Análise Numérica: Avaliação 2

Miguel Zanchettin de Oliveira *

Novembro de 2024

Questão 01

Seja a função Trigexp de Toint:

$$\begin{cases} f_1(x) & = 3x_1^3 + 2x_2 - 5 + sen(x_1 - x_2)sen(x_1 + x_2) \\ f_i(x) & = -x_{i-1}e^{(x_{i-1}-x_i)} + x_i(4 + 3x_i^2) + 2x_{i+1} \\ & +sen(x_i - xi + 1)sen(x_i + x_{i+1}) - 8, \\ & i \in \mathbf{I}^*|i \leq 10 \\ f_{10(x)} & = -x_9e^{(x_9-x_{10})} + 4x_{10} - 3 \end{cases} \tag{1}$$

Resolva o sistema não linear usando os métodos de Newton Modificado e Newton Discreto, com tolerância de $\epsilon = 10^{-4}$, e $x^{(0)} = (0, 0, ..., 0)^T$. Faça uma análise dos resultados.

Conforme resultados obtidos pela programação anexa, o resultado encontrado utilizando o método de Newton Discreto é de um vetor de uns em dez posições obtido em dez iterações.

$$f([1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]|\epsilon \leq 10^{-4} \tag{2}$$

Porém, a utilização de Newton Modificado não converge mesmo com um número muito grande de iterações. Esta não convergência pode se dar por diversos fatores, mas neste específico, destaca-se que a função Trigexp de Toint possui inúmeras não linearidades em diversos pontos. Uma vez que o método de Newton Modificado não calcula a matriz jacobiana para cada ponto da função, mas apenas do ponto inicial, a função pode facilmente não convergir, uma vez que a jacobiana inicial fará com que a iteração tenha passos que se distanciam da raiz.

*Discente do programa de Mestrado em Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia (PPGMNE) da Universidade Federal do Paraná - UFPR

Questão 02

Seja a função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2^n \pi x}{2^n} \tag{3}$$

Utilizando apenas 50 termos do somatório, plote a função para o intervalo $[-1, 1]$**. Interpole a função pela spline linear, spline cúbica e pelo polinômio de grau k, sendo k o número de subintervalos definidos em 6, 12 e 15. Calcule o erro máximo e faça uma análise dos resultados.**

Utilizando 50 pontos igualmente espaçados entre -1 e 1, obtém-se a cruva como na Figura 1.

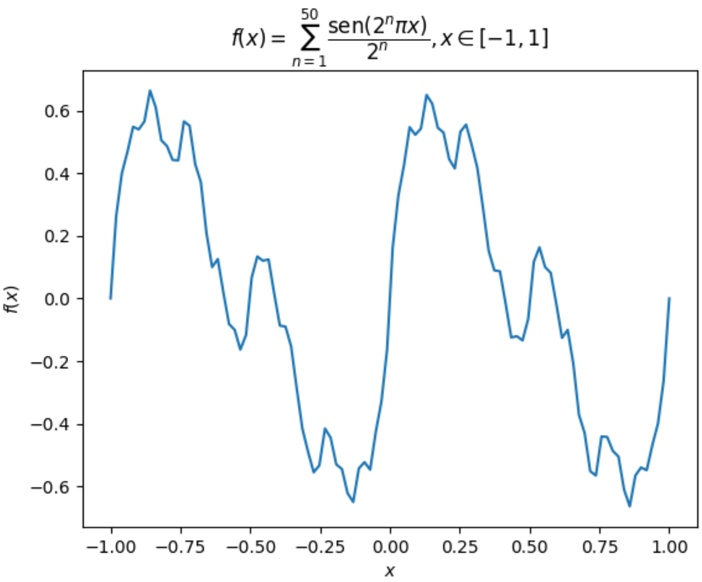

Figura 1 – Gráfico da função

Utilizando as interpolações, pode-se realizar uma comparação de todos os métodos, lado a lado. Isto é realizado na Figura 2.

Uma vez que visualmente todas as interpolações parecem representar bem a função, deve-se utilizar algum outro método para avaliar qual possui o menor erro. Considerando a avaliação da função em 50 pontos, obtém-se os erros absolutos de interpolação como na Figura 3. Fica evidente o comportamento do fenômeno de Runge, em que aumentar o grau do polinômio aumenta o erro. Não só, mas utilizar um método como interpolação polinomial pode inclusive atrapalhar o desempenho. Neste caso, é evidente que a utilização da spline linear com a mesma quantidade de pontos da função levaria a um erro muito próximo de zero.

