

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL SANTA FE

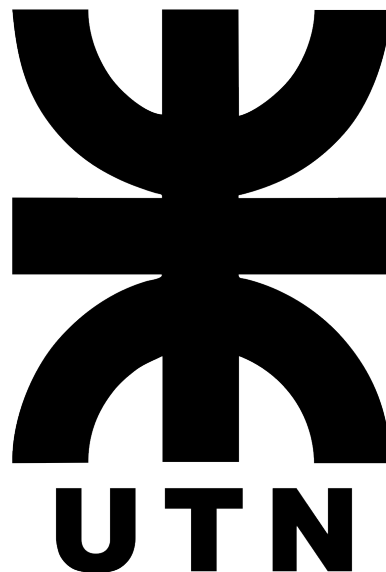
INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN

Matemática Superior
Trabajo Práctico 1

Alumnos:

MAZZI, Maria Clara mazzimclara@gmail.com

STORANI, Miguel Ignacio miguelignaciostorani@gmail.com



26 de mayo de 2019

Resumen

kjdfhgjhdsfjkbnsjkfdvbkjfdbv

Índice

1. Expresar la nueva transformada en función de transformadas conocidas	1
2. Condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de la transformada	2
3. Antitransformada	2
4. Propiedades de la nueva transformada	4
4.1. Linealidad	4
4.2. Desplazamiento temporal	5
4.3. Convolución	5
4.4. Derivada temporal	6
5. Tabla de transformada de funciones elementales	6
6. Solución de ecuaciones diferenciales	6
6.1. Condiciones iniciales nulas	6
6.1.1. Solución a los sistemas para $f(x) = \text{sen}(x)$	7

Índice de figuras

1. Expresar la nueva transformada en función de transformadas conocidas

$$\bar{T}_{ms}(f(t)) = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-z|t|} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sign}(t) e^{-z|t|} dt \right) \quad (1)$$

Para definir a nuestra transformada en función de transformadas conocidas operamos separadamente con cada una de las componentes que la componen.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-z|t|} dt &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-z(-t)} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-z|t|} dt &= \mathcal{L} \{f(t)u(t)\}_{(s)} + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-z(-t)} dt \end{aligned} \quad (2)$$

Resolviendo separadamente el segundo término de la expresión, aplicando un cambio de variable tal que $t = -v$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-z(-t)} dt &\Rightarrow - \int_{\infty}^0 f(-v) e^{-z(v)} dv = \int_0^{\infty} f(-v) e^{-z(v)} dv \\ \int_0^{\infty} f(-v) e^{-z(v)} dv &= \mathcal{L} \{f(-v)u(v)\}_{(z)} \end{aligned}$$

Por propiedad de simetría de la transformada de Laplace, se puede expresar la siguiente igualdad:

$$\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-z(-t)} dt = \mathcal{L} \{f(t)u(-t)\}_{(-z)} \quad (3)$$

Lo cual representa un cambio de la variable compleja, por la misma variable compleja aplicando un factor de -1 . Reemplazando 3 en 2 obtenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-z|t|} dt = \mathcal{L} \{f(t)u(t)\}_{(z)} + \mathcal{L} \{f(t)u(-t)\}_{(-z)} \quad (4)$$

Pasamos ahora a operar con la segunda componente de nuestra transformada.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sign}(t) e^{-z|t|} dt$$

Podemos definir a la función $\text{sign}(t)$ en función del escalón unitario, quedando $\text{sign}(t) = u(t) - u(-t)$, por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sign}(t) e^{-z|t|} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (u(t) - u(-t)) e^{-z|t|} dt$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(u(t) - u(-t))e^{-z|t|}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)e^{-z|t|}dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(-t)e^{-z|t|}dt \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(u(t) - u(-t))e^{-z|t|}dt &= \mathcal{L}\{f(t)u(t)\}_{(s)} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(-t)e^{-z|t|}dt
\end{aligned} \quad (5)$$

El segundo término se puede expresar como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(-t)e^{-z|t|}dt = \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-z(-t)}dt \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)u(-t)\}_{(-z)} \quad (6)$$

Expresión para la que ya hemos hallado una expresión en función de transformadas conocidas, por lo que la segunda componente de nuestra transformada quedaría de reemplazar 6 en 5:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\text{sign}(t)e^{-z|t|}dt = \mathcal{L}\{f(t)u(t)\}_{(z)} - \mathcal{L}\{f(t)u(-t)\}_{(-z)} \quad (7)$$

Luego de haber calculado ambas componentes, reemplazamos 4 y 7 en 1 nos queda que nuestra transformada se puede expresar como:

$$\bar{T}_{ms}(f(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\{f(t)u(t)\}_{(z)} + \mathcal{L}\{f(t)u(-t)\}_{(-z)} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u\{f(t) + f(-t)\} \right) \quad (8)$$

2. Condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de la transformada

Para asegurar la existencia de la transformada se debe cumplir que exista la transformada de Laplace para la función estudiada. Existe la transformada $\bar{T}_{ms}(f(t))$ siempre que $f(t)$ sea una función que cumple que:

- Es seccionalmente continua sobre el intervalo $t \leq A$ para cualquier $A > 0$, esto es, posee a lo más un número finito de discontinuidades de salto en dicho intervalo.
- Es de orden exponencial para $t \geq M$, es decir:

$$|f(t)| \leq Ke^{at} \text{ para } t \geq M \text{ donde } K, a \text{ y } M \text{ son constantes}$$

3. Antitransformada

Para reconstruir la función original a partir de la transformada, tomamos las componentes en x e y de la transformada por separado, siendo:

$$\bar{T}_{ms}(f(t)) = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

$$\bar{T}_{ms}(f_{(t)}) = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_u \{f(t) + f(-t)\} \\ \mathcal{L}_u \{f(t) - f(-t)\} \end{pmatrix}$$

Para reconstruir $f_{(t)}$ se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} T_x = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u \{f(t) + f(-t)\} \\ T_y = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u \{f(t) - f(-t)\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_u^{-1} \{2T_x\} = (f(t) + f(-t))u(t) \\ \mathcal{L}_u^{-1} \{2T_y\} = (f(t) - f(-t))u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} u(t) = f(t)u(t) + f(-t)u(t) \\ 2\mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} u(t) = f(t)u(t) - f(-t)u(t) \end{cases}$$

En este paso debemos tomar dos caminos, uno para recomponer la función en el intervalo donde $t \geq 0$, y otro para cuando $t < 0$. Empezamos reconstruyendo el camino donde $t \geq 0$:

Despejando $f_{(-t)}$ de ambas ecuaciones, para después igualarlas tenemos que:

$$\begin{cases} f(-t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} u(t) - f(t)u(t) \\ f(-t)u(t) = - \left[2\mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} u(t) - f(t)u(t) \right] \end{cases}$$

Iguando las ecuaciones nos queda:

$$- \left[2\mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} u(t) - f(t)u(t) \right] = 2\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} u(t) - f(t)u(t)$$

$$-2\mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} u(t) + f(t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} u(t) - f(t)u(t)$$

$$2f(t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} u(t) + 2\mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} u(t)$$

$$f(t)u(t) = \left[\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} + \mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} \right] u(t) \quad (9)$$

Similarmete acomo resolvimos la parte donde $t \geq 0$, resolvemos ahora para cuando $t < 0$:

$$\begin{cases} f(t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} u(t) - f(-t)u(t) \\ f(t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} u(t) + f(-t)u(t) \end{cases}$$

$$2\mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} u(t) + f(-t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} u(t) - f(-t)u(t)$$

$$2f(-t)u(t) = 2\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} u(t) + 2\mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} u(t)$$

$$f(-t)u(t) = \left[\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} + \mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} \right] u(t)$$

Hacemos un cambio de variable para poder expresar a la función como $f(t)$, lo cual nos quedaría como:

$$f(t)u(-t) = \left[\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(-t)} - \mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(-t)} \right] u(-t) \quad (10)$$

Tomando ahora las expresiones 9 y 10, juntas nos definen la función original de la siguiente manera:

$$f(t) = \left[\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(t)} + \mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(t)} \right] u(t) + \left[\mathcal{L}^{-1} \{T_x\}_{(-t)} - \mathcal{L}^{-1} \{T_y\}_{(-t)} \right] u(-t) \quad (11)$$

4. Propiedades de la nueva transformada

Se demuestran algunas propiedades de la nueva transformada, tomando como base las propiedades de la transformada de Laplace:

4.1. Linealidad

$$\bar{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) = a\bar{T}_{ms}(f(t)) + b\bar{T}_{ms}(g(t)) \quad (12)$$

