**Tema:** EDO's exatas.
Resolução de exercícios.

## EDO's Exatas

Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ duas funções contínuas num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. A equação na forma:

$$M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$$

ou

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

diz-se exata se existe uma função $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ tal que:

$$\boxed{M(x,y) = \frac{dF}{dx}} \quad \text{e} \quad \boxed{N(x,y) = \frac{dF}{dy}}$$

ou, de outra forma:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

Teorema de Schwarz

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dy}\right)$$

Para encontrar o integral geral desta EDO basta encontrarmos a função F, usando integração.

## Exemplo

$$\underbrace{y^2}_{M(x,y)} dx + \underbrace{2xy}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{dM}{dy} = (y^2)'_y = 2y \quad e \quad \frac{dN}{dx} = (2xy)'_x = 2y$$

iguais

$\therefore$ A EDO é exata!

Como $M(x,y) = y^2 = \frac{dF}{dx}$, então:

$$F(x,y) = \int y^2 dx = y^2 x + C(y)$$

Como $N(x,y) = 2xy = \frac{dF}{dy}$, então:

$$F(x,y) = \int 2xy\, dy = 2x\frac{y^2}{2} + C(x) = xy^2 + C(x)$$

Então $F(x,y) = xy^2$

O integral geral de uma EDO exata escreve-se como:

$$F(x,y) = C \quad , C \in \mathbb{R}$$

## Exemplo:

$$\underbrace{(y + 2xe^y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x^2e^y + x - 2y)}_{N(x,y)}dy = 0$$

iguais

$$\frac{dM}{dy} = (y + 2xe^y)'_y = 1 + 2xe^y$$

$$\frac{dN}{dx} = (x^2e^y + x - 2y)'_x = e^y 2x + 1 = 2xe^y + 1$$

$\therefore$ É exata!

Vamos encontrar $F(x,y)$:

$$M = \frac{dF}{dx} \Rightarrow F(x,y) = \int y + 2xe^y \, dx$$

$$= yx + 2e^y\frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$= yx + x^2e^y + C(y)$$

$$N = \frac{dF}{dy} \Rightarrow F(x,y) = \int (x^2e^y + x - 2y)\,dy$$

$$= x^2e^y + xy - y^2 + C(x)$$

Então, $F(x,y) = x^2e^y + xy - y^2$

Integral geral da EDO exata:

$$F(x,y) = C \iff x^2e^y + xy - y^2 = C \quad , \quad C \in \mathbb{R}^2$$

# Exercícios Revisão

1. A EDO $y + y' \operatorname{cosec}(x) = 0$

- [ ] Está escrita na forma normal
- [ ] E uma EDO de 2ª ordem
- [ ] É uma EDO de variáveis separáveis
- [ ] É uma EDO homogénea

2. A EDO $y^2 + y = (x^2 - x)y'$ é uma EDO :

- [ ] Linear
- [ ] Variáveis separáveis
- [ ] Homogénea
- [ ] Bernoulli

3. Identifica o tipo das seguintes EDO's:

a) $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$

b) $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$

c) $xy' + y - e^{x} = 0 \qquad x > 0$

4. Considere a equação diferencial

$$-(3x^2 - 4y^2)y' + 2xy = 0, \text{ com } x > 0$$

- [ ] É uma EDO Linear
- [ ] É uma EDO homogénea
- [ ] É uma EDO linear
- [ ] É uma EDO variáveis separáveis

5. A EDO $xy' - y = x - 1$, $x > 0$, é:

- [ ] uma EDO homogénea
- [ ] uma EDO Linear homogénea
- [ ] uma EDO Linear
- [ ] uma EDO Exata.

6. Encontra a solução do Problema de Cauchy.

$$\begin{cases} x^2 y' - 2xy = 3y^4 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A EDO $xy' - y = x - 1$ , $x > 0$, tem como fator integrante:

- [ ] $\mu(x) = x^2$
- [ ] $\mu(x) = x$
- [ ] $\mu(x) = \frac{1}{x}$
- [ ] $\mu(x) = \ln(x)$