AULA 6

O caso estacionário em uma dimensão

Meta da aula

Aplicar o formalismo quântico no caso de o potencial ser independente do tempo.

objetivos

- verificar que, no caso de o potencial ser independente do tempo, a equação de Schrödinger tem uma forma mais simples;
- calcular o valor esperado de operadores quânticos, em particular da energia;
- definir os conceitos de autovalor e autofunção de operadores quânticos;
- definir a corrente de probabilidade.

Pré-requisitos

Para uma melhor compreensão desta aula, é importante que você revise a Aula 5 desta disciplina, o conceito de equações diferenciais ordinárias (visto no curso de Cálculo), o conceito de hamiltoniano (Aula 7 de Mecânica) e o oscilador harmônico simples (Aula 3 de Mecânica).

FUNÇÃO DE ONDA E EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NO CASO ESTACIONÁRIO

Nas próximas aulas, vamos estudar alguns exemplos simples de sistemas quânticos unidimensionais sob o efeito de potenciais independentes do tempo. Esses sistemas são chamados de *estacionários*. Este é um caso muito comum em Física: por exemplo, um campo gravitacional e um campo elétrico estáticos produzem uma energia potencial que não depende do tempo, ou seja, em lugar da energia potencial $V(x, t)$, devemos usar, na equação de Schrödinger, a forma mais simples $V(x)$.

!

Note, porém, que há muitos outros casos, igualmente importantes, em que o potencial depende do tempo. Por exemplo, no caso de um campo elétrico oscilante devido a uma onda eletromagnética. Entretanto, como é usual, vamos iniciar nossos estudos com o caso mais simples.

Nosso objetivo imediato será o de adquirir familiaridade com a resolução da equação de Schrödinger. No entanto, ao mesmo tempo, vamos analisar vários fenômenos interessantes que aparecem na teoria quântica. O interesse no caso estacionário unidimensional se deve não apenas porque, em muitas ocasiões, o fenômeno físico ocorre, efetivamente, em uma dimensão, mas também porque muitos outros problemas mais complexos podem ser reduzidos à solução de equações análogas à equação de Schrödinger em uma dimensão.

Mas antes de entrar em cada um desses problemas, vamos analisar a teoria quântica para o caso específico de o potencial ser independente do tempo. Se considerarmos uma partícula de massa m que se movimenta sobre o eixo x sob a influência de um potencial $V(x)$, a equação de Schrödinger terá esta forma:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t). \quad (6.1)$$

Nesse caso, em que o potencial é independente do tempo, podemos procurar soluções da Equação (6.1) que separam as partes dependentes de x e de t. Trata-se da conhecida técnica de *separação de variáveis*, muito comum no estudo de equações diferenciais parciais. Assim, propomos uma solução que tem a seguinte forma:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\phi(t). \quad (6.2)$$

Substituindo esta expressão para $\Psi(x,t)$ na equação de Schrödinger, obtemos:

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi(x)\phi(t)\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\psi(x)\phi(t)\right] + V(x)\left[\psi(x)\phi(t)\right] \Rightarrow \\ &i\hbar\psi(x)\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi(t)\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\left[\psi(x)\phi(t)\right]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Podemos, agora, dividir ambos os lados da equação por $\psi(x)\phi(t)$ e chegarmos, assim, ao seguinte resultado:

$$\frac{i\hbar}{\phi(t)}\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x). \quad (6.4)$$

Note que o lado esquerdo dessa equação depende apenas da variável tempo (t), enquanto o lado direito depende apenas da variável posição (x). Obviamente, uma igualdade como essa só pode ser verdadeira, para todo tempo t e valor da coordenada espacial x, se ambos os lados forem iguais a uma constante, que chamaremos de E. Assim, nossa equação a derivadas parciais se torna duas equações diferenciais ordinárias, com as variáveis t e x separadas:

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{d\phi(t)}{dt} = E\phi(t), \\ &-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \end{aligned} \quad (6.5)$$

A primeira equação é simples de ser resolvida, tendo como solução

$$\phi(t) = Ae^{-iEt/\hbar}, \quad (6.6)$$

em que A é uma constante arbitrária. Assim, mostramos que a solução geral para $\Psi(x, t)$ tem esta forma:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}, \quad (6.7)$$

em que a constante A foi incorporada à função $\psi(x)$.

