$$x' = x\cos\phi + y\,\text{sen}\,\phi$$
$$y' = -x\,\text{sen}\,\phi + y\cos\phi$$
$$z' = z$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\,\phi & 0 \\ -\text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} = A_j^{i'}$$

$$x = x'\cos\phi - y'\,\text{sen}\,\phi$$
$$y = x'\,\text{sen}\,\phi + y'\cos\phi$$
$$z = z'$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\,\phi & 0 \\ \text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} = A_{i'}^{j}$$

ahora se hace el producto de ambas matrices

$$A_j^{i'} A_{i'}^{k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{i'}} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\,\phi & 0 \\ -\text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\,\phi & 0 \\ \text{sen}\,\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\phi + \text{sen}^2\phi & -\text{sen}\,\phi\cos\phi + \cos\phi\,\text{sen}\,\phi & 0 \\ -\text{sen}\,\phi\cos\phi + \cos\phi\,\text{sen}\,\phi & \text{sen}^2\phi + \cos^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_j^{k}$$

—— // —— // —— // —— // —— // —— // ——

• Se define las componentes como cosenos directores (respecto de los ejes originales) donde se toma el caso especial $i'=1$ y $K=1$

$$A^{1}_{1'} = \cos(\alpha), \quad A^{1}_{2'} = \cos(\beta), \quad A^{1}_{3'} = \cos(\gamma)$$

ahora al sustituir en $A^{i'}_{j} A^{k}_{i'} = \delta^{k}_{j}$ donde como $K=j=1$ la delta de Kronecker es de 1.

• Se desarrolla las siguientes sumas

$$A^{i'}_{j} A^{k}_{i'} = 1$$

$$A^{i'}_{j} A^{k}_{i'} = A^{1'}_{1} A^{1}_{1'} + A^{2'}_{1} A^{1}_{2'} + A^{3'}_{1} A^{1}_{3'} = 1$$

• Como $A^{1}_{1'} = A^{1'}_{1} = \cos(\alpha)$, $A^{1}_{2'} = A^{2'}_{1} = \cos(\beta)$, $A^{1}_{3'} = A^{3'}_{1} = \cos(\gamma)$ se obtiene la relación.

$$\cos(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\beta) + \cos(\gamma)\cos(\gamma) = 1$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

· Se define las componentes como cosenos directores i' respecto de los ejes originales donde se toma el caso especial $i=1$ y $k=1$

$$A^{1}_{1'} = \cos(\alpha), \qquad A^{1}_{2'} = \cos(\beta), \qquad A^{1}_{3'} = \cos(\gamma)$$

Ahora al sustituir en $A^{i'}_{j} A^{k}_{i'} = \delta^{k}_{j}$ donde como $k=j=1$ la delta de Kronecker nos da 1.

· Se desarrolla las siguientes sumas

$$A^{i'}_{j} A^{k}_{i'} = 1$$

$$A^{i'}_{j} A^{k}_{i'} = A^{1'}_{1} A^{1}_{1'} + A^{2'}_{1} A^{1}_{2'} + A^{3'}_{1} A^{1}_{3'} = 1$$

· Como $A^{1}_{1'} = A^{1'}_{1} = \cos(\alpha)$, $A^{1}_{2'} = A^{2'}_{1} = \cos(\beta)$, $A^{1}_{3'} = A^{3'}_{1} = \cos(\gamma)$ se obtiene la relación.

$$\cos(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\beta) + \cos(\gamma)\cos(\gamma) = 1$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Powered by CamScanner

$$\nabla(\phi\psi) = \frac{\partial \phi\psi}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \phi\psi}{x^1} + \frac{\partial \phi\psi}{x^2} + \frac{\partial \phi\psi}{x^3}$$

$$= \left(\phi\frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \phi\frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \phi\frac{\partial \psi}{\partial x^3}\right) + \left(\psi\frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \psi\frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \psi\frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x^3}\right) + \psi\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right)$$

$$= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

• $\nabla\cdot(\nabla \times a) = \nabla\cdot(\varepsilon^{ijk}\partial_j a_k)$

$$= \partial_m\cdot(\varepsilon^{ijk}\partial_j a_k)$$

$$= \varepsilon^{ijk}\partial_m\partial_j a_k$$

·donde $\partial_m\partial_j$ es simetrico ya que $\partial_m\partial_j = \partial_j\partial_m$ pero ε^{ijk} es antisimetrico ya que $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$ y al tener un producto de algo simetrico por algo antisimetrico el resultado es cero

• $\nabla \times (\nabla\cdot a)$

en este caso se puede ver que [illegible]

$$= \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi$$

• $\nabla \cdot (\nabla \times a) = \nabla \cdot (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k)$

$$= \partial_m \cdot (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k)$$

$$= \varepsilon^{ijk} \partial_m \partial_j a_k$$

· donde $\partial_m \partial_j$ es simetrico ya que $\partial_m \partial_j = \partial_j \partial_m$ pero ε^{ijk} es antisimetrico ya que $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$ y al tener un producto de algo simetrico por algo antisimetrico el resultado es cero

