Tema: EDO's exatas.
Resolução de exercícios de revisão para o MT.

EDO's Exatas

Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ duas funções contínuas num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. A equação na forma:

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$$

ou

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

diz-se exata se existe uma função $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que:

$$\boxed{M(x,y) = \frac{dF}{dx}} \quad e \quad \boxed{N(x,y) = \frac{dF}{dy}}$$

ou, de outra forma:

$$\boxed{\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}}$$

Teorema de Schwarz

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dy}\right)$$

Para encontrar o integral geral desta EDO basta encontrarmos a função F, usando integração.

Exemplo 1

$$\underbrace{y^2}_{M(x,y)} dx + \underbrace{2xy}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$\frac{dM}{dy} = (y^2)'_y = 2y \quad \text{e} \quad \frac{dN}{dx} = (2xy)'_x = 2y$$

iguais

$\therefore$ A EDO é exata!

A função F tem de verificar as duas condições

Como $M(x,y) = y^2 = \frac{dF}{dx}$, então:

$$F(x,y) = \int y^2\,dx = y^2 x + C(y)$$

Como $N(x,y) = 2xy = \frac{dF}{dy}$, então:

$$F(x,y) = \int 2xy\,dy = 2x\frac{y^2}{2} + C(x) = xy^2 + C(x)$$

Então podemos considerar $F(x,y) = xy^2$

O integral geral de uma EDO exata escreve-se como: $F(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$

Neste exemplo seria $xy^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2

$$\underbrace{(y + 2xe^{y})}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(x^2e^y + x - 2y)}_{N(x,y)}dy = 0$$

iguais

$$\frac{dM}{dy} = (y + 2xe^y)'_y = 1 + 2xe^y$$

$$\frac{dN}{dx} = (x^2e^y + x - 2y)'_x = e^y 2x + 1 = 2xe^y + 1$$

$\therefore$ É exata!

Vamos encontrar $F(x,y)$:

$$M = \frac{dF}{dx} \Rightarrow F(x,y) = \int y + 2xe^y \, dx$$

$$= yx + 2e^y \frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$= yx + x^2e^y + C(y)$$

$$N = \frac{dF}{dy} \Rightarrow F(x,y) = \int (x^2e^y + x - 2y)dy$$

$$= x^2e^y + xy - y^2 + C(x)$$

Então, $F(x,y) = x^2e^y + xy - y^2$

<u>Integral geral da EDO exata:</u>

$$F(x,y) = C \Leftrightarrow x^2e^y + xy - y^2 = C \quad , \quad C \in \mathbb{R}^2$$

Existem certas funções auxiliares que permitem transformar uma dada EDO não exata numa equação desse tipo. Chama-se fator integrante da equação:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

a toda a função μ(x, y) não nula tal que a equação

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

é Exata.

Encontrar $\mu(x,y)$ pode ser complicado mas se depender apenas de uma variável ($\mu(x)$ ou $\mu(y)$) torna-se mais simples.

- Se $\dfrac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = g(x)$ Depende apenas de x

então $\mu(x) = e^{\int g(x)\,dx}$

- Se $\dfrac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{M} = h(y)$ Depende apenas de y

então $\mu(y) = e^{\int - h(y)\,dy}$

Exemplo 3

$$2\cos y\,dx - \operatorname{sen} y\,dy = 0$$

$$\underbrace{2\cos y}_{M(x,y)}\,dx\,\underbrace{-\,\operatorname{sen} y}_{N(x,y)}\,dy = 0$$

$$\frac{dM}{dy} = (2\cos y)'_y = -2\operatorname{sen} y$$

$$\frac{dN}{dx} = (-\operatorname{sen} y)'_x = 0$$

$\neq$ Não é exata!

Vejamos se o <u>fator integrante pode depender de x</u>:

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \frac{-2\operatorname{sen} y - 0}{-\operatorname{sen} y} = \frac{-2\operatorname{sen} y}{-\operatorname{sen} y} = 2 = g(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

$$2\cos y\,dx - \operatorname{sen} y\,dy = 0 \quad \times\,\mu(x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2e^{2x}\cos y\,dx}_{\mu M} - \underbrace{e^{2x}\cdot\operatorname{sen} y\,dy}_{\mu N} = 0 \quad (*)$$

$$(\mu M)'_y = -2e^{2x}\operatorname{sen} y$$

$$(\mu N)'_x = -2e^{2x}\operatorname{sen} y$$

$=$ Como podemos verificar a EDO $(*)$ já é exata.

Vamos encontrar o integral geral:

$$\frac{dF}{dx} = \mu M \Rightarrow F(x,y) = \int 2e^{2x} \cos y \, dx$$

$$= \cos y \int \underbrace{2e^{2x}}_{u' e^u} dx = \cos(y)\, e^{2x} + C(y)$$

$$\frac{dF}{dy} = \mu N \Rightarrow F(x,y) = \int - e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(y)\, dy$$

$$= -e^{2x} \int \operatorname{sen}(y)\, dy = e^{2x} \cos(y) + C(x)$$

Então podemos considerar $F(x,y) = e^{2x} \cos(y)$

E, assim, o integral geral da EDO exata pode ser escrito na forma: $F(x,y) = C$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \cos y = C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 4

$$\underbrace{3xy + y^2}_{M(x,y)} + \underbrace{(x^2 + xy)}_{N(x,y)}\, y' = 0 \qquad x > 0$$

$$\frac{dM}{dy} = (3xy + y^2)'_y = 3x + 2y$$

$$\frac{dN}{dx} = (x^2 + xy)'_x = 2x + y$$

$\neq$ Não é exata!