Vejamos o que ocorre com a densidade de probabilidade no caso estacionário. Usando a Equação (4.3) da Aula 4 desta disciplina e substituindo a função de onda dada pela Equação (6.7), obtemos o seguinte:

$$p(x,t) = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \psi^*(x)e^{iEt/\hbar}\psi(x)e^{-iEt/\hbar} = \psi^*(x)\psi(x) = \left|\psi(x)\right|^2, \quad (6.8)$$

ou seja, $p(x,t) = p(x) = \left|\psi(x)\right|^2$ se torna independente do tempo. Portanto, a probabilidade de encontrarmos a partícula em uma região [a, b], com $a < b$, é dada por:

$$P[a,b] = \int_a^b \left|\psi(x)\right|^2 dx. \quad (6.9)$$

Do mesmo modo, se $\Psi(x, t)$ estiver normalizada, $\psi(x)$ o estará automaticamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\psi(x)\right|^2 dx = 1. \quad (6.10)$$

Qual é a interpretação física da constante E? Até agora, parece que ela surgiu apenas como um artifício matemático. Mas, na verdade, veremos a seguir que E é nada menos que a energia total da partícula!

ATIVIDADE

1. Substituindo a função de onda $\Psi(x, t)$, dada pela Equação (6.7), na expressão para o valor esperado da energia, $\left\langle E \right\rangle = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} dx$, verifique que a constante E efetivamente corresponde ao valor esperado da energia do sistema.

____

____

____

RESPOSTA COMENTADA

Fazendo a substituição sugerida, obtemos:

$$\left\langle E \right\rangle = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} dx = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)e^{iEt/\hbar}\psi(x) \frac{d(e^{-iEt/\hbar})}{dt} dx$$

$$= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)e^{iEt/\hbar}\psi(x)\left(\frac{-iE}{\hbar}\right)e^{-iEt/\hbar} dx = E\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = E$$

No último passo, usamos a condição de normalização para $\psi(x)$.

Vamos agora olhar com mais atenção para a segunda das equações (6.5), que deve ser satisfeita pela função de onda $\psi(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)\ . \qquad (6.11)$$

Essa é uma equação diferencial ordinária conhecida como *equação de Schrödinger independente do tempo*. A função de onda $\psi(x)$ é sempre uma função contínua e, sempre que o potencial $V(x)$ for finito, com derivada também contínua. A equação de Schrödinger independente do tempo tem um papel de grande importância prática na Física Quântica: ela aparece com muito mais freqüência no dia-a-dia dos físicos do que a própria equação de Schrödinger dependente do tempo. Isso porque, como dissemos antes, as situações em que a energia potencial é independente do tempo são muito freqüentes. A grande maioria dos exemplos tratados nesta disciplina envolvem resolver essa equação.

AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES DE OPERADORES QUÂNTICOS

A equação de Schrödinger independente do tempo (6.11) pode ser escrita da seguinte forma:

$$H\psi(x)=E\psi(x)\,, \quad (6.12)$$

onde

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x) \qquad (6.13)$$

é o *operador hamiltoniano*. Note que, em analogia com a Mecânica Clássica, o operador hamiltoniano é dado pela soma dos operadores energia cinética e energia potencial (lembre-se da Aula 7 da disciplina Mecânica). Utilizando a Equação (5.4) da Aula 5, verificamos que o primeiro termo da Equação (6.13) pode ser associado à energia cinética $p^2/\,2m$.

A Equação (6.12) é um exemplo de *equação de autovalores*. Em geral, uma equação de autovalores tem a forma $O\psi=\lambda\psi$, em que O é um operador e λ é um número, conhecido como *autovalor* do operador. A função ψ que satisfaz à equação de autovalores é conhecida como *autofunção* do operador. No nosso caso específico, dizemos que a função de onda que é solução da Equação (6.12) é uma *autofunção do hamiltoniano* e a energia total E é seu autovalor, também conhecida como *auto-energia*.

> Você aprendeu o que são autovalores e autovetores de uma matriz na disciplina de Álgebra Linear II. Aquela situação é completamente análoga à que estamos descrevendo; basta fazer a correspondência matriz↔operador e autovetor↔autofunção. De fato, na mesma época em que Schrödinger desenvolveu sua equação, Heisenberg também formulou uma teoria quântica baseada em álgebra de matrizes. No início, pensava-se que as duas teorias eram distintas, mas logo se percebeu que são formulações equivalentes da mesma teoria. Nesta disciplina, trataremos apenas da teoria de Schrödinger. Porém, a formulação de Heisenberg é também bastante interessante e útil, podendo ser aprendida em cursos mais avançados de Física Quântica.

