

## Experiências com elétrons

# AULA 2

### Meta da aula

Descrever uma experiência de interferência por uma fenda dupla com partículas quânticas.

- analisar o comportamento de elétrons ao passar por uma fenda dupla;
- comparar este comportamento com o de projéteis e ondas, descritos na aula anterior desta disciplina;
- introduzir o conceito de interferência de elétrons.

### Pré-requisitos

Para uma melhor compreensão desta aula, é importante a revisão dos seguintes conteúdos: interferência por uma fenda dupla com ondas (Aula 8 de Física 4A); fótons e dualidade onda-partícula (Aula 8 de Física 4B); ondas de matéria e o comprimento de onda de de Broglie (Aula 9 de Física 4B).

**CONTADOR GEIGER**

Instrumento usado para detectar elétrons ou outros tipos de partículas quânticas. É formado por um tubo de gás (normalmente argônio) que conduz a eletricidade quando uma partícula passa por ele, ionizando-o. O instrumento amplifica o sinal, produzindo um “clique” para cada partícula que passa pelo gás.

**UMA EXPERIÊNCIA COM ELÉTRONS**

Vamos ver agora o que acontece quando realizamos o mesmo experimento de fenda dupla, mas agora com elétrons. Para isso, usamos um canhão de elétrons. Este pode ser um fio metálico de tungstênio (como o filamento de uma lâmpada) que, quando aquecido, emite elétrons. Como nos dois experimentos descritos na aula anterior, os elétrons incidem sobre uma parede que tem dois buracos e atingem um anteparo no qual há um detector deslocável. Um detector para elétrons pode ser um **CONTADOR GEIGER** ou um multiplicador de elétrons que, conectado a um alto-falante, produz um ruído toda vez que for atingido por um elétron.

A primeira coisa que notamos é que a chegada dos elétrons no detector produz sons de “cliques” bem definidos, vindos do alto-falante. Se interpretamos um som de “clique” como sendo a chegada de um elétron no detector, quase todas as nossas observações levam a crer que os elétrons se comportam como projéteis:

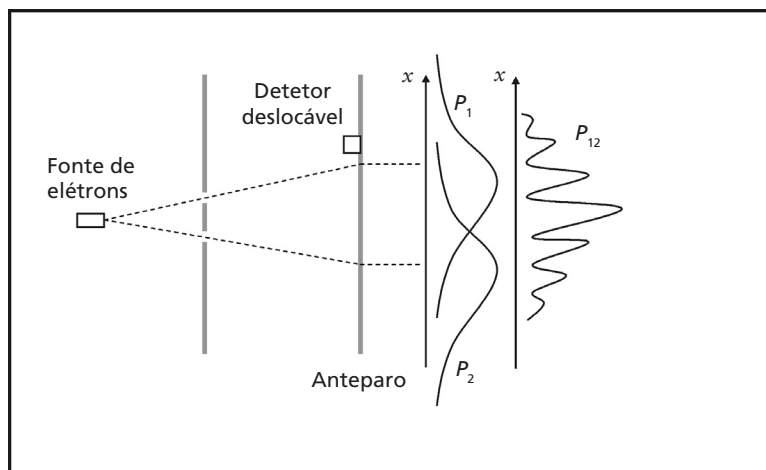
a. Todos os “cliques” são idênticos: não existem “meios-cliques”, por exemplo. Portanto, os *elétrons chegam em pacotes idênticos*.

b. Os “cliques” acontecem de forma aleatória, ou seja, ouve-se algo como: clique.... clique..... clique-clique.. clique..... clique-clique-clique..... clique. A análise desse padrão parece indicar que o instante de chegada de cada elétron é imprevisível.

c. Nunca escutamos dois “cliques” simultaneamente, mesmo que coloquemos vários detectores cobrindo totalmente o anteparo. Isso quer dizer que os elétrons chegam um de cada vez.

d. Se aumentarmos a temperatura do fio, teremos mais elétrons chegando ao detector por unidade de tempo. Assim como fizemos com projéteis, podemos associar a taxa média de chegada dos elétrons à probabilidade de chegada, para cada posição  $x$  no anteparo.

