamente distinto, culminando en la formulación de la llamada *integral de Lebesgue*. En 1901 desarrolló los fundamentos de la *teoría de la medida*, y en 1902 presentó su tesis doctoral *Intégrale, longueur, aire*, donde redefinió el proceso de integración centrándose no en particionar el eje x, sino en medir los conjuntos de valores que toma la función.

Este cambio de perspectiva permitió superar muchas de las limitaciones de la integral de Riemann. En efecto, la integral de Lebesgue permite integrar funciones con muchas más irregularidades, mejora sustancialmente los resultados de convergencia de sucesiones de funciones, y constituye la base del análisis funcional moderno.

Tal y como se detalla en el Capítulo 3, entre las contribuciones más relevantes derivadas de esta teoría se encuentran los espacios $L^p(\Omega)$, conocidos como *espacios de Lebesgue*. Dados un conjunto medible $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y un exponente $1 \leq p < \infty$, se define el espacio $L^p(\Omega)$ como el conjunto de funciones reales cuya p-ésima potencia absoluta es integrable en el sentido de

Lebesgue, esto es:

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

En particular, el caso $p = 2$ da lugar al espacio $L^2(\Omega)$, ejemplo paradigmático de los espacios de Hilbert de dimensión infinita, ampliamente utilizado en análisis funcional, teoría cuántica, estadística y ecuaciones en derivadas parciales.

Su impacto ha sido tan profundo que el análisis matemático del siglo XX no puede comprenderse sin la teoría de la medida ni sin la integración en el sentido de Lebesgue.

En conjunto, la transición de la integral de Riemann a la de Lebesgue representa una transformación conceptual de gran calado: se pasa de una visión geométrica, basada en sumas sobre intervalos, a una concepción más abstracta y general que mide directamente los conjuntos sobre los que actúan las funciones.

2. La integral de Riemann

Este capítulo se centra en el estudio detallado de la integral de Riemann y su formulación matemática, incluyendo las condiciones necesarias para la integrabilidad en este marco.

Además, se introduce el concepto de integral impropia de Riemann, que extiende la teoría a funciones no acotadas o dominios infinitos, señalando sus fortalezas y restricciones.

Finalmente, se abordará de forma concisa su generalización al caso de varias variables, destacando los principios que subyacen de dicha extensión.

La redacción de este capítulo se basa principalmente en la referencia [Bar96], cuyos enfoques teóricos y ejemplos han sido cuidadosamente adaptados.

2.1. Construcción formal de la integral de Riemann

Comencemos con un riguroso desarrollo de la construcción de la integral de Riemann, basada en «la aproximación del área bajo una curva mediante sumas definidas sobre particiones del dominio».

2.1.1. Particiones y sumas de Darboux

Definición 2.1. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Una **partición** de I es una colección finita de puntos

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b], \quad \text{tales que} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Denotaremos por $\mathcal{P}(I)$ al conjunto de todas las particiones del intervalo I.

Los puntos de una partición P del intervalo I dividen a dicho intervalo en n subintervalos cerrados y acotados $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de longitudes $\Delta I_k = x_k - x_{k-1}$, para $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Definición 2.2. Se define la **norma** de una partición $P \in \mathcal{P}(I)$ como la mayor de las longitudes de los subintervalos en los que P divide al intervalo I, es decir, si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, entonces

$$\|P\| := \max\{|x_k - x_{k-1}| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Ejemplo 2.3. Una partición de especial interés es la **partición uniforme**, que divide a un intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\left(\frac{b-a}{n}\right)$, y que denotaremos por P_n:

$$P_n = \left\{a,\, a + \frac{b-a}{n},\, a + \frac{2(b-a)}{n},\, \ldots,\, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n},\, b\right\}.$$

Resulta evidente que

$$\|P_n\| = \frac{b-a}{n}.$$

Definición 2.4. Dado un intervalo cerrado y acotado I y dos particiones $P, Q \in \mathcal{P}(I)$, se dice que Q es **más fina** que P (o que Q es un *refinamiento* de P) si $P \subset Q$.

Observación 2.5. Dadas dos particiones $P, Q \in \mathcal{P}(I)$, resulta evidente que si $P \subset Q$ entonces $\|Q\| \leq \|P\|$.

Observación 2.6. La relación «ser más fina que» es una relación de orden (no total) en el conjunto $\mathcal{P}(I)$. Además, se puede comprobar que, dados dos elementos $P, Q \in \mathcal{P}(I)$, existe una partición de I que es más fina que ambas (por ejemplo, $P \cup Q$).

Definición 2.7. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es **acotada** si existe un número real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

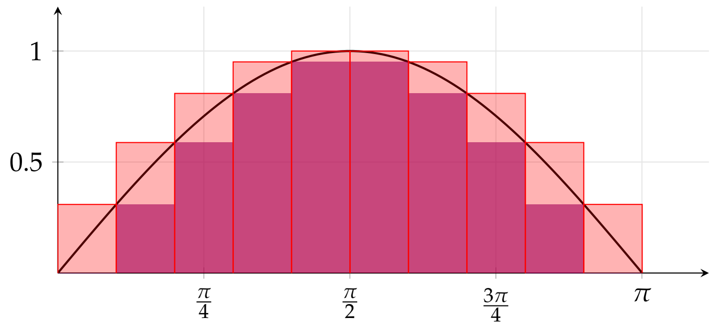
Definición 2.8. Sea $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ que la partición P induce en I, definimos

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad M_i := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Definición 2.9. Sean $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo. Se definen, respectivamente, la **suma inferior** y la **suma superior** de la función f asociadas a la partición P como:

$$L(f; P) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \qquad U(f; P) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Observación 2.10. Si f es no negativa en el intervalo $[a, b]$, las sumas inferior y superior asociadas a una partición $P \in \mathcal{P}([a, b])$ pueden visualizarse geométricamente como sumas de áreas de rectángulos que aproximan, por defecto y por exceso respectivamente, el área bajo la gráfica de f.



En la figura se representa la función $f(x) = \sin(x)$ sobre el intervalo $[0, \pi]$, junto con una partición uniforme del mismo. En cada subintervalo se muestran:

- Los rectángulos correspondientes a la suma inferior (color magenta), cuya altura coincide con el mínimo de $\sin(x)$ en cada subintervalo. Su suma proporciona una aproximación por defecto del área bajo la curva.
- Los rectángulos correspondientes a la suma superior (color rosado), con altura igual al máximo de $\sin(x)$ en cada subintervalo. Su suma constituye una sobreestimación del área.

La diferencia entre ambas sumas refleja la precisión de la aproximación. Al refinar la partición, ambas se aproximan al valor exacto de la integral definida de $\sin(x)$ sobre $[0, \pi]$, que es 2.

Observación 2.11. A partir de las definiciones previas, se deduce de forma inmediata que, para cualquier partición $P \in \mathcal{P}(I)$, la suma inferior es siempre menor o igual que la suma superior, es decir,

$$L(f; P) \leq U(f; P).$$

Lema 2.12. *Sean $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P, Q \in \mathcal{P}(I)$ tales que $P \subset Q$. Entonces se cumple que*

$$L(f; P) \leq L(f; Q) \quad y \quad U(f; Q) \leq U(f; P).$$

Generalizando los resultados previos al caso de particiones arbitrarias no comparables, se tiene que toda suma inferior de una función acotada es menor o igual que cualquier suma superior. En efecto, se verifica el siguiente resultado:

Teorema 2.13. *Sean $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P, Q \in \mathcal{P}(I)$. Entonces se cumple que*

$$L(f; P) \leq U(f; Q).$$

Demostración. Basta considerar la partición $R = P \cup Q$, que es más fina que ambas. Entonces, por el corolario anterior, se cumple que

$$L(f; P) \leq L(f; R) \leq U(f; R) \leq U(f; Q).$$

□

Corolario 2.14. *Sean $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P \in \mathcal{P}([a, b])$ una partición cualquiera, entonces se verifica que*

$$m(b - a) \leq L(f; P) \leq U(f; P) \leq M(b - a),$$

donde $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Véase que este colorario garantiza que los conjuntos de sumas inferiores y superiores están acotados.

2.1.2. Funciones integrables en el sentido de Darboux

A continuación se presenta la definición de la integral de Darboux, junto con el criterio que garantiza su existencia.

Definición 2.15. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se definen, respectivamente, la **integral inferior de Darboux** y la **integral superior de Darboux** de f en el intervalo $[a, b]$ como:

$$\underline{\int_a^b} f := \sup \{L(f; P) \, : \, P \in \mathcal{P}([a, b])\}, \qquad \overline{\int_a^b} f := \inf \{U(f; P) \, : \, P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Observación 2.16. Como consecuencia directa del Corolario 2.14, se concluye que, para toda función acotada definida en un intervalo compacto $[a, b]$, las integrales inferior y superior de Darboux están bien definidas, es decir, ambas existen y son finitas.
Además, según el Teorema 2.13, siempre se verifica la siguiente desigualdad fundamental:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Definición 2.17. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es **integrable en el sentido de Darboux**, o **Darboux-integrable**, si se cumple que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Cuando ambos valores coinciden, este se denomina **integral de Darboux** de f en $[a, b]$, y se denota por $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)\,dx$.
Asimismo, denotamos por $\mathcal{D}([a, b])$ al conjunto de funciones acotadas Darboux-integrables en $[a, b]$, es decir:

$$\mathcal{D}([a, b]) := \{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ acotada} \mid f \text{ es Darboux-integrable en } [a, b]\}$$

Definición 2.18. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f cumple la **condición de Riemann** en el intervalo $[a, b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que

$$U(f; P_\varepsilon) - L(f; P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Observación 2.19. Como consecuencia inmediata del Lema 2.12 la condición de Riemann puede reformularse diciendo que $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada cumple la condición de Riemann, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que

$$U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon \quad \text{para toda } P \in \mathcal{P}([a, b]) \text{ con } P_\varepsilon \subset P.$$

Teorema 2.20 (Criterio de integrabilidad de Riemann)**.** *Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, f es integrable en el sentido de Darboux si y sólo si verifica la condición de Riemann en $[a, b]$.*

2.1.3. Sumas de Riemann

Definición 2.21. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada, y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Sea además $\{t_k\}_{k=1}^n$ una colección de puntos tales que $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, es decir, un conjunto de etiquetas asociado a los subintervalos determinados por P. Se denomina **suma de Riemann** de f relativa a la partición P y a las etiquetas $\{t_k\}$ al número real

$$S(f; P; \{t_k\}) := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,(x_k - x_{k-1}).$$

Observación 2.22. A partir de la definición de suma de Riemann, pueden extraerse algunas consideraciones relevantes:

1. Para una función f y una partición P, existen infinitas sumas de Riemann, ya que cada punto t_k se elige libremente en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

2. Las sumas de Riemann admiten una interpretación geométrica similar a las sumas inferior y superior: si $f \geq 0$, cada término $f(t_k)(x_k - x_{k-1})$ representa el área de un rectángulo de base $x_k - x_{k-1}$ y altura $f(t_k)$.
3. Dado que $m_k \leq f(t_k) \leq M_k$, se tiene que $L(f;P) \leq S(f;P;\{t_k\}) \leq U(f;P)$.
4. Las sumas inferior y superior no tienen por qué coincidir con una suma de Riemann, ya que no siempre existe $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que $f(t_k) = m_k$ o $f(t_k) = M_k$, incluso si f es continua.

Definición 2.23. Una función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada se dice **Riemann-integrable** si existe un número real $A \in \mathbb{R}$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que, para toda partición $P \in \mathcal{P}([a,b])$ con $P_\varepsilon \subset P$ y cualquier conjunto de etiquetas $\{t_k\}$ asociadas a P, se cumple que

$$|A - S(f;P;\{t_k\})| < \varepsilon.$$

En ese caso, se tiene que $A = \int_a^b f$.
Denotamos por $\mathcal{R}([a,b])$ al conjunto de funciones acotadas Riemann-integrables sobre $[a,b]$:

$$\mathcal{R}([a,b]) := \{f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ acotada} \mid f \text{ es Riemann-integrable en } [a,b]\}$$

Teorema 2.24. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, f es integrable en el sentido de Riemann si y solo si lo es en el sentido de Darboux, es decir:*

$$f \in \mathcal{R}([a,b]) \iff f \in \mathcal{D}([a,b]).$$

Demostración. Por la Observación 2.22, sabemos que para cualquier función real acotada $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cualquier partición $P \in \mathcal{P}([a,b])$ y cualquier elección de etiquetas $\{t_k\}$ con $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, se cumple:

$$L(f;P) \leq S(f;P;\{t_k\}) \leq U(f;P).$$

Supongamos que $f \in \mathcal{D}([a,b])$, es decir, f es Darboux-integrable con integral $\int_a^b f$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si P es una partición de $[a,b]$ con finura menor que δ, se cumple:

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon.$$

Por la desigualdad anterior, para cualquier elección de etiquetas $\{t_k\}$ en los subintervalos de P, se tiene:

$$\left| S(f;P;\{t_k\}) - \int_a^b f \right| \leq U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon,$$

lo que implica que f es Riemann-integrable y su integral coincide con $\int_a^b f$.