Quando um sistema quântico está em um estado correspondente a uma autofunção da energia, diz-se que ele está em um *estado estacionário*. Um estado estacionário se caracteriza pelo fato de que toda e qualquer medida da energia do sistema dará sempre o mesmo valor E, a *auto-energia do sistema*. Ou seja, não há incerteza na medida da energia neste caso. Você lembra que vimos um exemplo disso na Atividade Final 1 da aula passada?

ATIVIDADE

2. O que acabamos de dizer vale não apenas para o operador hamiltoniano, mas também para qualquer operador. Ou seja, se ψ é uma autofunção do operador *O* com autovalor λ, todas as medidas da grandeza física associada ao operador *O* darão sempre o mesmo resultado λ. Nesta atividade, você irá demonstrar este resultado.

a. Mostre que, se ψ é uma autofunção do operador *O* com autovalor λ, o valor esperado do operador (calculado pela Equação (4.9) da Aula 4) é igual a λ.

b. Mostre que, nesse caso, a incerteza ΔO é nula.

RESPOSTA COMENTADA

a. A expressão (4.9) para o valor esperado, no caso estacionário, torna-se $\langle O \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) O \psi(x)\, dx$. *Usando o resultado* $O\psi(x) = \lambda\psi(x)$, *obtemos* $\langle O \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \lambda \psi(x)\, dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)\, dx = \lambda$, *em que utilizamos novamente o fato de que a função de onda* $\psi(x)$ *é normalizada.*

b. A incerteza é calculada da maneira usual: $\Delta O = \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}$
Já calculamos $\langle O \rangle$ *no item anterior, basta agora calcularmos* $\langle O^2 \rangle$.
Isto é feito da seguinte maneira:

$$\langle O^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) O^2 \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) O \left[O\psi(x) \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) O \left[\lambda\psi(x) \right] dx$$

$$= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) O \psi(x)\, dx = \lambda \langle O \rangle = \lambda^2$$

Assim, $\Delta O = \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2} = 0$ *, isto é, a incerteza é nula.*

DENSIDADE DE CORRENTE DE PROBABILIDADE

Como vimos na Aula 3 de Física 4A, ondas clássicas transportam energia. Para essas ondas, podemos definir, por exemplo, o fluxo ou densidade de corrente de energia, ou seja, a energia transportada por unidade de tempo e por unidade de área. Será que podemos definir uma quantidade análoga a essa para as ondas quânticas? Bem, lembre-se de que as ondas quânticas são ondas de matéria. Mais precisamente, são ondas que dão a *probabilidade* de encontrar uma partícula de matéria no espaço. Se essa probabilidade flui como uma onda, então podemos usar a matemática das ondas para calcular a *densidade de corrente de probabilidade* transportada pela onda quântica. Isso parece interessante... Vamos obter este resultado?

Para isso, vamos antes relembrar uma equação muito importante em Física, a *equação de continuidade*. A equação de continuidade aparece em vários contextos na Física. De fato, sempre que há uma lei de conservação de alguma quantidade que flui no espaço (matéria, carga etc.), essa lei é regida por uma equação de continuidade. Vimos uma versão simplificada dessa equação na Aula 3 de Física 2A, você se lembra? Na ocasião, o contexto era a hidrodinâmica. Nesse contexto, obtivemos uma equação de continuidade que expressava a conservação da massa: a variação da massa em um certo volume é dada pela diferença entre a massa que entra e a massa que sai. Para entender isso melhor, veja a **Figura 6.1**. Ela mostra uma certa quantidade de massa ΔM em um trecho da reta entre x e $x + \Delta x$. Essa massa pode aumentar ou diminuir, dependendo do fluxo ou corrente de massa $j(x,t)$, definida como a quantidade de massa por unidade de tempo que passa pelo ponto x, no instante de tempo t que estamos considerando. De forma precisa,

$$\frac{\partial(\Delta M)}{\partial t} = j(x,t) - j(x+\Delta x,t). \qquad (6.14)$$

Definindo agora a densidade linear de massa como $\rho = \Delta M/\Delta x$, temos $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{[j(x+\Delta x,t) - j(x,t)]}{\Delta x}$, que no limite $\Delta x \to 0$ torna-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \qquad (6.15)$$

Essa é a equação de continuidade da massa em uma dimensão. Ela expressa uma física bem simples: o aumento ou diminuição da densidade de massa em um certo ponto depende da derivada espacial da corrente naquele mesmo ponto. Se essa derivada é não-nula, quer dizer que entra mais massa do que sai (ou vice-versa) naquela posição, fazendo com que a densidade de massa varie.

