



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

## **Cálculo de Programas**

### Trabalho Prático (2024/25)

Lic. em Engenharia Informática

#### **Grupo 7**

a95485	Miguel Torres Carvalho
a96587	Flávia Alexandra da Silva Araújo
a104001	Frederico Cunha Afonso

## Preâmbulo

Em [Cálculo de Programas](#) pretende-se ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em [Haskell](#) (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em [Haskell](#). Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo [A](#) onde encontrarão as instruções relativas ao *software* a instalar, etc.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

## Problema 1

Esta questão aborda um problema que é conhecido pela designação '*H-index of a Histogram*' e que se formula facilmente:

*O h-index de um histograma é o maior número  $n$  de barras do histograma cuja altura é maior ou igual a  $n$ .*

Por exemplo, o histograma

$$h = [5, 2, 7, 1, 8, 6, 4, 9]$$

que se mostra na figura



tem *hindex*  $h = 5$  pois há 5 colunas maiores que 5. (Não é 6 pois maiores ou iguais que seis só há quatro.)

Pretende-se definida como um catamorfismo, anamorfismo ou hilomorfismo uma função em Haskell

$$\text{hindex} :: [Int] \rightarrow (Int, [Int])$$

tal que, para  $(i, x) = \text{hindex } h$ ,  $i$  é o H-index de  $h$  e  $x$  é a lista de colunas de  $h$  que para ele contribuem.

A proposta de *hindex* deverá vir acompanhada de um **diagrama** ilustrativo.

## Problema 2

Pelo [teorema fundamental da aritmética](#), todo número inteiro positivo tem uma única factorização prima. Por exemplo,

```
primes 455
[5,7,13]
primes 433
[433]
primes 230
[2,5,23]
```

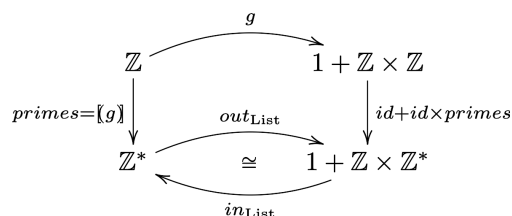
1. Implemente como anamorfismo de listas a função

$$primes :: \mathbb{Z} \rightarrow [\mathbb{Z}]$$

que deverá, recebendo um número inteiro positivo, devolver a respectiva lista de factores primos.

A proposta de *primes* deverá vir acompanhada de um **diagrama** ilustrativo.

2. A figura mostra a “árvore dos primos” dos números [455, 669, 6645, 34, 12, 2].



Com base na alínea anterior, implemente uma função em Haskell que faça a geração de uma tal árvore a partir de uma lista de inteiros:

$$prime\_tree :: [\mathbb{Z}] \rightarrow Exp \mathbb{Z} \mathbb{Z}$$

**Sugestão:** escreva o mínimo de código possível em *prime\_tree* investigando cuidadosamente que funções disponíveis nas bibliotecas que são dadas podem ser reutilizadas.<sup>1</sup>

## Problema 3

A convolução  $a \star b$  de duas listas  $a$  e  $b$  — uma operação relevante em computação — está muito bem explicada [neste vídeo](#) do canal **3Blue1Brown** do YouTube, a partir de  $t = 6 : 30$ . Aí se mostra como, por exemplo:

$$[1, 2, 3] \star [4, 5, 6] = [4, 13, 28, 27, 18]$$

A solução abaixo, proposta pelo chatGPT,

```
convolve :: Num a => [a] -> [a] -> [a]
convolve xs ys = [sum $ zipWith (*) (take n (drop i xs)) ys | i <- [0..(length xs - n)]]
where n = length ys
```

está manifestamente errada, pois  $convolve [1, 2, 3] [4, 5, 6] = [32] (!)$ .

<sup>1</sup> Pense sempre na sua produtividade quando está a programar — essa atitude será valorizada por qualquer empregador que vier a ter.

Proponha, explicando-a devidamente, uma solução sua para *convolve*. Valorizar-se-á a economia de código e o recurso aos combinadores *pointfree* estudados na disciplina, em particular a triologia *ana-cata-hilo* de tipos disponíveis nas bibliotecas dadas ou a definir.