Recíprocamente, supongamos que $f \in \mathcal{R}([a,b])$, con integral $A \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si P es una partición de $[a,b]$ con finura menor que δ y $\{t_k\} \subset [x_{k-1}, x_k]$, se cumple:

$$|S(f;P;\{t_k\}) - A| < \varepsilon/4.$$

Si los puntos t_k se eligen suficientemente cercanos al supremo o ínfimo de f en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces se puede garantizar:

$$L(f;P) - A < \varepsilon/2, \qquad A - U(f;P) < \varepsilon/2.$$

Por tanto:
$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon,$$
y se concluye que $f \in \mathcal{D}([a,b])$, con integral igual a A.

□

Observación 2.25. Considérese la función de Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{si } x \in ([0,1] \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

En efecto, tomando $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición arbitraria del intervalo $[0,1]$ y dado que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existen tanto números racionales como irracionales, se cumple que:
$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0 \quad \text{y} \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1.$$
De este modo, las sumas inferior y superior de Darboux asociadas a f verifican, para toda partición P del intervalo $[0,1]$:
$$L(f;P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = 0 \quad \text{y} \quad U(f;P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = 1.$$
Por tanto,
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{P \in \mathcal{P}([0,1])} L(f;P) = 0 \neq 1 = \inf_{P \in \mathcal{P}([0,1])} U(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$
Concluimos que f no es integrable en el sentido de Darboux, y en consecuencia, tampoco lo es en el sentido de Riemann. Este célebre ejemplo pone de manifiesto que no toda función acotada definida en un intervalo compacto es necesariamente Riemann-integrable.

2.2. Caracterización y propiedades de la integral de Riemann

A continuación se presentan algunos resultados relevantes que permiten identificar clases de funciones que son integrables en el sentido de Riemann.

Teorema 2.26. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces, f es integrable en el sentido de Riemann sobre $[a,b]$.*

Demostración. Se asume, sin pérdida de generalidad, que f es monótona creciente, siendo el caso decreciente completamente análogo.
Además, suponemos que $f(b) > f(a)$. En caso contrario, f sería constante y, por tanto, trivialmente integrable.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Consideremos una partición $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que su norma satisface $\|P_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Entonces se tiene:

$$U(f;P_\varepsilon) - L(f;P_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$
$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = \varepsilon,$$

es decir, f cumple la condición de Riemann en $[a,b]$ y, por tanto, es Riemann-integrable. □

Teorema 2.27. *Sea $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua, entonces es integrable en el sentido de Riemann sobre $[a,b]$.*

Demostración. Como f es continua sobre un intervalo compacto, se deduce que es uniformemente continua. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Se toma una partición $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ con norma menor que δ. En cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, la función alcanza mínimo m_k y máximo M_k. Dado que la amplitud del intervalo es menor que δ, se tiene:

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{y por tanto} \quad \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon.$$

De aquí se concluye que f es integrable en el sentido de Riemann. □

Para comprender mejor las condiciones que caracterizan la integrabilidad en el sentido de Riemann, se introduce a continuación el concepto de conjunto de medida nula y el conocido Teorema de Vitali-Lebesgue.

Definición 2.28. Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ se dice que tiene **medida nula** si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos abiertos $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n) \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Observación 2.29. Todo conjunto numerable es de medida nula.

Teorema 2.30 (Teorema de Vitali-Lebesgue)**.** *Sea $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es integrable en el sentido de Riemann sobre $[a,b]$.*
2. *El conjunto de puntos de discontinuidad de f en $[a,b]$ tiene medida nula.*

Observación 2.31. Considérese la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ x^2 + 1, & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Esta función presenta una discontinuidad de salto en $x = \frac{1}{2}$, pero como su conjunto de discontinuidades es finito (y, por tanto, de medida nula), se concluye por el Teorema 2.30 que $f \in \mathcal{R}([0,1])$.

Procedemos a examinar algunas propiedades fundamentales de la integral de Riemann, que refuerzan su solidez teórica y la enlazan con los pilares del análisis matemático.

Teorema 2.32 (Linealidad de la integral de Riemann)**.** *Sean $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones acotadas e integrables en el sentido de Riemann, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *$f + g$ es Riemann-integrable en $[a, b]$, y se cumple que*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *αf es Riemann-integrable en $[a, b]$, y se cumple que*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. Ambas afirmaciones se deducen del hecho de que la integral de Riemann se define como el límite de sumas de Riemann.

1. Dado que f y g son integrables en $[a, b]$, para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que para cualquier partición P más fina que P_ε y toda elección de etiquetas $\{t_k\}$, se tiene

$$\left| S(f; P; \{t_k\}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| S(g; P; \{t_k\}) - \int_a^b g(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como la suma de Riemann es lineal, se cumple

$$S(f+g; P; \{t_k\}) = S(f; P; \{t_k\}) + S(g; P; \{t_k\}).$$

Aplicando la desigualdad triangular, se obtiene

$$\left| S(f+g; P; \{t_k\}) - \int_a^b (f+g)(x)\,dx \right| \leq$$
$$\leq \left| S(f; P; \{t_k\}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| + \left| S(g; P; \{t_k\}) - \int_a^b g(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

lo que demuestra que $f + g$ es integrable en el sentido de Riemann.

2. Para $\alpha \neq 0$ (el caso $\alpha = 0$ es trivial), con la misma partición P_ε y cualquier elección de etiquetas $\{t_k\}$, se tiene

$$\left| S(f; P; \{t_k\}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

Multiplicando por $|\alpha|$, se concluye

$$\left| S(\alpha f; P; \{t_k\}) - \alpha \int_a^b f(x)\,dx \right| = |\alpha| \left| S(f; P; \{t_k\}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Por tanto, αf es integrable en el sentido de Riemann.

Corolario 2.33. *Si $f_1, \ldots, f_n$ son funciones Riemann-integrables en $[a,b]$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, entonces la combinación lineal*

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$$

también es Riemann-integrable en $[a,b]$, y se cumple

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Observación 2.34. El recíproco del resultado anterior no es necesariamente cierto: puede ocurrir que $f+g$ sea Riemann-integrable sin que f ni g lo sean individualmente.

Un ejemplo clásico lo proporciona la función de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, que como bien se demostro en la Observación 2.25 no es Riemann-integrable en $[0,1]$. Sin embargo, si definimos:

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}, \qquad g(x) = 1 - \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]},$$

entonces $f(x) + g(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$, y esta función constante es evidentemente Riemann-integrable. Así, ni f ni g son integrables en el sentido de Riemann, pero su suma sí lo es.

Teorema 2.35. *Sean $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\varphi : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f([a,b]) \subset [c,d]$. Si f es Riemann-integrable en $[a,b]$ y φ es continua en $[c,d]$, entonces la función compuesta $\varphi \circ f$ es Riemann-integrable en $[a,b]$.*

Demostración. Se deduce directamente del Teorema de Vitali-Lebesgue, junto con el hecho de que el conjunto de puntos de discontinuidad de $\varphi \circ f$ está contenido en el conjunto de puntos de discontinuidad de f, el cual tiene medida nula.

□

Corolario 2.36. *Sean $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $f^n \in \mathcal{R}([a,b])$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $|f|^p \in \mathcal{R}([a,b])$ para todo $p \in \mathbb{R}^+$.*
3. *Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y existe una constante $k > 0$ tal que $|f(x)| > k$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}([a,b])$.*
4. *Si $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Demostración.

1. Se aplica el teorema anterior con $\varphi(t) = t^n$, que es continua.
2. Se aplica nuevamente el teorema anterior con $\varphi(t) = |t|^p$, función continua en $\mathbb{R}$ para $p > 0$.
3. Se aplica el teorema anterior tomando $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$, función continua sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La hipótesis asegura que $f(x)$ se mantiene alejado de cero en todo el intervalo.

4. Se deduce directamente de la igualdad algebraica:

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right),$$

y de la cerradura del conjunto de funciones integrables bajo las operaciones anteriores.

□

2.3. Integrales impropias de Riemann

2.3.1. Motivación y definiciones previas

El enfoque clásico de Riemann permite integrar funciones acotadas sobre intervalos cerrados y acotados $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Sin embargo, en diversos contextos analíticos y aplicados, es necesario extender esta noción a dominios no compactos o a funciones que presenten singularidades que impidan acotarlas en todo el intervalo de integración.

Para ello, se introducen las *integrales impropias*, que formalizan la integración en presencia de infinitos o singularidades. Antes de estudiarlas, revisemos algunas definiciones fundamentales.

Definición 2.37. Sea $f : [a,+\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.

1. Diremos que f es **localmente Riemann-integrable** en $[a,+\infty)$ si se cumple que $f \in \mathcal{R}([a,b]), \forall b > a$.

2. Si f es una función localmente Riemann-integrable en (a,b), con $b \in (a,+\infty]$, se denomina *función integral* de f a la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} I: & [a,b) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & I(x) := \int_a^x f(t)\,dt. \end{array}$$

De forma análoga, si f es una función localmente Riemann-integrable en (a,b), con $a \in [-\infty,b)$, podemos definir la siguiente función, equivalente a la noción de función integral:

$$\begin{array}{rccl} J: & (a,b] \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & J(x) := \int_x^b f(t)\,dt. \end{array}$$

2.3.2. Integrales impropias de primera especie

Definición 2.38. Sea $f : [a,+\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Riemann-integrable en su dominio. Definimos la **integral impropia de primera especie** de f como el límite:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

De forma análoga, si $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty,b]$, con $b \in \mathbb{R}$, la integral impropia de primera especie se define como:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} J(a) = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

En ambos casos, diremos que la integral impropia de primera especie *existe* o *converge* si el límite correspondiente existe como número real, es decir, si converge en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Ejemplo 2.39. Consideremos la función

$$f : [1, +\infty) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t) = \frac{1}{t^p}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Podemos afirmar que f es localmente Riemann-integrable en $[1, +\infty)$, ya que, al ser continua en todo intervalo compacto $[1, b]$ con $b > 1$, se tiene que $f \in \mathcal{R}([1, b])$ para todo $b > 1$. Esta propiedad se cumple para cualquier $p \in \mathbb{R}$.

Así pues, cabe preguntarse si la integral impropia de primera especie existe. Para ello, debemos distinguir dos casos:

- Si $p \neq 1$, entonces

$$\int_1^b \frac{1}{t^p}\,dt = \left.\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \frac{-1}{p-1}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right).$$

  Dado que $\frac{1}{b} < 1$, se tiene:

$$p > 1 \Rightarrow p - 1 > 0 \Rightarrow \lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(t)\,dt = \frac{1}{p-1} \in \mathbb{R},$$
$$p < 1 \Rightarrow p - 1 < 0 \Rightarrow \lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(t)\,dt = +\infty.$$

- Si $p = 1$, entonces

$$\int_1^b \frac{1}{t}\,dt = \ln(t)|_1^b = \ln(b) \xrightarrow[b \to +\infty]{} +\infty.$$

Por lo que concluimos que:

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

Es decir, que la integral impropia de primera especie de f solo existe cuando $p > 1$.

Observación 2.40. Consideremos una función $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que existe $a \in \mathbb{R}$ para el cual existen las integrales impropias de primera especie:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx, \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Entonces, podemos definir una nueva integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

Con el objetivo de estudiar mejor este tipo de integral impropia de primera especie, introducimos la siguiente definición:

Definición 2.41. Dada la integral impropia definida en la Observación 2.40, definimos el **valor principal de Cauchy** de dicha integral como el siguiente límite:

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx, \text{ si este límite existe.}$$

Teorema 2.42. *Sea $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Entonces, si la integral impropia definida en la Observación 2.40 existe, se tiene que*

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Observación 2.43. El resultado recíproco no se cumple necesariamente. Es decir, la existencia del valor principal de Cauchy de la integral impropia no garantiza la existencia de la misma. Por ejemplo, para $f(x) = x$, se verifica que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} x\,dx = \lim_{a\to+\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-a}^{a} = \lim_{a\to+\infty} 0 = 0.$$

Sin embargo, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{a}^{b} = +\infty.$$

Por tanto, aunque el valor de Cauchy exista y sea cero, la integral impropia no es convergente.

