

## Tema: Transformada de Laplace

A transformada gera uma função de variável s (frequência) a partir de uma função de variável t (tempo).

Dada uma função que nos descreve matematicamente um sistema, a transformada de Laplace fornece uma descrição alternativa que, no maior número de casos, diminui a complexidade do processo de análise do comportamento desse sistema ou sintetiza um novo sistema baseado em características específicas.

Por exemplo, a transformada de Laplace converte uma equação diferencial em equação algébrica.

### Definição:

Seja  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , chama-se transformada de Laplace de  $f$  à função  $F$  definida por

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

nos pontos  $s \in \mathbb{R}$  em que este integral impróprio é convergente.

Notação:  $F(s)$  ou  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  ou  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  ou, simplesmente,  $\mathcal{L}\{f\}$ .

Podemos representar das três formas

Rever integrais  
impróprios de  
1ª espécie

## Exemplos

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} 1 e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{s} \int_0^t e^{-st} dt \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{s} \left[ e^{-st} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{s} (e^{-st} - 1) \\
 &\quad \text{0 se } s > 0 \\
 &\quad +\infty \text{ se } s < 0 \\
 &= \frac{1}{s}, \quad s > 0
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L} \{ e^{at} \}(s) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{(a-s)t} dt \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{a-s} \int_0^t (a-s) e^{(a-s)t} dt \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{a-s} \left[ e^{(a-s)t} \right]_0^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{a-s} (e^{(a-s)t} - 1) \\
 &= \frac{1}{a-s} \times (-1) = \frac{1}{s-a}
 \end{aligned}$$

$s > a$

$$\textcircled{1} \quad \text{se } a-s > 0 \quad e^{(a-s)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \text{se } a-s < 0 \quad e^{(a-s)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$s > a$

$$\bullet f(t) = t$$

$$\mathcal{L}\{f\}(\Delta) = \int_0^{+\infty} t e^{-\Delta t} dt \quad \begin{matrix} \text{Integral} \\ \text{impróprio de} \\ 1^{\text{a}} \text{ espécie} \end{matrix}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t t e^{-\Delta t} dt$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{t}{\Delta} e^{-\Delta t} \Big|_0^t + \int_0^t \frac{1}{\Delta} e^{-\Delta t} dt \right]$$

$$\begin{cases} f^1 = e^{-\Delta t} \\ g = t \\ f = -\frac{1}{\Delta} e^{-\Delta t} \\ g^1 = 1 \end{cases}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{t}{\Delta} e^{-\Delta t} + \frac{1}{\Delta} \left( -\frac{1}{\Delta} \right) \int_0^t e^{-\Delta t} dt \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{t}{\Delta} e^{-\Delta t} - \frac{1}{\Delta^2} [e^{-\Delta t} - e^0] \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{t}{\Delta} e^{-\Delta t} - \frac{1}{\Delta^2} e^{-\Delta t} + \frac{1}{\Delta^2} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\left[ \frac{-t}{e^{\Delta t}} - \frac{e^{-\Delta t}}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2} \right]}_{0 \quad 0} = \frac{1}{\Delta^2}, \quad \Delta > 0$$

converge se  $\Delta > 0$

nota: never integrais  
impróprios c1

## Outros casos:

- $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
- $\mathcal{L}\{\sin(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R})$
- $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R})$

Será  
dado no  
formulário  
do teste e  
exame

## Linearidade da transformada

Proposição:

Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f, g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha-se que existem  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  e  $\mathcal{L}\{g\}(s)$  para  $s > s_f$  e  $s > s_g$ , respectivamente. Então:

- $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \quad s > \max\{s_f, s_g\};$
- $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s), \quad s > s_f.$

## Exemplos

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \mathcal{L}\{\sinh(t)\}(\Delta) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right\}(\Delta) \\
 &= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^t\}(\Delta) - \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-t}\}(\Delta) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta + 1} \\
 &\qquad \Delta > 1 \wedge \Delta > -1 \\
 &\qquad (\Rightarrow \Delta > 1) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta + 1 - (\Delta - 1)}{\Delta^2 - 1^2} \right), \quad \Delta > 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\Delta^2 - 1} \right) = \frac{1}{\Delta^2 - 1}, \quad \Delta > 1
 \end{aligned}$$

$$b) \propto \{ \operatorname{senh}(at) \} (\Delta)$$

$$= \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{at} - e^{-at}}{\alpha} \right\} (S)$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L} \{ e^{at} \}(s) - \frac{1}{2} \mathcal{L} \{ e^{-at} \}(s)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+a}$$

