AULA 15

O oscilador harmônico

Meta da aula

Aplicar o formalismo quântico ao caso de um potencial de um oscilador harmônico simples, $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

objetivos

- obter a solução da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico simples quântico;
- comparar esses resultados com o correspondente oscilador clássico.

Pré-requisitos

Para melhor compreensão desta aula, você deverá rever o oscilador harmônico clássico, que estudou em Física 2A e Mecânica Clássica, e seus estudos sobre equações diferenciais e séries de potências das disciplinas de Cálculo.

O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

O oscilador harmônico simples é um dos primeiros sistemas que estudamos na Mecânica Clássica e também um dos mais importantes. Uma de suas realizações experimentais mais simples é por meio de uma massa m ligada a uma mola ideal de constante elástica k. A mola exerce sobre a massa uma força restauradora $F = -kx$ (Lei de Hooke) sempre que a partícula sofre um deslocamento x, medido a partir da posição em que a mola está relaxada. O sistema é descrito por uma energia potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, e as soluções da equação de movimento de Newton são funções $x(t)$ que oscilam no tempo com a freqüência natural do oscilador, $\omega = \sqrt{k/m}$. Ao longo do seu curso, você deve ter percebido que a importância do oscilador harmônico na Física Clássica vai muito além do sistema massa-mola. Oscilações harmônicas surgem em uma imensa variedade de sistemas: pêndulo, fluidos, circuitos eletromagnéticos etc.

Um sistema "massa-mola" quântico é definido por uma partícula quântica de massa m sob ação de um potencial da forma $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, tal como o ilustrado na **Figura 15.1**.

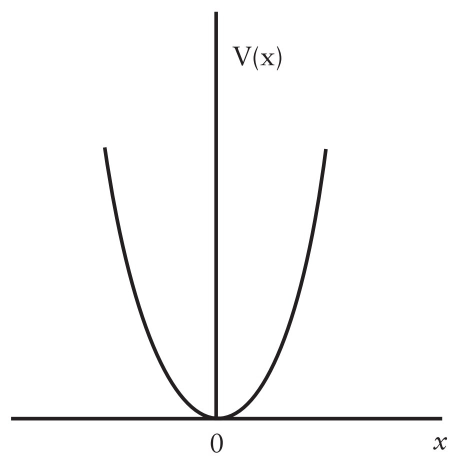

Figura 15.1: O potencial do oscilador harmônico.

Assim como na Física Clássica, o oscilador harmônico também tem uma importância fundamental na Mecânica Quântica. O motivo para isso é que sempre podemos aproximar o ponto de equilíbrio de um potencial qualquer, $V(x)$, pelo potencial parabólico do oscilador harmônico, como ilustrado na **Figura 15.2**. Graficamente, isso significa encontrar a parábola que melhor se ajusta ao potencial em torno do mínimo. Se a energia total da partícula for suficientemente pequena, de modo que a partícula passa a maior parte do tempo em torno do mínimo, onde a parábola é uma boa aproximação à curva de energia potencial, o sistema será aproximadamente harmônico.

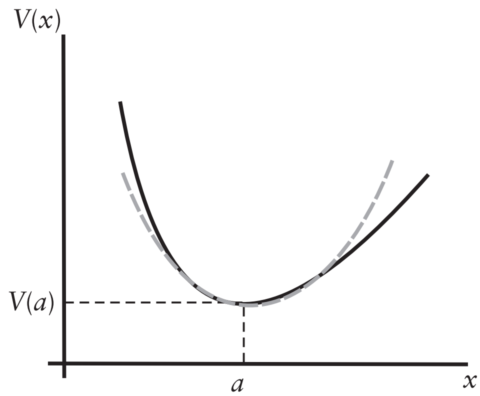

Figura 15.2: O potencial *V*(*x*) (linha cheia), aproximado na região do entorno de seu mínimo, em *x* = *a*, por um potencial parabólico, típico de um oscilador harmônico (linha tracejada).