Resulta de especial interés tratar de establecer una serie de criterios que permitan determinar la existencia (convergencia) o no de las integrales impropias de primera especie definidas en esta subsección.

Proposición 2.44. *Sea $f : [a, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Riemann-integrable tal que $f(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, se tiene que*

$$\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R} \iff \exists M \in \mathbb{R} \text{ tal que } \int_{a}^{b} f(t)\,dt \leq M, \quad \forall b \in [a, +\infty).$$

Teorema 2.45 (Criterio de comparación)**.** *Sean $f, g : [a, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones localmente Riemann-integrables tales que $0 \leq f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in [a, +\infty)$. Entonces,*

$$\int_{a}^{+\infty} g(t)\,dt \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.46 (Criterio de comparación por paso al límite)**.** *Sean $f, g : [a, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones localmente Riemann-integrables tales que $f(t) \geq 0$, $g(t) > 0$, para todo $t \in [a, +\infty)$. Si se cumple*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = m \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R} \iff \int_{a}^{+\infty} g(t)\,dt \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.47. *Sea $f : [a, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Riemann-integrable. Entonces,*

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\, dt \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\, dt \in \mathbb{R}.$$

Observación 2.48. Véase que la implicación anterior no es válida, en general, cuando el dominio de integración es un intervalo finito $[a, b]$. Por ejemplo, la función de Dirichlet

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

no es Riemann-integrable en $[0, 1]$, a pesar de que $|f(x)| = 1$ para todo $x \in [0, 1]$, cuya integral existe y es finita.

Definición 2.49. Sea $f : [a, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Riemann-integrable. Se dice que la integral impropia de primera especie de f es **condicionalmente convergente** si se cumple que

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge, pero } \int_a^{+\infty} |f(t)|\, dt \notin \mathbb{R}.$$

2.3.3. Integrales impropias de segunda y tercera especie

Definición 2.50. Sea $f : [a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Riemann-integrable en su dominio. Entonces, denominamos **integral impropia de segunda especie** de f a la expresión

$$\int_{[a,b)} f(x)\, dx := \lim_{c \to b^-} I(c) = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

Análogamente, si $\mathrm{Dom}(f) = (a, b]$, la integral impropia de segunda especie toma la siguiente expresión:

$$\int_{(a,b]} f(x)\, dx := \lim_{c \to a^+} J(c) = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$$

En cualquier caso, diremos que la integral impropia de segunda especie *existe* (o es *convergente*) si el límite en su definición converge en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Definición 2.51. Sean $f : (a, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : (-\infty, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones localmente integrables en el sentido de Riemann en sus respectivos dominios. Denominamos **integral impropia de tercera especie** a las expresiones:

$$\int_{(a,+\infty)} f(x)\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_{(-\infty,b)} g(x)\, dx.$$

Para definir rigurosamente la primera de estas integrales, supóngase que existe un punto $c \in (a, +\infty)$ tal que existen las siguientes integrales impropias de segunda y primera especie:

$$\int_{(a,c]} f(x)\, dx \quad \text{y} \quad \int_{[c,+\infty)} f(x)\, dx = \int_c^{+\infty} f(x)\, dx$$

En tal caso, se define:

$$\int_{(a,+\infty)} f(x)\,dx := \int_{(a,c]} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

De manera análoga, se define la integral impropia $\int_{(-\infty,b)} g(x)\,dx$ a partir de la suma de dos integrales convergentes sobre los intervalos $(-\infty,c]$ y $[c,b)$, para algún $c \in (-\infty,b)$.

Observación 2.52. A modo de conclusión, es evidente que las integrales impropias de primera, segunda y tercera especie se distinguen según la naturaleza del dominio de integración: cerrados no acotados, acotados no cerrados y abiertos no acotados, respectivamente.

2.4. La integral de Riemann en dimensiones superiores

Es natural preguntarse cómo generalizar la noción de integral de Riemann al contexto de funciones definidas en $\mathbb{R}^n$, y cuál sería su interpretación geométrica.

2.4.1. Rectángulos y particiones de rectángulos

Definición 2.53. Un **rectángulo cerrado en** $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano de n intervalos acotados de la forma $I_k = [a_k, b_k]$, con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tales que $a_k \leq b_k$, para todo $k \in \{1,\dots,n\}$. Llamando a dicho producto R, se tiene que

$$R := \prod_{k=1}^{n} I_k = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n.$$

De ahora en adelante, y salvo indicación contraria, trabajaremos con rectángulos cerrados no degenerados de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.54. Dado un rectángulo $R = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$, se define su **volumen** como el producto de las longitudes de sus factores; es decir,

$$\mathrm{Vol}(R) := \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \in \mathbb{R}.$$

Observación 2.55. El volumen admite una interpretación geométrica en los siguientes casos particulares:

- Si $n = 2$, representa el área del rectángulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.
- Si $n = 3$, representa el volumen del ortoedro correspondiente: $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$.

Definición 2.56. Dado un rectángulo $R = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^n$, una **partición de** R se define como el producto de las respectivas particiones unidimensionales de cada intervalo $[a_k, b_k]$:

$$P = \prod_{k=1}^{n} P_k, \quad \text{donde } P_k = \{x_0^k, x_1^k, \dots, x_{m_k}^k\} \subset [a_k, b_k], \quad \text{con } a_k = x_0^k < \cdots < x_{m_k}^k = b_k.$$

Véase que dicha partición divide el rectángulo R en $m = \prod_{k=1}^{n} m_k$ subrectángulos cerrados. Denotamos por $\mathcal{P}(R)$ al conjunto de particiones de R.

Definición 2.57. Sea $P \in \mathcal{P}(R)$ una partición del rectángulo $R = \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$. La **norma** (o diámetro) de P se define como la longitud del subintervalo más largo:

$$\|P\| := \max_{1 \leq k \leq n} \{x_j^k - x_{j-1}^k, 1 \leq j \leq m_k\}$$

Definición 2.58. Sean $P, Q \in \mathcal{P}(R)$. Diremos que Q es **más fina que** P (y escribimos $P \subset Q$) si cada vértice de un subrectángulo de P pertenece a algún subrectángulo de Q.

2.4.2. Integración de Riemann en rectángulos de $\mathbb{R}^n$

En este apartado, fijaremos las siguientes condiciones: sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto, $P \in \mathcal{P}(R)$ una partición de R que induce m subrectángulos $R_1, \ldots, R_m$, y sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada de varias variables reales.

Definición 2.59. Para cada $1 \leq k \leq m$, definimos:

$$m_k(f) := \inf_{t \in R_k} f(t), \qquad M_k(f) := \sup_{t \in R_k} f(t).$$

Definición 2.60. La **suma inferior** y la **suma superior** de f relativa a la partición P se definen, respectivamente, como:

$$L(f; P) := \sum_{k=1}^{m} m_k \cdot \mathrm{Vol}(R_k), \qquad U(f; P) := \sum_{k=1}^{m} M_k \cdot \mathrm{Vol}(R_k).$$

Denotamos los conjuntos de sumas inferiores y superiores de f respecto de R como:

$$\mathcal{L}(f; R) := \{L(f; P) \mid P \in \mathcal{P}(R)\} \subset \mathbb{R}, \qquad \mathcal{U}(f; R) := \{U(f; P) \mid P \in \mathcal{P}(R)\} \subset \mathbb{R}.$$

Definición 2.61. Dada una elección de puntos $\{t_k\}_{k=1}^{m}$, con $t_k \in R_k$, la **suma de Riemann** de f relativa a P se define como:

$$S(f; P; \{t_k\}) := \sum_{k=1}^{m} f(t_k) \cdot \mathrm{Vol}(R_k).$$

Proposición 2.62. *Sea $m(f) := \inf_{t \in R} f(t)$, $M(f) := \sup_{t \in R} f(t)$. Entonces, para toda partición $P \in \mathcal{P}(R)$ y cualquier elección de puntos $\{t_k\} \subset P$, se cumple:*

$$m(f) \cdot \mathrm{Vol}(R) \leq L(f; P) \leq S(f, P; \{t_k\}) \leq U(f; P) \leq M(f) \cdot \mathrm{Vol}(R).$$

Observación 2.63. De acuerdo con la Proposición 2.62, los conjuntos $\mathcal{L}(f; R)$ y $\mathcal{U}(f; R)$ son no vacíos y acotados en $\mathbb{R}$. En consecuencia, admiten ínfimo y supremo, respectivamente, lo que permite definir de forma rigurosa la integral inferior y la integral superior.

Definición 2.64. La **integral inferior** e **integral superior** de f en R se definen, respectivamente, como:

$$\underline{\int_R} f := \sup \mathcal{L}(f; R), \qquad \overline{\int_R} f := \inf \mathcal{U}(f; R).$$

Definición 2.65. Se dice que f es **Riemann-integrable** en R si

$$\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f.$$

En tal caso, definimos la **integral de Riemann** de f como:

$$\int_R f := \underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f.$$

Observación 2.66. En el contexto anterior, y dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, es común utilizar la notación:

$$\int_R f \equiv \int_R f(x)\, dx \equiv \int_R f(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n).$$

Proposición 2.67 (Caracterizaciones de integrabilidad)**.** *Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto, $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada, $P \in \mathcal{P}(R)$ una partición de R, y $\{t_k\} \subset R$ una elección de puntos en cada subrectángulo. Entonces, son equivalentes:*

1. $f \in \mathcal{R}(R)$.
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ *tal que si* $P \in \mathcal{P}(R)$ *y* $P_\varepsilon \subset P,$ *entonces* $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.
3. $\exists A \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \|P\| < \delta, \text{ entonces } |S(f; P; \{t_k\}) - A| < \varepsilon;$$

equivalentemente,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R) \text{ tal que si } P \in \mathcal{P}(R) \text{ y } P_\varepsilon \subset P, \text{ entonces } |S(f; P; \{t_k\}) - A| < \varepsilon.$$

En tal caso, $A = \int_R f$.

4. ***(Criterio de Lebesgue).*** *El conjunto de discontinuidades de f tiene medida nula.*

A continuación, se enuncian algunas propiedades fundamentales y criterios de integrabilidad asociados a la integral de Riemann en dominios rectangulares de $\mathbb{R}^n$. Sus demostraciones, aunque más técnicas, siguen líneas análogas a las del caso unidimensional.

Teorema 2.68 (Linealidad de la integral)**.** *Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto y $f, g : R \to \mathbb{R}$ dos funciones Riemann-integrables en R. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(R)$ y*

$$\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g.$$

Teorema 2.69 (Integrabilidad de funciones continuas)**.** *Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto. Si $f \in \mathcal{C}(R)$, entonces $f \in \mathcal{R}(R)$.*

Teorema 2.70 (Permanencia de la integrabilidad por composición)**.** *Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto, $f \in \mathcal{R}(R)$, y $\Phi \in \mathcal{C}(f(R))$. Entonces se cumple que $\Phi \circ f \in \mathcal{R}(R)$.*

Teorema 2.71 (Aditividad de la integral)**.** *Sean $R, R_1, R_2 \subset \mathbb{R}^n$ rectángulos compactos tales que $R = R_1 \cup R_2$ y $\mathring{R}_1 \cap \mathring{R}_2 = \emptyset$. Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable en R. Entonces se cumple que $f \in \mathcal{R}(R_1) \cup \mathcal{R}(R_2)$, y*

$$\int_R f = \int_{R_1} f + \int_{R_2} f.$$

3. La integral de Lebesgue

La teoría de integración desarrollada por Henri Lebesgue a comienzos del siglo XX representa un punto de inflexión en el análisis moderno. Su propuesta no solo constituye una generalización del enfoque riemanniano, sino que introduce un nuevo paradigma basado en el concepto de medida, permitiendo tratar de manera unificada funciones que presentan discontinuidades o comportamientos oscilatorios extremos.

En este capítulo se presenta la construcción formal de la integral de Lebesgue sobre subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, comenzando por el concepto de función medible, hasta alcanzar el caso general. También se detallan algunas de sus propiedades básicas y se destaca su capacidad para ampliar el conjunto de funciones integrables.

