Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Santa Fe

Ingeniería en Sistemas de Información

Matemática Superior

Trabajo Práctico 1

Alumnos:

Mazzi, Maria Clara mazzimclara@gmail.com

Storani, Miguel Ignacio miguelignaciostorani@gmail.com

26 de mayo de 2019

Resumen

kjdfhgjhsdfjkvbnsjkfdvbkjfdbv

Índice

1. Expresar la nueva transformada en función de transformadas conocidas 1

2. Condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de la tranformada 2

3. Antitransformada 2

4. Propiedades de la nueva transformada 4
4.1. Linealidad 4
4.2. Desplazamineto temporal 5
4.3. Convolución 5
4.4. Derivada temporal 6

5. Tabla de transformada de funciones elementales 6

6. Solución de ecuaciones diferenciales 6
6.1. Condiciones iniciales nulas 7
6.1.1. Solución a los sistemas para $\boldsymbol{f_{(x)} = \mathrm{sen}(x)}$ 8
6.1.2. Solución a los sistemas para $\boldsymbol{f_{(x)} = \cos(x)}$ 8
6.1.3. Solución a los sistemas para $\boldsymbol{f_{(x)} = \mathrm{sen}(x+3)}$ 9
6.2. Condiciones iniciales no nulas 10

1. Expresar la nueva transformada en función de transformadas conocidas

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}e^{-z|t|}dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}\text{sign}(t)e^{-z|t|}dt\end{pmatrix} \tag{1}$$

Para definir a nuestra transformada en función de tranformadas conocidas operamos separadamente con cada una de las componentes que la componen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}e^{-z|t|}dt = \int_{0}^{\infty} f_{(t)}e^{-zt}dt + \int_{-\infty}^{0} f_{(t)}e^{-z(-t)}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}e^{-z|t|}dt = \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(s)} + \int_{-\infty}^{0} f_{(t)}e^{-z(-t)}dt \tag{2}$$

Resolviendo separadamente el segundo término de la expresión, aplicando un cambio de variable tal que $t = -v$ tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-z(-t)}dt \Rightarrow -\int_{\infty}^{0} f(-v)e^{-z(v)}dv = \int_{0}^{\infty} f(-v)e^{-z(v)}dv$$

$$\int_{0}^{\infty} f(-v)e^{-z(v)}dv = \mathcal{L}\left\{f(-v)u(v)\right\}_{(z)}$$

Por propiedad de simetría de la transformada de Laplace, se puede expresar la siguiente igualdad:

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-z(-t)}dt = \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-z)} \tag{3}$$

Lo cual representa un cambio de la variable compleja, por la misma variable compleja aplicando un factor de -1. Reemplazando 3 en 2 obtenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}e^{-z|t|}dt = \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(z)} + \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-z)} \tag{4}$$

Pasamos ahora a operar con la segunda componente de nuestra transformada.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}\text{sign}(t)e^{-z|t|}dt$$

Podemos definir a la función $\text{sign}(t)$ en función del escalón unitario, quedando $\text{sign}(t) = u(t) - u(-t)$, por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}\text{sign}(t)e^{-z|t|}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}(u(t) - u(-t))e^{-z|t|}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}(u(t)-u(-t))e^{-z|t|}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)e^{-z|t|}dt - \int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}u(-t)e^{-z|t|}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}(u(t)-u(-t))e^{-z|t|}dt = \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(s)} - \int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}u(-t)e^{-z|t|}dt \tag{5}$$

El segundo término se puede expresar como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}u(-t)e^{-z|t|}dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-z(-t)}dt \Rightarrow \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-z)} \tag{6}$$

Expresión para la que ya hemos hayado una expresión en función de transformadas conocidas, por lo que la segunda componente de nuestra tranformada quedaría de reemplazar 6 en 5:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{(t)}\mathrm{sign}(t)e^{-z|t|}dt = \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(z)} - \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-z)} \tag{7}$$

Luego de haber calculado ambas componentes, reemplazamos 4 y 7 en 1 nos queda que nuestra transformada se puede expresar como:

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(z)} + \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-z)} \\ \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(z)} - \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-z)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u\left\{f(t)+f(-t)\right\} \\ \mathcal{L}_u\left\{f(t)-f(-t)\right\} \end{pmatrix} \tag{8}$$

2. Condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de la tranformada

Para asegurar la existencia de la transformada se debe cumplir que exista la transformada de Laplace para la función estudiada. Existe la transformada $\overline{T}_{ms}(f_{(t)})$ siempre que $f_{(t)}$ sea una función que cumple que:

- Es seccionalmente continua sobre el intervalo $t \leq A$ para cualquier $A > 0$, esto es, posee a lo más un número finito de discontinuidades de salto en dicho intervalo.
- Es de orden exponencial para $t \geq M$, es decir:

$$|f(t)| \leq Ke^{at} \text{ para } t \geq M \text{ donde } K,\ a \text{ y} M \text{ son constantes}$$

3. Antitransformada

Para reconstruir la función original a partir de la transformada, tomamos las componentes en x e y de la transformada por separado, siendo:

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)}) = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)}) = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u\left\{f(t)+f(-t)\right\} \\ \mathcal{L}_u\left\{f(t)-f(-t)\right\} \end{pmatrix}$$

Para reconstruir $f_{(t)}$ se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} T_x = \frac{1}{2}\mathcal{L}_u\left\{f(t)+f(-t)\right\} \\ T_y = \frac{1}{2}\mathcal{L}_u\left\{f(t)-f(-t)\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_u^{-1}\left\{2T_x\right\} = (f(t)+f(-t))u(t) \\ \mathcal{L}_u^{-1}\left\{2T_y\right\} = (f(t)-f(-t))u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)}u(t) = f(t)u(t)+f(-t)u(t) \\ 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}u(t) = f(t)u(t)-f(-t)u(t) \end{cases}$$

En este paso debemos tomar dos caminos, uno para recomponer la función en el inervalo donde $t \geq 0$, y otro para cuando $t < 0$. Empezamos reconstruyendo el camino donde $t \geq 0$:

Despejando $f_{(-t)}$ de ambas ecuaciones, para después igualarlas tenemos que:

$$\begin{cases} f(-t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)}u(t) - f(t)u(t) \\ f(-t)u(t) = -\left[2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}u(t) - f(t)u(t)\right] \end{cases}$$

Igualando las ecuaciones nos queda:

$$-\left[2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}u(t) - f(t)u(t)\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)}u(t) - f(t)u(t)$$

$$-2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}u(t) + f(t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)}u(t) - f(t)u(t)$$

$$2f(t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)}u(t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}u(t)$$

$$f(t)u(t) = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)} + \mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}\right]u(t) \tag{9}$$

Similarmete acomo resolvimos la parte donde $t \geq 0$, resolvemos ahora para cuando $t < 0$:

$$\begin{cases} f(t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)}u(t) - f(-t)u(t) \\ f(t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}u(t) + f(-t)u(t) \end{cases}$$

$$2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}u(t) + f(-t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)}u(t) - f(-t)u(t)$$

$$2f(-t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)}u(t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}u(t)$$

$$f(-t)u(t) = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)} - \mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}\right]u(t)$$

Hacemos un cambio de variable para poder expresar a la función como $f_{(t)}$, lo cual nos quedaría como:

$$f(t)u(-t) = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(-t)} - \mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(-t)}\right]u(-t) \tag{10}$$

Tomando ahora las expresiones 9 y 10, juntas nos definen la función original de la siguiente manera:

$$f(t) = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(t)} + \mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(t)}\right]u(t) + \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{T_x\right\}_{(-t)} - \mathcal{L}^{-1}\left\{T_y\right\}_{(-t)}\right]u(-t) \tag{11}$$

4. Propiedades de la nueva transformada

Se demuestran algunas propiedades de la nueva transformada, tomando como base las propiedades de la transformada de Laplace:

4.1. Linealidad

$$\overline{T}_{ms}(af_{(t)} + bg_{(t)}) = a\overline{T}_{ms}(f_{(t)}) + b\overline{T}_{ms}(g_{(t)}) \tag{12}$$

