CP - Ficha 11

Exercício 1

O diagrama que se segue

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_1 \arrow[d, "(\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!)"'] & & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_1 \arrow[ll, "\mathsf{in}_1"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\ (\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!)"] \\
\mathsf{T}_2 \arrow[d, "(\!|\, g \,|\!)"'] & \mathsf{G}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\mathsf{in}_2"] \arrow[d, "\mathsf{G}\ (\!|\, g \,|\!)"] & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\mathsf{F} (\!|\, g \,|\!)"] \\
C & \mathsf{G}\ C \arrow[l, "g"] & \mathsf{F} C \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}
\tag{F1}
$$

compõe dois catamorfismos envolvendo dois tipos T_1 (F-recursivo) e T_2 (G-recursivo):

$$
\begin{aligned}
&(\!|g|\!) : T_2 \to C \\
&(\!|\mathrm{in}_2 \cdot \alpha|\!) : T_1 \to T_2
\end{aligned}
$$

Considere-se o caso especial:

$$
\begin{aligned}
&T_1 = T_2 = \mathrm{LTree}\ A \\
&F\ f = id + f \times f \\
&\alpha = id + \mathrm{swap} \\
&\mathrm{in}_2 = [Leaf, Fork]
\end{aligned}
$$

Desenvolver

$$
mirror = (\!|\mathrm{in}_2 \cdot \alpha|\!) \tag{F2}
$$

até se obter uma definição completamente *pointwise*.

Resolução 1

$$
\begin{array}{l}
mirror = (\!|\mathrm{in}_2 \cdot \alpha|\!) \\
\equiv \qquad \{ \text{46: Universal-cata} \} \\
mirror \cdot \mathrm{in}_2 = \mathrm{in}_2 \cdot \alpha \cdot \mathrm{F\ mirror} \\
\equiv \qquad \{ \text{Def. in}_2\text{, Def. }\alpha\text{, Def. Functor LTree} \} \\
mirror \cdot [Leaf, Fork] = [Leaf, Fork] \cdot (id + \mathrm{swap}) \cdot (id + mirror^2) \\
\equiv \qquad \{ \text{20: Fusão-+, 22: Absorção-+} \} \\
[mirror \cdot Leaf, mirror \cdot Fork] = [Leaf, Fork \cdot \mathrm{swap} \cdot mirror^2] \\
\equiv \qquad \{ \text{27: Eq-+} \} \\
\begin{cases} mirror \cdot Leaf = Leaf \\ mirror \cdot Fork = Fork \cdot \mathrm{swap} \cdot mirror^2 \end{cases} \\
\equiv \qquad \{ \text{72: Ig. Ext., 73 Def-comp, 78: Def-}\times\text{, Def. swap} \} \\
\begin{cases} mirror\ (Leaf\ a) = Leaf\ a \\ mirror\ (Fork\ (l, r)) = Fork\ (mirror\ r, mirror\ l) \end{cases}
\end{array}
$$

Exercício 2

> A lei
>
> $$(\!|g|\!) \cdot (\!|\mathrm{in}_2 \cdot \alpha|\!) = (\!|g \cdot \alpha|\!) \Leftarrow G\ f \cdot \alpha = \alpha \cdot F\ f \tag{F3}$$
>
> verifica-se — cf. diagrama anterior — onde a condição
>
> $$G\ f \cdot \alpha = \alpha \cdot F\ f \tag{F4}$$
>
> mais não é que a propriedade grátis de $\alpha : F\ X \to G\ X$. Apresente justificações para a seguinte demonstração de (F3):
>
> […]

$$
\begin{array}{l}
(\!|g|\!) \cdot (\!|\mathrm{in}_2 \cdot \alpha|\!) = (\!|g \cdot \alpha|\!) \\
\Leftarrow \qquad \{ \text{49: Fusão-cata} \} \\
(\!|g|\!) \cdot \mathrm{in}_2 \cdot \alpha = g \cdot \alpha \cdot \mathrm{F}\ (\!|g|\!) \\
\equiv \qquad \{ \text{47: Cancelamento-cata} \} \\
g \cdot \mathrm{G}\ (\!|g|\!) \cdot \alpha = g \cdot \alpha \cdot \mathrm{F}\ (\!|g|\!) \\
\Leftarrow \qquad \{ \text{5: Leibniz} \} \\
\mathrm{G}\ (\!|g|\!) \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathrm{F}\ (\!|g|\!) \\
\equiv \qquad \{ f = (\!|g|\!) \} \\
\mathrm{G}\ f \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathrm{F}\ f
\end{array}
$$

Exercício 3

> Na sequência da questão 1 acima, suponha que se tem $(\!|g|\!) = mirror$ em (F1). Mostre por (F3) que
>
> $$mirror \cdot mirror = id \tag{F5}$$
>
> se verifica.

