

Li Chao Tree

Problema. Consideremos un conjunto $\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_{k=1}^n$ de n funciones tales que f_i y f_j se intersectan a lo más una vez, para cada $i \neq j$. Estas funciones las evaluaremos en enteros en un rango $[L, R]$. Dados $x_1, x_2, \dots, x_m \in A \subseteq [L, R]$ enteros, queremos saber cuál es el mínimo de $\{f_k(x_i)\}_{k=1}^n$ para cada x_i .

Solución: Consideremos un árbol en el que cada nodo tendrá almacenada alguna función f_k y cada nodo representará algún subintervalo del $[L, R]$ igual que en la construcción del Segment Tree. Daremos un algoritmo para construir dicho árbol de manera en que se cumpla la siguiente propiedad: en el camino desde la raíz hasta el nodo hoja que representa a cierto $\{x\}$ se encuentra la función f_k tal que $f_k(x)$ es mínimo. A este árbol se le llama **Li Chao Tree**. La idea es ir insertando las funciones una por una en el Li Chao Tree de manera que cada vez que insertamos una función mantengamos la propiedad deseada.

Inicialmente todos los nodos del árbol contendrán la primera función. Supongamos ahora que estamos en un nodo que cubre al segmento $[a, b]$ y que contiene a la función g , y en ese momento queremos añadir la función f . Sea $m = \lfloor (a + b)/2 \rfloor$. Como las funciones se cortan a lo más una vez, entonces en $[a, m]$ o en $[m + 1, b]$ no hay intersección. En el nodo actual guardaremos la función que está por debajo en el segmento en el que no se cortan, y la función que está por arriba la insertamos recursivamente en el nodo que corresponde al otro segmento.

Notemos que la función que guardaremos en el nodo actual es siempre la que es menor en el punto m . También, evaluando ambas funciones en a y m podemos ver si las funciones se intersectan en $[l, m]$ o no en tiempo constante. Al guardar la función que es menor en el segmento en el que no hay intersección mantenemos la propiedad del Li Chao Tree en ese segmento, y mantendremos la propiedad en el otro segmento al insertar la otra función recursivamente.

□