Demostración:

$$\overline{T}_{ms}(af_{(t)} + bg_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{L}\left\{[af(t)+bg(t)]u(t)\right\}_{(s)} + \mathcal{L}\left\{[af(t)+bg(t)]u(-t)\right\}_{(-s)} \\ \mathcal{L}\left\{[af(t)+bg(t)]u(t)\right\}_{(s)} - \mathcal{L}\left\{[af(t)+bg(t)]u(-t)\right\}_{(-s)}\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(af_{(t)} + bg_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{L}\left\{[af(t)u(t)]+[bg(t)u(t)]\right\}_{(s)} + \mathcal{L}\left\{[af(t)u(-t)]+[bg(t)u(-t)]\right\}_{(-s)} \\ \mathcal{L}\left\{[af(t)u(t)]+[bg(t)u(t)]\right\}_{(s)} - \mathcal{L}\left\{[af(t)u(-t)]+[bg(t)u(-t)]\right\}_{(-s)}\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(af_{(t)} + bg_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{L}\left\{[af(t)u(t)]\right\} + \mathcal{L}\left\{[bg(t)u(t)]\right\}_{(s)} + \mathcal{L}\left\{[af(t)u(-t)]\right\} + \mathcal{L}\left\{[bg(t)u(-t)]\right\}_{(-s)} \\ \mathcal{L}\left\{[af(t)u(t)]\right\} + \mathcal{L}\left\{[bg(t)u(t)]\right\}_{(s)} - \mathcal{L}\left\{[af(t)u(-t)]\right\} - \mathcal{L}\left\{[bg(t)u(-t)]\right\}_{(-s)}\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(af_{(t)} + bg_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a\mathcal{L}\left\{[f(t)u(t)]\right\} + a\mathcal{L}\left\{[f(t)u(-t)]\right\} + b\mathcal{L}\left\{[g(t)u(t)]\right\}_{(s)} + b\mathcal{L}\left\{[g(t)u(-t)]\right\}_{(-s)} \\ a\mathcal{L}\left\{[f(t)u(t)]\right\} - a\mathcal{L}\left\{[af(t)u(-t)]\right\} + b\mathcal{L}\left\{[g(t)u(t)]\right\}_{(s)} - b\mathcal{L}\left\{[g(t)u(-t)]\right\}_{(-s)}\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(af_{(t)} + bg_{(t)}) = a\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{L}\left\{[f(t)u(t)]\right\} + \mathcal{L}\left\{[f(t)u(-t)]\right\} \\ \mathcal{L}\left\{[f(t)u(t)]\right\} - \mathcal{L}\left\{[af(t)u(-t)]\right\}\end{pmatrix} + b\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{L}\left\{[g(t)u(t)]\right\}_{(s)} + \mathcal{L}\left\{[g(t)u(-t)]\right\}_{(-s)} \\ \mathcal{L}\left\{[g(t)u(t)]\right\}_{(s)} - \mathcal{L}\left\{[g(t)u(-t)]\right\}_{(-s)}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \overline{T}_{ms}(af_{(t)} + bg_{(t)}) = a\overline{T}_{ms}(f_{(t)}) + b\overline{T}_{ms}(g_{(t)})$$

4.2. Desplazamineto temporal

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t-a)}) = \overline{T}_{ms}(f_{(t)})e^{-at} \tag{13}$$

Demostración:

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t-a)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\}_{(s)} + \mathcal{L}\left\{f(t-a)u(-(t-a))\right\}_{(-s)} \\ \mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\}_{(s)} - \mathcal{L}\left\{f(t-a)u(-(t-a))\right\}_{(-s)} \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t-a)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(s)} e^{-at} + \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-s)} e^{-at} \\ \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(s)} e^{-at} - \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-s)} e^{-at} \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t-a)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left[\mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(s)} + \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-s)}\right] e^{-at} \\ \left[\mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(s)} - \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-s)}\right] e^{-at} \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t-a)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(s)} + \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-s)} \\ \mathcal{L}\left\{f(t)u(t)\right\}_{(s)} - \mathcal{L}\left\{f(t)u(-t)\right\}_{(-s)} \end{pmatrix} e^{-at}$$

$$\therefore \overline{T}_{ms}(f_{(t-a)}) = \overline{T}_{ms}(f_{(t)})e^{-at}$$

4.3. Convolución

Esta propiedad sólo de mantiene para funciones f y g tal que $f(t) = 0\ \forall t < 0$ y $g(t) = 0\ \forall t < 0$. Debido a estas restricciones podemos expresar nuestra tranformada en función de la tranformada unilteral de Laplace.