Analiticamente, podemos encontrar o potencial harmônico que aproxima $V(x)$ na vizinhança do ponto $x = a$, em que $V(x)$ tem um mínimo, considerando a expansão em série de Taylor em torno do mínimo,

$$V(x) = V(a) + (x-a)\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=a} + \frac{1}{2}(x-a)^2\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=a} + \dots \quad ,$$

$$\approx V(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=a} \qquad (15.1)$$

já que a primeira derivada do potencial, em $x = a$, é nula, por se tratar de um mínimo. Assim, vemos que o potencial de oscilador harmônico com $k = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=a}$ é uma aproximação de $V(x)$ em torno do mínimo. Desta forma, o potencial harmônico pode ser utilizado em casos em que existem pequenas oscilações em torno de pontos de equilíbrio estável, como, por exemplo, no estudo de vibrações de moléculas ou dos átomos em um sólido.

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

No caso do oscilador harmônico, a equação de Schrödinger tem a forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi(x) = E\psi(x), \qquad (15.2)$$

que tem soluções para valores positivos da energia E. Costuma-se reescrever a Equação (15.2) utilizando as definições da freqüência angular do oscilador clássico, $\omega = \sqrt{k/m}$, e das variáveis adimensionais $\lambda = 2E/(\hbar\omega)$ e $\xi = \left(\sqrt{m\omega/\hbar}\right)x$. Fazendo essas substituições, a equação de Schrödinger fica na forma:

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + \left(\lambda - \xi^2\right)\psi(\xi) = 0 \,. \qquad (15.3)$$

Vamos começar nosso estudo pela análise do comportamento da função de onda $\psi(\xi)$. Fazemos mais uma substituição, definindo a função $h(\xi)$ de modo que:

$$\psi(\xi) = e^{-\xi^2/2}h(\xi) \,. \qquad (15.4)$$

Substituindo a Equação (15.4) na Equação (15.3), obtemos a equação diferencial para $h(\xi)$:

$$\frac{d^2h(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh(\xi)}{d\xi} + (\lambda - 1)h(\xi) = 0 \,. \qquad (15.5)$$

Essa equação é conhecida como *equação de Hermite*.

ATIVIDADE

1. Faça, em detalhe, os passos algébricos que levam à Equação (15.3) e à Equação (15.5).

____

____

____

RESPOSTA COMENTADA

Partimos da equação de Schrödinger, $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi(x) = E\psi(x)$,

e fazemos as substituições sugeridas, ou seja, $\omega = \sqrt{k/m}$, $\lambda = 2E/(\hbar\omega)$ *e* $\xi = \left(\sqrt{m\omega/\hbar}\right)x$. *Note que as derivadas com relação a x também têm de ser substituídas:* $\frac{d\psi}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d\psi}{d\xi} \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$.

Assim, obtemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\frac{1}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{m\omega}\xi^2\psi(\xi)=\frac{\hbar\omega\lambda}{2}\psi(\xi)$$

$$-\frac{\hbar\omega}{2}\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\frac{\hbar\omega}{2}\xi^2\psi(\xi)=\frac{\hbar\omega\lambda}{2}\psi(\xi)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\left(\lambda-\xi^2\right)\psi(\xi)=0,$$

que é a Equação (15.3). Fazendo agora a substituição $\psi(\xi)=e^{-\xi^2/2}h(\xi)$ *, vamos tomar a derivada segunda:*

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}=\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2/2}\frac{dh}{d\xi}-\xi e^{-\xi^2/2}h(\xi)\right)$$

$$=e^{-\xi^2/2}\frac{d^2h}{d\xi^2}-2\xi e^{-\xi^2/2}\frac{dh}{d\xi}+\left(\xi^2-1\right)e^{-\xi^2/2}h(\xi).$$

Finalmente, substituindo esse resultado em $\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\left(\lambda-\xi^2\right)\psi(\xi)=0$ *, obtemos a Equação (15.5):*

$$e^{-\xi^2/2}\frac{d^2h}{d\xi^2}-2\xi e^{-\xi^2/2}\frac{dh}{d\xi}+\left(\xi^2-1\right)e^{-\xi^2/2}h(\xi)+\left(\lambda-\xi^2\right)e^{-\xi^2/2}h(\xi)=0$$

$$\frac{d^2h}{d\xi^2}-2\xi\frac{dh}{d\xi}+(\lambda-1)h(\xi)=0.$$

Para resolver a equação de Hermite, lembramos que, como o potencial do oscilador harmônico é uma função par, $V(-x)=V(x)$, pela discussão da aula passada, a função de onda $\psi(x)$ e, portanto, a função $h(\xi)$ terão paridade bem definida; ou seja, serão funções pares ou ímpares. Vamos, assim, considerar a expansão de $h(\xi)$ em séries de potências nos dois casos: quando essa função for par e quando ela for ímpar.

