AULA 5

Operadores momento e energia e o Princípio da Incerteza

Metas da aula

Definir os operadores quânticos do momento linear e da energia e enunciar o Princípio da Incerteza de Heisenberg.

objetivos

- calcular grandezas associadas aos operadores momento linear e energia;
- aplicar o Princípio da Incerteza de Heinsenberg.

Pré-requisitos

Para uma melhor compreensão desta aula, é importante que você revise a Aula 4 desta disciplina e o fenômeno de difração da luz (Aula 8 de Física 4A).

OPERADORES QUÂNTICOS DO MOMENTO LINEAR E DA ENERGIA

Vimos, na Aula 4 desta disciplina, que devemos associar um operador quântico a cada grandeza física. Observamos também que o conhecimento da função de onda nos permite calcular o valor esperado (ou valor médio) de um conjunto muito grande de medidas dessa grandeza física. O momento linear (ou quantidade de movimento) e a energia de um sistema são duas quantidades de importância fundamental na Mecânica Clássica e isto não é diferente na Mecânica Quântica. Então, quais são os operadores quânticos associados a essas grandezas?

Podemos reescrever a equação de Schrödinger, Equação (4.2), de uma forma um pouco diferente:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]\Psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x,t)\right]\Psi(x,t). \quad (5.1)$$

Note que, como esta equação deve ser válida para qualquer solução $\Psi(x,t)$, ela é equivalente à relação entre operadores diferenciais:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x,t). \quad (5.2)$$

Se compararmos esta relação com a relação clássica

$$E=\frac{p^2}{2m}+V(x,t), \quad (5.3)$$

vemos que podemos associar as quantidades clássicas energia E e momento linear p aos seguintes operadores diferenciais:

$$p\leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\;,\;E\leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Portanto, postular a equação de Schrödinger, como fizemos na Aula 4, é equivalente a postular a associação entre as quantidades clássicas e as quânticas (5.4).

O procedimento baseado na associação entre as quantidades clássicas e as quânticas (5.4) foi, essencialmente, o seguido por Schrödinger para derivar a sua equação.

A partir da definição do operador momento linear, primeira das associações da Equação (5.4), podemos calcular o valor esperado do momento, utilizando a receita prescrita na Equação (4.9):

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\,p\,\Psi(x,t)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,t)dx \\ \Rightarrow \langle p\rangle &= -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}dx\ .\end{aligned} \tag{5.5}$$

Da mesma forma, podemos calcular o valor esperado da energia,

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\,E\Psi(x,t)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi(x,t)dx \\ \Rightarrow \langle E\rangle &= i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}dx.\end{aligned} \tag{5.6}$$

ATIVIDADE

1. Considere mais uma vez a função de onda do estado fundamental do poço infinito, descrita na Aula 4.

a. Calcule o valor esperado do momento linear *p* e interprete seu resultado.

____

____

b. Calcule o desvio-padrão ou incerteza $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$ para o estado fundamental do poço infinito.

____

____

RESPOSTA COMENTADA

a. O valor esperado do momento linear é dado por:

$$\langle p\rangle = \int_{-a/2}^{a/2}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}e^{iEt/\hbar}(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}e^{-iEt/\hbar}\right)dx = \frac{2i\hbar}{a}\frac{\pi}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\cos\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{a}dx = 0$$

Mais uma vez, podemos entender este resultado por argumentos de simetria. Como o poço é simétrico, há a mesma probabilidade de se encontrar a partícula com velocidade (ou momento) para a direita ou para a esquerda, de modo que o valor esperado do momento é nulo.

b. A incerteza no momento linear é obtida por:

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2} \cos\frac{\pi x}{a}\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cos\frac{\pi x}{a}\, dx = \frac{2\hbar^2\pi^2}{a^3}\int_{-a/2}^{a/2} \cos^2\frac{\pi x}{a}\, dx = \left(\frac{\hbar\pi}{a}\right)^2$$

$$\Delta p = \frac{\hbar\pi}{a}.$$

O PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG

Como já dissemos anteriormente, conheceremos o estado de uma partícula clássica se soubermos sua posição e sua velocidade (ou momento) em um dado instante de tempo. Na Física Clássica, não há limitação teórica para a precisão com que podemos conhecer essas grandezas. Ou seja, classicamente, podemos conhecer a posição e a velocidade com precisão absoluta (ou incerteza nula); o que nos limita é apenas a precisão de nossos instrumentos de medida. Em princípio, poderíamos tornar nossos instrumentos tão precisos quanto quiséssemos.