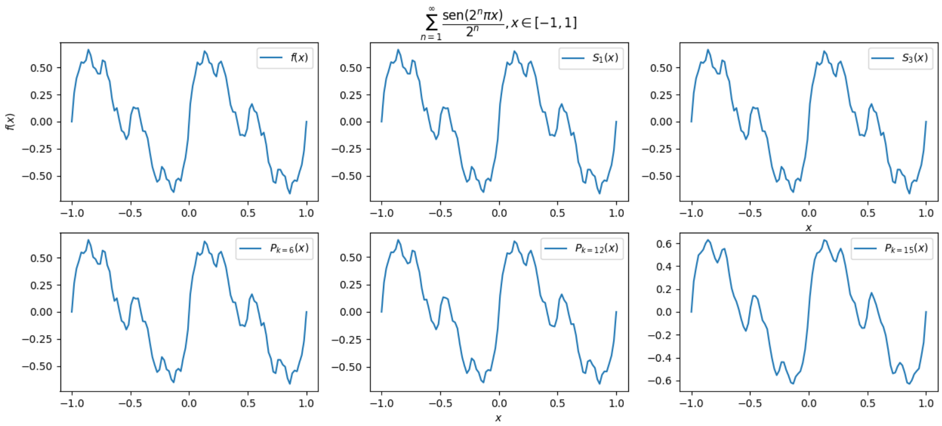

Figura 2 – Gráficos das interpolações da função

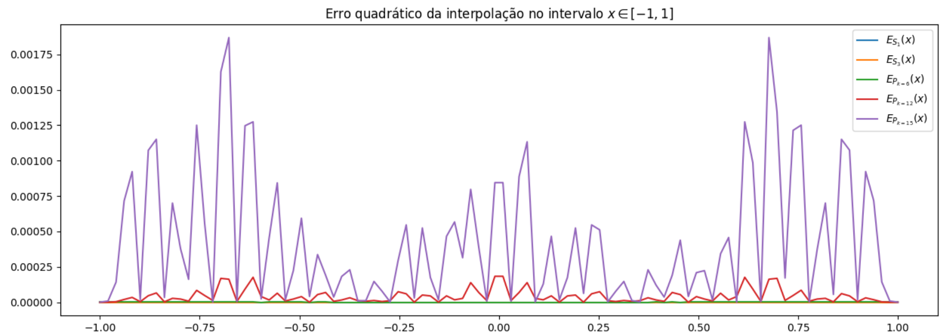

Figura 3 – Erros absolutos das interpolações (Fenômeno de Runge)

Assim, pode-se sumarizar esta variação em forma do somatório dos elementos. Isto é realizado na Figura 4, que evidencia o aumento do erro quando há apenas um aumento no grau do polinômio. Novamente, evidenciando o Fenômeno de Runge.

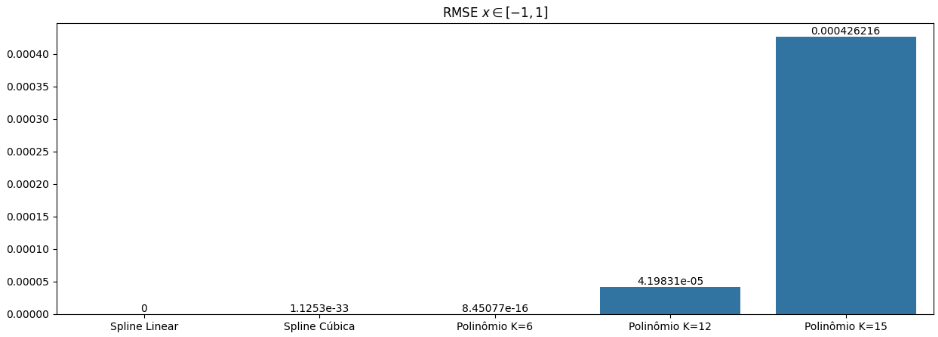

Figura 4 – Erros absolutos de interpolação

Todos os cálculos realizados nesta resolução estão disponíveis em arquivo anexo.