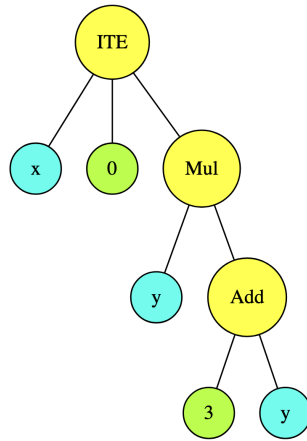
## Problema 4

Considere-se a seguinte sintaxe (abstrata e simplificada) para **expressões numéricas** (em  $b$ ) com variáveis (em  $a$ ),

**data**  $Expr\ b\ a = V\ a \mid N\ b \mid T\ Op\ [Expr\ b\ a]$  **deriving**  $(Show, Eq)$

**data**  $Op = ITE \mid Add \mid Mul \mid Suc$  **deriving**  $(Show, Eq)$

possivelmente condicionais (cf. *ITE*, i.e. o operador condicional “if-then-else”). Por exemplo, a árvore mostrada a seguir



representa a expressão

$ite\ (V\ "x")\ (N\ 0)\ (multi\ (V\ "y")\ (soma\ (N\ 3)\ (V\ "y")))$  (1)

– i.e. **if**  $x$  **then**  $0$  **else**  $y * (3 + y)$  – assumindo as “helper functions”:

$soma\ x\ y = T\ Add\ [x, y]$

$multi\ x\ y = T\ Mul\ [x, y]$

$ite\ x\ y\ z = T\ ITE\ [x, y, z]$

No anexo E propõe-se uma base para o tipo *Expr* (*baseExpr*) e a correspondente algebra *inExpr* para construção do tipo *Expr*.

1. Complete as restantes definições da biblioteca *Expr* pedidas no anexo F.
2. No mesmo anexo, declare *Expr b* como instância da classe *Monad*. **Sugestão:** relembre os exercícios da ficha 12.
3. Defina como um catamorfismo de *Expr* a sua versão monádica, que deverá ter o tipo:

$mcataExpr :: Monad\ m \Rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow (Op, m\ [c])) \rightarrow m\ c) \rightarrow Expr\ b\ a \rightarrow m\ c$

4. Para se avaliar uma expressão é preciso que todas as suas variáveis estejam instanciadas. Complete a definição da função

$let\_exp :: (Num\ c) \Rightarrow (a \rightarrow Expr\ c\ b) \rightarrow Expr\ c\ a \rightarrow Expr\ c\ b$

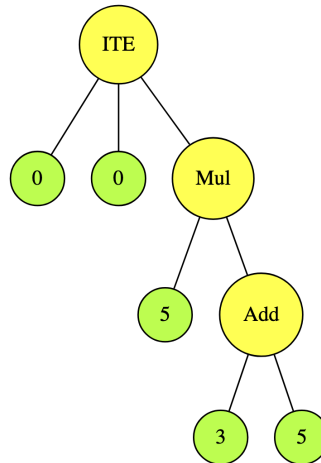
que, dada uma expressão com variáveis em  $a$  e uma função que a cada uma dessas variáveis atribui uma expressão ( $a \rightarrow Expr\ c\ b$ ), faz a correspondente substituição.<sup>1</sup> Por exemplo, dada

$$\begin{aligned} f\ "x" &= N\ 0 \\ f\ "y" &= N\ 5 \\ f\ \_ &= N\ 99 \end{aligned}$$

ter-se-á

$$let\_exp\ f\ e = T\ ITE\ [N\ 1, N\ 0, T\ Mul\ [N\ 5, T\ Add\ [N\ 3, N\ 1]]]$$

isto é, a árvore da figura a seguir:



5. Finalmente, defina a função de avaliação de uma expressão, com tipo

$$evaluate :: (Num\ a, Ord\ a) \Rightarrow Expr\ a\ b \rightarrow Maybe\ a$$

que deverá ter em conta as seguintes situações de erro:

- (a) *Variáveis* — para ser avaliada,  $x$  em  $evaluate\ x$  não pode conter variáveis. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} evaluate\ e &= Nothing \\ evaluate\ (let\_exp\ f\ e) &= Just\ 40 \end{aligned}$$

para  $f$  e  $e$  dadas acima.