Demostración:

$$\bar{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{[af(t) + bg(t)]u(t)\}_{(s)} + \mathcal{L} \{[af(t) + bg(t)]u(-t)\}_{(-s)} \right. \\ \left. \mathcal{L} \{[af(t) + bg(t)]u(t)\}_{(s)} - \mathcal{L} \{[af(t) + bg(t)]u(-t)\}_{(-s)} \right)$$

$$\bar{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{[af(t)u(t)] + [bg(t)u(t)]\}_{(s)} + \mathcal{L} \{[af(t)u(-t)] + [bg(t)u(-t)]\}_{(-s)} \right. \\ \left. \mathcal{L} \{[af(t)u(t)] + [bg(t)u(t)]\}_{(s)} - \mathcal{L} \{[af(t)u(-t)] + [bg(t)u(-t)]\}_{(-s)} \right)$$

$$\bar{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{[af(t)u(t)]\} + \mathcal{L} \{[bg(t)u(t)]\}_{(s)} + \mathcal{L} \{[af(t)u(-t)]\} + \mathcal{L} \{[bg(t)u(-t)]\}_{(-s)} \right. \\ \left. \mathcal{L} \{[af(t)u(t)]\} + \mathcal{L} \{[bg(t)u(t)]\}_{(s)} - \mathcal{L} \{[af(t)u(-t)]\} - \mathcal{L} \{[bg(t)u(-t)]\}_{(-s)} \right)$$

$$\bar{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) = \frac{1}{2} \left(a\mathcal{L} \{[f(t)u(t)]\} + a\mathcal{L} \{[f(t)u(-t)]\} + b\mathcal{L} \{[g(t)u(t)]\}_{(s)} + b\mathcal{L} \{[g(t)u(-t)]\}_{(-s)} \right. \\ \left. a\mathcal{L} \{[f(t)u(t)]\} - a\mathcal{L} \{[af(t)u(-t)]\} + b\mathcal{L} \{[g(t)u(t)]\}_{(s)} - b\mathcal{L} \{[g(t)u(-t)]\}_{(-s)} \right)$$

$$\bar{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) = a\frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{[f(t)u(t)]\} + \mathcal{L} \{[f(t)u(-t)]\} \right) + b\frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{[g(t)u(t)]\}_{(s)} + \mathcal{L} \{[g(t)u(-t)]\}_{(-s)} \right. \\ \left. \mathcal{L} \{[f(t)u(t)]\} - \mathcal{L} \{[af(t)u(-t)]\} \right)$$

$$\therefore \bar{T}_{ms}(af(t) + bg(t)) = a\bar{T}_{ms}(f(t)) + b\bar{T}_{ms}(g(t))$$

4.2. Desplazamiento temporal

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t-a)}) = \overline{T}_{ms}(f_{(t)})e^{-at} \quad (13)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \overline{T}_{ms}(f_{(t-a)}) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{f(t-a)u(t-a)\}_{(s)} + \mathcal{L} \{f(t-a)u(-(t-a))\}_{(-s)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{f(t)u(t)\}_{(s)} e^{-at} + \mathcal{L} \{f(t)u(-t)\}_{(-s)} e^{-at} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\mathcal{L} \{f(t)u(t)\}_{(s)} + \mathcal{L} \{f(t)u(-t)\}_{(-s)} \right] e^{-at} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{f(t)u(t)\}_{(s)} e^{-at} - \mathcal{L} \{f(t)u(-t)\}_{(-s)} e^{-at} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{f(t)u(t)\}_{(s)} + \mathcal{L} \{f(t)u(-t)\}_{(-s)} \right) e^{-at} \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \{f(t)u(t)\}_{(s)} - \mathcal{L} \{f(t)u(-t)\}_{(-s)} \right) e^{-at} \\ &\therefore \overline{T}_{ms}(f_{(t-a)}) = \overline{T}_{ms}(f_{(t)})e^{-at} \end{aligned}$$

4.3. Convolución

Esta propiedad sólo se mantiene para funciones f y g tal que $f(t) = 0 \forall t < 0$ y $g(t) = 0 \forall t < 0$. Debido a estas restricciones podemos expresar nuestra transformada en función de la transformada unilateral de Laplace.

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u \{ (f_{(t)} * g_{(t)}) + (f_{(-t)} * g_{(-t)}) \} \right)$$

Sea $f(t)$ par, dado que $f(t) = f(-t)$, se puede escribir la transformada de la siguiente manera:

$$\overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u \{ (f_{(t)} * g_{(t)}) + (f_{(t)} * g_{(-t)}) \} \right)$$

Por propiedad de la convolución se sabe que $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$, por lo que se puede reducir la expresión de la transformada aplicando esta propiedad.

$$\begin{aligned} \overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u \{ (f_{(t)} * (g_{(t)} + g_{(-t)})) \} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u \{ (f_{(t)} * g_{(t)}) + (f_{(t)} * g_{(-t)}) \} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u \{ (f_{(t)}) \} \mathcal{L}_u \{ g_{(t)} + g_{(-t)} \} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u \{ (f_{(t)}) \} \mathcal{L}_u \{ g_{(t)} - g_{(-t)} \} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_u \{ g_{(t)} + g_{(-t)} \} \right) \mathcal{L}_u \{ (f_{(t)}) \} = \overline{T}_{ms}(g_{(t)}) \mathcal{L}_u \{ (f_{(t)}) \} \\ &\therefore \overline{T}_{ms}(f_{(t)} * g_{(t)}) = \overline{T}_{ms}(g_{(t)}) \mathcal{L}_u \{ (f_{(t)}) \} \end{aligned}$$

