

# CP - Ficha 11

## Exercício 1

O diagrama que se segue

$$\begin{array}{ccccc} T_1 & \xleftarrow{\text{in}_1} & F T_1 & & \\ \downarrow \langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle & & \downarrow F \langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle & & \\ T_2 & \xleftarrow{\text{in}_2} G T_2 \xleftarrow{\alpha} & F T_2 & & \\ \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow G \langle g \rangle & & \downarrow F \langle g \rangle \\ C & \xleftarrow{g} G C \xleftarrow{\alpha} & F C & & \end{array} \quad (\text{F1})$$

compõe dois catamorfismos envolvendo dois tipos  $T_1$  (F-recursivo) e  $T_2$  (G-recursivo):

$$\langle g \rangle : T_2 \rightarrow C$$

$$\langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle : T_1 \rightarrow T_2$$

Considere-se o caso especial:

$$T_1 = T_2 = \text{LTree } A$$

$$F f = \text{id} + f \times f$$

$$\alpha = \text{id} + \text{swap}$$

$$\text{in}_2 = [\text{Leaf}, \text{Fork}]$$

Desenvolver

$$\text{mirror} = \langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle \quad (\text{F2})$$

até se obter uma definição completamente *pointwise*.

# Resolução 1

$$\begin{aligned}
\text{mirror} &= (\text{in}_2 \cdot \alpha) \\
&\equiv & (46: \text{Universal-cata}) \\
\text{mirror} \cdot \text{in}_2 &= \text{in}_2 \cdot \alpha \cdot F \text{ mirror} \\
&\equiv & (\text{Def. in}_2, \text{Def. } \alpha, \text{Def. Functor LTree}) \\
\text{mirror} \cdot [\text{Leaf}, \text{Fork}] &= [\text{Leaf}, \text{Fork}] \cdot (\text{id} + \text{swap}) \cdot (\text{id} + \text{mirror}^2) \\
&\equiv & (20: \text{Fusão-+}, 22: \text{Absorção-+}) \\
[\text{mirror} \cdot \text{Leaf}, \text{mirror} \cdot \text{Fork}] &= [\text{Leaf}, \text{Fork} \cdot \text{swap} \cdot \text{mirror}^2] \\
&\equiv & (27: \text{Eq-+}) \\
&\left\{ \begin{array}{l} \text{mirror} \cdot \text{Leaf} = \text{Leaf} \\ \text{mirror} \cdot \text{Fork} = \text{Fork} \cdot \text{swap} \cdot \text{mirror}^2 \end{array} \right. \\
&\equiv & (72: \text{Ig. Ext.}, 73 \text{ Def-comp}, 78: \text{Def-}\times, \text{Def. swap}) \\
&\left\{ \begin{array}{l} \text{mirror} (\text{Leaf } a) = \text{Leaf } a \\ \text{mirror} (\text{Fork } (l, r)) = \text{Fork } (\text{mirror } r, \text{mirror } l) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

## Exercício 2

A lei

$$(\llbracket g \rrbracket) \cdot (\text{in}_2 \cdot \alpha) = (\llbracket g \cdot \alpha \rrbracket) \Leftarrow G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f \quad (\text{F3})$$

verifica-se — cf. diagrama anterior — onde a condição

$$G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f \quad (\text{F4})$$

mais não é que a propriedade grátis de  $\alpha : F X \rightarrow G X$ . Apresente justificações para a seguinte demonstração de (F3):

[...]

$$\begin{aligned}
&(\llbracket g \rrbracket) \cdot (\text{in}_2 \cdot \alpha) = (\llbracket g \cdot \alpha \rrbracket) \\
&\Leftarrow & (49: \text{Fusão-cata}) \\
&(\llbracket g \rrbracket) \cdot \text{in}_2 \cdot \alpha = g \cdot \alpha \cdot F (\llbracket g \rrbracket) \\
&\equiv & (47: \text{Cancelamento-cata}) \\
&g \cdot G (\llbracket g \rrbracket) \cdot \alpha = g \cdot \alpha \cdot F (\llbracket g \rrbracket) \\
&\Leftarrow & (5: \text{Leibniz}) \\
&G (\llbracket g \rrbracket) \cdot \alpha = \alpha \cdot F (\llbracket g \rrbracket) \\
&\equiv & (f = \llbracket g \rrbracket) \\
&G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f
\end{aligned}$$

## Exercício 3

Na sequência da questão 1 acima, suponha que se tem  $\llbracket g \rrbracket = \text{mirror}$  em (F1). Mostre por (F3) que

$$\text{mirror} \cdot \text{mirror} = \text{id} \quad (\text{F5})$$

se verifica.