**Figura 2.1:** Esquema do experimento de fenda dupla com elétrons. As probabilidades  $P_1$  e  $P_2$  correspondem, respectivamente, às situações nas quais apenas os buracos 1 ou 2 estão abertos. Já a probabilidade  $P_{12}$  corresponde à situação em que os dois buracos estão abertos simultaneamente.



O que acontece então quando computamos esta probabilidade? Bem, todos os resultados descritos anteriormente parecem ser consistentes com o fato de o elétron ser um projétil, como uma pequeníssima bolinha de gude. Portanto, nada mais razoável do que esperar que observemos a mesma curva descrita na **Figura 1.1** da Aula 1 desta disciplina. Aliás, toda a nossa intuição clássica nos leva a pensar no elétron como uma “bolinha”. Pois bem, este é o momento crucial em que nossa intuição falha. A probabilidade  $P_{12}$  que medimos para o elétron está mostrada na **Figura 2.1**. Note que ela tem oscilações que não existiam no caso dos projéteis. De fato, elas lembram muito as oscilações que observamos no caso das ondas e que interpretamos como *interferência*.

Decididamente, o elétron não é uma “bolinha”...

## INTERFERÊNCIA DE ONDAS DE ELÉTRONS

Mas como pode surgir um padrão de interferência de projéteis? Vimos, no caso das ondas, que há uma interferência entre as ondas que passam pelo buraco 1 e as que passam pelo buraco 2. As ondas passam ao mesmo tempo pelos dois buracos. Poderiam os elétrons que passam pelo buraco 1 estar interferindo de alguma forma com os que passam pelo buraco 2? Sabemos que os elétrons são partículas carregadas negativamente e que, portanto, devem interagir entre si de acordo com a Lei de Coulomb, como vimos na disciplina Física 3A. Poderia o padrão complicado de interferência surgir por meio da interação coulombiana ou, em outras palavras, a partir de um intrincado mecanismo de colisões entre os elétrons?

Podemos testar experimentalmente esta hipótese. Já dissemos que os elétrons chegam um de cada vez no anteparo. Mas talvez eles estejam sendo emitidos com uma taxa muito alta, de modo que possamos ter vários elétrons “em vôo” ao mesmo tempo e, portanto, interferindo uns nas trajetórias dos outros. Mas se reduzirmos bastante a temperatura do filamento, podemos diminuir cada vez mais a taxa de emissão de elétrons, até o limite em que tivermos certeza de que há *apenas um* elétron viajando de cada vez desde o emissor até o anteparo. Dessa forma, não há como ocorrer uma interação entre eles. Se fizermos o experimento, a taxa de detecção dos elétrons no anteparo realmente diminui bastante. Os “cliques” se tornam cada vez mais espaçados.

Mas, depois de deixarmos o experimento funcionando por um longo tempo, vai se formando, lentamente, o mesmo padrão de interferência que observamos anteriormente. Nada muda. Parece incrível, mas os elétrons passam um de cada vez pelos buracos e, ainda assim, interferem! É como se o elétron “interferisse com ele mesmo”!

Dizer que um elétron interfere com ele mesmo parece ser uma contradição. Afinal, a própria palavra “interferência” sugere a atuação de dois ou mais objetos no processo. Quem primeiro propôs esta expressão, propositalmente contraditória, para enfatizar a natureza não-intuitiva da interferência quântica, foi o físico inglês Paul Dirac. Na ocasião, ele se referia à experiência de fenda dupla realizada com fótons, as partículas de luz que foram apresentadas a você na Aula 8 de Física 4B. Mas a mesma idéia vale para elétrons também.

Na sua edição de setembro de 2002, a revista *Physics World* elegeu o experimento de fenda dupla com elétrons como o mais belo da história da Física! Veja este artigo em <http://physicsweb.org/articles/world/15/9/1>.