$(s>a)$                              $(s>-a)$

$$= \frac{A+a - (A-a)}{2(A-a)(A+a)} = \frac{2a}{2(A^2-a^2)} = \frac{a}{A^2-a^2}$$

$$s > |a| \iff \begin{cases} s > 0 \Rightarrow s > |a| \iff s > a \\ s < 0 \Rightarrow s > |a| \iff s > -a \end{cases}$$

$$c) \mathcal{L} \{ \cosh(at) \}(s)$$

$$= \mathcal{Z} \left\{ \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \right\} (S)$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L} \{ e^{at} \}(s) + \frac{1}{2} \mathcal{L} \{ e^{-at} \}(s)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+a}$$

$(s>a) \qquad \qquad \qquad (s>-a)$

$$= \frac{A+a + (A-a)}{2(A-a)(A+a)} = \frac{2A}{2(A^2-a^2)} = \frac{A}{A^2-a^2}$$

$$\Delta > |a_1|$$

Concluindo...

Usando as técnicas de integração e as propriedades de linearidade temos:

$$\bullet \mathcal{L}\{1\}(\Delta) = \frac{1}{\Delta}, \Delta > 0$$

$$\bullet \mathcal{L}\{t\}(\Delta) = \frac{1}{\Delta^2}, \Delta > 0$$

Casos particulares de  $t^n$

$$\bullet \mathcal{L}\{e^{at}\}(\Delta) = \frac{1}{\Delta-a}, \Delta > a, a \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \mathcal{L}\{\cos(at)\}(\Delta) = \frac{\Delta}{\Delta^2 + a^2}, \Delta > 0, a \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \mathcal{L}\{\sin(at)\}(\Delta) = \frac{a}{\Delta^2 + a^2}, \Delta > 0, a \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \mathcal{L}\{t^n\}(\Delta) = \frac{n!}{\Delta^{n+1}}, \Delta > 0, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\bullet \mathcal{L}\{\cosh(at)\}(\Delta) = \frac{\Delta}{\Delta^2 - a^2}, \Delta > |a|, a \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \mathcal{L}\{\sinh(at)\}(\Delta) = \frac{a}{\Delta^2 - a^2}, \Delta > |a|, a \in \mathbb{R}$$

relembre:  $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

# Condições para a existência de transformada de Laplace

Definição:

Sejam função  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{R}$ .  $f$  diz-se uma **função de ordem exponencial  $k$**  (à direita) se existem constantes  $M > 0$ ,  $T > 0$  tais que

$$|f(t)| \leq M e^{kt}, \quad \forall t \geq T.$$

$f$  é majorada por uma exponencial

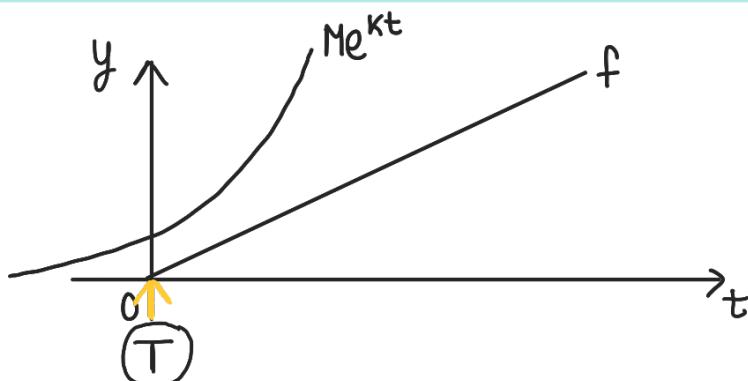
Teorema:

Se  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função seccionalmente contínua e  $f$  é de ordem exponencial  $k$  (para algum  $k \in \mathbb{R}$ ) então  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  existe para  $s > k$ .

Para que exista transformada de Laplace  $f$  tem de obedecer às condições.

Exemplo

- $f(t) = t$



$$\forall t > 0 \quad |f(t)| < M e^{kt}$$

- $f(t) = e^{t^2} \longrightarrow$  já não é de ordem exponencial

a partir de um certo instante  $T$ ,  $e^{t^2} \geq M e^{kt}$   
 $\forall M > 0, \forall T > 0, \forall t \geq T$

# Propriedades das transformadas

## ① (deslocamento na transformada)

$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ ,  $b > 0$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\}(s) = F(s - \lambda), \text{ para } s > \lambda + s_f$$

$$\text{ou } \mathcal{L}\{f(t)\}(s - \lambda)$$

## Exemplo

$$\begin{aligned} \lambda = 2 \quad & \mathcal{L}\{e^{at}\sin(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \\ & \downarrow \\ & = \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s-2) \\ & = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} \quad s > 0 + 2 \Leftrightarrow s > 2 \end{aligned}$$

## ② (transformada do deslocamento)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ ,  $b > 0$ ,  $H_a(t)$  a função degrau unitário<sup>1</sup> em  $t = a$ .

Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então, para todo  $a \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s), \text{ para } s > s_f$$

$$H_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \quad \leftarrow \text{Também chamada de função Heaviside}$$

ou, simplesmente,  $\mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)$

$$= e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

## Exemplo

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}\{(t-1)^2\}(\Delta) =$$

$$a=1$$

$$= e^{-1\Delta} \mathcal{L}\{t^2\}(\Delta)$$

$$= e^{-\Delta} \frac{2!}{\Delta^3}, \quad \Delta > 0$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}\{H(t) \times 1\}(\Delta) =$$

$$a=1$$

$$= e^{-1\Delta} \mathcal{L}\{1\}(\Delta)$$

$$= e^{-\Delta} \times \frac{1}{\Delta}, \quad \Delta > 0$$

\textcircled{3}

(transformada da expansão/contração)

$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ ,  $b > 0$ .

Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então, para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \text{ para } s > a s_f.$$

$$\text{ou} \quad = \frac{1}{a} \mathcal{L}\{f\}\left(\frac{\Delta}{a}\right)$$

## Exemplo

Sabemos que  $\mathcal{L}\{\sin(t)\}(\Delta) = \frac{1}{\Delta^2 + 1} \quad \Delta > 0$

Então,

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\}(\Delta) = \frac{1}{a} \mathcal{L}\{\sin(t)\}\left(\frac{\Delta}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \times \frac{1}{\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{\Delta^2 + a^2} \quad \Delta > a > 0$$

#### (4) (derivada da transformada)

$f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em todo o intervalo  $[0, b]$ , com  $b > 0$ . Se  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  existe para  $s > s_f$ , então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \text{ para } s > s_f.$$

onde  $F^{(n)}$  denota a derivada de ordem  $n$  da função  $F$ .

#### Exemplo

$$\mathcal{L}\{t \sin(2t)\}(\Delta) = \frac{\Delta}{\Delta^2 + 4}, \quad \Delta > 0$$

$$\begin{aligned} n=1 \\ &= (-1)^1 \left( \frac{\Delta}{\Delta^2 + 4} \right)', \quad \Delta > 0 \\ &= - \left( \frac{-2\Delta \times 2\Delta}{(\Delta^2 + 4)^2} \right), \quad \Delta > 0 \\ &= \frac{4\Delta}{(\Delta^2 + 4)^2}, \quad \Delta > 0 \end{aligned}$$

Muito útil mais  
à frente na  
resolução de EDO's  
(PVI's)

#### (5) (transformada da derivada)

Suponha-se que  $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) funções ordem exponencial  $s_0$ , para algum  $s_0 \in \mathbb{R}$ ;

Se  $f^{(n)}$  existe e é seccionalmente contínua em  $[0, +\infty[$ , então existe  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$ , para  $s > s_0$ , e

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}\{f'\}(\Delta) = \Delta^1 F(\Delta) - \cancel{\Delta^0 f(0)}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}\{f''\}(\Delta) = \Delta^2 F(\Delta) - \cancel{\Delta^1 f(0)} - \cancel{\Delta^0 f'(0)}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}\{f'''\}(\Delta) = \Delta^3 F(\Delta) - \cancel{\Delta^2 f(0)} - \cancel{\Delta^1 f'(0)} - \cancel{f''(0)}$$

Exemplo:

$$\mathcal{L} \{ \cos^2(t) \}(s) = ?$$

Sabemos que  $(\cos^2 t)' = -2 \cos t \sin t = -\sin(2t)$

Então,

$$\mathcal{L} \{ (\cos^2 t)' \}(s) = -\mathcal{L} \{ \sin(2t) \}(s)$$

$$\Leftrightarrow s^1 \mathcal{L} \{ \cos^2 t \}(s) - s^0 \cos^2(0) = -\frac{2}{s^2 + 4}, \quad s > 0$$

$$\Leftrightarrow s \mathcal{L} \{ \cos^2 t \}(s) - 1 = -\frac{2}{s^2 + 4}, \quad s > 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L} \{ \cos^2 t \}(s) = \frac{-2 + s^2 + 4}{s(s^2 + 4)}, \quad s > 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L} \{ \cos^2 t \}(s) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}, \quad s > 0$$