Para una exposición más rigurosa y completa, se remite al **Apéndice** A, titulado *Medida de Lebesgue en el espacio euclídeo*, donde se recogen las nociones fundamentales de la teoría de la medida necesarias para el desarrollo de este capítulo, tales como las σ-álgebras, la medida exterior y la caracterización de Carathéodory de los conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue.

La redacción de este capítulo se ha basado fundamentalmente en las siguientes referencias bibliográficas: [Bar95], [Bur98], [Cha95] y [WZ15], complementadas con notas y materiales docentes como [Vil25]. Todas las definiciones, teoremas y demostraciones se han adaptado cuidadosamente para integrarse de manera coherente en la estructura y estilo de este trabajo.

3.1. Construcción formal de la integral de Lebesgue

3.1.1. El concepto de función medible

Definición 3.1. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue. Se dice que una función

$$f : E \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

es **medible** si, para todo número real $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\}$$

es medible Lebesgue.

Proposición 3.2. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible Lebesgue.*
2. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ es medible Lebesgue.*
3. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ es medible Lebesgue.*
4. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E : f(x) < \alpha\}$ es medible Lebesgue.*

Demostración. La equivalencia entre las distintas condiciones se deduce observando que los correspondientes conjuntos de nivel se relacionan mediante operaciones de complemento y de paso al límite. Por ejemplo:

$$\{x \in E : f(x) \leq \alpha\} = E \setminus \{x \in E : f(x) > \alpha\}.$$

Análogamente, se tiene:

$$\{x \in E : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in E : f(x) > \alpha - \tfrac{1}{n}\right\},$$
$$\{x \in E : f(x) < \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in E : f(x) \leq \alpha - \tfrac{1}{n}\right\}.$$

Dado que la σ-álgebra de Lebesgue es cerrada bajo complementarios, uniones e intersecciones numerables, se concluye que las cuatro condiciones son equivalentes.

□

Lema 3.3. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces, para cualesquiera $c, d \in \mathbb{R}$, los siguientes conjuntos preimagen son medibles Lebesgue:*

$$f^{-1}([c,d]), \quad f^{-1}((c,d]), \quad f^{-1}([c,d)), \quad f^{-1}((c,d)), \quad f^{-1}(\{+\infty\}), \quad f^{-1}(\{-\infty\}), \quad f^{-1}(\{c\}).$$

Observación 3.4. Se puede verificar directamente a partir de la definición los siguientes casos particulares de funciones medibles:

(i) **Funciones constantes.** Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible en el sentido de Lebesgue, y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función constante, es decir, $f(x) = c$ para todo $x \in E$, con $c \in \mathbb{R}$. Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{si } \alpha \geq c, \\ E, & \text{si } \alpha < c, \end{cases}$$

y como tanto $\varnothing$ como E son conjuntos medibles Lebesgue, se concluye que f es medible.

(ii) **Funciones características.** Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible en el sentido de Lebesgue, y sea $\chi_E : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ su función característica, dada por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel correspondiente viene dado por:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_E(x) > \alpha\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{si } \alpha \geq 1, \\ E, & \text{si } 0 \leq \alpha < 1, \\ \mathbb{R}^n, & \text{si } \alpha < 0, \end{cases}$$

y en todos los casos se obtiene un conjunto medible Lebesgue, lo que garantiza que χ_E es medible.

Observación 3.5. En el marco de la teoría de la medida, se afirma que una propiedad $\mathcal{P}$ se verifica **casi por doquier** (abreviado *cpd*) en un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$ si el conjunto de puntos en los que dicha propiedad no se cumple constituye un conjunto de medida de Lebesgue nula. Es decir, existe un conjunto $N \subset E$, con $\mu(N) = 0$, tal que $\mathcal{P}$ se satisface para todo $x \in E \setminus N$.

Proposición 3.6. *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua casi por doquier. Entonces, f es medible.*

2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces, f es medible. En particular, su restricción a cualquier conjunto medible Lebesgue $E \subset \mathbb{R}$ también es medible.*

Demostración.

1. Como f es continua casi por doquier en E, existe un conjunto $N \subset E$ de medida nula tal que $f|_{E \setminus N}$ es continua.

   Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E \setminus N : f(x) > \alpha\}$ es abierto en la topología relativa, y por tanto medible.

   Además, $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ difiere de $\{x \in E \setminus N : f(x) > \alpha\}$ a lo sumo en un subconjunto de N, que tiene medida nula. Por estabilidad de la medibilidad frente a la unión con conjuntos de medida cero, se concluye que $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y por tanto f es medible.

2. Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ es un intervalo de la forma $(\beta, +\infty)$, $[\beta, +\infty)$, o una unión numerable de tales intervalos, todos ellos pertenecientes a la σ-álgebra de Borel.

   En consecuencia, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ es un conjunto Borel para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y por tanto f es medible. Como toda función Borel-medible es Lebesgue-medible, su restricción a cualquier conjunto medible Lebesgue también es medible.

□

Proposición 3.7. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces, también son funciones medibles:*

1. *cf, para todo $c \in \mathbb{R}$,*

2. *f^2,*

3. *$|f|$.*

Demostración.

1. Si $c = 0$, entonces $cf = 0$ es la función constante nula, y por tanto, medible.

   Si $c > 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

   $$\{x \in E : cf(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha/c\},$$

   conjunto medible Lebesgue por ser f una función medible.

   Razonando de manera análoga en el caso $c < 0$, concluimos que cf es medible para todo $c \in \mathbb{R}$.

2. Si $\alpha < 0$, entonces
$$\{x \in E : f^2(x) > \alpha\} = E,$$
ya que $f^2(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Como E es un conjunto medible Lebesgue, el conjunto anterior también lo es.

Si $\alpha \geq 0$, se tiene:
$$\{x \in E : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in E : f(x) < -\sqrt{\alpha}\},$$
unión de dos conjuntos medibles Lebesgue, por ser f una función medible. En consecuencia, f^2 es medible.

3. Si $\alpha < 0$, entonces
$$\{x \in E : |f(x)| > \alpha\} = E,$$
puesto que $|f(x)| \geq 0$ para todo $x \in E$. Como E es medible Lebesgue, el conjunto anterior también lo es.

Si $\alpha \geq 0$, se verifica que
$$\{x \in E : |f(x)| > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E : f(x) < -\alpha\},$$
unión de dos conjuntos medibles Lebesgue, por lo que $|f|$ es medible.

□

Lema 3.8. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue, y sean $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones tales que f es medible y $f = g$ cpd. Entonces, la función g también es medible.*

Lema 3.9. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue, y sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces, la función suma $f + g : E \to \mathbb{R}$ también es medible.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Para cada $r \in \mathbb{Q}$, definimos el conjunto
$$S_r := \{x \in E : f(x) > r\} \cap \{x \in E : g(x) > \alpha - r\}.$$
Dado que f y g son funciones medibles, los conjuntos $\{f > r\}$ y $\{g > \alpha - r\}$ son medibles Lebesgue, y por tanto también lo es su intersección S_r.

Observamos ahora que
$$\{x \in E : f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r.$$
Como unión numerable de conjuntos medibles Lebesgue, se concluye que el conjunto de la izquierda es también medible Lebesgue. Por tanto, la función $f + g$ es medible.

□

Definición 3.10. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Se definen la **parte positiva** y la **parte negativa** de f mediante las expresiones:
$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

Proposición 3.11. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Entonces, f es medible si y sólo si sus partes positiva y negativa, f^+ y f^-, son funciones medibles.*

Proposición 3.12. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sean $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles. Definimos los conjuntos*

$$E_1 := \{x \in E : f(x) = -\infty \text{ y } g(x) = +\infty\}, \qquad E_2 := \{x \in E : f(x) = +\infty \text{ y } g(x) = -\infty\},$$

y consideramos la función $f + g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(f+g)(x) := \begin{cases} f(x) + g(x), & \text{si } x \notin E_1 \cup E_2, \\ 0, & \text{si } x \in E_1 \cup E_2. \end{cases}$$

Entonces, la función $f + g$ así definida es medible.

Demostración. Como f y g son funciones medibles, los conjuntos

$$E_1 = \{x \in E : f(x) = -\infty \text{ y } g(x) = +\infty\}, \qquad E_2 = \{x \in E : f(x) = +\infty \text{ y } g(x) = -\infty\}$$

son medibles Lebesgue, al ser intersecciones de conjuntos medibles Lebesgue.

Definimos la función auxiliar $h : E \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) := \begin{cases} f(x) + g(x), & \text{si } x \notin E_1 \cup E_2, \\ 0, & \text{si } x \in E_1 \cup E_2. \end{cases}$$

Esta función coincide con $f + g$ en los puntos donde la suma está bien definida en $\overline{\mathbb{R}}$, y toma el valor cero en aquellos en los que la suma no está definida debido a una colisión de infinitos.

Dado que $f + g$ es medible en $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ por el Lema 3.9, y que la función constante 0 es medible, concluimos que h, definida por partes sobre conjuntos medibles disjuntos, es también medible.

□

Corolario 3.13. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue, y sean $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles. Entonces, el producto $f \cdot g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ es también una función medible.*

Proposición 3.14. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue, y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces, las funciones definidas en E por*

$$f(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \qquad F(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$

$$f^*(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \qquad F^*(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

son también funciones medibles.

Corolario 3.15. *Bajo las hipótesis de la proposición anterior, si la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente casi por doquier a una función $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, entonces f es medible.*

Una vez definido el concepto de función medible, así como diversos criterios que permiten determinar la medibilidad de una función, introducimos a continuación el concepto de *función simple*, que constituye la piedra angular para la construcción de la integral de Lebesgue.

3.1.2. El concepto de función simple

Definición 3.16. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue. Una función $\psi : E \to \mathbb{R}$ se dice **simple** si su imagen $\mathrm{Im}(\psi)$ es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$.

Observación 3.17. Una función simple $\psi : E \to \mathbb{R}$ puede representarse como una combinación lineal de funciones características:

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x),$$

donde los coeficientes $a_j \in \mathbb{R}$ y los conjuntos $E_j \subset E$ satisfacen $\psi(x) = a_j$ para todo $x \in E_j$.

Aunque existen múltiples formas de representar una función simple, existe una única **representación canónica**, caracterizada por el hecho de que los valores a_j son distintos entre sí y los conjuntos E_j son disjuntos, no vacíos, y satisfacen

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} E_j.$$

Proposición 3.18. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue, y sea $\psi : E \to \mathbb{R}$ una función simple con representación canónica*

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \, \chi_{E_j}(x),$$

Entonces, ψ es medible si, y solo si, cada conjunto E_j es medible Lebesgue.

Teorema 3.19 (Teorema de aproximación de Lebesgue)**.** *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $f : E \to [0, +\infty]$ una función medible. Entonces, existe una sucesión $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles $\psi_n : E \to [0, +\infty)$ tal que:*

1. *$\psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x)$ para todo $x \in E$ y $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x)$ para todo $x \in E$.*
3. *$\mathrm{Im}(\psi_n) \subset \mathbb{R}$ es finito, es decir, cada ψ_n es una función simple.*
4. *Si f está acotada superiormente, entonces existe una sucesión creciente $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples y medibles que converge uniformemente a f en E.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos, para $1 \leq k \leq 2^n$, los conjuntos

$$E_{n,k} := \left\{ x \in E : \frac{k-1}{2^n} < f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}, \qquad F_n := \{x \in E : f(x) \geq n\}.$$

Como f es medible, tanto $E_{n,k}$ como F_n son subconjuntos medibles de E, disjuntos dos a dos, y se cumple:

$$E = F_n \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n \cdot 2^n} E_{n,k} \right).$$

Definimos entonces $\psi_n : E \to [0, +\infty)$ por:

$$\psi_n(x) := \begin{cases} n, & \text{si } x \in F_n, \\ \dfrac{k-1}{2^n}, & \text{si } x \in E_{n,k}. \end{cases}$$

Esta expresión es equivalente a:

$$\psi_n(x) = n \cdot \chi_{F_n}(x) + \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}}(x).$$

Por construcción, cada ψ_n es medible. Además, para todo $x \in E$, se tiene:

$$\psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x),$$

lo que implica que la sucesión $\{\psi_n(x)\}$ es creciente.

