

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL SANTA FE

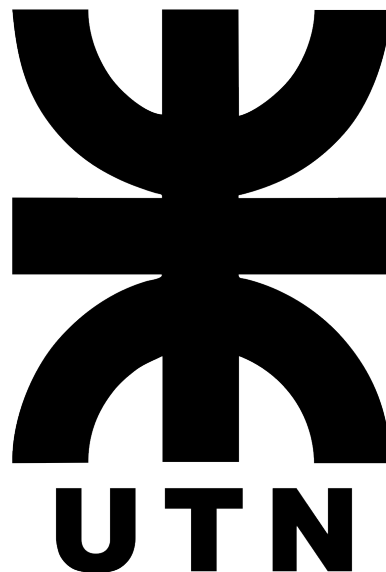
INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN

Matemática Superior
Trabajo Práctico 1

Alumnos:

MAZZI, Maria Clara mazzimclara@gmail.com

STORANI, Miguel Ignacio miguelignaciostorani@gmail.com



26 de mayo de 2019

Resumen

kjdfhgjhdsfjkbnsjkdvdvkjfdbv

Índice

1. Ejercicios	1
1.1. Expresar la nueva transformada en función de transformadas conocidas . . .	1
1.2. Condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de la transformada	2
1.3. Propiedades de la nueva transformada	2
1.3.1. Linealidad	3
1.3.2. Desplazamineto temporal	3
1.3.3. Convolución (deprecated)	4
1.3.4. Derivada temporal	4

Índice de figuras

1. Ejercicios

1.1. Expresar la nueva transformada en función de transformadas conocidas

$$\bar{T}_{ms}(f(t)) = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-z|t|} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sign}(t) e^{-z|t|} dt \right) \quad (1)$$

Para definir a nuestra transformada en función de transformadas conocidas operamos separadamente con cada una de las componentes que la componen.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-z|t|} dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-z|t|} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-z|t|} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-z|t|} dt &= \mathcal{L} \{f(t)u(t)\}_{(s)} + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-z(-t)} dt \end{aligned} \quad (2)$$

Resolviendo separadamente el segundo término de la expresión, aplicando un cambio de variable tal que $t = -v$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-z(-t)} dt &\Rightarrow - \int_{\infty}^0 f(-v) e^{-z(v)} dv = \int_0^{\infty} f(-v) e^{-z(v)} dv \\ \int_0^{\infty} f(-v) e^{-z(v)} dv &= \mathcal{L} \{f(-v)u(v)\}_{(s)} \end{aligned}$$

Por propiedad de simetría de la transformada de Laplace, se puede expresar la siguiente igualdad:

$$\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-z(-t)} dt = \mathcal{L} \{f(t)u(-t)\}_{(-s)} \quad (3)$$

Lo cual representa un cambio de la variable compleja, por la misma variable compleja aplicando un factor de -1 . Reemplazando 3 en 2 obtenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-z|t|} dt = \mathcal{L} \{f(t)u(t)\}_{(s)} + \mathcal{L} \{f(t)u(-t)\}_{(-s)} \quad (4)$$

Pasamos ahora a operar con la segunda componente de nuestra transformada.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sign}(t) e^{-z|t|} dt$$

Podemos definir a la función $\text{sign}(t)$ en función del escalón unitario, quedando $\text{sign}(t) = u(t) - u(-t)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sign}(t) e^{-z|t|} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (u(t) - u(-t)) e^{-z|t|} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (u(t) - u(-t)) e^{-z|t|} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) u(t) e^{-z|t|} dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) u(-t) e^{-z|t|} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (u(t) - u(-t)) e^{-z|t|} dt &= \mathcal{L} \{f(t) u(t)\}_{(s)} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) u(-t) e^{-z|t|} dt \end{aligned} \quad (5)$$

El segundo término se puede expresar como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) u(-t) e^{-z|t|} dt = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-z(-t)} dt \Rightarrow \mathcal{L} \{f(t) u(-t)\}_{(-s)} \quad (6)$$