Exemplo

Vamos considerar o PVI

$$y'' + 2y' + 10y = 1 \quad y(0) = y'(0) = 0$$

se  $y'' + 2y' + 10y = 1$  Podemos aplicar  
transformada

então  $\mathcal{L} \{ y'' + 2y' + 10y \}(s) = \mathcal{L} \{ 1 \}(s)$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L} \{ y'' \} + 2\mathcal{L} \{ y' \} + 10\mathcal{L} \{ y \} = \mathcal{L} \{ 1 \}$$

$$\mathcal{L} \{ y \} = Y(s)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{s^2 Y(s)} - s y(0) - y'(0) + 2(s Y(s) - y(0)) + 10 Y(s) = \frac{1}{s}, s > 0$$

 Usar aqui esta notação pode ser mais simples

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 10 Y(s) = \frac{1}{s}, s > 0$$

$$\Leftrightarrow Y(s) [s^2 + 2s + 10] = \frac{1}{s}, s > 0$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)}$$



Transformada da função que estamos à procura. Então, só temos de ter maneira de a partir da transformada chegar à função que lhe corresponde.

## Transformada de Laplace Inversa

Dada uma transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  ou  $F(s)$  interessa determinar a função  $f$  (definida em  $\mathbb{R}_0^+$ ) tal que:

$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$    , caso exista, chama-se:

transformada de Laplace inversa de  $F$  e escreve-se

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \text{ ou } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$$

Mas por exemplo:

$$f(t) = 1 \quad \text{e} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & t \neq 1 \text{ e } t \neq 2 \\ 2 & t = 1 \\ 0 & t = 2 \end{cases}$$

têm a mesma transformada de Laplace,  $\frac{1}{s}$ ,  $s > 0$ . Pelo que se coloca uma ambiguidade:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = ?$$

Este problema é resolvido se escolhermos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \quad t \geq 0$$

**Porque?** → Não existem funções contínuas diferentes com a mesma transformada de Laplace.

**Teorema:** Sejam  $f$  e  $g$  funções seccionalmente contínuas em  $\mathbb{R}_0^+$  tais que:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) \quad \text{para } s > \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

se  $f$  e  $g$  são contínuas nos pontos  $t \in \mathbb{R}^+$ , então:

$$f(t) = g(t)$$

Será possível estabelecer uma condição para a existência de Transformada inversa ??

Sim!  $\rightsquigarrow$  Vimos que se  $f$  é seccionalmente contínua em  $\mathbb{R}_0^+$  e de ordem exponencial

$\Rightarrow$  Existia transformada de Laplace

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0$$

Podemos facilmente  
provar!

Assim, se  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) \neq 0$  então  
podemos concluir que não podemos determinar!

## Propriedades da transformada inversa

### (linearidade da transformada inversa)

Suponha-se que  $F$  e  $G$  admitem transformada de Laplace inversa.

Então as funções  $F + G$  e  $\alpha F$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) também admitem transformada inversa e

- (i)  $\mathcal{L}^{-1}\{F + G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\};$
- (ii)  $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}.$

Exemplo:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \left(\frac{1}{s(s+1)}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}\right)\right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{C. Aux} \\ \hline A(s+1) + Bs = 1 \end{array}$$

$$As + A + Bs = 1$$

$$(A+B)s + A = 1$$

$$\begin{array}{l} = 0 \\ = 1 \end{array}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s} \frac{1}{s+1}\right\}$$

Relembra:

$$\mathcal{L}\left\{H_a(t)f(t-a)\right\} = e^{-as} F(s)$$

$$A = 1 \wedge B = -1$$

Então,

$$* = H_1(t) \times 1 - H_1(t) e^{-(t-1)}, \quad t \geq 0$$

$$= H_1(t) (1 - e^{-t+1}), \quad t \geq 0$$

(transformada inversa do deslocamento)

Se  $F$  admite transformada de Laplace inversa, então  $F(s - \lambda)$  também admite transformada inversa para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - \lambda)\} = e^{\lambda t} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Aplicação da regra  
ao contrário!

## Exemplo

$$F(\lambda) = \frac{3}{(\lambda-2)^3}$$

Se considerarmos  $f(t) = t^2$ :

$$\frac{2!}{(\lambda-2)^3} = \mathcal{L}\{t^2\}(\lambda-2) = F(\lambda-2)$$

Então,

$$f(t) = \frac{3}{2!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{(\lambda-2)^3}\right\} = \frac{3}{2} e^{2t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{\lambda^3}\right\}$$

$$= \frac{3}{2} e^{2t} t^2, \quad t \geq 0 //$$

Voltando ao problema do PVI:

Tínhamos "  $y(\Delta) = \frac{1}{\Delta(\Delta^2 + 2\Delta + 10)}$ "

Vamos aplicar as propriedades anteriores:



Para tal precisamos sempre de escrever numa soma de frações simples.

$$\Delta^2 + 2\Delta + 10 = 0 \Leftrightarrow \Delta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 10}}{2} \text{ c. imp.}$$

↳ não é possível fatorizar mais.