Si $f(x) = +\infty$, entonces $\psi_n(x) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Si $f(x) \in \mathbb{R}$, entonces existe $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $x \in E_{n,k}$, y en ese caso:

$$\psi_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n},$$

por lo que

$$|\psi_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{y por tanto } \lim_{n \to \infty} \psi_n(x) = f(x).$$

Por último, si f está acotada superiormente por alguna constante $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < n$ para todo $x \in E$ y $n \geq n_0$, de modo que $F_n = \varnothing$ para todo $n \geq n_0$, y se cumple:

$$|f(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall x \in E,\ \forall n \geq n_0,$$

lo que implica que $\psi_n \to f$ uniformemente en E.

□

3.1.3. Definición de la integral para funciones medibles arbitrarias

Como primer paso en la construcción de la integral de Lebesgue, abordamos el caso particular de funciones simples y medibles no negativas.

Definición 3.20. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $\psi : E \to [0, +\infty)$ una función simple y medible, con representación canónica

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x),$$

donde $a_1, \ldots, a_m \in [0, +\infty)$, y los conjuntos $E_j \subset E$ son medibles Lebesgue, disjuntos dos a dos y tales que $E = \bigcup_{j=1}^{m} E_j$.

Definimos la integral de ψ respecto de la medida de Lebesgue como

$$\int_E \psi \, d\mu := \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(E_j).$$

Adoptamos el convenio de que $0 \cdot (+\infty) = 0$. En particular, si $\psi \equiv 0$, entonces $\int_E \psi \, d\mu = 0$, independientemente de si E tiene medida finita o infinita.

Observación 3.21. Nótese que la expresión de la Definición 3.20 puede tomar el valor $+\infty$.

Como segundo paso en la construcción de la integral de Lebesgue, extendemos la definición al caso de funciones medibles no negativas.

Definición 3.22. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $f : E \to [0, +\infty]$ una función medible. Definimos la integral de f sobre E respecto de la medida de Lebesgue como

$$\int_E f \, d\mu := \sup \left\{ \int_E \psi \, d\mu : \psi \in \mathcal{A} \right\},$$

donde

$$\mathcal{A} := \{\psi : E \to [0, +\infty) \mid \psi \text{ es simple, medible y } \psi(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \in E\}.$$

Observación 3.23. La colección $\mathcal{A}$ es no vacía, ya que, por ejemplo, la función nula $\psi \equiv 0$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Definición 3.24. Bajo las condiciones de la Definición 3.22, si $A \subset E$ es medible, definimos

$$\int_A f \, d\mu := \int_E f \chi_A \, d\mu.$$

Proposición 3.25. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sean $f, g : E \to [0, +\infty]$ funciones medibles tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in E$. Entonces,*

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

Demostración. Por definición de la integral de Lebesgue,

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E \psi \, d\mu : \psi \text{ simple, medible, } \psi \leq f \right\},$$

$$\int_E g \, d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu : \varphi \text{ simple, medible, } \varphi \leq g \right\}.$$

Como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in E$, toda función simple $\psi \leq f$ también satisface $\psi \leq g$, de modo que el conjunto de funciones utilizadas para aproximar f está contenido en el conjunto utilizado para aproximar g. Es decir,

$$\{\psi \leq f\} \subset \{\varphi \leq g\},$$

y, por tanto,

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

□

Proposición 3.26. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una función medible y sean $E, F \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos medibles Lebesgue tales que $E \subset F$. Entonces,*

$$\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu.$$

Demostración. Por definición de la integral de Lebesgue,

$$\int_E f\, d\mu = \sup \left\{ \int_E \psi\, d\mu : \psi \text{ simple, medible, } \psi \leq f \text{ en } E \right\},$$

$$\int_F f\, d\mu = \sup \left\{ \int_F \varphi\, d\mu : \varphi \text{ simple, medible, } \varphi \leq f \text{ en } F \right\}.$$

Para cada ψ como arriba, definimos $\varphi : F \to [0, +\infty)$ por

$$\varphi(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \in E, \\ 0, & x \in F \setminus E, \end{cases}$$

y se tiene que φ es simple, medible, satisface $\varphi \leq f$ en F, y $\int_F \varphi\, d\mu = \int_E \psi\, d\mu$.

Por tanto, $\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$.

□

Una vez definida la integral para funciones simples medibles no negativas y, posteriormente, para funciones medibles no negativas, estamos en disposición de extender dicho concepto al caso de funciones medibles arbitrarias.

Definición 3.27. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Diremos que f es **integrable en el sentido de Lebesgue** sobre E si

$$\int_E f^+\, d\mu < +\infty \quad \text{y} \quad \int_E f^-\, d\mu < +\infty.$$

En tal caso, y dado que $f = f^+ - f^-$, definimos su integral sobre E como

$$\int_E f\, d\mu := \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu.$$

Obsérvese que $|f| = f^+ + f^-$, por lo que la condición de integrabilidad anterior equivale a exigir que $\int_E |f|\, d\mu < +\infty$. Esto motiva la notación

$$L^1(E) := \left\{ f : E \to \mathbb{R} \text{ medible} \;\middle|\; \int_E |f|\, d\mu < +\infty \right\},$$

que denota el conjunto de todas las funciones integrables (en valor absoluto) sobre E.

Observación 3.28. Cuando la medida considerada es la de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, es habitual emplear la notación

$$\int_E f(x)\, dx \quad \text{en lugar de} \quad \int_E f\, d\mu.$$

3.2. Estructura y propiedades del espacio integrable L^1

Una vez introducido el espacio $L^1(E)$, resulta natural examinar sus propiedades fundamentales como espacio vectorial, así como los criterios que permiten caracterizar la integrabilidad de una función.

Observación 3.29. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue con $\mu(E) = 0$, y sea $f \in L^1(E)$. Entonces,

$$\int_E f \, d\mu = 0.$$

Efectivamente, por la definición de la integral de Lebesgue, se tiene

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu,$$

y dado que f^+, f^- son funciones no negativas y medibles en E, basta probar que

$$\int_E f^+ \, d\mu = \int_E f^- \, d\mu = 0.$$

Para ello, notamos que toda función simple $\psi \leq f^+$ (o $\psi \leq f^-$) es nula fuera de un conjunto de medida cero, y por tanto,

$$\int_E \psi \, d\mu = 0.$$

Así, el supremo de dichas integrales también es nulo, lo que implica el resultado.

Proposición 3.30. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces, $f \in L^1(E)$ si, y solo si, $|f| \in L^1(E)$. En tal caso, se cumple que*

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

Demostración. Por definición, $f \in L^1(E)$ si, y solo si, $\int_E |f| \, d\mu < +\infty$.

Por otro lado, recordamos que $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$, donde $f^+ := \max\{f, 0\}$ y $f^- := \max\{-f, 0\}$ son funciones medibles y no negativas.

Supongamos primero que $f \in L^1(E)$. Entonces, por definición de integrabilidad, $\int_E |f| \, d\mu < +\infty$, y como $f^+, f^- \leq |f|$, se sigue que

$$\int_E f^+ \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu < +\infty, \quad \int_E f^- \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu < +\infty.$$

Por tanto, $f^+, f^- \in L^1(E)$, y se puede definir

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

En consecuencia,

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| = \left| \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \right| \leq \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu.$$

Recíprocamente, si $|f| \in L^1(E)$, entonces $\int_E |f| \, d\mu < +\infty$, y como $f^+, f^- \leq |f|$, se sigue

como antes que $f^+, f^- \in L^1(E)$.
En consecuencia, $f \in L^1(E)$ y la igualdad anterior también es válida.

□

Corolario 3.31. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y sea $g \in L^1(E)$. Si se cumple que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo $x \in E$, entonces $f \in L^1(E)$ y*

$$\int_E |f|\, d\mu \leq \int_E |g|\, d\mu.$$

La demostración se sigue directamente de la Proposición 3.25, al aplicarla a las funciones no negativas $|f|$ y $|g|$, y de la Proposición 3.30.

Proposición 3.32. *Sean $f, g \in L^1(E)$ tales que $f(x) \leq g(x)$ c.p.d. en E. Entonces,*

$$\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu.$$

Corolario 3.33. *Sean $f, g \in L^1(E)$ tales que $f = g$ c.p.d. en E. Entonces,*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu.$$

Teorema 3.34. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue, y sean $f, g \in L^1(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *$\alpha f \in L^1(E)$ y se cumple*
$$\int_E \alpha f\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu.$$

2. *$f + g \in L^1(E)$ y se verifica*
$$\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu.$$

Demostración.

1. Si $\alpha = 0$, el resultado es inmediato, ya que $\alpha f = 0$ en E.
Supongamos ahora $\alpha > 0$. Como $f \in L^1(E)$, se tiene que $f^+, f^- \in L^1(E)$, y por tanto
$$(\alpha f)^+ = \alpha f^+, \qquad (\alpha f)^- = \alpha f^-.$$
Entonces,
$$\int_E \alpha f\, d\mu = \int_E (\alpha f)^+\, d\mu - \int_E (\alpha f)^-\, d\mu = \alpha \int_E f^+\, d\mu - \alpha \int_E f^-\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu.$$
Si $\alpha < 0$, basta observar que $\alpha f = -(|\alpha| f)$ y aplicar el caso anterior junto con la linealidad de la integral respecto al signo.

2. Como $f, g \in L^1(E)$, se tiene $f^+, f^-, g^+, g^- \in L^1(E)$. Además,
$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

y las funciones $f^+ + g^+$ y $f^- + g^-$ también pertenecen a $L^1(E)$.
Se sigue que $f+g \in L^1(E)$ y

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)\, d\mu &= \int_E (f^+ + g^+)\, d\mu - \int_E (f^- + g^-)\, d\mu \\ &= \int_E f^+\, d\mu + \int_E g^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu - \int_E g^-\, d\mu \\ &= \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu.\end{aligned}$$

□

Una de las principales fortalezas de la integral de Lebesgue frente a la de Riemann reside en su mayor capacidad de integración. En lo que sigue, profundizaremos en esta ventaja, analizando cómo el enfoque de Lebesgue amplía el conjunto de funciones integrables.

Proposición 3.35. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue con $\mu(E) < +\infty$, y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Entonces,*

$$f \in L^1(E).$$

Demostración. Como f es acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in E$. Por tanto,

$$\int_E |f|\, d\mu \leq \int_E M\, d\mu = M\mu(E) < +\infty,$$

lo cual implica $f \in L^1(E)$.

□

Teorema 3.36. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, $f \in L^1([a,b])$ si, y solo si, f es medible.*

Demostración. Supongamos primero que f es medible y acotada. Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, dividimos el intervalo $[0, M]$ en subintervalos de longitud M/n, y definimos los conjuntos:

$$E_n^k := \left\{ x \in [a,b] : \frac{M(k-1)}{n} < f(x) \leq \frac{Mk}{n} \right\}, \quad -n \leq k \leq n.$$

Cada conjunto E_n^k es medible, y los $\{E_n^k\}$ son disjuntos y recubren $[a,b]$. Definimos las funciones simples:

$$r_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \frac{M(k-1)}{n} \chi_{E_n^k}(x), \quad s_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \frac{Mk}{n} \chi_{E_n^k}(x),$$

las cuales satisfacen $r_n \leq f \leq s_n$ en $[a,b]$. Además,

$$\int_{[a,b]} (s_n - r_n)\, d\mu = \sum_{k=-n}^{n} \frac{M}{n} \mu(E_n^k) = \frac{M}{n} \mu([a,b]),$$

que tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Por tanto, f es integrable en el sentido de Lebesgue como límite de funciones simples.

Supongamos ahora que $f \in L^1([a,b])$. Entonces existen sucesiones de funciones simples $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ tales que $r_n \leq f \leq s_n$, y

$$\int_{[a,b]} (s_n - r_n)\, d\mu < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definimos:

$$r(x) := \sup_n r_n(x), \qquad s(x) := \inf_n s_n(x),$$

las cuales son medibles y satisfacen $r \leq f \leq s$. Definimos ahora el conjunto

$$D := \{x \in [a,b] : s(x) > r(x)\}.$$

Si demostramos que $\mu(D) = 0$, se concluye que $f = r = s$ c.p.d. en $[a,b]$, por lo que f es medible como función límite puntual casi en todas partes de funciones simples.