### ATIVIDADE



1. Há vários *sites* na internet nos quais você pode explorar o experimento de fenda dupla de forma “virtual”. Um deles é:

<http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/Computer/Doppelspalt/dslit.html>

Vamos aprender a interagir com este experimento virtual, pois ele será muito útil para nos ajudar a entender o fenômeno que estamos descrevendo. Siga os seguintes passos:

- a. Entre no *site* e inicie o programa.
- b. Você verá um quadro com retratos dos grandes nomes da Física Quântica. Selecione a linguagem que lhe é mais familiar e clique “ok”. O programa se iniciará imediatamente, abrindo uma janela.
- c. Você verá a montagem do experimento de fenda dupla, reproduzida na **Figura 2.2**. Esta montagem consiste em uma fonte de partículas, uma fenda dupla, uma lâmpada e um anteparo.

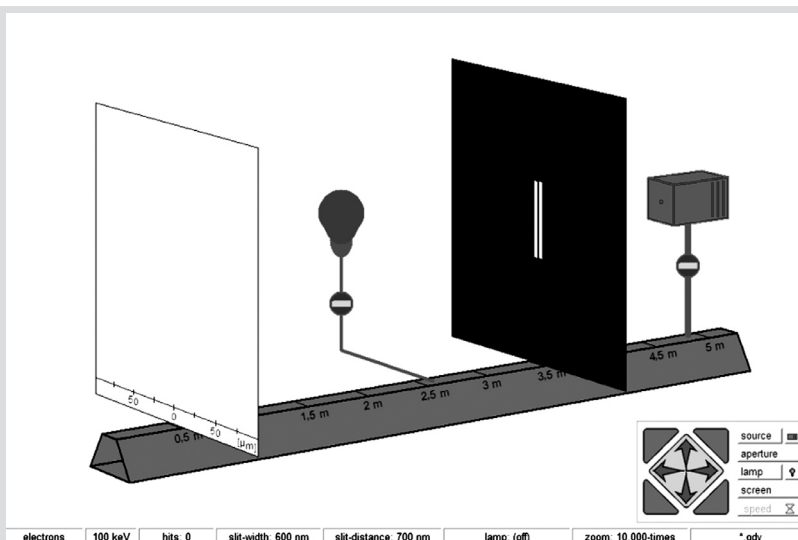


Figura 2.2: Montagem experimental e painel de controle do experimento virtual de interferência por uma fenda dupla.

d. No canto inferior direito da janela, você verá um pequeno painel de controle. Do lado esquerdo deste painel, há setas para posicionar o ângulo de visão do experimento da maneira que você achar melhor. Do lado direito, há vários botões de controle pequenos. Vamos descrevê-los um a um:

**Fonte (source):** Aqui você selecionará o tipo de partícula que irá jogar de encontro à fenda. Você pode optar por projéteis clássicos ou por diferentes partículas quânticas. Poderá também selecionar a energia das partículas que, no caso de partículas quânticas, está relacionada ao comprimento de onda das mesmas. O pequeno botão vermelho à direita do “Fonte” dá início à simulação.

**Abertura (aperture):** Controla as propriedades da fendas, como a largura das mesmas (*slit width*) e o espaçamento entre elas (*slit distance*). Pode-se também abrir ou fechar cada fenda separadamente.

**Lâmpada (lamp):** Com este botão, podemos controlar a intensidade e o comprimento de onda dos fótons que podemos fazer incidir nos elétrons para visualizar sua trajetória, como será descrito na próxima aula. À direita deste botão, o pequeno botão com a figura de uma lâmpada ativa o fluxo de fótons.

**Anteparo (screen):** Aqui você controla as diversas opções de visualização de seus resultados. A visualização normal corresponde a fazer aparecer na tela pequenos pontos vermelhos nas posições em que cada elétron incidiu no anteparo. Se a opção “resultado teórico” (*theo. result*) for ativada, aparecerá, em azul, a distribuição de probabilidades prevista teoricamente para aquelas condições do experimento. Se a opção “contagem” (*evaluation*) for acionada,

surgirá na tela um histograma, em vermelho, com a contagem do número de partículas que chegam em cada ponto do detetor. É possível ainda combinar as opções “resultado teórico” e “contagem”, para que elas apareçam simultaneamente na simulação. Há ainda botões para controlar a ampliação (*zoom*), apagar os resultados para iniciar uma nova simulação (*reset*) e para guardar fotografias de seus resultados em arquivos (*photos*).