Resolução 3

$$
\begin{aligned}
& mirror \cdot mirror = id \\
\equiv & \qquad \{ mirror = (\!|g|\!), \text{Def. } g, \text{Def. } \alpha, \text{48: Reflexão-cata} \} \\
& (\!|\mathrm{in} \cdot (id + \mathrm{swap})|\!) \cdot (\!|\mathrm{in} \cdot (id + \mathrm{swap})|\!) = (\!|\mathrm{in}|\!) \\
\Leftarrow & \qquad \{ \text{E1, F3} \} \\
& \mathrm{G}\ f \cdot (id + \mathrm{swap}) = (id + \mathrm{swap}) \cdot \mathrm{F}\ f \\
\equiv & \qquad \{ \mathrm{G}\ f = \mathrm{F}\ f = id + f^2 \} \\
& (id + f^2) \cdot (id + \mathrm{swap}) = (id + \mathrm{swap}) \cdot (id + f^2) \\
\equiv & \qquad \{ \text{25: Functor-+ } (2\times) \} \\
& id + (\mathrm{swap} \cdot (f \times f)) = id + ((f \times f) \cdot \mathrm{swap}) \\
\equiv & \qquad \{ \text{Prop. grátis de swap} \} \\
& \mathrm{True}
\end{aligned}
$$

$$
\text{(E1) Mostrar que} \quad
\begin{aligned}
& \mathrm{in} = (\mathrm{in} \cdot (id + \mathrm{swap})) \cdot (id + \mathrm{swap}) \\
\equiv & \qquad \{ \text{2: Assoc-comp, 25: Functor-+, 1: Natural-id} \} \\
& \mathrm{in} = \mathrm{in} \cdot (id + \mathrm{swap} \cdot \mathrm{swap}) \\
\equiv & \qquad \{ \mathrm{swap} \cdot \mathrm{swap} = id \} \\
& \mathrm{in} = \mathrm{in} \cdot (id + id) \\
\equiv & \qquad \{ \text{26: Functor-id-+} \} \\
& \mathrm{True}
\end{aligned}
$$

Propriedade grátis de swap:

$$(g \times f) \cdot \mathrm{swap} = \mathrm{swap} \cdot (f \times g)$$

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\mathrm{swap}"] \arrow[d, "f \times g"'] & B \times A \arrow[d, "g \times f"] \\
A' \times B' \arrow[r, "\mathrm{swap}"] & B' \times A'
\end{tikzcd}
$$

Exercício 4

> Recordando a definição $T\ f = (\!|\mathrm{in} \cdot \mathrm{B}\ (f, id)|\!)$, mostre que a lei de absorção-cata,
>
> $$(\!|g|\!) \cdot T\ f = (\!|g \cdot \mathrm{B}\ (f, id)|\!)$$
>
> é um caso particular de (F3).

Resolução 4

$$\begin{aligned}
& (\!|g|\!) \cdot T\ f = (\!|g \cdot \mathrm{B}\ (f, id)|\!) \\
\equiv\ & \qquad \{\text{51: Def-map-cata}\} \\
& (\!|g|\!) \cdot (\!|\mathrm{in} \cdot \mathrm{B}\ (f, id)|\!) = (\!|g \cdot \mathrm{B}\ (f, id)|\!) \\
\Leftarrow\ & \qquad \{\text{F3}\} \\
& \mathrm{G}\ f \cdot \mathrm{B}\ (f, id) = \mathrm{B}\ (f, id) \cdot \mathrm{F}\ f \\
\equiv\ & \qquad \{\mathrm{G}\ f = \mathrm{F}\ f, \text{50: Base-cata}\} \\
& \mathrm{B}\ (id, f) \cdot \mathrm{B}\ (f, id) = \mathrm{B}\ (f, id) \cdot \mathrm{B}\ (id, f) \\
\equiv\ & \qquad \{\mathrm{B}\ (f \cdot g, h \cdot k) = \mathrm{B}\ (f, h) \cdot \mathrm{B}\ (g, k)\} \\
& \mathrm{True}
\end{aligned}$$

Exercício 5

> Todo o ciclo-*while* que termina pode ser definido por
>
> $$\textbf{while}\ p\ f\ g = \textbf{tailr}\ ((g + f) \cdot (\neg \cdot p)?) \tag{F6}$$
>
> recorrendo ao combinador de "tail recursion"
>
> $$\textbf{tailr}\ f = [\![\text{join}, f]\!] \tag{F7}$$
>
> que é um hilomorfismo de base $B(X, Y) = X + Y$, para $\textbf{join} = [id, id]$.
>
> Derive uma definição *pointwise* de $\textbf{while}\ p\ f\ g$, sabendo que qualquer $h = [\![f, g]\!]$ que termina é tal que $h = f \cdot F\ h \cdot g$.