- (b) *Aridades* — todas as ocorrências dos operadores deverão ter o devido número de sub-expressões, por exemplo:

$$\begin{aligned} evaluate\ (T\ Add\ [N\ 2, N\ 3]) &= Just\ 5 \\ evaluate\ (T\ Mul\ [N\ 2]) &= Nothing \end{aligned}$$

**Sugestão:** de novo se insiste na escrita do mínimo de código possível, tirando partido da riqueza estrutural do tipo  $Expr$  que é assunto desta questão. Sugere-se também o recurso a diagramas para

<sup>1</sup> Cf. expressões **let ... in...**

explicar as soluções propostas.

## Anexos

### A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

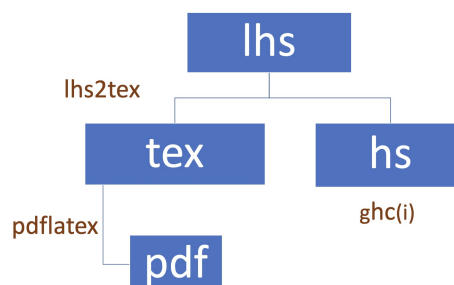
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita “[literária](#)” [?], cujo princípio base é o seguinte:

*Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2425t.pdf` que está a ler é já um exemplo de [programação literária](#): foi gerado a partir do texto fonte `cp2425t.lhs`<sup>1</sup> que encontrará no [material pedagógico](#) desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2425t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código [Haskell](#) que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do [GHCi](#), serão necessários os executáveis [pdflatex](#) e [lhs2TeX](#). Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do [Docker](#) tal como a seguir se descreve.

### B Docker

Recomenda-se o uso do [container](#) cuja imagem é gerada pelo [Docker](#) a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2425t.zip`. Este [container](#) deverá ser usado na execução do [GHCi](#) e dos comandos relativos ao [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#). (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

---

<sup>1</sup> O sufixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Após [instalar o Docker](#) e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2425t .  
$ docker run -v ${PWD}:/cp2425t -it cp2425t
```

**NB:** O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o [GHCi](#) e os comandos relativos ao [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#). Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2425t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2425t` no [container](#) sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no [container](#), executando:

```
$ lhs2TeX cp2425t.lhs > cp2425t.tex  
$ pdflatex cp2425t
```

[lhs2TeX](#) é o pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#) e que faz parte já do [container](#). Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2425t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em [Haskell](#), para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2425t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2425t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}  
...  
\end{code}
```

é seleccionado pelo [GHCi](#) para ser executado.