Depois dessa longa (mas necessária) explicação sobre o funcionamento do experimento virtual, você deve estar ansioso para fazer sua primeira simulação. Está pronto? Então vamos lá: selecione a fonte para “elétrons” com energia cinética de 100 keV, correspondendo a um comprimento de onda de 4 pm (vamos relembrar, ainda nesta aula, como se relaciona a energia do elétron a seu comprimento de onda). Ajuste a largura das fendas para 400 nm e a distância entre as mesmas para 700 nm. Deixe a lâmpada desligada. Inicie o experimento e veja o que acontece.

#### RESPOSTA COMENTADA

*Observe que os elétrons colidem um de cada vez com o anteparo. Mas, gradualmente, surgirá na tela o padrão de interferências! Não é interessante?*

Ora, mas se os elétrons são pacotes *idênticos e indivisíveis*, poderíamos dizer que, diferentemente das ondas, eles passam ou por um buraco ou pelo outro, e não pelos dois ao mesmo tempo, certo? Está aí uma hipótese que poderíamos testar:

**Hipótese A:** *Cada elétron passa ou pelo buraco 1 ou pelo buraco 2.*

Pela nossa intuição com partículas clássicas, nada parece mais certo do que isso. Supondo que isto seja correto, todos os elétrons que atingem o anteparo se dividem em dois grupos: aqueles que passaram pelo buraco 1 e aqueles que passaram pelo buraco 2. Se isto for verdade, a curva  $P_{12}$  deve ser obtida pela soma de duas curvas:  $P_1$ , ou seja, a distribuição de probabilidades computada usando apenas os elétrons que passaram pelo buraco 1, e  $P_2$ , idem para o buraco 2. Será que podemos fazer este experimento? Bem, parece fácil: basta fechar um dos buracos de cada vez e repetir o experimento, como fizemos com os projéteis na aula passada.



### ATIVIDADE

2. Vamos retornar ao nosso experimento virtual. Agora deixe apenas uma das fendas aberta. Observe o que acontece.

---



---



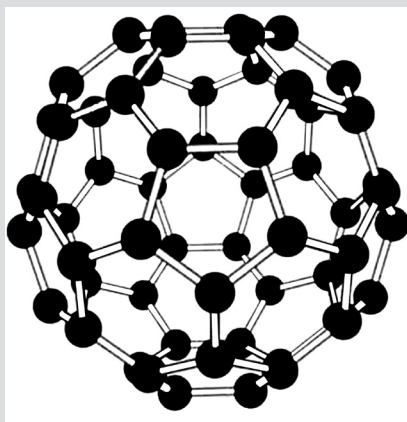
---

### RESPOSTA COMENTADA

*Veja que as oscilações rápidas que caracterizam a interferência desaparecem. Porém, percebe-se que algumas oscilações de menor periodicidade permanecem. Elas ocorrem devido à difração dos elétrons pela fenda que está aberta, do mesmo modo que ocorre com a luz (lembre-se da Aula 8 de Física 4A). Não nos preocupamos muito com a difração porque queríamos concentrar nossa atenção no fenômeno da interferência. Por isso, as curvas  $P_1$  e  $P_2$  da **Figura 2.1** não mostram as oscilações de difração. Estas são curvas apenas esquemáticas. De fato, a difração existe e é também uma manifestação da natureza ondulatória dos elétrons, mas no momento ela não é importante para a nossa argumentação. Porém, é preciso deixar este ponto bem esclarecido.*

Bem, fizemos o experimento e o resultado está reproduzido esquematicamente na **Figura 2.1**. Espere um minuto. Nosso resultado experimental mostra que  $P_{12} \neq P_1 + P_2$ !