!

Em três dimensões, a equação de continuidade se escreve como $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$, em que ρ é, neste caso, a densidade volumétrica de massa.

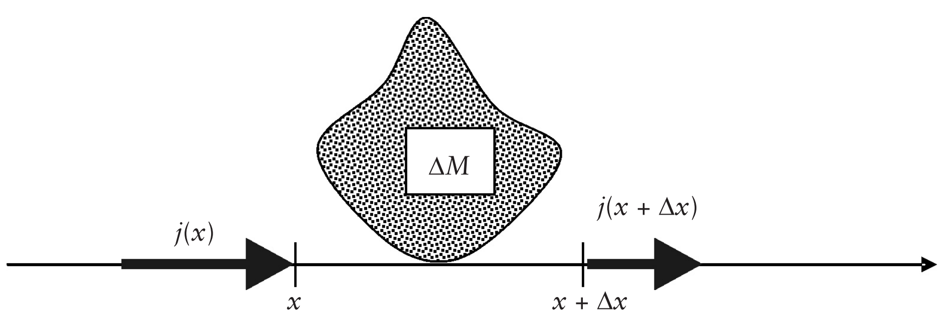

Figura 6.1: Conservação da massa em uma dimensão. A massa ΔM aumenta ou diminui, dependendo se a corrente de massa que entra, $j(x)$, é maior ou menor que a corrente de massa que sai, $j(x+\Delta x)$, por unidade de tempo.

Muito bem, vamos aplicar agora esse conceito ao caso no qual estamos interessados. Ou seja, vamos tentar obter uma equação de continuidade para $|\Psi(x,t)|^2$. Derivando com relação ao tempo:

$$\frac{\partial|\Psi(x,t)|^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\right] = \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}. \qquad (6.16)$$

Usando a equação de Schrödinger e sua complexa conjugada, a saber:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi \\ -i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + V\Psi^* \end{aligned}, \qquad (6.17)$$

podemos escrever

$$\frac{\partial|\Psi(x,t)|^2}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\right] = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right]. \qquad (6.18)$$

Note que essa equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial|\Psi(x,t)|^2}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0\,, \qquad (6.19)$$

em que

$$j(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(x,t)\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial x} - \Psi^*(x,t)\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right]. \qquad (6.20)$$

Compare agora a Equação (6.19) com a Equação (6.15). Veja que interessante: a Equação (6.19) é também uma equação de continuidade! No lugar da densidade de massa, temos agora a densidade de probabilidade $|\Psi(x,t)|^2$. Sendo assim, a quantidade $j(x, t)$, definida pela Equação (6.20), faz o papel de *densidade de corrente de probabilidade*. O gradiente dessa densidade de corrente, em um certo ponto do espaço e instante de tempo, informa-nos se a probabilidade de encontrarmos a partícula ali aumenta ou diminui.

ATIVIDADES FINAIS

1. No caso estacionário, em que $\Psi(x,t)$ é dada pela Equação (6.7):

a. Mostre que a densidade de corrente de probabilidade fica na forma:

$$j(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi(x)\frac{d\psi^*(x)}{dx} - \psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}\right].$$

b. Derivando essa expressão em relação a x, e utilizando a equação de Schrödinger independente do tempo, mostre que a densidade de corrente é uma constante, independente de x.

