Aula Prática 2

ASA 2022/2023

Somatórios

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$
- $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, se $|x| < 1$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = log\,(n+1)$
- $\sum_{k=0}^{\infty} k\, x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$, se $|x| < 1$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1, b > 1$ constantes e $f(n)$ uma função.
Para $T(n)$ definido por $T(n) = aT(n/b) + f(n)$:

- Caso 1: $T(n) = \Theta(n^{log_b\, a})$, se $f(n) = O(n^{log_b\, a - \epsilon})$ para $\epsilon > 0$
- Caso 2: $T(n) = \Theta(n^{log_b\, a} log\, n)$, se $f(n) = \Theta(n^{log_b\, a})$
- Caso 3: $T(n) = \Theta(f(n))$, se $f(n) = \Omega(n^{log_b\, a + \epsilon})$ para $\epsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para $c < 1$ e n suficientemente grande

Teorema Mestre (simplificado)

Sejam $a \geq 1, b > 1, d \geq 0$ constantes,
seja $T(n)$ definido por $T(n) = aT(n/b) + O(n^d)$.

$$T(n) = \begin{cases} O(n^{log_b\, a}) & if\ d < log_b\, a \\ O(n^d log\, n) & if\ d = log_b\, a \\ O(n^d) & if\ d > log_b\, a \end{cases}$$

Q1 (T1 19/20): Considere a função recursiva:

```
int f(int n) {
  int i = 0, j = 0;

  for (i = 0; i < n; i++) { // Loop 1
    while (j - i < 2) {
      j++;
    }
  }

  if (n > 0)
    i = 2*f(n/2) + f(n/2) + f(n/2)

  while ( j > 0) { // Loop 2
    j = j / 2;
  }

  return j;
}
```

- Determine um upper bound medido em função do parâmetro n para o número de iterações dos loops **1** e **2** da função f.
- Determine o menor majorante assimptótico da função f em termos do número n utilizando os métodos que conhece.

Q2 (R1 19/20): Considere a função recursiva:

```
int f(int n) {
   int x = 0;

   for (int i = 0; i < n; i++) { // Loop 1
      for (int j=0; j < i; j++) { // Loop 2
         x++;
      }
   }

   if ((n > 0) && ((n%2) == 1)) {
      x = x + f(n - 1);
   }
   else if ((n > 0) && ((n%2) == 0)) {
      x = 2*f(n/2);
   }

   return x;
}
```

1. Determine um upper bound medido em função do parâmetro n para o número de iterações dos loops **1** e **2** por cada chamada à função f.
2. Determine o menor majorante assimptótico da função f em termos do número n utilizando os métodos que conhece.

Q3 (EE 19/20): Considere a seguinte implementação naif de uma fila de prioridade mínima baseada em listas simplesmente ligadas. Uma fila de prioridade é guardada em memória como uma lista de nós, cada qual associado a uma prioridade `pri` e a um identificador `id`. A implementação é composta pelas funções:

- `Insert`(`Lst lst`, `Lst node`) que insere o nó `node` na lista `lst`;
- `Remove`(`Lst lst`, `int i`) que remove o nó com identificador `i` da lista `lst`;
- `ExtractQueue`(`Queue q`) que remove o nó com prioridade mínima da fila de prioridade `q`; e
- `DecreaseKey`(`Queue q`, `Lst node`, `int pri`) que diminui a prioridade do nó `node` para `pri` na fila de prioridade q.

```
typedef struct Node {
   int id;
   int pri;
   struct Node* next;
} *Lst;

typedef struct QueueNode {
   Lst hd;
} *Queue;

int ExtractQueue(Queue q) {
  if (q->hd == NULL) return -1;

  Lst hd = q->hd;
  q->hd = hd->next;
  return hd->id;
}

Lst Remove(Lst lst, int id) {
   if (lst == NULL) return lst;

   if (lst->id == id) return lst->next;

   Lst prev = lst;
   Lst cur = lst->next;
   while (cur != NULL) {
      if (cur->id == id) {
         prev->next = cur->next;
         break;
      }
      prev = cur;
      cur = cur->next;
   }
   return lst;
}

Lst Insert (Lst lst, Lst node) {
```

```
  if (lst == NULL) return node;
  if (node->pri <= lst->pri) {
    node->next = lst;
    return node;
  } else {
          Lst ret = Insert(lst->next, node);
          lst->next = ret;
          return lst;
  }
}

void DecreaseKey (Queue q, Lst node, int pri) {
  Lst lst = Remove(q->hd, node->id);
  node->pri = pri;
  lst = Insert(lst, node);
  q->hd = lst;
}
```

Determine o menor majorante assimptótico para funções `Insert`, `Remove`, `ExtractQueue` e `DecreaseKey` em função do número de elementos, n, contidos na fila de prioridade ou lista que respectivamente recebem como argumento. Deve indicar para cada uma das funções a equação do tempo que expressa o número instruções executadas em função do tamanho do input (i.e. $T(n) = ...$).

Q4 (T1 20/21): Considere a função recursiva:

```
int f(int n) {
  int sum = 0;

  for (int j = n; j>0; j/=2) {
    for (int k=0; k<j; k+=1) { // Loop 1
      sum += 1;
    }
  }

  for (int i=1; i<n; i*=2) {
    for (int k=n; k>0; k/=2) { // Loop 2
      sum += 1;
    }
  }

  return sum+4*f(n/2);
}
```

1. Determine o menor majorante assimptótico medido em função do parâmetro n para o número total de iterações dos loops **1** e **2** por cada chamada à função f.

2. Determine o menor majorante assimptótico da função f, em função do parâmetro n, utilizando os métodos que conhece.

Q5 (R1 20/21): Considere a função recursiva:

```
int f(int n) {

  int i = 0, j=0, z=0;
  while (j + z < n) {  // Loop 1
    z += 1;
    j += i;
    i += 2;
  }

  int r = 0;
  if (n > 0) r = 3*f(n/2)

  j = 1; z = 0;
  while (j<n) {  // Loop 2
    j *= 2;
    z += 1;
  }

  return r+i+z;
}
```

1. Determine o menor majorante assimptótico medido em função do parâmetro n para o número total de iterações dos loops **1** e **2** por cada chamada à função f.
2. Determine o menor majorante assimptótico da função f, em função do parâmetro n, utilizando os métodos que conhece.

Q6 (EE1 20/21): Considere a função recursiva:

```
int f(int n) {
  int i = 0, j = n;

  if (n <= 1) return 1;

  while(j > 1) {
    i++;
    j = j / 2;
  }

  for (int k = 0; k < 8; k++)
    j += f(n/2);

  while (i > 0) {
    j = j + 2;
    i--;
  }
  return j;
}
```

1. Determine o menor majorante assimptótico medido em função do parâmetro n para o número total de iterações dos loops **1** e **2** por cada chamada à função f.

2. Determine o menor majorante assimptótico da função f, em função do parâmetro n, utilizando os métodos que conhece.