

Temas: Atividade no SIACUA UA
 EDO's Homogêneas
 EDO's Lineares de 1ª ordem

EDO's Homogêneas

Escrita na forma normal

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = f(x, y)$$

onde $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau zero, i.e.,
 $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, tais que $(\lambda x, \lambda y) \in \mathcal{D}$.

Exemplo:

$$y' = \underbrace{\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}}_{f(x, y)}$$

Assim identificamos
este tipo de
EDO

f é homogênea de grau zero pois, desde que $\lambda \neq 0$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = f(x, y)$$

Então a EDO é homogênea.

A resolução desta EDO passa pela aplicação de uma mudança de variável que a irá transformar em uma EDO de variáveis separáveis.

Mudança de variável: $y = zx$ com $z = z(x)$
(isto é, z é função de x)

Vejamos então o esquema de resolução de uma EDO homogênea:

Esquema de Resolução:

- ① Escrever a EDO na forma normal
- ② Verificar que f é homogênea de grau zero.
- ③ Aplicar mudança de variável: $y = zx$
- ④ Encontrar o integral geral da EDO de variáveis separáveis
- ⑤ Aplicar substituição inversa $z = \frac{y}{x}$ e temos o integral geral da EDO homogênea.

Exemplos:

a) (Exemplo anterior)

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

já vimos que $f(x, y)$ é homogênea de grau zero.

Considerando $y = zx$ $\Rightarrow y' = (z)'x + z(x)'$
 $= z'x + z$

Substituindo,

$$z'x + z = \frac{x^2 + x(zx) + (zx)^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow z'x + z = 1 + z + z^2$$

$$\Leftrightarrow z'x = 1 + z^2 \rightsquigarrow$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{1+z^2}{x}$$

Depende de (z)
Depende de (x)

Conseguimos
separar as
variáveis

Lembra-te que depois da mudança de variável a EDO resultante deverá ser de variáveis separáveis. Então aplicamos o seu esquema de resolução.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \arctan z = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{Integral geral da EDO de variáveis separáveis}$$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO homogênea, na forma implícita.

b)

Exercício 2.6

1 Verifique que cada uma das seguintes EDOs é homogênea e determine o seu integral geral:

(a) $xe^{y/x}y' = ye^{y/x} + x$

(b) $(x^3 + y^3)dx - 3y^2xdy = 0;$

(c) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0;$

$$a) \quad x e^{\frac{y}{x}} y' = y e^{\frac{y}{x}} + x$$

Escrever na forma normal

$$\Leftrightarrow y' = \frac{y e^{\frac{y}{x}} + x}{x e^{\frac{y}{x}}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{f(x,y)}$$

Vamos verificar se f é homogênea de grau zero:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{\lambda y e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \lambda x}{\lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}} \\ &= \frac{y e^{\frac{y}{x}} + x}{x e^{\frac{y}{x}}} = f(x, y) \end{aligned}$$

$\therefore f$ é homogênea de grau zero e então a EDO é homogênea

Mud. var.

$$y = zx$$

$$y' = z'x + z$$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{zx e^z + x}{x e^z}$$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{ze^z + 1}{e^z}$$

$$\Leftrightarrow z'x + \cancel{z} = \cancel{z} + \frac{1}{e^z}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{1}{e^z}$$

$$\Leftrightarrow e^z z' = \frac{1}{x} \longrightarrow \text{EDO de var. separáveis}$$

$$\Leftrightarrow e^z dz = \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^z dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow e^z = \ln|x| + C \longrightarrow \text{Integral geral da EDO de var. separáveis}$$

Mud. variável

inversa $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{y}{x}} = \ln|x| + C$$

$$\Leftrightarrow y = x \ln(\ln|x| + C), C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO homogênea.

Resolução da EDO de var. separáveis

$$b) (x^3 + y^3) dx - 3y^2 x dy = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 x dy = (x^3 + y^3) dx$$

Escrever na
forma normal

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{3y^2 x}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x,y)}$

Mud. var:

$$y = zx$$

$$y' = z'x + z$$

Vamos verificar se f é
homogénea de grau zero:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\cancel{\lambda^3} x^3 + \cancel{\lambda^3} y^3}{3 \cancel{\lambda^2} y^2 \cancel{\lambda} x}$$

$$= \frac{x^3 + y^3}{3 y^2 x} = f(x, y)$$

$\therefore f$ é homogénea de grau
zero e então a EDO é
homogénea

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{x^3 + z^3 x^3}{3 z^2 x^3}$$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{1 + z^3}{3 z^2}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{1 + z^3}{3 z^2} - z$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{1 + z^3 - 3z^3}{3 z^2}$$

→ EDO de var. separáveis

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{1 - 2z^3}{3 z^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 z^2}{1 - 2z^3} z' = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} \int \frac{(-2) 3 z^2}{1 - 2z^3} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

Integral geral da EDO
de var. separáveis

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln |1 - 2z^3| = \ln |x| + C$$

Mud. var. inv.