Para ello, observamos que

$$D \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^k, \qquad \text{donde} \qquad D_n^k := \left\{x \in [a,b] : s_n(x) - r_n(x) > \frac{1}{k}\right\}.$$

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{[a,b]} (s_n - r_n)\, d\mu \geq \int_{D_n^k} (s_n - r_n)\, d\mu > \frac{1}{k} \mu(D_n^k),$$

de donde se deduce que $\mu(D_n^k) \leq \frac{1}{k}$. Por tanto,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^k\right) \leq \frac{1}{k}, \quad \text{y así} \quad \mu(D) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^k\right) = 0.$$

En consecuencia, $f = r = s$ c.p.d. en $[a,b]$, con r y s medibles, y por tanto f también lo es. $\square$

Observación 3.37. Como consecuencia del Teorema 2.30 (Teorema de Vitali-Lebesgue), toda función integrable en el sentido de Riemann sobre un intervalo acotado $[a,b]$ es también integrable en el sentido de Lebesgue.

Efectivamente, tal función es continua casi por doquier en $[a,b]$, por lo que resulta medible según la Proposición 3.6. Además, al ser acotada, el Teorema 3.36 garantiza que pertenece a $L^1([a,b])$.

En efecto, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 3.38. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es integrable en el sentido de Riemann, entonces también lo es en el sentido de Lebesgue, y ambos valores coinciden:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f\, d\mu.$$

Observación 3.39. El recíproco de la proposición anterior no se verifica, es decir, no toda función integrable en el sentido de Lebesgue es integrable en el sentido de Riemann.

Un ejemplo paradigmático lo constituye la función de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$, cuya no integrabilidad en el sentido de Riemann fue discutida en la Observación 2.25.

No obstante, esta función coincide con la función nula en casi todo punto de $[a,b]$, y dado que esta es acotada y medible (como se demostró en la Observación 3.4), el Teorema 3.36 garantiza su integrabilidad en el sentido de Lebesgue.

3.3. Relación entre la integral de Lebesgue y las integrales impropias de Riemann

Resulta interesante tratar de establecer una relación entre la integral de Lebesgue y la noción de integral impropia de Riemann, tal como se definió en la Sección 2.3 del Capítulo 2. El siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [WZ15], ilustra esta conexión.

Teorema 3.40.

1. *Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función no negativa tal que existe su integral impropia de Riemann de primera especie*
$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$
entonces $f \in L^1([a,+\infty))$ y
$$\int_{[a,+\infty)} f\,d\mu = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. *Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una función no negativa tal que existe su integral impropia de Riemann de segunda especie*
$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx,$$
entonces $f \in L^1([a,b))$ y
$$\int_{[a,b)} f\,d\mu = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Observación 3.41. La integral de Lebesgue, si bien extiende significativamente la clase de funciones integrables respecto a la integral de Riemann, no subsume todos los casos de integrales impropias riemannianas.

Considérese la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ definida en $(0,+\infty)$.

La función f admite integral impropia de Riemann en $(0,+\infty)$. Mediante integración por partes y aplicando criterios de convergencia para integrales oscilatorias, se establece que:
$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Esta convergencia se explica por la compensación entre las oscilaciones de $\sin x$ y el decaimiento de $1/x$.

Para demostrar que $f \notin L^1((0,+\infty))$, analizamos su valor absoluto. Considerando la partición por intervalos $[n\pi, (n+1)\pi]$ para $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| \, dx = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

donde hemos usado que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| \, dx = 2$. Sumando estas contribuciones:

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi} = +\infty,$$

pues la serie diverge por comparación con la serie armónica. Por tanto, $|f| \notin L^1((0, +\infty))$ y, en virtud de la Proposición 3.30, concluimos que $f \notin L^1((0, +\infty))$.

4. Superando más limitaciones de Riemann: teoremas de convergencia y cálculo integral según Lebesgue

Una vez analizadas las diferencias conceptuales y de alcance entre ambas teorías, siendo la de Lebesgue más general excepto en el caso de integrales impropias, abordamos a continuación dos aspectos clave del análisis integral: los principales teoremas de convergencia y el Teorema Fundamental del Cálculo.

La elaboración de este capítulo se apoya fundamentalmente en las referencias [Bar95] y [WZ15], cuyas exposiciones teóricas y ejemplos han sido cuidadosamente reelaborados y adaptados al enfoque de este trabajo.

4.1. Análisis del paso al límite: teoremas de convergencia en ambos enfoques

4.1.1. Motivación histórica y definiciones previas

A comienzos del siglo XIX, Joseph Fourier (1768–1830) abordó el célebre «problema de la propagación del calor» en cuerpos sólidos, sentando así las bases del análisis armónico.

Uno de los modelos que propuso consistía en estudiar cómo evoluciona la temperatura a lo largo del tiempo en una varilla delgada y homogénea de longitud π, suponiendo que sus extremos se mantienen constantemente a temperatura nula.

El modelo matemático que formuló se traduce en la ecuación del calor unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,T),$$

donde la función $u(x,t)$ representa la temperatura en el punto de abscisa x en el instante t.

Este problema se acompaña de condiciones de contorno homogéneas:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad \forall t \in [0,T],$$

que reflejan que los extremos de la varilla se mantienen fijamente a $0\,°\mathrm{C}$, y de una condición inicial:

$$u(x,0) = f(x), \quad \forall x \in [0,\pi],$$

donde $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ es una función que modela la distribución inicial de temperatura a lo largo de la varilla.

Empleando el método de separación de variables, Fourier propuso como solución una «superposición infinita de temperaturas sencillas» de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-n^2 t} \sin(nx),$$

lo que, al evaluar en $t = 0$, conduce a la expresión:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx),$$

para ciertos coeficientes f_n que deben determinarse a partir de la función f.

Para obtener dichos coeficientes, Fourier consideró multiplicar ambos miembros por $\sin(mx)$ e integrar sobre el intervalo $[0, \pi]$, utilizando la ortogonalidad de las funciones seno:

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx) \sin(mx)\, dx.$$

Asumiendo la legitimidad del paso del signo de integración al sumatorio, concluyó que:

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Dicho razonamiento exige intercambiar el orden entre el signo de integración y la suma infinita, es decir,

$$\int_0^{\pi} \sum f_n \sin(nx) = \sum \int_0^{\pi} f_n \sin(nx),$$

una operación cuya validez no está garantizada sin hipótesis adicionales.

De forma más general, esta cuestión se formula mediante la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \stackrel{?}{=} \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx,$$

por lo que resulta natural preguntarse bajo qué condiciones es lícito este intercambio. En este contexto, la teoría de Lebesgue ofrece un marco más sólido y general que el de Riemann, permitiendo establecer criterios menos restrictivos para garantizar la validez de este tipo de operaciones límite.

Antes de abordar los principales resultados sobre el paso al límite bajo el signo de integración, es conveniente recordar los dos modos habituales en que una sucesión de funciones puede converger: la *convergencia puntual* y la *convergencia uniforme*.

Definición 4.1. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $E \subset \mathbb{R}$. Se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** a una función $f\colon E \to \mathbb{R}$ si, para todo $x \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Definición 4.2. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $E \subset \mathbb{R}$. Se dice que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a una función $f\colon E \to \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in E.$$

Observación 4.3. En adelante, utilizaremos la notación $f_n \to f$ para indicar que la sucesión $\{f_n\}$ converge a la función f, especificando en cada caso el tipo de convergencia que se esté considerando.

4.1.2. La confluencia entre límite e integral en el enfoque de Riemann

Teorema 4.4. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables en el sentido de Riemann sobre un intervalo cerrado $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Si $f_n\to f$ uniformemente en $[a,b]$, entonces:*

1. *f es Riemann-integrable en $[a,b]$, es decir, $f\in\mathcal{R}([a,b])$.*

2. *Se cumple el intercambio entre el límite y la integral:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. Consideremos la sucesión real $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$. Así pues, se tiene que $f_n(x)-\varepsilon_n \le f(x)\le f_n(x)+\varepsilon_n$, $\forall x\in[a,b], n\in\mathbb{N}$. Por la monotonía del operador integral, podemos afirmar que

$$\int_a^b (f_n(x)-\varepsilon_n)\,dx \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \int_a^b (f_n(x)+\varepsilon_n)\,dx,$$

de donde deducimos que

$$0\le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le 2\varepsilon_n(b-a).$$

Como consecuencia de que $f_n\to f$ uniformemente en $[a,b]$, se tiene que $\varepsilon_n\to 0$, por lo que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx;$$

es decir, $f\in\mathcal{R}([a,b])$.

Ahora bien, retomando la desigualdad y sabiendo que f es Riemann-integrable, obtenemos que:

$$-\varepsilon_n(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \le \varepsilon_n(b-a).$$

Aplicando el Teorema de Compresión, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right) = 0.$$

Reescribiendo un poco dicha expresión, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

y por lo tanto

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

□

Observación 4.5. En el contexto del Teorema 4.4, si en lugar de convergencia uniforme se considera únicamente convergencia puntual de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hacia una función f, el paso al límite bajo el signo de integración puede dejar de ser válido. Esta falta de conmutatividad puede deberse, entre otros motivos, a los siguientes:

1. La función límite puede no ser Riemann-integrable.
   Sea $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los racionales en $[0,1]$, y definamos $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ como
   $$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \{q_1, \dots, q_n\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
   Cada función f_n es Riemann-integrable, al presentar únicamente un número finito de discontinuidades. No obstante, su límite puntual es $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, que, como se vio en la Observación 2.25, no es integrable en el sentido de Riemann.

2. Incluso si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, la conmutación puede fallar.
   Considérese $f \equiv 0$ en $[0,1]$, y
   $$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
   En este caso, $f_n \to f$ puntualmente, pero
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

4.1.3. La confluencia entre límite e integral en el enfoque de Lebesgue

Lema 4.6. *Sea $h \in L^1([a,b])$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $E \subset [a,b]$ es un conjunto medible con $\mu(E) < \delta$, se tiene:*
$$\left| \int_E h(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Lema 4.7. *Sea $f \in L^1([a,b])$ y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos medibles de $[a,b]$ tal que*
$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [a,b].$$
Entonces:
$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. Sea $E_n := [a,b] \setminus A_n$. Entonces $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$, por lo que $\mu(E_n) \to 0$. Por el Lema 4.7, se tiene que
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_{A_n} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{E_n} f(x)\,dx \right| \leq \int_{E_n} |f(x)|\,dx \to 0.$$
□

Teorema 4.8 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en $[a,b]$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente cpd en $[a,b]$, y supongamos que existe una función $g \in L^1([a,b])$ que domina absolutamente a cada f_n, es decir,*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \textit{cpd en } [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, cada $f_n \in L^1([a,b])$, la función límite $f \in L^1([a,b])$, y se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. Como $f_n \to f$ cpd y $|f_n(x)| \leq g(x)$ cpd, se tiene que $|f(x)| \leq g(x)$ cpd, y por tanto $f \in L^1([a,b])$.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$A_n := \{x \in [a,b] : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ para todo } k \geq n\}.$$

Se tiene que $A_n \subset A_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [a,b]$. Además,

$$\int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \varepsilon \cdot \mu(A_n) \leq \varepsilon(b-a).$$

Sea $E_n := [a,b] \setminus A_n$. Entonces $\mu(E_n) \to 0$. Por el Lema 4.6, existen $\delta > 0$ y $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n > M$, se tiene:

$$\mu(E_n) < \delta \Rightarrow \int_{E_n} |f(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \int_{E_n} |g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Fijado $n > M$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \\
&\leq \int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_{E_n} |f_n(x) - f(x)|\,dx \\
&\leq \varepsilon(b-a) + \int_{E_n} |f_n(x)|\,dx + \int_{E_n} |f(x)|\,dx \\
&\leq \varepsilon(b-a) + \int_{E_n} |g(x)|\,dx + \int_{E_n} |f(x)|\,dx \\
&< \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

El resultado anterior admite una formulación más general en dominios arbitrarios de $\mathbb{R}^n$, lo que permite aplicarlo en contextos de mayor generalidad. A continuación, se enuncia dicha versión extendida del teorema:

Teorema 4.9 (Versión general del Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n : A \to \mathbb{R}$ tales que $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente cpd en A. Supongamos, además, que existe una función $g \in L^1(A)$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \textit{cpd en } A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, cada $f_n \in L^1(A)$, la función límite $f \in L^1(A)$, y se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx.$$

Corolario 4.10. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida finita, y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(A)$ una sucesión de funciones uniformemente acotadas que converge puntualmente cpd a una función $f : A \to \mathbb{R}$. Entonces, $f \in L^1(A)$ y se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx.$$

Teorema 4.11 (Teorema de la convergencia monótona de Beppo Levi)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(A)$ una sucesión de funciones tales que*

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \textit{cpd en } A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos, además, que la sucesión de integrales está acotada:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n(x)\,dx < +\infty.$$

Entonces, existe una función $f \in L^1(A)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ cpd en A, y se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_A f(x)\,dx.$$

La demostración completa de dicho Teorema puede consultarse en la referencia [Bar95].