Tudo parece muito misterioso. Elétrons chegam em “pacotes” e, ainda assim, exibem interferência típica das ondas. Este é um dos mistérios fundamentais da mecânica quântica: a *dualidade onda-partícula*, que você estudou na Aula 8 de Física 4B, no contexto do fóton. Como o físico americano Richard Feynman sugeriu no início deste módulo, vamos deixar de lado as tentativas de entender esse mistério. Tenha certeza de que muitos físicos famosos dedicaram boa parte de suas vidas tentando fazê-lo, sem sucesso. Vamos apenas *aceitá-lo* e explorá-lo um pouco mais. Ainda vamos descobrir coisas muito interessantes em consequência dele!



**Figura 2.3:** Uma molécula de  $C_{60}$ , ou *buckyball*, formada por 60 átomos de carbono dispostos de forma idêntica a uma bola de futebol.

A experiência de interferência de elétrons por uma fenda dupla foi realizada pela primeira vez por Claus Jönsson, em 1961. Mais recentemente, em 1991, Carnal e Mlynek realizaram a mesma experiência com átomos em vez de elétrons. Sim, átomos, que são milhares de vezes mais pesados que os elétrons, e ainda assim são partículas quânticas. Surpreso? Pois bem, em 1999, Arndt e colaboradores viram interferência de fenda dupla com moléculas de  $C_{60}$ , também chamadas de *buckyballs*. Estas moléculas, mostradas na **Figura 2.3**, contêm 60 átomos de carbono, dispostos como se formassem uma bola de futebol. São centenas de milhares de vezes mais pesadas que um elétron. Então, qual o limite que separa o mundo clássico do mundo quântico? Será que um dia poderemos ver interferência entre bolas de futebol de verdade? Voltaremos a esta questão em breve.

Se  $P_{12} \neq P_1 + P_2$ , haverá alguma outra maneira de obtermos  $P_{12}$  a partir de  $P_1$  e  $P_2$ ? Surpreendentemente, a resposta é bastante simples. Basta usarmos a matemática das ondas, que relembramos na aula passada. Note que a curva  $P_{12}$  é muito parecida com a curva de intensidades  $I_{12}$  que obtivemos na Aula 1 para as ondas. Como no caso das ondas, a intensidade não é a quantidade fundamental, mas sim a função de onda. Lembre-se: para ondas na superfície da água, a *função de onda* mais conveniente era a da altura do nível da água, que consideramos como uma variável complexa, para facilitar a matemática.

Vimos na Aula 9 de Física 4B que o físico francês Pierre de Broglie foi o primeiro a associar uma onda ao elétron. Na ocasião, chamamos essas ondas de “ondas de matéria”. Segundo de Broglie, um elétron (ou qualquer partícula microscópica) que se desloca com momento linear  $p$  tem associada a si uma onda com comprimento de onda  $\lambda$  tal que:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (2.1)$$



onde  $h = 6,63 \times 10^{-34}$  J.s é a constante de Planck. Iremos mais a fundo nesta idéia e vamos supor que o elétron é descrito por uma função de onda complexa  $\psi$ . Cada situação corresponde a uma função de onda diferente: se apenas o buraco 1 estiver aberto, teremos a função de onda  $\psi_1$ ; se apenas o buraco 2 estiver aberto, teremos a função de onda  $\psi_2$ ; e se ambos os buracos, 1 e 2, estiverem abertos, teremos a função de onda  $\psi_{12}$ . Em analogia com as ondas, temos  $\psi_{12} = \psi_1 + \psi_2$ . A partir daí, como podemos obter a probabilidade? Você se lembra do caso das ondas, onde a intensidade era proporcional ao quadrado da amplitude da onda? Algo análogo ocorre com o elétron, sendo que agora *a probabilidade é proporcional ao módulo quadrado da função de onda*. Como fizemos com as ondas na aula anterior, ignoramos, por enquanto, o coeficiente de proporcionalidade e escrevemos:

$$\begin{aligned} P_1 &= |\psi_1|^2 \\ P_2 &= |\psi_2|^2 \\ P_{12} &= |\psi_1 + \psi_2|^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Diz-se que a função de onda de uma partícula quântica é uma amplitude de probabilidade.

Lembre-se: para calcular o módulo ao quadrado de um número complexo, multiplica-se o número pelo seu complexo conjugado, ou seja,  $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ . Repare que  $|\psi|^2$  deve ser um número real e positivo. Afinal, toda probabilidade que se preza deve ser real e positiva.