• $\nabla \times (\nabla \cdot a)$

en este caso se puede ver que la operacion no está definida por el hecho de que al calcular la divergencia obtenemos un escalar con el cual luego queremos hacer el producto vectorial para el cual es necesario tener dos vectores y al tener un escalar en vez de un vector no se puede efectuar el producto vectorial

---

$$\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla \times (\varepsilon_{ijk} \partial^j a^k)$$

$$= \varepsilon^{mvi} \partial_v (\varepsilon_{ijk} \partial^j a^k)$$

$$= (\delta^m_j \delta^v_k - \delta^m_k \delta^v_j) \partial_v (\partial^j a^k)$$

$$= \partial_k (\partial^i a^k) - \partial_j (\partial^j a^i)$$

$$= \partial_k a^k \partial^i - \partial_j \partial^j a^i$$

$$= \nabla (\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$$

$$\cos(3\alpha) = \left[\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)\right]^3$$

$$= \cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha)\, i\,\mathrm{sen}(\alpha) + 3 i^2 \mathrm{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha) + i^3 \mathrm{sen}^3(\alpha)$$

$$= \cos^3(\alpha) + 3\cos^2(\alpha)\, i\,\mathrm{sen}(\alpha) - 3\,\mathrm{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha) - i\,\mathrm{sen}^3(\alpha)$$

igualamos la parte real y la imaginaria

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\,\mathrm{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\mathrm{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha) - \mathrm{sen}^3(\alpha)$$

// // // // //

- $\sqrt{2i}$

$z^2 = 2i$

$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos(\alpha)$

$\operatorname{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha)$

• $\sqrt{2i}$

$z^2 = 2i$

Para θ

Como $x=0$ y $y>0$

$\theta = \pi/2$

$|z| = 2$

$z = 2^{1/2}\, e^{i\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2}\right)}$

Para $k=0$ y $k=1$

$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i5\pi/4}$

• $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

$z^2 = 1 - \sqrt{3}i$

Para θ

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$z = \sqrt{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi/3 + 2\pi k}{2}\right)}$

Para $k=0$ y $k=1$

$z_0 = \sqrt{2}\cdot e^{i\pi/6}$

$z_1 = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}$

• $(-1)^{1/3}$

$z^3 = -1$

Para θ

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) = 0$

$|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$z = e^{i\,2\pi k}$

Para $k=0$, $k=1$ y $k=2$

$z_0 = e^{i0} = 1$

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

• $8^{1/6}$

$z^6 = 8$

Para θ

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{8}\right) = 0$

$|z| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$

$z = 8^{1/6} e^{i\left(\frac{2\pi k}{6}\right)}$

Para $k=0$ hasta $k=5$

$z_0 = 8^{1/6}$

$z_1 = 8^{1/6} e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = 8^{1/6} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_3 = 8^{1/6} e^{i\pi}$

$z_4 = 8^{1/6} e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_5 = 8^{1/6} e^{i\frac{5\pi}{3}}$

• $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$

$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$

Para θ

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\pi}{3}$

$|z| = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$

$z = 16^{1/4} e^{i\left(\frac{\pi/3 + 2\pi k}{4}\right)}$

Para $k=0$ hasta $k=3$

$z_0 = 16^{1/4} e^{i\frac{\pi}{12}}$

$z_1 = 16^{1/4}\cdot e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$z_2 = 16^{1/4}\cdot e^{i\frac{13\pi}{12}}$

$z_3 = 16^{1/4} e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}$

$\bullet\ \mathrm{Log}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i$

$= \mathrm{Log}\left[e \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} \right]$

$= \ln(e) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$

Para el valor principal

$= \ln(e) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi(0)\right)$

$= \ln(e) - \frac{\pi}{2} i = 1 - \frac{\pi}{2} i$

$\bullet\ \mathrm{Log}(e) = 1 + i2\pi k$

$= \mathrm{Log}\left[e \cdot e^{i(0 + 2\pi k)} \right]$

$= \ln(e) + i(0 + 2\pi k)$

$= 1 + i2\pi k$

$\bullet\ \mathrm{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} i$

$= \mathrm{Log}\left[\sqrt{2} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)} \right]$

$= \ln(\sqrt{2}) + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$

Para valor principal

$= \ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} i$

$= \ln(2^{1/2}) - \frac{\pi}{4} i = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} i$

$\bullet\ \mathrm{Log}(i) = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$

$= \mathrm{Log}\left[1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} \right]$

$= \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$

$= 0 + \pi i\left(\frac{1}{2} + 2k\right)$

$= \pi i\left(\frac{1}{2} + 2k\right)$