Corolario 4.12. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(A)$ una sucesión de funciones tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A |f_n(x)|\,dx < +\infty.$$

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge cpd en A a una función $f \in L^1(A)$, y se verifica:

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\,dx.$$

Demostración. Sea $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Como $f_n \in L^1(A)$, también $|f_n| \in L^1(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y la hipótesis implica que la sucesión de funciones no negativas

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

es creciente y converge cpd a una función $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \in L^1(A)$, por el Teorema 4.11. En particular,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = g(x), \quad \text{cpd en } A,$$

lo que implica que $f \in L^1(A)$. Finalmente, como las sumas parciales $f^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} f_k$ convergen cpd a f y están dominadas cpd por $g \in L^1(A)$, el Teorema 4.9 garantiza que

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f^{(n)}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k(x)\,dx.$$

□

4.2. El Teorema Fundamental del Cálculo en los marcos de Riemann y Lebesgue

Tras haber examinado los principales resultados de convergencia en los marcos teóricos de Riemann y Lebesgue, pasamos ahora a uno de los pilares centrales del análisis integral: el *Teorema Fundamental del Cálculo*. A continuación, se expone su formulación en ambos contextos, resaltando tanto sus similitudes como sus diferencias conceptuales.

Definición 4.13. Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Riemann. Se define su **función integral** como $F : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Teorema 4.14 (Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann)**.**
Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Riemann, y sea F su función integral. Entonces:

1. *F es lipschitziana en $[a,b]$, y por tanto $F \in \mathcal{C}([a,b])$.*

2. *Si f es continua en un punto $x_0 \in [a,b]$, entonces F es derivable en x_0, y se cumple*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Demostración. Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Riemann.

1. Como $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces f es acotada en $[a,b]$. Es decir, existe una constante $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in [a,b]$. Por tanto, para cualesquiera $x, y \in [a,b]$, se cumple:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_y^x |f(t)|\,dt \leq \int_y^x k\,dt = k|x-y|, \end{aligned}$$

lo cual prueba que F es lipschitziana en $[a,b]$. Por tanto, F es uniformemente continua y, consecuentemente, continua en $[a,b]$

2. Probemos que
$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$
o, lo que es lo mismo,
$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = 0.$$
En primer lugar, para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, se tiene que
$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} f(x_0)\, dt \right) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\, dt. \end{aligned}$$
Por otra parte, como f es continua en x_0, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in [a, b]$ con $|t - x_0| < \delta$, se tiene que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Entonces, si $x \in [a, b]$ es tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, es obvio que para todo t comprendido entre x y x_0 se tendrá que $|t - x_0| < \delta$ y, por tanto, $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Consecuentemente,
$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| < \frac{\varepsilon\, |x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon,$$
y se concluye la demostración.

□

Corolario 4.15. *Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Riemann, y sea $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su función integral. Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$, entonces $F \in \mathcal{C}^1([a, b])$ y se verifica*
$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Corolario 4.16. *Sea $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces,*
$$F \in \mathcal{C}^1([a, b]) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, g \in \mathcal{C}([a, b]) \text{ tal que } F(x) = F(a) + \int_a^x g(s)\, ds.$$

Definición 4.17. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *primitiva* de f en $[a, b]$ si $F \in \mathcal{C}([a, b])$, es derivable en (a, b) y cumple que
$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Observación 4.18. En relación con la definición anterior, conviene advertir las siguientes consideraciones:

1. No toda función integrable posee primitiva. En particular, debido al Teorema del Valor Intermedio para funciones derivables, se deduce que las funciones con discontinuidades evitables o saltos no pueden tener primitivas en todo el intervalo.

2. Una función puede admitir una primitiva en un intervalo dado sin ser Riemann-integrable.

Por ejemplo, la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

no es Riemann-integrable en $[0,1]$ (pues no está acotada en ningún entorno de 0), aunque admite primitivas. Una de ellas sería la función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

3. Como consecuencia directa del Teorema Fundamental del Cálculo, toda función continua admite primitivas en cualquier intervalo. En efecto, si $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces su función integral

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

es una primitiva de f en $[a,b]$. Más generalmente, dado $c \in [a,b]$, la función

$$F_c(x) := \int_c^x f(t)\,dt$$

también constituye una primitiva de f en $[a,b]$.

Teorema 4.19 (Regla de Barrow para la integral de Riemann)**.** *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Riemann y sea F una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces se cumple que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

A continuación, nos disponemos a enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto de Lebesgue. Para ello, resulta esencial introducir previamente el concepto de continuidad absoluta.

Definición 4.20. Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *absolutamente continua* en $[a,b]$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda familia finita de intervalos disjuntos $\{(a_k, b_k)\}_{k\in\{1,\dots,n\}} \subset [a,b]$ que satisface

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,$$

se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Proposición 4.21. *Sean $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si f y g son absolutamente continuas en $[a,b]$, entonces también lo son las funciones $f+g$, $f \cdot g$ y αf, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

2. *Si f es absolutamente continua en $[a,b]$, entonces f es uniformemente continua en dicho intervalo.*

Observación 4.22. Nótese que el recíproco del resultado anterior no es válido. Existen funciones que son uniformemente continuas pero no absolutamente continuas. Un ejemplo clásico lo constituye la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right), & \text{si } x \in (0,1], \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dicha función es uniformemente continua en $[0,1]$, pero no absolutamente continua en dicho intervalo.

Proposición 4.23. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene:*

1. *Si f es derivable cpd en $[a,b]$ y $f' \in L^1([a,b])$, entonces f es absolutamente continua en $[a,b]$.*
2. *Si f es lipschitziana en $[a,b]$, entonces f es absolutamente continua en $[a,b]$.*
3. *Si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, entonces f es absolutamente continua en $[a,b]$.*

Teorema 4.24 (Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue)**.**
Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

1. *Si $f \in L^1([a,b])$, entonces la función $F : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in [a,b],$$

es absolutamente continua en $[a,b]$ y se verifica

$$F'(x) = f(x) \quad \text{cpd en } [a,b].$$

2. *Si f es absolutamente continua en $[a,b]$, entonces existe $f' \in L^1([a,b])$ tal que*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt, \quad \forall x \in [a,b].$$

La demostración completa de dicho Teorema puede consultarse en la referencia [Cha95].

Corolario 4.25. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces, f es absolutamente continua en $[a,b]$ si y solo si existe $g \in L^1([a,b])$ tal que*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt, \quad \forall x \in [a,b].$$

Teorema 4.26 (Regla de Barrow para la integral de Lebesgue)**.** *Sea $F : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en $[a,b]$. Entonces, F es derivable cpd en $[a,b]$, su derivada $F' \in L^1([a,b])$, y se cumple*

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Apéndices

A. Medida de Lebesgue en el espacio euclídeo.

Este apéndice reúne los fundamentos esenciales de la teoría de la medida sobre $\mathbb{R}^n$, proporcionando el marco formal necesario para la construcción rigurosa de la integral de Lebesgue desarrollada en el Capítulo 3.

Definición A.1. Dado un conjunto no vacío Ω, se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es una **σ-álgebra** en Ω si se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces su complementario $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Los elementos de $\mathcal{A}$ se denominan **conjuntos medibles**, y el par $(\Omega, \mathcal{A})$ se denomina **espacio medible**.

Proposición A.2. *Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra definida sobre un conjunto no vacío Ω. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *La intersección numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$; es decir, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

2. *Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que $A \setminus B \in \mathcal{A}$; es decir, $\mathcal{A}$ es cerrada bajo la operación de diferencia.*

Demostración.

1. Dado que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, es cerrada bajo complementarios y uniones numerables. Aplicando las leyes de De Morgan, se tiene:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \right)^C.$$

   Puesto que $A_n \in \mathcal{A}$ implica $A_n^C \in \mathcal{A}$, y como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones numerables, se concluye que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \in \mathcal{A}$, y por tanto también lo está su complementario, es decir, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

2. Recordando que la diferencia de conjuntos puede expresarse como

$$A \setminus B = A \cap B^C,$$

   y dado que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementarios, $B^C \in \mathcal{A}$. Por el ítem anterior, la intersección $A \cap B^C \in \mathcal{A}$, y, equivalentemente, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

□

Lema A.3. *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una colección numerable de conjuntos medibles. Entonces, existe una colección numerable de conjuntos medibles $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, disjunta dos a dos (es decir, $F_i \cap F_j = \varnothing$ si $i \neq j$), tal que*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Observación A.4. Obsérvese que el Lema A.3 permite reformular la propiedad (iii) de la definición A.1 en términos de la unión numerable de conjuntos disjuntos dos a dos.

Definición A.5. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Se dice que una aplicación

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] := [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

es una **medida** si satisface las siguientes propiedades:

(i) Medida del vacío: $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) Finitud sobre algún conjunto: Existe al menos un conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < +\infty$.

(iii) σ-aditividad: Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Definición A.6. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una medida. Se denomina **espacio de medida** a la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
Se dice que un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es **completo** si todo subconjunto de un conjunto de medida nula es medible con medida nula. Es decir, si $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$ y $B \subset A$, entonces $B \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) = 0$.

Proposición A.7. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. ***(Monotonía)*** *Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

2. ***(Crecimiento continuo)*** *Si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles, es decir, $F_n \subset F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

3. ***(Decrecimiento continuo)*** *Si $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles, es decir, $G_n \supset G_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\mu(G_1) < +\infty$, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n).$$

4. ***(Subaditividad)*** *Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.*

5. ***(σ-subaditividad)*** *Para toda sucesión de conjuntos medibles $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, se cumple*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Demostración.

1. Como $B = A \cup (B \setminus A)$ y $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, por σ-aditividad se tiene:

   $$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A),$$

   lo que demuestra la propiedad de monotonía.

2. Sea $B_1 := F_1$, y para cada $n \ge 1$, definimos $B_{n+1} := F_{n+1} \setminus F_n$. Entonces:

   $$F_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k.$$

   Dado que los B_k son disjuntos dos a dos y pertenecen a $\mathcal{A}$, se concluye por σ-aditividad que:

   $$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

3. Por aditividad finita, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

   $$\mu(G_1) = \mu(G_1 \setminus G_n) + \mu(G_n).$$

   También se tiene:

   $$\mu(G_1) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) + \mu\left(G_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right),$$

   y como

   $$G_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G_1 \setminus G_n),$$

   se deduce que:

   $$\mu\left(G_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_1 \setminus G_n),$$

   y por tanto:

   $$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\right) = \mu(G_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(G_1 \setminus G_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n).$$

4. Observamos que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, con $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Entonces:

   $$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \le \mu(A) + \mu(B).$$

5. Sea $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, entonces $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n),$$

lo que demuestra la σ-subaditividad.

Una vez introducidos los conceptos fundamentales de teoría de la medida, estamos en condiciones de proceder a la construcción rigurosa de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Observación A.8. En $\mathbb{R}^n$, se entiende por **intervalo** a todo conjunto que puede expresarse como un producto cartesiano finito de intervalos reales, es decir, $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, donde cada $I_k \subset \mathbb{R}$ es un intervalo (abierto, cerrado o semiabierto, acotado o no).

Definición A.9. Sea $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo en el sentido previamente establecido. Se define su **volumen** como

$$\ell(I) := \prod_{k=1}^{n} (\sup I_k - \inf I_k).$$

Por convenio, se toma $\ell(\emptyset) := 0$.
Además, si I es no acotado, se define $\ell(I) := +\infty$.

Observación A.10. En el caso unidimensional $(n = 1)$, la función $\ell(I)$ coincide con la **longitud** del intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Para $n = 2$ o $n = 3$, la cantidad $\ell(I)$ representa el **área** o el **volumen euclídeo**, respectivamente, de un rectángulo o un paralelepípedo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

Observación A.11. Denotamos por $\mathcal{J}$ la familia de intervalos acotados no vacíos de $\mathbb{R}^n$, esto es, los conjuntos del tipo

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n,$$

donde cada $I_k \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado (abierto, cerrado o semiabierto).