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} * g_{(t)}) + (f_{(-t)} * g_{(-t)})\right\} \\ \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} * g_{(t)}) - (f_{(-t)} * g_{(-t)})\right\} \end{pmatrix}$$

Sea $f(t)$ par, dado que $f(t) = f(-t)$, se puede escribir la transformada de la siguiente manera:

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} * g_{(t)}) + (f_{(t)} * g_{(-t)})\right\} \\ \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} * g_{(t)}) - (f_{(t)} * g_{(-t)})\right\} \end{pmatrix}$$

Por propiedad de la convolución se sabe que $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$, por lo que se puede reducir la expresión de la transformada aplicando esta propiedad.

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} * (g_{(t)} + g_{(-t)})\right\} \\ \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} * (g_{(t)} - g_{(-t)})\right\} \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)}\right\} \mathcal{L}_u\left\{g_{(t)} + g_{(-t)}\right\} \\ \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)}\right\} \mathcal{L}_u\left\{g_{(t)} - g_{(-t)}\right\} \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u\left\{g_{(t)} + g_{(-t)}\right\} \\ \mathcal{L}_u\left\{g_{(t)} - g_{(-t)}\right\} \end{pmatrix} \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)}\right\} = \overline{T}_{ms}(g_{(t)})\mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)}\right\}$$

$$\therefore \overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) = \overline{T}_{ms}(g_{(t)})\mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)}\right\}$$

4.4. Derivada temporal

$$\overline{T}_{ms}\left(\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n}\right) = s^n\,\overline{T}_{ms}(f_{(t)}) - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^k \begin{pmatrix} (f_{(t)} + f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)} \\ \\ (f_{(t)} - f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)} \end{pmatrix} \tag{14}$$

En el caso que la función cumpla que $f_{(t)} = 0\ \forall t < 0$, la expresión quedaría:

$$\overline{T}_{ms}\left(\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n}\right) = \frac{1}{2}s^n\mathcal{L}_u\left\{f_{(t)}\right\} - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^k f^{(n-k-1)}_{(0^-)}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Demostración:

$$\overline{T}_{ms}\left(\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{L}_u\left\{\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n} + \frac{d^n f_{(-t)}}{dt^n}\right\} \\ \mathcal{L}_u\left\{\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n} - \frac{d^n f_{(-t)}}{dt^n}\right\}\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}\left(\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{L}_u\left\{\frac{d^n (f_{(t)} + f_{(-t)})}{dt^n}\right\} \\ \mathcal{L}_u\left\{\frac{d^n (f_{(t)} - f_{(-t)})}{dt^n}\right\}\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}\left(\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s^n\mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} + f_{(-t)})\right\} - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^k (f_{(t)} + f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)} \\ \\ s^n\mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} - f_{(-t)})\right\} - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^k (f_{(t)} - f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)} \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}\left(\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n}\right) = s^n\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} + f_{(-t)})\right\} \\ \\ \mathcal{L}_u\left\{(f_{(t)} - f_{(-t)})\right\}\end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^k \begin{pmatrix} (f_{(t)} + f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)} \\ \\ (f_{(t)} - f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)} \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}\left(\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n}\right) = s^n\,\overline{T}_{ms}(f_{(t)}) - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^k \begin{pmatrix} (f_{(t)} + f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)} \\ \\ (f_{(t)} - f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)} \end{pmatrix}$$

5. Tabla de transformada de funciones elementales

6. Solución de ecuaciones diferenciales

(a) Los sistemas presentados son lineales e invariantes en el tiempo (LTI).