Mas o mesmo não acontece na Física Quântica. Vimos na aula passada que, na Física Quântica, a relação entre um sistema físico e o observador é bem diferente que na Física Clássica. Para observar um sistema ou medir alguma de suas propriedades é preciso, necessariamente, interferir ou interagir com ele. Essa interação dá origem a imprecisões ou incertezas intrínsecas nas medidas que tentamos realizar. Esta é uma propriedade fundamental da natureza, da qual não podemos nos ver livres, ainda que melhoremos ao máximo nossos instrumentos de medida!

Essa propriedade da natureza pode ser enunciada através do famoso *Princípio da Incerteza*, formulado pelo físico alemão Werner Heisenberg (**Figura 5.1**). Segundo ele, a incerteza Δx na medida da posição de uma partícula quântica está relacionada à incerteza na medida de seu momento Δp pela seguinte desigualdade:

$$\Delta x\, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}\ . \qquad (5.7)$$

Isto quer dizer que é impossível determinar com precisão absoluta (incerteza nula) a posição e o momento de uma partícula quântica, simultaneamente. Se fizermos uma medida muito precisa da posição, teremos uma imprecisão grande no momento (e vice-versa), de modo que o produto das incertezas nunca é menor que $\hbar/2$.

Figura 5.1: O físico alemão Werner Heisenberg (1901-1976), que formulou o Princípio da Incerteza. Heisenberg ganhou o Prêmio Nobel de Física de 1932.

O Princípio da Incerteza parece incompatível com nosso conceito clássico de partícula, algo que sempre imaginamos como tendo uma posição e uma velocidade bem definidas. Mas isto, mais uma vez, apenas reflete a inadequação de aplicarmos esse conceito aos objetos quânticos. Lembre-se: temos de usar a matemática das ondas! E, se pensarmos em ondas de probabilidade, o Princípio da Incerteza surge de forma muito natural e nada misteriosa. Podemos ver como isso funciona, se analisarmos um fenômeno ondulatório já bem conhecido de todos nós: a difração, que estudamos na Aula 8 de Física 4A.

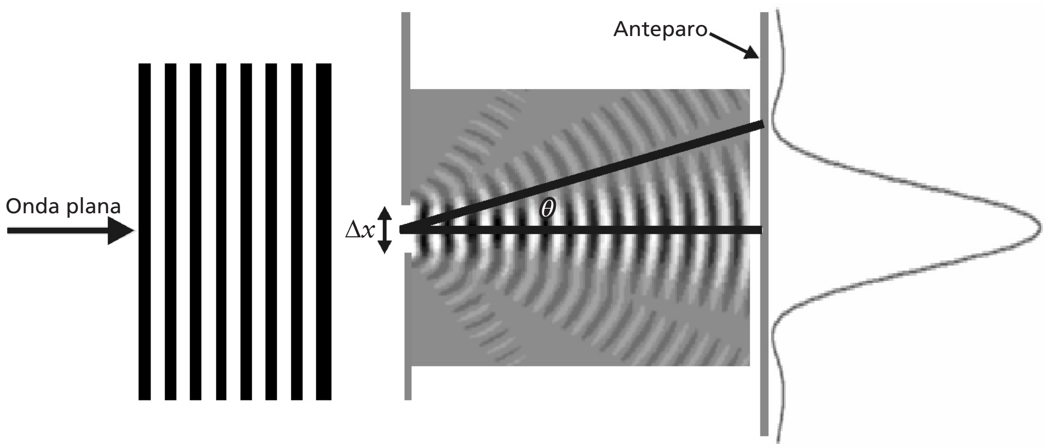

Figura 5.2: Difração de uma onda plana por uma fenda de largura Δx.

Vamos relembrar este fenômeno? Veja a **Figura 5.2**. Ela mostra a difração de uma onda plana, vinda da esquerda, por uma fenda de largura Δx. A fenda difrata a onda, espalhando-a em várias direções. A curva no painel à direita mostra a intensidade da onda detectada no anteparo. Note que o pico central tem uma largura angular θ, que você calculou na Aula 8 de Física 4A:

$$\theta \approx \operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{\Delta x}\,. \qquad (5.8)$$

Vamos agora lembrar que, na Física Quântica, as ondas estão associadas à probabilidade de se encontrar partículas. Suponhamos, então, que a onda da **Figura 5.2** representa um elétron incidente da esquerda com momento linear na direção horizontal. O elétron passa pela fenda. Note que esta informação é suficiente para localizarmos sua posição com uma incerteza Δx quando ele passa por ali. E o que acontece com o momento linear do elétron? Observe que, para que os elétrons atinjam o anteparo formando a curva característica da difração (que agora deve ser intepretada como a distribuição angular da probabilidade de se encontrar o elétron), seu momento linear $\vec{p}$, que antes se encontrava na direção horizontal, deve adquirir uma componente vertical Δp. A magnitude média de Δp pode ser estimada pela largura θ da curva de distribuição de probabilidades (veja as **Figuras 5.2** e **5.3**). Obtemos então:

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{\Delta p}{p} \, . \qquad (5.9)$$

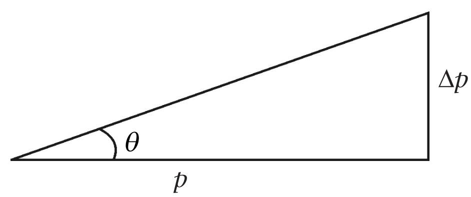

Figura 5.3: Para ser desviado de forma a produzir no anteparo uma distribuição angular com largura θ, o momento do elétron deve adquirir uma componente vertical Δp.

Combinando as Equações (5.8) e (5.9) com a relação de de Broglie $\lambda = h/p$, chegamos ao resultado:

$$\Delta x \, \Delta p \approx h \, . \qquad (5.10)$$

Essa relação, obtida de forma muito simplificada, está próxima ao resultado mais rigoroso expresso pela Equação (5.7). Trata-se de uma maneira simples de mostrar que o Princípio da Incerteza não tem nada de misterioso, é apenas uma conseqüência da natureza ondulatória das partículas quânticas!

ATIVIDADE

2. Use os resultados que você obteve para Δx e Δp na Atividade Final da Aula 4 desta disciplina e na Atividade 1 desta aula, respectivamente, para mostrar que o Princípio da Incerteza é obedecido pelo estado fundamental do poço de potencial infinito.

____
____
____

RESPOSTA COMENTADA

Encontramos $\Delta x = 0{,}18a$ *na Atividade Final da Aula 4 e* $\Delta p = \hbar\pi / a$ *na Atividade 1 desta aula. Portanto, temos o produto* $\Delta x\ \Delta p = 0{,}56\hbar$ *. Como isto é maior que* $\hbar / 2$*, a função de onda do estado fundamental do poço de potencial infinito satisfaz ao Princípio da Incerteza, expresso pela Equação (5.7).*

O Princípio da Incerteza de Heisenberg, por seu aspecto pouco intuitivo (se interpretado segundo os conceitos da Física Clássica), é uma das idéias da Física Quântica que têm maior penetração na sociedade em geral, ainda que, muitas vezes, de forma incorreta. Há, inclusive, várias piadas sobre o Princípio da Incerteza!

ATIVIDADES FINAIS

1. Considere novamente a função de onda do estado fundamental do poço infinito:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A\cos\dfrac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar}, & -a/2 < x < a/2 \\ 0, & x \geq a/2 \text{ ou } x \leq -a/2 \end{cases}$$

a. Mostre que *E* é o valor esperado da energia.

b. Calcule o desvio-padrão ou incerteza $\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$ para este estado.

RESPOSTA COMENTADA

a. Utilizando a expressão (5.6), obtemos:

$$\langle E \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\frac{\pi x}{a} e^{iEt/\hbar} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\frac{\pi x}{a} \mathrm{e}^{-iEt/\hbar} dx$$

$$= \frac{2i\hbar}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2\frac{\pi x}{a} e^{iEt/\hbar} \left(-\frac{iE}{\hbar} \right) e^{-iEt/\hbar} dx = \frac{2E}{a} \int_{-\mathrm{a}/2}^{\mathrm{a}/2} \cos^2\frac{\pi x}{a} dx = E$$

b. Para calcularmos o desvio-padrão, temos que obter $\langle E^2 \rangle$*:*

$$\langle E \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\frac{\pi x}{a} e^{iEt/\hbar} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\frac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} dx$$

$$= -\frac{2\hbar^2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2\frac{\pi x}{a} e^{iEt/\hbar} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{-iEt/\hbar} dx = \frac{2E^2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2\frac{\pi x}{a} dx = E^2$$

Portanto, o desvio-padrão neste é $\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sqrt{E^2 - E^2} = 0$
Assim, não há incerteza na medida da energia neste caso! Na próxima aula, entenderemos o significado deste resultado.

2. Mostre que, para uma partícula livre, podemos escrever a relação de incerteza também na forma $\Delta\lambda \Delta x \geq \lambda^2 / 4\pi$, em que Δx é a incerteza na posição do pacote de ondas e $\Delta\lambda$ é a incerteza simultânea no comprimento de onda (Eisberg-Resnick, Problema 15, Capítulo 3).

