

Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4

2021/22

Folha 1: Séries de Potências — Fórmula de Taylor — Série de Taylor

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

| | | |
|--|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$; | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$; |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$; | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$; | (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$; |
| (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (x+2)^n$; | (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3} x^n$; | (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$; |
| (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n} (3x-2)^n$; | (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (x-2)^n$; | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n$. |

2. Mostre que:

- (a) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo;
- (b) se o domínio de convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $] -r, r]$, então a série é simplesmente convergente em $x = r$.

3. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

- (a) $T_0^3(x^3 + 2x + 1)$;
(b) $T_\pi^3(\cos x)$;
(c) $T_1^3(xe^x)$;
(d) $T_0^5(\sin x)$;
(e) $T_0^6(\sin x)$;
(f) $T_1^n(\ln x)$ ($n \in \mathbb{N}$).

4. Considere $f(x) = e^x$.

- (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f .
(b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $] -1, 0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.
(c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de $\sin(3)$ quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

6. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.
7. (a) Obtenha o polinómio de Taylor de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $c = 1$.
- (b) Determine um valor de n para o qual se garanta que o polinómio $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$, obtido na alínea anterior, aproxime $\frac{1}{x}$ no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro inferior a 10^{-3} .
8. Determine o menor valor de n tal que o polinómio de MacLaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$ aproxime $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3} .
9. Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1+x) \leq x$, para todo $x > -1$.
10. Partindo da representação

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

determine uma representação em série de potências para cada uma das seguintes funções, indicando o intervalo onde tal representação é válida:

$$(a) \frac{1}{1-3x}; \quad (b) \frac{2}{2+x}; \quad (c) \frac{1}{x}.$$

11. Desenvolva a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$ em série de potências de $x-3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.