Resolução 5

$$
\begin{aligned}
\textbf{while}\ p\ f\ g &= \textbf{tailr}\ ((g + f) \cdot (\neg \cdot p)?) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \{\text{F7, Def. join}\} \\
&= [\![[id, id], (g + f) \cdot (\neg \cdot p)?]\!] \\
&\qquad \{h = [\![f, g]\!] \equiv h = f \cdot F\ h \cdot g, \text{F}\ f = \text{B}\ (id, f) = id + f\} \\
&= [id, id] \cdot (id + \textbf{while}\ p\ f\ g) \cdot (g + f) \cdot (\neg \cdot p)? \\
&\qquad\qquad \{\text{25: Functor-}+\text{, 22: Absorção-}+\} \\
&= [g, (\textbf{while}\ p\ f\ g) \cdot f] \cdot (\neg \cdot p)? \\
&\qquad\qquad \{\text{30: Def. condicional de McCharty}\} \\
&= (\neg \cdot p) \rightarrow g, (\textbf{while}\ p\ f\ g) \cdot f \\
&\qquad\qquad\qquad \{\neg \cdot p \rightarrow g, f = p \rightarrow f, g\} \\
&= p \rightarrow (\textbf{while}\ p\ f\ g) \cdot f, g \\
&\equiv \qquad\qquad\qquad \{\text{72. Ig. Ext., 82: Def-cond}\} \\
\textbf{while}\ p\ f\ g\ x &= \textbf{if}\ p\ x\ \textbf{then}\ (\textbf{while}\ p\ f\ g) \cdot f\ x\ \textbf{else}\ g\ x
\end{aligned}
$$

Exercício 6

> Considere a seguinte lei de fusão de $\mathbf{tailr}$, válida sempre que $\mathbf{tailr}\ g \cdot f$ termina:
>
> $$(\mathbf{tailr}\ g) \cdot f = \mathbf{tailr}\ h \Leftarrow (id + f) \cdot h = g \cdot f \tag{F8}$$
>
> Complete a seguinte demonstração dessa lei:
>
> […]

Resolução 6

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbf{tailr}\ g) \cdot f = \mathbf{tailr}\ h & \\
\equiv & \{\text{F7: Def. hylo. de } \mathbf{tailr}\} \\
(\!|\Delta|\!) \cdot [\![(g)]\!] \cdot f = (\!|\Delta|\!) \cdot [\![(h)]\!] & \\
\Leftarrow & \{\text{5: Leibniz}\} \\
[\![(g)]\!] \cdot f = [\![(h)]\!] & \\
\Leftarrow & \{\text{58: Fusão-ana, F } f = id + f\} \\
g \cdot f = (id + f) \cdot h &
\end{array}
$$

□

Exercício 7

Um mónade é um functor T equipado com duas funções μ e u,

$$A \xrightarrow{\quad u \quad} T\ A \xleftarrow{\quad \mu \quad} T\ (T\ A) \tag{F9}$$

que satisfazem as propriedades

$$\mu \cdot u = id = \mu \cdot T\ u \tag{F10}$$

$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot T\ \mu \tag{F11}$$

para além das respetivas propriedades "grátis", onde $T^2\ f$ abrevia $T\ (T\ f)$:

$$T\ f \cdot u = u \cdot f \tag{F12}$$

$$T\ f \cdot \mu = \mu \cdot T^2\ f \tag{F13}$$

Partindo da definição de composição monádica,

$$f \bullet g = \mu \cdot T\ f \cdot g \tag{F14}$$

demonstre os factos seguintes:

$$\mu \quad = \quad id \bullet id \tag{F15}$$

$$f \bullet u = f \quad \wedge \quad f = u \bullet f \tag{F16}$$

$$(f \cdot g) \bullet h \quad = \quad f \bullet (T\ g \cdot h) \tag{F17}$$

$$T\ f \quad = \quad (u \cdot f) \bullet id \tag{F18}$$