RESPOSTA COMENTADA

Usando a relação de de Broglie, $p = h/\lambda$*, vamos considerar uma incerteza* Δp *no momento e ver qual a incerteza correspondente* $\Delta\lambda$ *no comprimento de onda:*

$$p \pm \Delta p = \frac{h}{\lambda \mp \Delta\lambda} = \frac{h}{\lambda}\left(\frac{1}{1 \mp \Delta\lambda / \lambda} \right).$$

Supondo $\Delta\lambda / \lambda << 1$ *temos:*

$$p \pm \Delta p = \frac{h}{\lambda \mp \Delta\lambda} = \frac{h}{\lambda}(1 \pm \Delta\lambda / \lambda) \Rightarrow \Delta p = \frac{h\Delta\lambda}{\lambda^2}.$$

Note que o mesmo resultado poderia ser obtido apenas tomando a derivada:

$p = h/\lambda \Rightarrow dp = -(h/\lambda^2)d\lambda$ *e aproximando* $|dp| \approx \Delta p$ *e* $|d\lambda| \approx \Delta\lambda$ *. Usando agora a relação de incerteza* $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$*, obtemos finalmente:*

$$\frac{h\Delta x\Delta\lambda}{\lambda^2} \geq \frac{h}{4\pi} \Rightarrow \Delta x\Delta\lambda \geq \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

3. Se $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-7}$ para um fóton, qual o valor correspondente de Δx para a. $\lambda = 5{,}00 \times 10^{-4}$Å (raio γ)? b. $\lambda = 5{,}00$ Å (raio X)? c. $\lambda = 5000$ Å (luz)?

(Eisberg-Resnick, Problema 16, Capítulo 3).

RESPOSTA COMENTADA

Basta aplicarmos a fórmula obtida na Atividade Final 2 desta aula: $\Delta\lambda\Delta x \geq \lambda^2/4\pi$*. Assim, obtemos: a. 398 Å; b. 398 μm; c. 0,398 m.*

4. a. Considere um elétron em algum ponto dentro de um átomo de diâmetro 1 Å. Qual é a incerteza no momento do elétron? Isto é consistente com a energia de ligação de elétrons em átomos? b. Imagine que um elétron esteja em algum ponto no interior de um núcleo de 10^{-12} cm. Qual é a incerteza no momento do elétron? Isto é consistente com a energia de ligação dos constituintes do núcleo? c. Considere agora um nêutron, ou um próton, como estando dentro desse núcleo. Qual é a incerteza no momento do nêutron, ou do próton? Isto é consistente com a energia de ligação dos constituintes do núcleo? (Eisberg-Resnick, Problema 22, Capítulo 3).

RESPOSTA COMENTADA

a. Se $\Delta x = 1$ *Å, então, pelo Princípio da Incerteza,* $\Delta p = 5,3 \times 10^{-25}$ *kg.m/s. Ou seja, ainda que o valor esperado de p seja nulo, há uma probabilidade apreciável de que seja feita uma medida cujo resultado seja* $p \approx \Delta p$ *(em valor absoluto). Como a energia cinética se relaciona ao momento linear por* $E_c = \frac{p^2}{2m}$*, isto significa que há uma probabilidade apreciável de que o elétron tenha energia cinética da ordem de* $E_c = \frac{\Delta p^2}{2m} = 1,0$ *eV. Este valor é menor do que a energia de ligação de um elétron em um átomo de H (que tem um diâmetro aproximado de 1 Å), que é de 13,6 eV. Isto faz sentido, já que a energia cinética não pode ser maior que a energia de ligação: se fosse, o elétron poderia "escapar" do átomo.*

b. Repetindo a mesma análise para um elétron confinado em um núcleo, obtemos $\Delta p = 5,3 \times 10^{-21}$ *kg.m/s e uma energia cinética da ordem de* 10^8 *eV = 100 MeV. Isto é muito maior que a energia de ligação típica dos constituintes do núcleo, que é da ordem de poucos MeV (por núcleon). Por isso, um elétron, ainda que fosse submetido às forças responsáveis pela coesão nuclear, nunca ficaria confinado ao núcleo: sua alta energia cinética o faria escapar.*

c. Tanto o nêutron quanto o próton têm uma massa cerca de 1.840 vezes maior do que a do elétron. Assim, apesar de a incerteza no momento linear ser a mesma calculada no item anterior, isto corresponde a uma energia cinética 1.840 vezes menor, ou seja, de apenas 0,05 MeV. Esta energia é muito menor que as energias de coesão nucleares e, portanto, os prótons e nêutrons não escapam dos núcleos.

RESUMO

As grandezas físicas energia e momento linear correspondem aos operadores quânticos $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, respectivamente. Na Física Quântica, a posição e o momento de uma partícula não podem ser medidos simultaneamente com precisão absoluta. Suas incertezas devem satisfazer ao Princípio da Incerteza de Heisenberg:

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} .$$

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, aprenderemos o que são as soluções estacionárias da Equação de Schrödinger e conheceremos a Equação de Schrödinger independente do tempo.