EDO's 1ª ordem

Variáveis Separáveis

1. Escrever na forma normal para identificar. Se tiver a forma: $\boldsymbol{y' = \frac{p(x)}{q(y)}}$ a EDO é de variáveis separáveis.
2. Separar as variáveis, até obter: $\boldsymbol{q(y)\,dy = p(x)\,dx}$
3. Aplicar integração de ambos os membros da equação.

Homogéneas

1. Escrever na forma normal para identificar. Se tiver a forma: $\boldsymbol{y' = f(x,y)}$ em que f é uma função homogénea de grau zero (i.e. $\boldsymbol{f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)}$), então a EDO é homogénea.
2. Considerar a substituição: $\boldsymbol{y = xz}$ e $\boldsymbol{y' = z'x + z}$
3. Que transforma a EDO numa EDO de variáveis separáveis.
4. Encontrar o integral geral da EDO de variáveis separáveis.
5. Aplicar a substituição inversa $\left(\boldsymbol{z = \frac{y}{x}}\right)$ e encontrar o integral geral da EDO homogénea.

Lineares

1. Se a EDO tem a forma: $\boldsymbol{a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = b(x)}$ a EDO é linear.
2. Dividir tudo por $a_0(x)$.
$$\boldsymbol{y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y = \frac{b(x)}{a_0(x)}}$$
$\boldsymbol{p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}}$ e $\boldsymbol{q(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}}$
3. Determinar o fator integrante: $\boldsymbol{\mu(x) = e^{\int p(x) dx}}$
4. Multiplicar a EDO do ponto 2 por $\mu(x)$. Então teremos,
$$\boldsymbol{(\mu(x) y)' = \mu(x) q(x)}$$
5. Aplicando integração temos:
$$\boldsymbol{\mu(x) y = \int \mu(x) q(x)\, dx}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) q(x)\, dx}$$
Que nos dá o integral geral da EDO linear.

Bernoulli

1. Se a EDO tem a forma: $\boldsymbol{a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = b(x) y^{\alpha}}$ a EDO é de Bernoulli.
2. Multiplicar toda a EDO por
$$\boldsymbol{y^{-\alpha}}$$
3. Multiplicar toda a EDO por
$$\boldsymbol{(1-\alpha)}$$
4. Considerar a substituição
$$\boldsymbol{z = y^{1-\alpha}}$$
e
$$\boldsymbol{z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'}$$
e a EDO transforma-se numa EDO Linear.
5. Encontrar o integral geral da EDO linear.
6. Aplicar a substituição inversa $(\boldsymbol{z = y^{1-\alpha}})$ e encontrar o integral geral da EDO de Bernoulli.

Exatas

1. Se a EDO tem a forma:
$$\boldsymbol{M(x,y) + N(x,y) y' = 0}$$
Ou
$$\boldsymbol{M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0}$$
E existe uma função F em que $\boldsymbol{M(x,y) = \frac{dF}{dx}}$ e $\boldsymbol{N(x,y) = \frac{dF}{dy}}$
Então a EDO é exata.
2. Resolver uma EDO exata significa encontrar uma função $F(x,y)$ (usando integração) e indicar o integral geral da EDO na forma: $\boldsymbol{F(x,y) = C, C} \in \mathbb{R}$

Filipa Santana (2022) - vfssantana@ua.pt