## C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo [F](#) com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com [Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>](#)) e o índice remissivo (com [makeindex](#)),

```
$ bibtex cp2425t.aux  
$ makeindex cp2425t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no [container](#).)

No anexo [E](#) disponibiliza-se algum código [Haskell](#) relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da [programação literária](#) para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo [D](#) que se segue.

## D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte ([lhs](#)) do que está a ler<sup>1</sup> onde se obtém o efeito seguinte:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* [xymatrix](#), por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \text{\scriptsize $\langle g \rangle$} \downarrow & & \downarrow \text{\scriptsize $id + \langle g \rangle$} \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

## E Código fornecido

### Problema 1

$h :: [Int]$

### Problema 4

Definição do tipo:

$inExpr = [V, [N, \widehat{T}]]$   
 $baseExpr\ g\ h\ f = g + (h + id \times \text{map}\ f)$

Exemplos de expressões:

$e = \text{ite}\ (V\ "x")\ (N\ 0)\ (\text{multi}\ (V\ "y")\ (\text{soma}\ (N\ 3)\ (V\ "y")))$   
 $i = \text{ite}\ (V\ "x")\ (N\ 1)\ (\text{multi}\ (V\ "y")\ (\text{soma}\ (N\ (3 / 5))\ (V\ "y")))$

Exemplo de teste:

$\text{teste} = \text{evaluate}\ (\text{let\_exp}\ f\ i) \equiv \text{Just}\ (26 / 245)$   
**where**  $f\ "x" = N\ 0; f\ "y" = N\ (1 / 7)$

<sup>1</sup> Procure e.g. por "sec:diagramas".

<sup>2</sup> Exemplos tirados de [?].



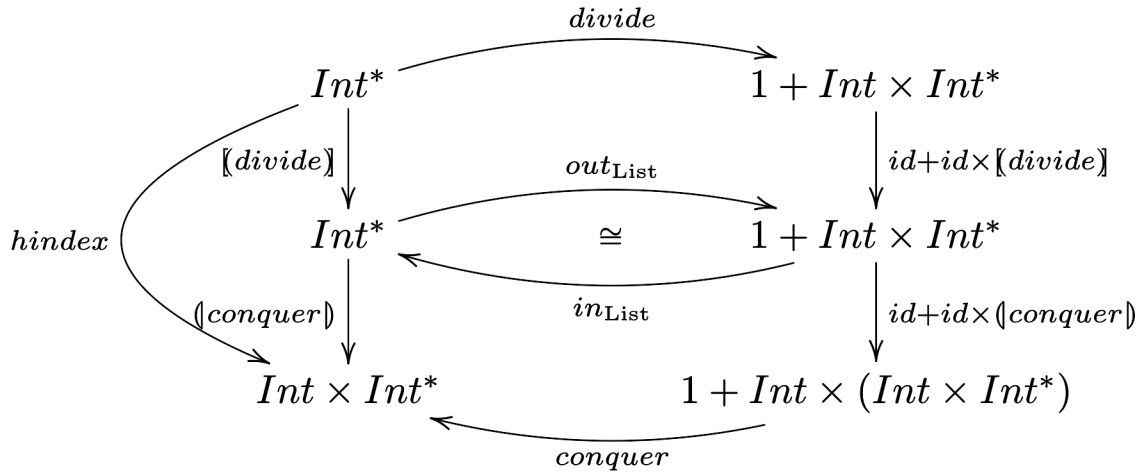
## F Soluções dos alunos

### Problema 1

O *h-index* de um histograma é o maior número  $n$  de barras do histograma cuja altura é maior ou igual a  $n$ .

Para a resolução deste problema, recorreu-se a uma estratégia de divisão e conquista com recurso a um hilomorfismo de listas, definido na biblioteca [List](#), com o anamorfismo responsável por ordenar a lista de *input* de forma crescente e o catamorfismo que, iterativamente, seleciona os elementos, incrementando o valor de *h-index*, em que  $n$  corresponde aos  $n$  elementos maiores ou iguais a  $n$ , sendo esta condição um invariante ao longo das iterações do catamorfismo. Graças à forma recursiva do catamorfismo, dada pelo functor do catamorfismo *conquer*, é possível iterar sobre a lista de forma decrescente, garantindo que o valor de *h-index* é o maior possível.

A estrutura de dados intermédia deste hilomorfismo é uma lista de inteiros, do tipo  $[Int]$ , esta correspondendo à saída do anamorfismo *divide* e à respetiva entrada do catamorfismo *conquer*.