(b) Los sistemas representados pueden ser siempre resueltos utilizando la transformada de Laplace. En el caso de utilizar la transformada de Fourier no siempre podrán ser resueltos, ya que si la función ingresada no tiene transformada el sistema no puede ser resuelto.

(c) La transformada definida en este trabajo presenta ciertas ventajas, como el hecho de visualizar rápidamene si la función original es par o impar. Para saber si una función es par, sólo se necesita saber si la componente y de la transformada es nula en el caso de ser impar, la componente x será nula. Otra ventaja que presenta esta transformada es la capacidad de ser calculada mediante la transformada de Laplace, razón por la cual comparte muchas propiedades.

Como desventaja se destaca la complejidad de manejo, ya que al ser una transformada vectorial se deben hacer más cálculos (en comparación a la transformada de Laplace).

6.1. Condiciones iniciales nulas

$$y'' - 3y' + 2y = f(x)$$
$$y'' + 3y' + 2y = f(x)$$

Utilizando la propiedad de la transformada de la derivada expresada en 14, se aplica la transformada a ambos miembros:

$$\overline{T}_{ms}\left\{y'' - 3y' + 2y = f_{(x)}\right\} = \overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}$$

$$\overline{T}_{ms}\left\{y''\right\} - 3\overline{T}_{ms}\left\{y'\right\} + 2\overline{T}_{ms}\left\{y\right\} = \overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}$$

Se aplica la propiedad de la derivada, con condiciones iniciales nulas, por lo que la igualdad quedaría expresada de la siguiente manera:

$$z^2\overline{T}_{ms}\left\{y\right\} - 3z\overline{T}_{ms}\left\{y\right\} + 2\overline{T}_{ms}\left\{y\right\} = \overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}$$

Sacando factor común $\overline{T}_{ms}\left\{y\right\}$ en el primer término:

$$\overline{T}_{ms}\left\{y\right\}\left(z^2 - 3z + 2\right) = \overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}$$

$$\overline{T}_{ms}\left\{y\right\} = \frac{\overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}}{(z^2 - 3z + 2)}$$

$$y = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{\overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}}{(z^2 - 3z + 2)}\right\}$$

Análogamente para $y'' + 3y' + 2y = f(x)$, la solución sería:

$$y = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{\overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}}{(z^2 + 3z + 2)}\right\}$$

6.1.1. Solución a los sistemas para $f_{(x)} = \text{sen}(x)$

Calculamos la transformada para $f_{(x)} = \cos(x)$:

$$\overline{T}_{ms}\left\{\text{sen}(x)\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{z^2+1} \end{pmatrix}$$

- Sistema $y'' - 3y' + 2y = \text{sen}(x)$ Operamos utilizando la tranformada calculada:

$$y_1 = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2-3z+2)}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{z^2+1} \end{pmatrix}\right\} = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{(z^2+1)(z^2-3z+2)} \end{pmatrix}\right\}$$

Utilizando la expresión de la antitransformada calculamos la solución:

$$y = \left[0 + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2+1)(z^2-3z+2)}\right\}_{(t)}\right]u(t) + \left[0 - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2+1)(z^2-3z+2)}\right\}_{(-t)}\right]u(-t)$$

$$y = \left[\frac{3}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\text{sen}(t) + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}\right]u(t) + \left[-\frac{3}{10}\cos(-t) - \frac{1}{10}\text{sen}(-t) - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right]u(-t)$$

- Sistema $y'' - 3y' + 2y = \text{sen}(x)$

$$y = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2+3z+2)}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{z^2+1} \end{pmatrix}\right\} = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{(z^2+1)(z^2+3z+2)} \end{pmatrix}\right\}$$

$$y = \left[0 + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2+1)(z^2+3z+2)}\right\}_{(t)}\right]u(t) + \left[0 - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2+1)(z^2+3z+2)}\right\}_{(-t)}\right]u(-t)$$

$$y = \left[\frac{1}{10}\text{sen}(t) - \frac{3}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right]u(t) + \left[-\frac{1}{10}\text{sen}(-t) + \frac{3}{10}\cos(-t) + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}\right]u(-t)$$