Sabemos ainda que:  $\Delta^2 + 2\Delta + 10 =$

$$\begin{aligned} &= \Delta^2 + 2\Delta + \frac{1^2}{1^2} - \frac{1^2}{1^2} + 10 \\ &= (\Delta + 1)^2 + 9 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Delta(\Delta^2 + 2\Delta + 10)} = \frac{A}{\Delta} + \frac{B\Delta + C}{\Delta^2 + 2\Delta + 10}$$

C. Aux:  $A(\Delta^2 + 2\Delta + 10) + (B\Delta + C)\Delta = 1$

$$A\Delta^2 + 2A\Delta + 10A + B\Delta^2 + C\Delta = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 10A = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A = -B \Leftrightarrow B = -\frac{1}{10} \\ C = -2A = 2B = -\frac{2}{10} \\ A = \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

Então temos

$$y(\Delta) = \frac{-\frac{1}{10}}{\Delta} - \frac{\frac{1}{10}\Delta + \frac{2}{10}}{(\Delta + 1)^2 + 3^2}$$

Então a função que procuramos é:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1/10}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/10 s + 2/10}{(s+1)^2 + 3^2} \right\}$$

$\hookrightarrow = -\frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1 - 1}{(s+1)^2 + 3^2} \right\} -$

**linearidade**

$- \frac{2}{10} \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 \times 3}{(s+1)^2 + 3^2} \right\}$  **deslocada**

**com  $f = \cos(3t)$**

$\underbrace{\mathcal{F}(s+1)}$

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} \right\} + \frac{1}{3} \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 \times 3}{(s+1)^2 + 3^2} \right\}$$

$- \frac{2}{30} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2} \right\}$

**com  $f = \sin(3t)$**

$\underbrace{\mathcal{F}(s+1)}$

**com  $f = \sin(3t)$**

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-t} \cos(3t) + \frac{1}{30} e^{-t} \sin(3t) - \frac{2}{30} e^{-t} \sin(3t), t \geq 0$$

$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-t} \cos(3t) - \frac{1}{30} e^{-t} \sin(3t), t \geq 0 //$$

## Exercícios

Calcula a transformada inversa:

$$\textcircled{1} \quad F(s) = \frac{2s}{s^2 - 9}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{s^2 - 9} \right\} = 2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - 3^2} \right\}$$

$$= 2 \cosh(3t), t \geq 0$$

$$\textcircled{2} \quad F(\Delta) = \frac{4}{\Delta^7}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{\Delta^7}\right\} = 4 \times \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\Delta^7}\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^6\right\}(\Delta) = \frac{6!}{\Delta^7}$$

$\Delta > 0$

$$= \frac{4}{6!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6!}{\Delta^7}\right\} = \frac{4}{6!} t^6, \quad t \geq 0$$

$$\textcircled{3} \quad F(\Delta) = \frac{1}{\Delta^2 + 6\Delta + 9} = \frac{1}{(\Delta + 3)^2}$$

$$\text{C.Aux: } \Delta^2 + 6\Delta + 9 = 0$$

$$\Delta = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2}$$

$$\Delta = -3 \vee \Delta = -3$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{(\Delta+3)^2}}_{F(\Delta+3)}\right\} = e^{-3t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\Delta^2}\right\} =$$

$$\text{com } f(t) = t$$

$$= e^{-3t} t, \quad t \geq 0$$

$$\textcircled{4} \quad F(\Delta) = \frac{1}{\Delta^2 + \Delta - 2} = \frac{A}{\Delta + 2} + \frac{B}{\Delta - 1}$$

$$\text{C.Aux: } \Delta^2 + \Delta - 2 = 0$$

$$\Delta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2}$$

$$\Delta = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\Delta = -2 \vee \Delta = 1$$

Cálculo das constantes:

$$A(\Delta-1) + B(\Delta+2) = 1$$

$$(A+B)\Delta + (2B-A) = 1$$

$$A+B=0 \wedge 2B-A=1$$

$$B=-A \wedge -3A=1$$

$$B=\frac{1}{3} \wedge A=-\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}f(t) &= -\frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} \\&= -\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t, \quad t \geq 0\end{aligned}$$