```

hindex =  $\llbracket conquer, divide \rrbracket$ 
where
  conquer = [g1, g2]
  g1 = 0, []
  g2 (h, t@(i, x))
    | h > i = (i + 1, h : x)
    | otherwise = t
  divide [] = i1 ()
  divide xs = let m = minimum xs
             in i2 (m, delete m xs)

```

Para além da solução apresentada, foi também desenvolvida uma solução alternativa que recorre somente a um catamorfismo de listas, modificado de forma a que a função *out* seja capaz, aquando a lista de entrada não é vazia, de dividir a lista em duas partes, uma com o valor mínimo e outra com o restante da lista. Deste modo, a funcionalidade do anamorfismo *divide* é incorporada na função *out*.

A seguinte solução alternativa é 100% *pointfree*, com a função *g2* do gene do catamorfismo redesenhada, assim como a função *out*, esta, como supramencionado, equivalente à função *divide* da solução principal.

$$\begin{array}{ccc}
 Int^* & \xrightarrow{outSortList} & 1 + Int \times Int^* \\
 \downarrow \scriptstyle hindex' = \llbracket conquer \rrbracket & & \downarrow \scriptstyle id + id \times hindex' \\
 Int \times Int^* & \xleftarrow{conquer} & 1 + Int \times (Int \times Int^*)
 \end{array}$$

$hindex' :: [Int] \rightarrow (Int, [Int])$

$hindex' = \llbracket conquer \rrbracket$

**where**

$conquer = [g1, g2]$

$g1 = \underline{0}, []$

$g2 = \underline{cond} \left( (\widehat{(>)}) \cdot (id \times \pi_1) \right)$   
 $\langle succ \cdot \pi_1 \cdot \pi_2, cons \cdot (id \times \pi_2) \rangle$   
 $\pi_2$

$outSortList = cond ([] \equiv)$

$(i_1 \cdot (!))$

$(i_2 \cdot \langle \pi_1, \widehat{delete} \rangle \cdot \langle minimum, id \rangle)$

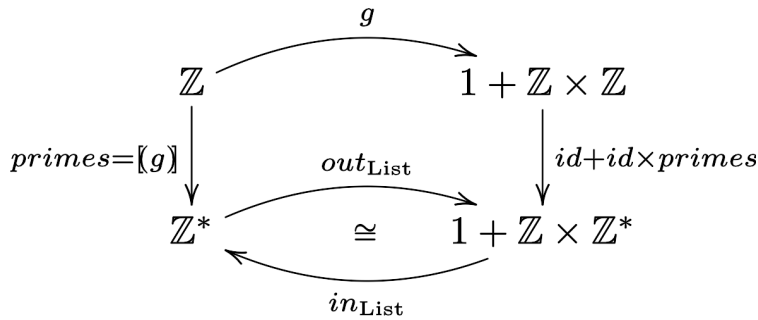
$\llbracket g \rrbracket = g \cdot recList \llbracket g \rrbracket \cdot outSortList$

## Problema 2

Para a descoberta dos fatores primos de um número, não negativo, foi implementado um anamorfismo de listas, *primes*, que, para um dado número, devolve a sua lista única de fatores primos.

Este anamorfismo é definido por um gene que, para um número  $n$ , verifica se este é menor que 2, caso em que devolve um valor à esquerda do tipo  $1 + \text{Int} \times \text{Int}$  que indica o fim da iteração, ou, caso contrário, devolve um valor à direita do tipo  $1 + \text{Int} \times \text{Int}$  cujo a primeira componente do par é o menor fator primo de  $n$  e a segunda componente é o quociente da divisão de  $n$  pelo seu menor fator primo, para que a iteração continue.

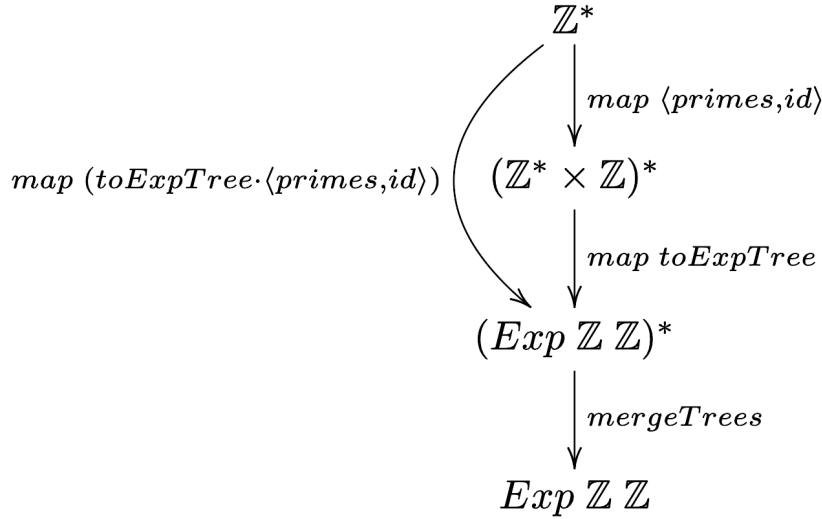
Para obtenção do menor fator primo de um número  $n$ , recorre-se a uma lista de inteiros por compreensão,  $x \leftarrow [2..n]$ , que, para cada  $x$ , verifica se  $n \text{ 'mod' } x \equiv 0$ , ou seja, se  $x$  é um fator de  $n$ . Caso seja,  $x$  é o menor fator primo de  $n$  e devolve-se o par  $(x, n \text{ 'div' } x)$ .