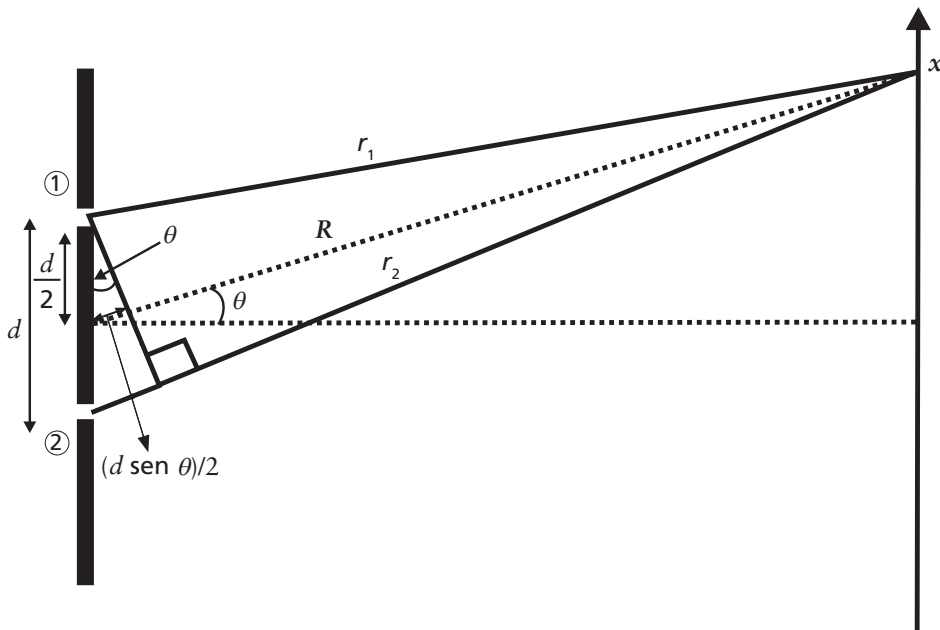
Como se vê, a matemática das ondas nos explica naturalmente o resultado encontrado no experimento, pois dela surge naturalmente o fenômeno de interferência. Mas então, se a soma dos efeitos de cada um dos buracos é diferente do efeito conjunto dos dois buracos abertos, a Hipótese A está incorreta! Não é verdade que os elétrons passam por um buraco ou pelo outro. Mas como pode ser isto, se eles chegam em pacotes? Será que eles fazem algo complicado, como se dividir em dois, passar pelos buracos e depois se juntar novamente em um só? Somos tentados a imaginar qualquer coisa, por mais absurda que seja, para salvar os conceitos clássicos de partícula e trajetória, bastante consolidados em nossa intuição física. Esta nos parece tão afrontada que não resistimos: temos de fazer um outro experimento para testar a Hipótese A. Será que não é possível observar os elétrons e ver por onde eles passam? Faremos isso na próxima aula.

## ATIVIDADE FINAL

1. Vamos estudar de forma mais quantitativa a interferência de elétrons. Vamos supor que nossa fonte emita elétrons com energia cinética de 10eV.

a. Qual o comprimento de onda da onda associada aos elétrons?

b. Suponha agora que os dois buracos são fontes de ondas circulares, exatamente como na experiência de interferência de luz descrita na Aula 8 de Física 4A. Reproduzimos a seguir a **Figura 8.5** daquela aula, que descreve a geometria do problema.



