Resumo 4

21 de março de 2021 22:09

Convergência Pontual e Uniforme

Sucessões de Funções

- $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f em D se $\forall x \in D$, $f(x) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{\text{limite pontual}}$

- $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f se:

$$\underbrace{\sup_{x\in D} \left| f_n(x) - f(x) \right|}_{\text{infinitésimo}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

sup: menor dos majorantes

conv. uniforme implica

O contrário pode não ser verdade.

①②③ $\not\Rightarrow$ c. unif

Propriedades

① f é contínua em $D = [a,b]$

② f é integrável em $D = [a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] = \lim\left[\int_a^b f_n(x)\,dx\right]$$

③ se $f_n(x)$ tem derivadas contínuas em $[a,b]$ e $(f'_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ conv. uniformemente em $[a,b]$ então f é diferenciável em $[a,b]$ e

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x) \quad , \forall x \in [a,b]$$

A falha de uma das prop. ①, ② ou ③ prova a $\bar{n}$ conv. uniforme.

Séries de funções

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente se existir limite pontual de S_n (sucessão das somas parciais)

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$$\lim S_n(x) = \lim\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)$$

↪ basta calcular o limite e ver onde existe.

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em D se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em D

Pode ser difícil!

(Muito mais fácil)

Critério de Weierstrass

se existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente: $\forall x \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $D = [a,b]$

$$\left| f_n(x) \right| \leq a_n$$

O termo geral da série é majorado por a_n

Então a série converge uniformemente em D

O contrário pode não ser verdade

①②③ $\not\Rightarrow$ Conv. Unif

Propriedades

① $S(x)$ é contínua em $[a,b]$

② S é integrável em $[a,b]$ e:

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

(integração termo a termo)

③ se cada f_n é diferenciável em $[a,b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente em $[a,b]$ então $S(x)$ é diferenciável em $[a,b]$ e:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

(derivação termo a termo)