Questão 03

Um projétil é lançado, atingindo uma parede ao final de seu percurso. Durante o movimento, foram tiradas fotos em intervalos regulares para registrar a posição vertical do projétil, como mostra a Figura 5.

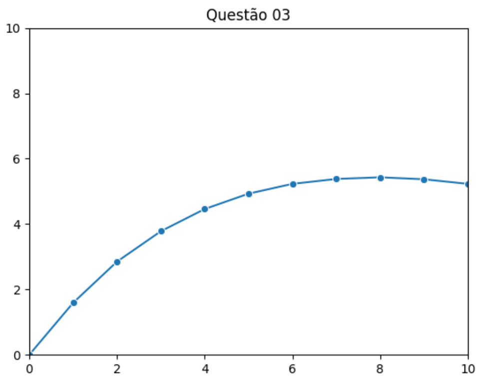

Figura 5 – Gráfico da função da questão 03

A tabela a seguir apresenta o tempo t (em segundos) e a altura $y(t)$ (em metros) observada a cada instante.

t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y(t)(m)	0.00	1.59	2.85	3.78	4.46	4.93	5.23	5.38	5.43	5.37	5.23

Usando o método de mínimos quadrados, determine a altura do projétil no instante 5.5 segundos.

Utilizando o método de mínimos quadrados, como implementado no arquivo anexo, é possível encontrar o resultado como na Figura 6. Isto é, $f(5.5) \approx 4.26$.

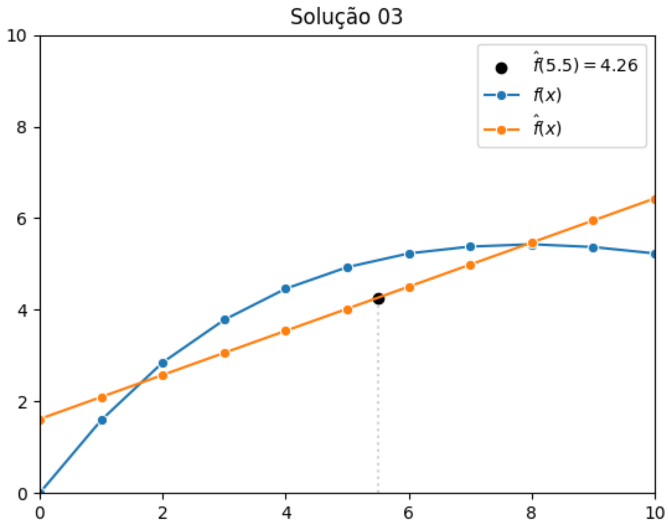

Figura 6 – Interpolação por Mínimos Quadrados

A aproximação de uma equação que demonstra tendência polinomial por métodos lineares pode não ser uma boa alternativa quando se deseja uma estimativa com maior assertividade. Em função disso, pode-se aplicar algum tipo de transformação aos dados. Neste caso, optou-se por utilizar uma transformação logarítmica (tanto para a variável explicada quanto à explicativa). O resultado demonstra maior aderência à curva, tendo assin $f(5.5) \approx 4.62$, como na Figura 7.

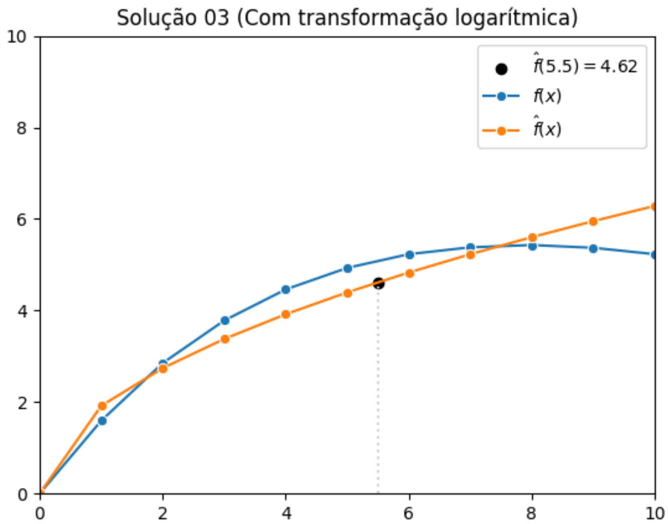

Figura 7 – Interpolação por Mínimos Quadrados, com transformação log-log

Cabe destaque que a transformação logaritmica não permite valores negativos, nem zeros. Por este motivo, a função seria incapaz de encontrar o valor de $f(0)$.