## Resolução 3

$$\begin{aligned} & \text{mirror} \cdot \text{mirror} = \text{id} \\ & \equiv (mirror = \llbracket g \rrbracket, \text{Def. } g, \text{Def. } \alpha, 48: \text{Reflexão-cata}) \\ & \llbracket \text{in} \cdot (\text{id} + \text{swap}) \rrbracket \cdot \llbracket \text{in} \cdot (\text{id} + \text{swap}) \rrbracket = \llbracket \text{in} \rrbracket \\ & \Leftarrow (\text{E1}, \text{F3}) \\ & G f \cdot (\text{id} + \text{swap}) = (\text{id} + \text{swap}) \cdot F f \\ & \equiv (G f = F f = \text{id} + f^2) \\ & (\text{id} + f^2) \cdot (\text{id} + \text{swap}) = (\text{id} + \text{swap}) \cdot (\text{id} + f^2) \\ & \equiv (25: \text{Functor-+} (2 \times)) \\ & \text{id} + (\text{swap} \cdot (f \times f)) = \text{id} + ((f \times f) \cdot \text{swap}) \\ & \equiv (\text{Prop. grátis de swap}) \\ & \text{True} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{E1}) \text{ Mostrar que } & \text{in} = (\text{in} \cdot (\text{id} + \text{swap})) \cdot (\text{id} + \text{swap}) \\ & \equiv (2: \text{Assoc-comp}, 25: \text{Functor-+}, 1: \text{Natural-id}) \\ & \text{in} = \text{in} \cdot (\text{id} + \text{swap} \cdot \text{swap}) \\ & \equiv (\text{swap} \cdot \text{swap} = \text{id}) \\ & \text{in} = \text{in} \cdot (\text{id} + \text{id}) \\ & \equiv (26: \text{Functor-id-+}) \\ & \text{True} \end{aligned}$$

Propriedade grátis de swap:

$$(g \times f) \cdot \text{swap} = \text{swap} \cdot (f \times g)$$

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\text{swap}} & B \times A \\ \downarrow & & \downarrow \\ f \times g & & g \times f \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' \times B' & \xrightarrow{\text{swap}} & B' \times A' \end{array}$$

## Exercício 4

---

Recordando a definição  $T f = (\text{in} \cdot B(f, id))$ , mostre que a lei de absorção-cata,

$$(g) \cdot T f = (g \cdot B(f, id))$$

é um caso particular de (F3).

### Resolução 4

$$(g) \cdot T f = (g \cdot B(f, id))$$

$$\equiv \quad (51: \text{Def-map-cata})$$

$$(g) \cdot (\text{in} \cdot B(f, id)) = (g \cdot B(f, id))$$

$$\Leftarrow \quad (F3)$$

$$G f \cdot B(f, id) = B(f, id) \cdot F f$$

$$\equiv \quad (G f = F f, 50: \text{Base-cata})$$

$$B(id, f) \cdot B(f, id) = B(f, id) \cdot B(id, f)$$

$$\equiv \quad (B(f \cdot g, h \cdot k) = B(f, h) \cdot B(g, k))$$

$$\text{True}$$

## Exercício 5

Todo o ciclo-*while* que termina pode ser definido por

$$\mathbf{while} \ p \ f \ g = \mathbf{tailr} \ ((g + f) \cdot (\neg \cdot p)?) \quad (\text{F6})$$

recorrendo ao combinador de “tail recursion”

$$\mathbf{tailr} \ f = \llbracket \text{join}, f \rrbracket \quad (\text{F7})$$

que é um hilomorfismo de base  $B(X, Y) = X + Y$ , para  $\text{join} = [id, id]$ .

Derive uma definição *pointwise* de  $\mathbf{while} \ p \ f \ g$ , sabendo que qualquer  $h = \llbracket f, g \rrbracket$  que termina é tal que  $h = f \cdot F \ h \cdot g$ .

## Resolução 5

$$\begin{aligned} \mathbf{while} \ p \ f \ g &= \mathbf{tailr} \ ((g + f) \cdot (\neg \cdot p)?) \\ &\quad (\text{F7, Def. join}) \\ &= \llbracket [id, id], (g + f) \cdot (\neg \cdot p)? \rrbracket \\ &\quad (h = \llbracket f, g \rrbracket \equiv h = f \cdot F \ h \cdot g, F \ f = B \ (id, f) = id + f) \\ &= [id, id] \cdot (id + \mathbf{while} \ p \ f \ g) \cdot (g + f) \cdot (\neg \cdot p)? \\ &\quad (25: \text{Functor-+}, 22: \text{Absorção-+}) \\ &= [g, (\mathbf{while} \ p \ f \ g) \cdot f] \cdot (\neg \cdot p)? \\ &\quad (30: \text{Def. condicional de McCharty}) \\ &= (\neg \cdot p) \rightarrow g, (\mathbf{while} \ p \ f \ g) \cdot f \\ &\quad (\neg \cdot p \rightarrow g, f = p \rightarrow f, g) \\ &= p \rightarrow (\mathbf{while} \ p \ f \ g) \cdot f, g \\ &\equiv \quad (72. \text{Ig. Ext.}, 82: \text{Def-cond}) \\ \mathbf{while} \ p \ f \ g \ x &= \mathbf{if} \ p \ x \ \mathbf{then} \ (\mathbf{while} \ p \ f \ g) \cdot f \ x \ \mathbf{else} \ g \ x \end{aligned}$$