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln |1 - 2 \frac{y^3}{x^3}| = \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$$

Integral geral
da EDO
homogénea.

$$c) (x+y) dx + (y-x) dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(x+y)}{y-x}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-x-y}{y-x}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x,y)}$

$$y = zx$$

$$y' = z'x + z$$



$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{-x - zx}{zx - x}$$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{-1 - z}{z - 1}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{-1 - z}{z - 1} - z$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{-1 - \cancel{z} - z^2 + \cancel{z}}{z - 1}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{-1 - z^2}{z - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{-1-z^2} z' = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{-(1+z^2)} dz = \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{z}{-(1+z^2)} dz + \int \frac{1}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{2z}{1+z^2} dz + \int \frac{1}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln|1+z^2| + \arctan(z) = \ln|x| + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{-\lambda x - \lambda y}{\lambda y - \lambda x}$$

$$= \frac{-x - y}{y - x} = f(x, y)$$

$\therefore f$ é homogênea de grau zero e então a EDO é homogênea

$$z = y/x$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

↪ Integral geral da EDO homogénea

EDO's Lineares de 1ª ordem

Se a EDO pode ser escrita na forma

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I , com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Quando $b \equiv 0$ ($q \equiv 0$), a equação diz-se **incompleta** ou **Linear, homogénea**.

↙
não confundir
com as EDO's
homogéneas
vistas anteriormente.

Mas como se resolvem este tipo de EDO's? Como encontramos o seu integral geral?

A solução de uma EDO linear de 1ª ordem obtém-se efectuando:

- 1 Considerar a EDO escrita na forma $y' + p(x)y = q(x)$.
- 2 Construir o **factor integrante** $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$.
- 3 Multiplicar a EDO por $\mu(x)$

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \Leftrightarrow (\mu(x)y)' = \mu(x)q(x)$$

- 4 Integrar em ordem a x

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx$$

↪ Com mais pormenor...

1º passo: Divida tudo por $a_0(x)$ para que y' fique sozinho e a EDO fique na forma

$$\begin{array}{ccc} y' + p(x)y = q(x) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{a_1(x)}{a_0(x)} & & \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{array}$$

2º passo: Calcular o fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

3º passo: Multiplique tudo por $\mu(x)$

$$\underbrace{\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y}_{(\mu(x)y)'} = \mu(x)q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\mu(x)y)' = \mu(x)q(x)$$

$$\Rightarrow \mu(x)y = \int \mu(x)q(x) dx$$

4º passo: Resolver o integral e isolar y :

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x) dx$$

Exemplos

Resolva as seguintes EDOs

(a) $xy' - y = x - 1, x > 0$

(b) $xy' + y - e^x = 0, x > 0$

(c) $y' - y = -e^x$

$$a) \underbrace{x y'}_{a_0(x)} - \underbrace{y}_{a_1(x)} = \underbrace{x-1}_{b(x)} \quad x > 0$$

Dividire por $a_0(x) = x$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y'}_{p(x)} - \underbrace{\frac{1}{x} y}_{q(x)} = \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{q(x)}$$

Fator integrante: $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x}$

\uparrow
 $x > 0$

Multiplicar tudo por $\mu(x) = \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} y \right)' = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \int \left(\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow y = x \left[\int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx \right]$$

$$\Leftrightarrow y = x \left[\ln(x) + \frac{1}{x} + C \right]$$

$$\Leftrightarrow y = x \ln(x) + 1 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO linear.

$$b) x y' + y = e^x \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y'}_{p(x)} + \underbrace{\frac{1}{x} y}_{q(x)} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{q(x)}$$

Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x, \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow xy' + y = e^x \quad \leftarrow \text{Multiplicar por } \mu(x) = x$$

$$\Leftrightarrow (xy)' = e^x$$

$$\Leftrightarrow xy = \int e^x dx$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x} (e^x + C)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Integral geral
da EDO Linear

$$c) \quad \underbrace{y'}_{p(x)} - \underbrace{y}_{q(x)} = -e^x$$

Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} y' - e^{-x} y = -e^x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (e^{-x} y)' = -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} y = \int -1 dx$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} y = -x + C$$

$$\Leftrightarrow y = -xe^x + Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO
linear

PVI associado a EDO Linear de Primeira Ordem:

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se p e q são funções contínuas num intervalo I , então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

→ A solução, existindo, é única!

Exemplo:

O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{exemplo anterior}$$

tem como solução única $y = -xe^x$, para $x \in \mathbb{R}$. **Porquê?**

$$y = -xe^x + ce^x, \quad c \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Integral geral}$$

$$\downarrow y(0) = 0$$

$$0 = -0e^0 + ce^0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + c$$

$$\Rightarrow c = 0$$

Solução do problema de Cauchy (PVI) é a solução particular:

$$y = -xe^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Bom trabalho!
Filipa Santana.