Questão 04

Considere a integral:

$$I = \int_{0.5}^{2} \frac{ln(x)}{\sqrt(x)} dx \tag{4}$$

Estime o valor dessa integral utilizando as técnicas de Quadratura Gaussiana com 4 pontos, Regra do Trapézio e Regra de Simpson com 4 subintervalos. Calcule o valor exato da integral, se possível, e compare os resultados obtidos pelas três técnicas. Finalmente, estime quantos subintervalos a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson necessitaria para obter a mesma qualidade de aproximação da Quadratura Gaussiana.

A integração numérica, realizada em arquivo anexo, gera os resultados como na Figura 8.

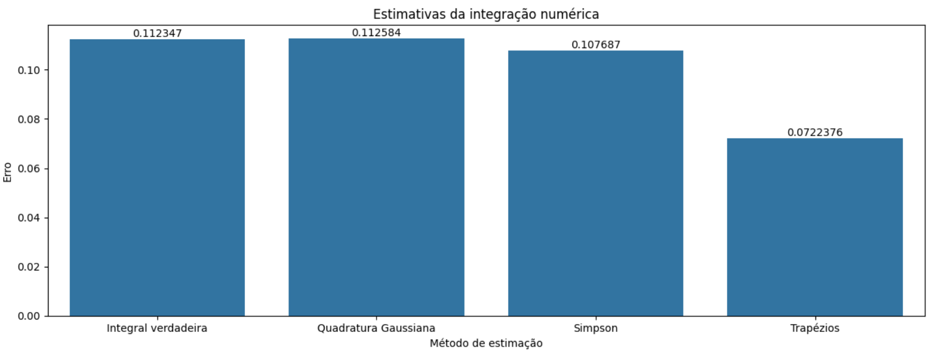

Figura 8 – Estimativas da questão 04

A integral da função efetivamente resulta em $g(x) = 2(\sqrt{x})ln(x) - 4\sqrt{x}$. Assim, obtém-se que $I = g(2) - g(0.5)$. Isto resulta que $I \approx 0.1123473$. Com esta informação, é possível calcular com precisão o erro obtido por cada um dos métodos de integração numérica, removendo a necessidade de se obter um limitante para o erro. Este resultado, o erro estimado de aproximação em relação à função verdadeira, é exibido na Figura 9.

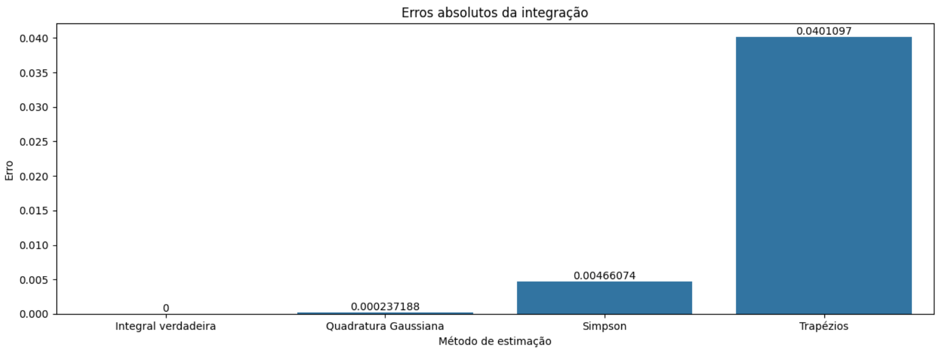

Figura 9 – Erros de estimação de resolução da questão 04

Assim, com o erro calculado para a quadratura gaussiana e a função computacionalmente implementada para estimar a integral tanto por Simpson quanto por Trapézios, não há a necessidade de se realizar a manipulação matemática, uma vez que um simples experimento empírico é de fácil realização. Este experimento é implementado no arquivo anexo.

Segundo o experimento, seriam necessários pelo menos 54 subintervalos para que a regra do Trapézio obtivesse um erro menor ou igual ao erro da estimativa por Quadratura Gaussiana. Por outro lado, pela Regra de Simpson, seriam necessários pelo menos 10 subintervalos para obter o mesmo feito.