Expresión para la que ya hemos hallado una expresión en función de transformadas conocidas, por lo que la segunda componente de nuestra transformada quedaría de reemplazar 6 en 5:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sign}(t) e^{-z|t|} dt = \mathcal{L} \{f(t) u(t)\}_{(s)} - \mathcal{L} \{f(t) u(-t)\}_{(-s)} \quad (7)$$

Luego de haber calculado ambas componentes, reemplazamos 4 y 7 en 1 nos queda que nuestra transformada se puede expresar como:

$$\overline{T}_{ms}(f(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{f(t) u(t)\}_{(s)} + \mathcal{L} \{f(t) u(-t)\}_{(-s)} \right) \quad (8)$$

1.2. Condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de la transformada

Para asegurar la existencia de la transformada se debe cumplir que exista la transformada de Laplace para la función estudiada. Existe la transformada $\overline{T}_{ms}(f(t))$ siempre que $f(t)$ sea una función que cumple que:

- Es seccionalmente continua sobre el intervalo $t \leq A$ para cualquier $A > 0$, esto es, posee a lo más un número finito de discontinuidades de salto en dicho intervalo.
- Es de orden exponencial para $t \geq M$, es decir:

$$|f(t)| \leq K e^{at} \text{ para } t \geq M \text{ donde } K, a \text{ y } M \text{ son constantes}$$

1.3. Propiedades de la nueva transformada

Se demuestran algunas propiedades de la nueva transformada, tomando como base las propiedades de la transformada de Laplace:

1.3.1. Linealidad

$$\overline{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) = a\overline{T}_{ms}(f(t)) + b\overline{T}_{ms}(g(t)) \quad (9)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \overline{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ [af(t) + bg(t)]u(t) \}_{(s)} + \mathcal{L} \{ [af(t) + bg(t)]u(-t) \}_{(-s)} \right) \\ &\quad \left(\mathcal{L} \{ [af(t) + bg(t)]u(t) \}_{(s)} - \mathcal{L} \{ [af(t) + bg(t)]u(-t) \}_{(-s)} \right) \\ \overline{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ [af(t)u(t)] + [bg(t)u(t)] \}_{(s)} + \mathcal{L} \{ [af(t)u(-t)] + [bg(t)u(-t)] \}_{(-s)} \right) \\ &\quad \left(\mathcal{L} \{ [af(t)u(t)] + [bg(t)u(t)] \}_{(s)} - \mathcal{L} \{ [af(t)u(-t)] + [bg(t)u(-t)] \}_{(-s)} \right) \\ \overline{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ [af(t)u(t)] \} + \mathcal{L} \{ [bg(t)u(t)] \}_{(s)} + \mathcal{L} \{ [af(t)u(-t)] \} + \mathcal{L} \{ [bg(t)u(-t)] \}_{(-s)} \right) \\ &\quad \left(\mathcal{L} \{ [af(t)u(t)] \} + \mathcal{L} \{ [bg(t)u(t)] \}_{(s)} - \mathcal{L} \{ [af(t)u(-t)] \} - \mathcal{L} \{ [bg(t)u(-t)] \}_{(-s)} \right) \\ \overline{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) &= \frac{1}{2} \left(a\mathcal{L} \{ [f(t)u(t)] \} + a\mathcal{L} \{ [f(t)u(-t)] \} + b\mathcal{L} \{ [g(t)u(t)] \}_{(s)} + b\mathcal{L} \{ [g(t)u(-t)] \}_{(-s)} \right) \\ &\quad \left(a\mathcal{L} \{ [f(t)u(t)] \} - a\mathcal{L} \{ [f(t)u(-t)] \} + b\mathcal{L} \{ [g(t)u(t)] \}_{(s)} - b\mathcal{L} \{ [g(t)u(-t)] \}_{(-s)} \right) \\ \overline{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) &= a\frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ [f(t)u(t)] \} + \mathcal{L} \{ [f(t)u(-t)] \} \right) + b\frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ [g(t)u(t)] \}_{(s)} + \mathcal{L} \{ [g(t)u(-t)] \}_{(-s)} \right) \\ &\quad \left(\mathcal{L} \{ [f(t)u(t)] \} - \mathcal{L} \{ [f(t)u(-t)] \} \right) + b\frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ [g(t)u(t)] \}_{(s)} - \mathcal{L} \{ [g(t)u(-t)] \}_{(-s)} \right) \\ \therefore \overline{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) &= a\overline{T}_{ms}(f(t)) + b\overline{T}_{ms}(g(t)) \end{aligned}$$