Vejamos se o <u>fator integrante pode depender de x:</u>

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \frac{3x+2y-(2x+y)}{x^2+xy} = \frac{\cancel{x+y}}{x(\cancel{x+y})} = \frac{1}{x} = g(x)$$

então $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x \quad , x>0$

Sabemos que,

$$\mu(x)\, M(x,y) + \mu(x)\, N(x,y)\, y' = 0$$

será uma EDO Exata!

$$\Rightarrow \underbrace{(3xy+y^2)x}_{\mu M} + \underbrace{(x^2+xy)x}_{\mu N} y' = 0$$

$$F(x,y) = \int 3x^2y + xy^2\, dx$$

Porque $\mu M = \frac{dF}{dx}$

$$= 3y\frac{x^3}{3} + y^2\frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$= x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$$

Porque $\mu N = \frac{dF}{dy}$

$$F(x,y) = \int x^3 + x^2y\, dy$$

$$= x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C(x)$$

$$F(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2}$$ //

<u>Integral geral</u>: $F(x,y) = C$

$C \in \mathbb{R}$

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C$$ //

Exemplo 5

$$\underbrace{y^2 \cos x}_{M(x,y)}\, dx + \underbrace{(4 + 5y\, \text{sen}\, x)}_{N(x,y)}\, dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dM}{dy} = \cos x\, 2y \\ \frac{dN}{dx} = 5y\cos x \end{array}\right\} \neq$$ $\therefore$ Não é exata!

Vejamos se o <u>fator integrante pode depender de y</u>:

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{M} = \frac{2y\cos x - 5y\cos x}{y^2 \cos x} = \frac{-3\cancel{y}\cancel{\cos x}}{y^{\cancel{2}}\cancel{\cos x}} = \underbrace{-\frac{3}{y}}_{h(y)}$$

$$\mu(y) = e^{\int -\left(-\frac{3}{y}\right)dy} = e^{3\ln|y|} = y^3 \quad , \quad y > 0$$

Então $\mu(y)M(x,y) + \mu(y)N(x,y)$ é exata!

$$\Rightarrow y^3 y^2 \cos(x) + (4y^3 + 5y^4 \operatorname{sen} x)\, y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y^5 \cos(x)}_{\mu M} + \underbrace{(4y^3 + 5y^4 \operatorname{sen} x)}_{\mu N}\, y' = 0$$

Vamos encontrar o integral geral:

$$\frac{dF}{dx} = \mu M \implies F(x,y) = \int y^5 \cos x \, dx$$

$$= y^5 \int \cos(x)\, dx = y^5 \operatorname{sen}(x) + C(y)$$

$$\frac{dF}{dy} = \mu N \implies F(x,y) = \int 4y^3 + 5y^4 \operatorname{sen} x \, dy$$

$$= y^4 + \operatorname{sen}(x) \times y^5 + C(x)$$

Então $F(x,y) = y^4 + y^5 \operatorname{sen}(x)$ (Por exemplo)

e o integral geral é:

$$y^4 + y^5 \operatorname{sen}(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exercícios revisão sobre EDO's de primeira ordem

$$\downarrow$$

Exercícios Revisão

1. A EDO $y + y' \operatorname{cosec}(x) = 0$

- [ ] Está escrita na forma normal
- [ ] E uma EDO de 2ª ordem
- [x] É uma EDO de variáveis separáveis
- [ ] É uma EDO homogénea

2. A EDO $y^2 + y = (x^2 - x)y'$ é uma EDO:

- [ ] Linear
- [x] Variáveis separáveis
- [ ] Homogénea
- [ ] Exata

3. Identifica o tipo das seguintes EDO's:

a) $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ VS

b) $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$ H

c) $xy' + y - e^{x} = 0 \quad x > 0$ L

4. Considere a equação diferencial

$$-(3x^2 - 4y^2)y' + 2xy = 0, \text{ com } x > 0$$

- ☐ É uma EDO Linear
- ☒ É uma EDO homogénea
- ☐ É uma EDO Exata
- ☐ É uma EDO variáveis separáveis

5. A EDO $xy' - y = x - 1$, $x > 0$, é:

- ☐ uma EDO homogénea
- ☐ uma EDO Linear homogénea
- ☒ uma EDO Linear
- ☐ uma EDO Exata.

6. Encontra a solução do Problema de Cauchy.

$$\begin{cases} x^2 y' - 2xy = 3y^4 \rightsquigarrow \text{Bernoulli} \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

7. A EDO $xy' - y = x - 1$, $x > 0$, tem como fator integrante:

- [ ] $\mu(x) = x^2$
- [ ] $\mu(x) = x$
- [x] $\mu(x) = \frac{1}{x}$
- [ ] $\mu(x) = \ln(x)$

8. Relativamente à EDO:

$$(\cos(x) + 2)\, y' - y^2 - 1 = 0$$

podemos dizer:

- [ ] Ordem 1 Linear
- [ ] Ordem 2
- [x] Variáveis separáveis
- [ ] homogénea

→ Resolver <u>mini-teste modelo</u> → elearning UA