6.1.2. Solución a los sistemas para $f_{(x)} = \cos(x)$

Calculamos la transformada para $f_{(x)} = \cos(x)$:

$$\overline{T}_{ms}\left\{\cos(x)\right\} = \begin{pmatrix} \frac{z}{z^2+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Sistema $y'' - 3y' + 2y = \cos(x)$

  Resolvemos de igual manera que en el caso aterior

$$y = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2-3z+2)}\begin{pmatrix}\frac{z}{z^2+1}\\0\end{pmatrix}\right\} = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}\frac{z}{(z^2+1)(z^2-3z+2)}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$y = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+1)(z^2-3z+2)}\right\}_{(t)} + 0\right]u(t) + \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+1)(z^2-3z+2)}\right\}_{(-t)} - 0\right]u(-t)$$

$$y = \left[\frac{1}{10}\cos(t) - \frac{3}{10}\operatorname{sen}(t) + \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}\right]u(t) + \left[\frac{1}{10}\cos(-t) - \frac{3}{10}\operatorname{sen}(-t) + \frac{2}{5}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right]u(-t)$$

- Sistema $y'' + 3y' + 2y = \cos(x)$

$$y_1 = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2-3z+2)}\begin{pmatrix}\frac{z}{z^2+1}\\0\end{pmatrix}\right\} = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}\frac{z}{(z^2+1)(z^2-3z+2)}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$y = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+1)(z^2-3z+2)}\right\}_{(t)} + 0\right]u(t) + \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+1)(z^2-3z+2)}\right\}_{(-t)} - 0\right]u(-t)$$

$$y = \left[\frac{1}{10}\cos(t) + \frac{3}{10}\operatorname{sen}(t) + \frac{2}{5}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right]u(t) + \left[\frac{1}{10}\cos(-t) + \frac{3}{10}\operatorname{sen}(-t) + \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}\right]u(-t)$$

6.1.3. Solución a los sistemas para $f_{(x)} = \operatorname{sen}(x+3)$

Calculamos la transformada para $f_{(x)} = \operatorname{sen}(x+3)$:

$$\overline{T}_{ms}\left\{\operatorname{sen}(x+3)\right\} = \begin{pmatrix}0\\\frac{e^{3z}}{z^2+1}\end{pmatrix}$$

- Sistema $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen}(x+3)$

  Resolvemos de igual manera que en el caso aterior

$$y = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2-3z+2)}\begin{pmatrix}0\\\frac{e^{3z}}{z^2+1}\end{pmatrix}\right\} = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}\frac{e^{3z}}{(z^2+1)(z^2-3z+2)}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

  Utilizando propiedades de la tranformada, en particular el desplazamiento temporal. Podemos determinar la solución del sistema a partir de la solución al sistema $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen}(x)$ previamente calculado.

Sabiendo que la solucióna al sistema es:

$$y = \left[\frac{3}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}\right]u(t) + \left[-\frac{3}{10}\cos(-t) - \frac{1}{10}\operatorname{sen}(-t) - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right]u(-t)$$

Aplicando propiedad se calcula que la solución al sistema es:

$$y = \left[\frac{1}{10}\cos(t+3) - \frac{3}{10}\operatorname{sen}(t+3) + \frac{2}{5}e^{2(t+3)} - \frac{1}{2}e^{t+3}\right]u(t+3) + \left[-\frac{1}{10}\cos(-t+3) + \frac{3}{10}\operatorname{sen}(-t+3) - \frac{2}{5}e^{-2(t+3)} + \frac{1}{2}e^{-t+3}\right]u(-t+3)$$

- Sistema $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(x+3)$

$$y = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2+3z+2)}\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{3z}}{z^2+1}\end{pmatrix}\right\} = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\begin{pmatrix}\frac{e^{3z}}{(z^2+1)(z^2+3z+2)}\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$y = \left[\frac{1}{10}\operatorname{sen}(t) - \frac{3}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right]u(t) + \left[-\frac{1}{10}\operatorname{sen}(-t) + \frac{3}{10}\cos(-t) + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}\right]u(-t)$$