1.3.2. Desplazamiento temporal

$$\overline{T}_{ms}(f(t-a)) = \overline{T}_{ms}(f(t))e^{-at} \quad (10)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \overline{T}_{ms}(f(t-a)) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ f(t-a)u(t-a) \}_{(s)} + \mathcal{L} \{ f(t-a)u(-(t-a)) \}_{(-s)} \right) \\ &\quad \left(\mathcal{L} \{ f(t-a)u(t-a) \}_{(s)} - \mathcal{L} \{ f(t-a)u(-(t-a)) \}_{(-s)} \right) \\ \overline{T}_{ms}(f(t-a)) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ f(t)u(t) \}_{(s)} e^{-at} + \mathcal{L} \{ f(t)u(-t) \}_{(-s)} e^{-at} \right) \\ &\quad \left(\mathcal{L} \{ f(t)u(t) \}_{(s)} e^{-at} - \mathcal{L} \{ f(t)u(-t) \}_{(-s)} e^{-at} \right) \\ \overline{T}_{ms}(f(t-a)) &= \frac{1}{2} \left(\left[\mathcal{L} \{ f(t)u(t) \}_{(s)} + \mathcal{L} \{ f(t)u(-t) \}_{(-s)} \right] e^{-at} \right) \\ &\quad \left(\left[\mathcal{L} \{ f(t)u(t) \}_{(s)} - \mathcal{L} \{ f(t)u(-t) \}_{(-s)} \right] e^{-at} \right) \\ \overline{T}_{ms}(f(t-a)) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ f(t)u(t) \}_{(s)} + \mathcal{L} \{ f(t)u(-t) \}_{(-s)} \right) e^{-at} \\ &\quad \left(\mathcal{L} \{ f(t)u(t) \}_{(s)} - \mathcal{L} \{ f(t)u(-t) \}_{(-s)} \right) e^{-at} \\ \therefore \overline{T}_{ms}(f(t-a)) &= \overline{T}_{ms}(f(t))e^{-at} \end{aligned}$$

1.3.3. Convolución (deprecated)

$$\overline{T}_{ms}(f(t) * g(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{ [f(t) * g(t)] u(t) \}_{(s)} + \mathcal{L} \{ [f(t) * g(t)] u(-t) \}_{(-s)} \right. \\ \left. \mathcal{L} \{ [f(t) * g(t)] u(t) \}_{(s)} - \mathcal{L} \{ [f(t) * g(t)] u(-t) \}_{(-s)} \right) \quad (11)$$

1.3.4. Derivada temporal

Esta propiedad sólo se cumple para toda función que cumpla $f(t) = 0 \forall t < 0$, por lo que utilizaremos la transformada unilateral de Laplace.

$$\overline{T}_{ms}(f(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u \{ f(t) u(t) \}_{(s)} + 0 \right) \\ \mathcal{L}_u \{ f(t) u(t) \}_{(s)} - 0$$

Demostración:

$$\overline{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} \right) \\ \mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\}$$

$$\overline{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{1}{2} \left(s^n \mathcal{L}_u \{ f(t) \} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f_{(0-)}^{(n-k-1)} \right) \\ s^n \mathcal{L}_u \{ f(t) \} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f_{(0-)}^{(n-k-1)}$$

$$\overline{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{1}{2} s^n \mathcal{L}_u \{ f(t) \} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f_{(0-)}^{(n-k-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$