Definición A.12. Sea un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$. La **medida exterior de Lebesgue** de E, denotada por $m^*(E)$, se define como

$$m^*(E) := \inf\left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k) : E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k,\ I_k \in \mathcal{J} \right\},$$

donde $\mathcal{J}$ es la familia de intervalos acotados no vacíos de $\mathbb{R}^n$, y $\ell(I_k)$ denota el volumen del intervalo I_k.

Proposición A.13. *La medida exterior de Lebesgue m^*, definida sobre $\mathbb{R}^n$, satisface las siguientes propiedades fundamentales:*

1. *Para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, se verifica*

$$0 \leq m^*(E) \leq +\infty, \qquad m^*(\emptyset) = 0.$$

2. ***(Monotonía)*** *Si $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$, entonces*

$$m^*(E) \leq m^*(F).$$

3. ***(σ-subaditividad)*** *Para toda familia numerable $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, se cumple*

$$m^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(E_k).$$

En particular, la σ-subaditividad implica que para cualesquiera $A, B \subset \mathbb{R}^n$, se tiene

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B).$$

La demostración de esta proposición puede consultarse en [AAMV05, Prop. 10.11].

Teorema A.14. *Sea $I \subset \mathbb{R}^n$ un intervalo n-dimensional. Entonces, la medida exterior de Lebesgue de I coincide con su volumen, es decir,*

$$m^*(I) = \ell(I).$$

Demostración. Para ver que $m^*(I) \leq \ell(I)$, basta observar que el conjunto $\{I, \varnothing, \varnothing, \dots\}$ es un recubrimiento válido de I mediante intervalos acotados, por lo que:

$$m^*(I) \leq \ell(I).$$

Para la desigualdad recíproca, dado $\varepsilon > 0$, consideramos un recubrimiento de I mediante intervalos abiertos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}$ tal que:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k) \leq m^*(I) + \varepsilon.$$

Si I es cerrado, tomamos $J := I$. En caso contrario, por el teorema de Heine-Borel, existe un conjunto cerrado y acotado $J \subset I$ tal que $\ell(J) > \ell(I) - \varepsilon$, y a su vez existe un número finito de intervalos $\{I_k\}_{k=1}^N$ del recubrimiento que cubren J. Por tanto:

$$\ell(I) < \ell(J) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{N} \ell(I_k) + \varepsilon \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k) + \varepsilon \leq m^*(I) + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $\ell(I) \leq m^*(I)$.

□

Teorema A.15. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, la medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones, es decir:*

$$m^*(x \oplus E) = m^*(E),$$

donde $x \oplus E := \{x + y : y \in E\}$.

Demostración. Dado un recubrimiento $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}$ de E mediante intervalos acotados, es claro que $\{x \oplus I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ recubre $x \oplus E$. Como la función ℓ es invariante por traslaciones, se tiene:

$$m^*(x \oplus E) \leq \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(x \oplus I_k) : E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right\} = \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k) : E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right\} = m^*(E).$$

Invirtiendo el razonamiento, cualquier recubrimiento de $x \oplus E$ puede trasladarse por $-x$

para obtener un recubrimiento de E, con lo que se obtiene también la desigualdad opuesta. Por tanto, se concluye que:

$$m^*(x \oplus E) = m^*(E).$$

□

La desigualdad recogida en la tercera propiedad de la medida exterior de Lebesgue, expuesta en la Proposición A.13, se convierte en igualdad únicamente bajo condiciones adicionales. En particular, esto sucede cuando los conjuntos considerados, además de ser disjuntos, verifican una condición de regularidad que se introducirá a continuación.

Definición A.16. Sea m^* la medida exterior de Lebesgue definida sobre los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Se dice que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ cumple la **condición de Carathéodory** (o, de forma equivalente, que es **medible en el sentido de Lebesgue**) si para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se verifica la igualdad:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Denotaremos por $\mathcal{L}$ al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen esta propiedad.

Teorema A.17 (de Carathéodory)**.** *Sea m^* la medida exterior de Lebesgue definida sobre los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Entonces, el conjunto $\mathcal{L}$ formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que verifican la condición de Carathéodory constituye una σ-álgebra. Además, la restricción de m^* a $\mathcal{L}$ define una medida completa sobre dicha σ-álgebra.*

Demostración. La prueba se divide en dos partes. En primer lugar, demostraremos que el conjunto $\mathcal{L}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen la condición de Carathéodory es una σ-álgebra. A continuación, mostraremos que la aplicación $m := m^*|_{\mathcal{L}}$ define una medida sobre $\mathcal{L}$.

- **$\mathcal{L}$ es una σ-álgebra.**

  Comenzamos observando que $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{L}$, ya que para ambos conjuntos la igualdad de Carathéodory se verifica de manera inmediata. Además, si $E \in \mathcal{L}$, entonces también $E^c \in \mathcal{L}$, lo cual se comprueba directamente a partir de la definición. El paso más delicado consiste en verificar que $\mathcal{L}$ es estable bajo uniones numerables de subconjuntos disjuntos.

  1. Sean $E, F \in \mathcal{L}$. Probemos que $E \cap F \in \mathcal{L}$. Tomando un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{R}^n$, como $E \in \mathcal{L}$, se tiene:

     $$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

     Aplicando ahora la condición de Carathéodory a F, pero restringida al conjunto $A \cap E$, obtenemos:

     $$m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F^c).$$

     Sustituyendo, se concluye:

     $$m^*(A) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F^c) + m^*(A \cap E^c).$$

Consideramos ahora el conjunto $A \cap (E \cap F)^c$, cuya intersección con E y con E^c da lugar a:

$$m^*(A \cap (E \cap F)^c) = m^*(A \cap E \cap F^c) + m^*(A \cap E^c),$$

y, por tanto,

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E \cap F)) + m^*(A \cap (E \cap F)^c),$$

lo cual demuestra que $E \cap F \in \mathcal{L}$.

2. Sea $\{E_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{L}$ una familia finita de subconjuntos disjuntos dos a dos. Usando el resultado anterior por inducción finita, se demuestra que:

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^N E_k\right) = \sum_{k=1}^N m^*(A \cap E_k), \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n,$$

y, en consecuencia, $\bigcup_{k=1}^N E_k \in \mathcal{L}$.

3. Sea ahora $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ una familia infinita de subconjuntos disjuntos dos a dos. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto:

$$F_n := \bigcup_{k=1}^n E_k.$$

Por los casos anteriores, $F_n \in \mathcal{L}$ y se cumple:

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) = \sum_{k=1}^n m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap F_n^c).$$

Como $F_n \subset E := \bigcup_{k=1}^\infty E_k$, se tiene $F_n^c \supset E^c$, y por la monoticidad de m^*:

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^n m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E^c), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$, se obtiene:

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^\infty m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E^c).$$

Por otro lado, la subaditividad numerable de m^* garantiza que:

$$m^*(A \cap E) \leq \sum_{k=1}^\infty m^*(A \cap E_k),$$

y sumando ambos lados:

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Finalmente, como ya se tenía la desigualdad inversa, se concluye que:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

es decir, $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{L}$.

- **La aplicación $m := m^*|_{\mathcal{L}}$ es una medida.**

  Consideramos una familia $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ de subconjuntos disjuntos dos a dos y definimos $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Tomando $A = E$ en la expresión anterior se deduce:

  $$m^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k),$$

  mientras que la subaditividad de m^* garantiza:

  $$m^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k),$$

  por lo que se obtiene:

  $$m^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k).$$

  Esto demuestra que m es σ-aditiva sobre $\mathcal{L}$, y por tanto una medida.

$\square$

Observación A.18. A partir de ahora, se adoptarán las siguientes convenciones:

- Denotaremos por $\mathcal{L}$ a la σ-álgebra de Lebesgue, es decir, al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen la condición de Carathéodory.
- Todo conjunto $E \in \mathcal{L}$ se denominará *medible Lebesgue*.
- Para todo conjunto $E \in \mathcal{L}$, su *medida de Lebesgue* se define como el valor de la medida exterior restringida:

  $$\mu(E) := m^*(E).$$

Veamos algunas propiedades topológicas fundamentales que caracterizan el comportamiento de la medida de Lebesgue en relación con la estructura métrica del espacio euclídeo. Estas propiedades reflejan la compatibilidad entre la medida μ y la geometría de $\mathbb{R}^n$.

Proposición A.19 (Propiedades fundamentales de la medida de Lebesgue)**.** *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(P1) Si $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo n-dimensional, entonces I es medible Lebesgue y $\mu(I) = \ell(I)$.

(P2) Si $\tilde{\mu}$ es una medida definida sobre $\mathcal{L}$ tal que $\tilde{\mu}(I) = \ell(I)$ para todo intervalo n-dimensional $I \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\tilde{\mu} = \mu$. Es decir, la medida de Lebesgue es la única medida sobre $\mathcal{L}$ que coincide con la medida clásica en los intervalos.

(P3) Para todo conjunto $E \in \mathcal{L}$ y todo vector $x \in \mathbb{R}^n$, el conjunto trasladado $x \oplus E \in \mathcal{L}$, y se cumple:

$$\mu(x \oplus E) = \mu(E).$$

Las demostraciones completas pueden consultarse en la referencia [Bar95].

Obsérvese que la condición de Carathéodory, expuesta en la Definición A.16, si bien es esencial desde un punto de vista teórico, no resulta práctica para verificar directamente si un conjunto pertenece a $\mathcal{L}$, ya que exige comprobar una igualdad para todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Afortunadamente, existen clases amplias de conjuntos cuya medibilidad puede establecerse de forma más accesible, tal y como se describe en la referencia [Bar95]. A continuación, recopilamos algunos de los casos más relevantes:

1. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto o cerrado, entonces $E \in \mathcal{L}$.

2. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto tipo G_δ (es decir, intersección numerable de abiertos), entonces $E \in \mathcal{L}$.

3. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto tipo F_σ (esto es, unión numerable de conjuntos cerrados), entonces $E \in \mathcal{L}$.

4. Todo conjunto boreliano, es decir, elemento de la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, es Lebesgue-medible. Recordemos que $\mathcal{B}$ se define como la σ-álgebra generada por la colección de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, y cumple $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$.

   Esta inclusión es estricta: existen conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue que no son borelianos, como se discute en el Capítulo 14 de [Bar95].

5. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ satisface $m^*(E) = 0$, entonces E verifica la condición de Carathéodory y, por tanto, $E \in \mathcal{L}$ con $\mu(E) = 0$. A tales conjuntos se les denomina *conjuntos nulos*. En particular, todo conjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto nulo.

Observación A.20. Los conjuntos tipo G_δ no son necesariamente abiertos, ni los F_σ necesariamente cerrados. Su definición es puramente topológica y basada en límites de sucesiones de conjuntos.

Bibliografía

[AAMV05] M. Acosta, C. Aparicio, A. Moreno, y A. Villena. Apuntes de Análisis Matemático I. https://digibug.ugr.es/handle/10481/75754, 2005. Materiales docentes del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada.

[And84] Kirsti Andersen. Las Técnicas del Cálculo, 1630–1660. En *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630–1910. Una Introducción Histórica*. Alianza Editorial, S.A., 1984.

[Bar95] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley and Sons, Inc., 1995.

[Bar96] Robert G. Bartle. Return to the Riemann Integral. *The American Mathematical Monthly*, 103(8):625–632, 1996.

[Bos84] H. J. M. Bos. Newton, Leibniz y la Tradición Leibniziana. En *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630–1910. Una Introducción Histórica*. Alianza Editorial, S.A., 1984.

[Bur98] Frank Burk. *Lebesgue Measure and Integration: An Introduction*. John Wiley and Sons, Inc., 1998.

[Cha95] S. B. Chae. *Lebesgue Integration*. Springer, 1995.

[Gon21] Francisco Javier Pérez González. Evolución de la idea de integral, 2021. Materiales docentes del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada.

[Kle01] Israel Kleiner. History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48:137–174, 2001.

[Urb] P. M. González Urbaneja. Las Técnicas del Cálculo: Fermat, Wallis y Roberval. https://fundacionorotava.org/media/web/publication_files/publication23__a2_c016w.pdf.

[Vil25] Antonio Cañada Villar. 2025. Materiales docentes del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada.

[WZ15] R. L. Wheeden y A. Zygmund. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*. CRC Press, Taylor and Francis Group, LLC, 2015.