```
primes = [g]
where
  g n
    | n < 2 = i1 ()
    | otherwise = let p = head [x | x ← [2..n], n 'mod' x ≡ 0]
                  in i2 (p, n 'div' p)
```

Para a geração da árvore de primos de um conjunto de inteiros, optou-se por uma estratégia composta por dois passos principais:

1. Geração de uma de árvore de expressões após a obtenção da lista de fatores primos para cada número do conjunto de entrada, recorrendo às funções *toExpTree* e  $\langle \text{primes}, \text{id} \rangle$ , respetivamente.
2. Construção da árvore de primos, com recurso à função *mergeTrees*, que recebe uma lista de árvores de expressões e as funde numa única árvore.



$\text{prime\_tree} = \text{mergeTrees} \cdot \text{map } (\text{toExpTree} \cdot \langle \text{primes}, \text{id} \rangle)$

$\text{toExpTree } ([], x) = \text{Var } x$

$\text{toExpTree } (x : xs, y) = \text{Term } x \ [\text{toExpTree } (xs, y)]$

$\text{mergeTrees } [\text{tree}] = \text{tree}$

$\text{mergeTrees } \text{trees} = \text{Term } 1 \ (\text{mergeSubtrees } \text{trees})$

$\text{mergeSubtrees } [] = []$

$\text{mergeSubtrees } [\text{tree}] = [\text{tree}]$

$\text{mergeSubtrees } (\text{Term } o \ xs : \text{Term } o' \ ys : \text{trees})$

$| o \equiv o' = \text{mergeSubtrees } (\text{Term } o \ (xs ++ ys) : \text{trees})$

$| \text{otherwise} = \text{Term } o \ xs : \text{mergeSubtrees } (\text{Term } o' \ ys : \text{trees})$

$\text{mergeSubtrees } (\text{tree} : \text{trees}) = \text{tree} : \text{mergeSubtrees } \text{trees}$

## Problema 3

### Solução Elaborada

```
convolve :: Num a => [a] -> [a] -> [a]
convolve = (conquer) . divide
  where
    (. :) :: (c -> d) -> (a -> b -> c) -> a -> b -> d
    (. :) = (.) . (.)
    divide = zipper . cond ((>) . (length × length)) swap id
    zipper n m = zip (replicate l n) (map (h m) [1..l])
      where
        l = length n + length m - 1
    h xs i = (++) r . reverse . take (i - l) $ drop l xs
      where
        l = max 0 (i - length xs)
        r = replicate l 0
    conquer = [g1, g2]
    g1 = nil
    g2 = cons . (f × id)
    f = sum . (zipWith (*))
```

### Alternativa

---

```
convolve' = drop . (diffTamanho, [conquer, divide] . inFormat . checkGreater)
  where
    diffTamanho = abs . (−) . (length × length)
    checkGreater = cond ((>) . (length × length)) id swap
    inFormat = ⟨id, swap . ⟨flip (−) 1 . (2*) . length . π1, π2⟩⟩
    conquer = [nil, cons . (applyMaths × id)]
      where applyMaths = sum . (zipWith (*)) . swap . π1
    divide = cond ((0 ≡) . π2 . π2) (i1 . (!)) (i2 . dup . ⟨π1 . π1, listaTorna⟩, (id × flip (−) 1) . π2)
      where
        listaTorna = buildPair . ⟨π2, length . π1 . π1⟩
        buildPair = drop . ⟨π2 . π1, (++) . ⟨flip replicate 0 . π2, reverse . π1 . π1⟩⟩
```

## Problema 4

Definição do tipo:

$$\text{outExpr} = \perp$$

$$\text{recExpr} = \perp$$

*Ana + cata + hylo:*

$$\text{cataExpr } g = \perp$$

$$\text{anaExpr } g = \perp$$

$$\text{hyloExpr } h \, g = \perp$$

*Maps: Monad: Let expressions:*

$$\text{let\_exp} = \perp$$

Catamorfismo monádico:

$$\text{mcataExpr } g = \perp$$

Avaliação de expressões:

$$\text{evaluate} = \perp$$