Resumo 5

22 de março de 2021 23:51

Polinómio de Taylor

A um polinómio do tipo:

$$T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Chamamos polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto c.

Se $c=0$ chamamos polinómio de MacLaurin de ordem n de f.

Fórmula de Taylor

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$.

Então $\forall x \in I \setminus \{c\}$ existe um θ entre x e c tal que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{\substack{\text{Polinómio de Taylor} \\ T_c^n f(x)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n-1)!}(x-c)^{n+1}}_{\substack{\text{Resto de Lagrange} \\ R_c^n f(x)}}$$

- Podemos usar a fórmula de Taylor para obter uma estimativa para $f(a)$ e também uma estimativa para o erro que se comete nessa estimativa.

- Se $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a,b]$ então é limitada:

$$\Rightarrow \left| R_c^n f(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right| \leq \underbrace{\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{majorante do erro cometido na aproximação}}$$

θ entre x e c

menor dos majorantes

$$M = \sup_{y \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(y) \right|$$