4.4. Derivada temporal

$$\bar{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = s^n \bar{T}_{ms}(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \begin{pmatrix} (f(t) + f(-t))_{(0-)}^{(n-k-1)} \\ (f(t) - f(-t))_{(0-)}^{(n-k-1)} \end{pmatrix} \quad (14)$$

En el caso que la función cumpla que $f(t) = 0 \forall t < 0$, la expresión quedaría:

$$\bar{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = \frac{1}{2} s^n \mathcal{L}_u \{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f_{(0-)}^{(n-k-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} + \frac{d^n f(-t)}{dt^n} \right\} \\ \mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} - \frac{d^n f(-t)}{dt^n} \right\} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^n (f(t) + f(-t))}{dt^n} \right\} \\ \mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^n (f(t) - f(-t))}{dt^n} \right\} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s^n \mathcal{L}_u \{f(t) + f(-t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k (f(t) + f(-t))_{(0-)}^{(n-k-1)} \\ s^n \mathcal{L}_u \{f(t) - f(-t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k (f(t) - f(-t))_{(0-)}^{(n-k-1)} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= s^n \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_u \{f(t) + f(-t)\} \\ \mathcal{L}_u \{f(t) - f(-t)\} \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \begin{pmatrix} (f(t) + f(-t))_{(0-)}^{(n-k-1)} \\ (f(t) - f(-t))_{(0-)}^{(n-k-1)} \end{pmatrix} \\ \bar{T}_{ms} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= s^n \bar{T}_{ms}(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \begin{pmatrix} (f(t) + f(-t))_{(0-)}^{(n-k-1)} \\ (f(t) - f(-t))_{(0-)}^{(n-k-1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Tabla de transformada de funciones elementales

6. Solución de ecuaciones diferenciales

6.1. Condiciones iniciales nulas

$$y'' - 3y' + 2y = f(x)$$

$$y'' + 3y' + 2y = f(x)$$

Utilizando la propiedad de la transformada de la derivada expresada en 14, se aplica la transformada a ambos miembros:

$$\bar{T}_{ms} \{y'' - 3y' + 2y = f(x)\} = \bar{T}_{ms} \{f(x)\}$$

$$\bar{T}_{ms} \{y''\} - 3\bar{T}_{ms} \{y'\} + 2\bar{T}_{ms} \{y\} = \bar{T}_{ms} \{f(x)\}$$

Se aplica la propiedad de la derivada, con condiciones iniciales nulas, por lo que la igualdad quedaría expresada de la siguiente manera:

$$z^2 \bar{T}_{ms} \{y\} - 3z \bar{T}_{ms} \{y\} + 2\bar{T}_{ms} \{y\} = \bar{T}_{ms} \{f(x)\}$$

Sacando factor común $\bar{T}_{ms} \{y\}$ en el primer término:

$$\bar{T}_{ms} \{y\} (z^2 - 3z + 2) = \bar{T}_{ms} \{f(x)\}$$

$$\bar{T}_{ms} \{y\} = \frac{\bar{T}_{ms} \{f(x)\}}{(z^2 - 3z + 2)}$$

$$y = \bar{T}_{ms}^{-1} \left\{ \frac{\bar{T}_{ms} \{f(x)\}}{(z^2 - 3z + 2)} \right\}$$

Análogamente para $y'' + 3y' + 2y = f(x)$, la solución sería:

$$y = \bar{T}_{ms}^{-1} \left\{ \frac{\bar{T}_{ms} \{f(x)\}}{(z^2 + 3z + 2)} \right\}$$

6.1.1. Solución a los sistemas para $f(x) = \text{sen}(x)$

Calculamos la transformada de $f(x)$:

$$\bar{T}_{ms} \{\text{sen}(x)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{z^2+1} \end{pmatrix}$$

Operamos utilizando la transformada calculada:

$$y_1 = \bar{T}_{ms}^{-1} \left\{ \frac{1}{(z^2 - 3z + 2)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{z^2+1} \end{pmatrix} \right\} = \bar{T}_{ms}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{(z^2+1)(z^2-3z+2)} \end{pmatrix} \right\}$$

Utilizando la expresión de la antitransformada calculamos la solución:

$$y_1 = \left[0 + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 - 3z + 2)} \right\}_{(t)} \right] u(t) + \left[0 - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 - 3z + 2)} \right\}_{(-t)} \right] u(-t)$$