RESPOSTA COMENTADA

a. Se substituirmos a Equação (6.7) na Equação (6.20), obteremos:

$$j(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi(x)e^{-iEt/\hbar}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*(x)e^{iEt/\hbar}\right) - \psi^*(x)e^{iEt/\hbar}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x)e^{-iEt/\hbar}\right)\right]$$
$$= \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi(x)\frac{d\psi^*(x)}{dx} - \psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx}\right].$$

Esse é precisamente o resultado que queríamos demonstrar. Perceba que, nesse caso, $j(x,t) = j(x)$, ou seja, a densidade de corrente de probabilidade não depende do tempo.

b. Como sugerido, vamos tomar a derivada de $j(x)$ com relação a x:

$$\frac{dj}{dx} = \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi^*}{dx} + \psi\frac{d^2\psi^*}{dx^2} - \frac{d\psi^*}{dx}\frac{d\psi}{dx} - \psi^*\frac{d^2\psi}{dx^2}\right]$$
$$= \frac{i\hbar}{2m}\left[\psi\frac{d^2\psi^*}{dx^2} - \psi^*\frac{d^2\psi}{dx^2}\right].$$

Usando agora a equação de Schrödinger independente do tempo e sua complexa conjugada, a saber,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\psi$$
$$\frac{d^2\psi^*}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\psi^*,$$

chegamos ao resultado final:

$$\frac{dj}{dx} = \frac{i}{\hbar}[V(x) - E]\left[\psi\psi^* - \psi^*\psi\right] = 0$$

Dessa forma, como j(x) tem derivada nula, ela é uma constante, como queríamos demonstrar.

2. Considere um oscilador harmônico quântico com freqüência angular ω, em uma dimensão. A energia potencial desse sistema é exatamente igual à do seu análogo clássico: $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Veremos, nas próximas aulas, que uma função gaussiana $\psi(x) = Ce^{-bx^2}$ é a autofunção de menor energia (estado fundamental) do oscilador. Encontre o valor de *b* para que essa função seja solução da equação de Schrödinger e obtenha a energia deste estado.

RESPOSTA COMENTADA

Vamos substituir a função $\psi(x) = Ce^{-bx^2}$ *na equação de Schrödinger:*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi = E\psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(Ce^{-bx^2}\right) + \left(\frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\left(Ce^{-bx^2}\right) = E\left(Ce^{-bx^2}\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(4b^2x^2 - 2b\right)e^{-bx^2} + \left(\frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\left(e^{-bx^2}\right) = E\left(e^{-bx^2}\right) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(4b^2x^2 - 2b\right) + \left(\frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) = E \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}m\omega^2 - \frac{2b^2\hbar^2}{m}\right)x^2 = E - \frac{b\hbar^2}{m} .$$

Veja que chegamos em uma igualdade em que o lado esquerdo depende de x e o lado direito, não. Isso não pode acontecer, a menos que os dois termos sejam nulos! Impondo que o lado esquerdo seja nulo, obtemos o valor de b:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 - \frac{2b^2\hbar^2}{m} = 0 \Rightarrow b = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

Agora, impondo que o lado direito seja nulo, encontramos o valor da energia:

$$E - \frac{b\hbar^2}{m} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\hbar\omega .$$

Esse é um resultado bastante conhecido. Note que a energia do estado fundamental do oscilador harmônico quântico não é nula. Isso contrasta com o resultado clássico, no qual a situação de menor energia para o oscilador corresponde à situação em que ele está parado na origem, com energia *cinética e energia potencial nulas, e, portanto, com energia total também nula. Perceba que o Princípio da Incerteza impede que isso ocorra no sistema quântico: é impossível ter uma partícula parada em uma certa posição, pois ela teria, ao mesmo tempo, posição e momento bem definidos. Em outras palavras, para localizar a partícula em uma certa região, paga-se o preço de se aumentar seu momento (e, conseqüentemente, sua energia). A energia do estado fundamental do oscilador harmônico, que encontramos nesta atividade, é também conhecida como "energia de ponto zero".*

RESUMO

Se a energia potencial de um sistema não depende do tempo, temos um sistema estacionário, no qual a solução da equação de Schrödinger tem a forma $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, em que *E* é a energia total e a função $\psi(x)$ é obtida por meio da equação de Schrödinger independente do tempo. Essa equação é um exemplo de equação de autovalores, em que $\psi(x)$ é a autofunção e *E* é o autovalor ou auto-energia. A variação da densidade de probabilidade em um certo ponto do espaço é descrita por uma equação de continuidade, na qual a densidade de corrente de probabilidade $j(x,t)$ desempenha um papel crucial.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos resolver a equação de Schrödinger para o caso mais simples possível: quando o potencial é nulo em todo o espaço. Isso corresponde a uma partícula que não sofre os efeitos de forças externas, também chamada partícula livre.