Aplicando la misma propiedad encontramos que la solución es:

$$y = \left[\frac{1}{10}\operatorname{sen}(t+3) - \frac{3}{10}\cos(t+3) - \frac{1}{5}e^{-2(t+3)} + \frac{1}{2}e^{-t+3}\right]u(t+3) + \left[-\frac{1}{10}\operatorname{sen}(-t+3) + \frac{3}{10}\cos(-t+3) + \frac{1}{5}e^{-2(-t+3)} - \frac{1}{2}e^{t+3}\right]u(-t+3)$$

6.2. Condiciones iniciales no nulas

Para resolver el sistema con condiciones iniciales no nulas se debe expresar a cada derivada de y con su respectiva representación según la ecuación 14.

$$\overline{T}_{ms}\left(\frac{d^n f_{(t)}}{dt^n}\right) = s^n\,\overline{T}_{ms}(f_{(t)}) - \sum_{k=0}^{k=n-1} s^k \begin{pmatrix}(f_{(t)} + f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)}\\ (f_{(t)} - f_{(-t)})^{(n-k-1)}_{(0^-)}\end{pmatrix}$$

Por lo que ahora el procedimiento realizado en la sección 6.1 debe completarse incluyendo las condiciones iniciales dadas. Para facilitar la lectura se calculan previamente las correspondientes derivadas con las condiciones iniciales dadas.

$$y'' - 3y' + 2y = f(x) \qquad y(0) = y_0; y'(0) = y'_0$$
$$y'' + 3y' + 2y = f(x) \qquad y(0) = y_0; y'(0) = y'_0$$

Sea la solución continua y derivable en $x = 0$ se puede asegurar que la comoponente y de la sumatoria será nula.

$$\overline{T}_{ms}(y') = s\,\overline{T}_{ms}(y) - \begin{pmatrix}2y_0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}\left(y''\right) = z^2\,\overline{T}_{ms}(y) - \begin{pmatrix} 2y_0' \\ 0 \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora completamos el procedimiento para el cálculo de la solución en el caso de tener condiciones iniciales no nulas.

$$\overline{T}_{ms}\left\{y'' \pm 3y' + 2y = f_{(x)}\right\} = \overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}$$

$$z^2\,\overline{T}_{ms}\{y\} - \begin{pmatrix} 2y_0' \\ 0 \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 3z\,\overline{T}_{ms}\{y\} - \begin{pmatrix} 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\overline{T}_{ms}\{y\} = \overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}$$

Agrupando las condiciones iniciales y las transformadas nos queda

$$\overline{T}_{ms}\{y\}(z^2 \pm 3z + 2) - \begin{pmatrix} 2y_0' + 2zy_0 \pm 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}$$

$$\overline{T}_{ms}\{y\}(z^2 \pm 3z + 2) = \overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\} + \begin{pmatrix} 2y_0' + 2zy_0 \pm 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{T}_{ms}\{y\} = \frac{1}{(z^2 \pm 3z + 2)}\left[\overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\} + \begin{pmatrix} 2y_0' + 2zy_0 \pm 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$y = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2 \pm 3z + 2)}\left[\overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\} + \begin{pmatrix} 2y_0' + 2zy_0 \pm 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

Si seguimos operando, llegamos a que la solución del sistema deriva en

$$y = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{1}{(z^2 \pm 3z + 2)}\left[\overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\} + \begin{pmatrix} 2y_0' + 2zy_0 \pm 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right\}$$

$$y = \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\frac{\overline{T}_{ms}\left\{f(x)\right\}}{(z^2 \pm 3z + 2)}\right\} + \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{2y_0' + 2zy_0 \pm 2y_0}{(z^2 \pm 3z + 2)} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Lo cual es igual a la solución con condiciones iniciales nulas sumada a la antitransformada de las condiciones iniciales.

$$y = y_{\text{cn}} + \overline{T}_{ms}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} \frac{2y_0' + 2zy_0 \pm 2y_0}{(z^2 \pm 3z + 2)} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

A partir de esta ecuación se pueden calcular las soluciones a los sistemas considerando las condiciones iniciales.