**Figura 2.4:** Descrição geométrica da experiência de fenda dupla.

Por analogia com aquela situação (veja a Equação (8.18) da Aula 8 de Física 4A), podemos propor as seguintes expressões para as funções de onda  $\psi_1$  e  $\psi_2$  no ponto  $x$ :

$$\psi_1 = Ae^{ikr_1}; \psi_2 = Ae^{ikr_2} , \quad (2.3)$$

onde  $A$  é uma constante. Usando as relações geométricas  $r_1 \approx R - \frac{d}{2} \sin \theta$  e  $r_2 \approx R - \frac{d}{2} \sin \theta$ , e expressando  $\sin \theta$  em termos da coordenada  $x$ , obtenha  $\psi_1$  e  $\psi_2$  em função de  $x$ . Dica: Use o limite  $R \gg d$ , onde  $\sin \theta \approx \tan \theta$ .

c. Calcule as probabilidades  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_{12}$  em função de  $x$ . O que você pode comentar sobre o seu resultado?

d. Tome os valores numéricos  $d = 1\text{mm}$  e  $R = 1\text{m}$ . Qual é a distância entre dois máximos consecutivos de probabilidade no padrão de interferência?

e. Repita o item (d) para uma molécula de  $\text{C}_{60}$  e para uma bola de futebol de cerca de  $1\text{kg}$ . Nos dois casos, considere que a energia cinética não se altera, sendo ainda  $10\text{eV}$  (ainda que seja muito difícil imprimir uma energia cinética tão baixa a uma bola de futebol!). Considere apenas a variação na massa. Você agora consegue entender por que a manifestação interferência quântica se torna impossível com objetos macroscópicos?

### RESPOSTA COMENTADA

Inicialmente, no item a, você terá de encontrar o comprimento de onda dos elétrons, usando a relação de de Broglie ( $\lambda = h/p$ ) e a relação entre momento linear e energia cinética de uma partícula ( $E = p^2/2m$ ). Tome cuidado com a conversão de unidades!

No item b, você deverá usar a aproximação  $\sin \theta \approx d/R$  (você consegue entender por quê?) e chegar ao seguinte resultado:

$$\psi_1 = Ae^{ikR}e^{-iqx}; \quad \psi_2 = Ae^{ikR}e^{iqx}, \quad \text{onde } q = \frac{kd}{2R}.$$

No item c, usando a receita da Equação (2.2), você chegará ao resultado  $P_1 = P_2 = |A|^2$ , ou seja, a probabilidade é constante, não depende de  $x$ . Assim, não há as oscilações típicas de interferência. Mas você pode agora estar confuso, pois as probabilidades  $P_1$  e  $P_2$  mostradas na **Figura 2.1** não são constantes, e sim curvas com forma de sino. Não se preocupe com este ponto. A razão disso é que o caminho que leva às expressões (2.3) envolve algumas aproximações. Estas aproximações estão melhor descritas na Aula 8 de Física 4A. Mais uma vez, o ponto que queremos enfatizar é que não aparecem as oscilações de interferência.

No entanto, essas oscilações aparecem claramente na distribuição de probabilidades, no caso de ambos os buracos estarem abertos. Você deve encontrar  $P_{12} = 4|A|^2 \cos^2(qx)$ . No item d, usando os valores numéricos propostos, você deverá encontrar algo da ordem de  $0,1\text{mm}$  para distâncias entre máximos consecutivos de probabilidade. É pequeno, mas mensurável.

*Em contrapartida, no item e, você verá que essas distâncias se tornam muito pequenas quando a massa da partícula aumenta. No caso de  $C_{60}$ , você deve encontrar distâncias cerca de mil vezes menores que no caso de elétrons. No caso de uma bola de futebol, a distância entre máximos consecutivos é menor por um fator  $10^{-17}$  em comparação com o caso eletrônico, tornando-se impossível de ser medida!*

Explore um pouco mais o experimento virtual de interferência por uma fenda dupla descrito nesta aula. Entre no *site* e brinque um pouco com ele, explorando e modificando os diversos parâmetros, tentando entender os resultados de cada experimento.

## RESUMO

Partículas microscópicas, como elétrons, têm um comportamento peculiar ao passar por uma fenda dupla. Este comportamento é diferente tanto de projéteis como de ondas. Ele tem características de ambos, o que designamos como *dualidade onda-partícula*. É necessário aprender também a usar a matemática das ondas para calcular as probabilidades de encontrar o elétron em determinadas posições do espaço.

## INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, tentaremos mais uma vez fazer uma medida da trajetória dos elétrons, ou seja, procuraremos determinar por qual buraco eles passam. Veremos que isto vai nos levar a efeitos muito interessantes!