## Exercício 6

---

Considere a seguinte lei de fusão de **tailr**, válida sempre que **tailr**  $g \cdot f$  termina:

$$(\mathbf{tailr} \ g) \cdot f = \mathbf{tailr} \ h \Leftrightarrow (id + f) \cdot h = g \cdot f \quad (\text{F8})$$

Complete a seguinte demonstração dessa lei:

[...]

## Resolução 6

$$\begin{aligned} & (\mathbf{tailr} \ g) \cdot f = \mathbf{tailr} \ h \\ & \quad \equiv \quad \quad \quad (\text{F7: Def. hylo. de } \mathbf{tailr}) \\ & \quad \llbracket \Delta \rrbracket \cdot \llbracket g \rrbracket \cdot f = \llbracket \Delta \rrbracket \cdot \llbracket h \rrbracket \\ & \quad \Leftarrow \quad \quad \quad (5: \text{Leibniz}) \\ & \quad \llbracket g \rrbracket \cdot f = \llbracket h \rrbracket \\ & \quad \Leftarrow \quad \quad \quad (58: \text{Fusão-ana, } F \ f = id + f) \\ & \quad g \cdot f = (id + f) \cdot h \end{aligned}$$

□

# Exercício 7

Um mónade é um functor  $T$  equipado com duas funções  $\mu$  e  $u$ ,

$$A \xrightarrow{u} T A \xleftarrow{\mu} T (T A) \quad (\text{F9})$$

que satisfazem as propriedades

$$\mu \cdot u = id = \mu \cdot T u \quad (\text{F10})$$

$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot T \mu \quad (\text{F11})$$

para além das respetivas propriedades “grátis”, onde  $T^2 f$  abrevia  $T (T f)$ :

$$T f \cdot u = u \cdot f \quad (\text{F12})$$

$$T f \cdot \mu = \mu \cdot T^2 f \quad (\text{F13})$$

Partindo da definição de composição monádica,

$$f \bullet g = \mu \cdot T f \cdot g \quad (\text{F14})$$

demonstre os factos seguintes:

$$\mu = id \bullet id \quad (\text{F15})$$

$$f \bullet u = f \quad \wedge \quad f = u \bullet f \quad (\text{F16})$$

$$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (T g \cdot h) \quad (\text{F17})$$

$$T f = (u \cdot f) \bullet id \quad (\text{F18})$$

## Resolução 7

F15

$$id \bullet id$$

$$=$$

(66: Composição monádica)

$$\mu \cdot T id \cdot id$$

$$=$$

(45: Functor-id-F)

$$\mu \cdot id \cdot id$$

$$=$$

(1: Natural-id ( $2 \times$ ))

$$\mu$$

## F16

$$\begin{aligned}
 & f \bullet u \\
 & = & (66: \text{Composi\c{c}\~ao mon\'adica}) \\
 & \mu \cdot T \ f \cdot u \\
 & = & (64: \text{Natural-}u) \\
 & \mu \cdot u \cdot f \\
 & = & (63: \text{Unidade, 1: Natural-id}) \\
 & f \\
 \\
 & u \bullet f \\
 & = & (66: \text{Composi\c{c}\~ao mon\'adica}) \\
 & \mu \cdot T \ u \cdot f \\
 & = & (63: \text{Unidade, 1: Natural-id}) \\
 & f
 \end{aligned}$$

## F17

$$\begin{aligned}
 & (f \cdot g) \bullet h \\
 & = & (66: \text{Composi\c{c}\~ao mon\'adica}) \\
 & \mu \cdot T \ (f \cdot g) \cdot h \\
 & = & (44: \text{Functor-F, 2: Assoc-comp}) \\
 & \mu \cdot T \ f \cdot (T \ g \cdot h) \\
 & = & (66: \text{Composi\c{c}\~ao mon\'adica}) \\
 & f \bullet (T \ g \cdot h)
 \end{aligned}$$

## F18

$$\begin{aligned}
 & (u \cdot f) \bullet id \\
 & = & (66: \text{Composi\c{c}\~ao mon\'adica}) \\
 & \mu \cdot T \ (u \cdot f) \cdot id \\
 & = & (44: \text{Functor-F, 1: Natural-id}) \\
 & \mu \cdot T \ u \cdot T \ f \\
 & = & (63: \text{Unidade, 1: Natural-id}) \\
 & T \ f
 \end{aligned}$$