a. $h(\xi)$ par

Neste caso, $h(\xi)$ terá uma expansão exclusivamente em potências pares:

$$h(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\xi^{2n}, \tag{15.6}$$

que, quando substituída na Equação (15.5), leva à relação

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2n(2n-1)c_n\xi^{2(n-1)}+(\lambda-1-4n)c_n\xi^{2n}\right]=0 \tag{15.7}$$

a que pode ser reescrita

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+1)(2n+1)c_{n+1}+(\lambda-1-4n)c_n]\xi^{2n}=0 \tag{15.8}$$

Essa série de potências será exatamente nula somente se todos os coeficientes forem nulos, o que leva imediatamente à *relação de recorrência*:

$$c_{n+1} = \frac{4n+1-\lambda}{2(n+1)(2n+1)} c_n \tag{15.9}$$

ATIVIDADE

2. Obtenha a Equação (15.7).

____
____
____
____

RESPOSTA

Substituindo a Equação (15.6) na Equação (15.5), obtemos:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{2n}\right) - 2\xi \frac{d}{d\xi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{2n}\right) + (\lambda-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{2n}\right) = 0$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n \xi^{2n-1}\right) - 2\xi\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n \xi^{2n-1}\right) + (\lambda-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{2n}\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n-1)c_n \xi^{2n-2} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} 4nc_n \xi^{2n}\right) + (\lambda-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{2n}\right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n-1)c_n \xi^{2n-2} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4nc_n \xi^{2n}\right) + (\lambda-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{2n}\right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2n(2n-1)c_n \xi^{2n-2} + (\lambda-1-4n)c_n \xi^{2n}\right] = 0$$

Observamos que, para valores grandes de *n*, o quociente

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \approx \frac{1}{n+1}, \tag{15.10}$$

que é justamente a relação entre os coeficientes da expansão

$$e^{\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{2n}; \tag{15.11}$$

já que

$$\frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{1}{n+1}\ . \qquad (15.12)$$

Vemos assim que, para valores grandes de ξ, em que é necessário incluir muitos termos na expansão em série de Taylor, que o comportamento assintótico de $h(\xi)$ é aproximadamente:

$$\lim_{|\xi|\to\infty} h(\xi) \approx e^{\xi^2}, \qquad (15.13)$$

e, portanto,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \psi(\xi) = \lim_{|\xi|\to\infty}\left[e^{-\xi^2/2}h(\xi)\right] \approx e^{\xi^2/2}. \qquad (15.14)$$

Isto é inaceitável, já que a função $e^{\xi^2/2}$ não pode ser normalizada. A única maneira de evitar esta divergência de $\psi(\xi)$ para valores grandes de $|\xi|$ é fazer com que a série (15.6) não seja infinita e termine para um dado valor de $n = N$. Nesse caso, $h(\xi)$ vai ser um polinômio na variável ξ^2. Se consideramos que a máxima potência de ξ^2 nesse polinômio é ξ^{2N}, temos, na Equação (15.6), que $c_N \neq 0$, enquanto que $c_{N+1} = 0$. Levando essa informação na relação (15.9), vemos que isso somente pode acontecer se $\lambda = 4N+1$. Temos agora a liberdade de escolher em qual valor N a expansão polinomial irá terminar. Na verdade, isso pode ocorrer para qualquer valor finito de N, de modo que, para cada um desses valores, teremos uma solução diferente da equação de Schrödinger. Assim, λ pode tomar um dos valores

$$\lambda = 4N+1, \quad N = 0,1,2,\ldots \qquad (15.15)$$

Para cada um desses valores de N, a função $h(\xi)$ será um polinômio de ordem $2N$ de ξ, e teremos uma função de onda $\psi(\xi)$ par e que vai tender a zero para valores grandes de $|\xi|$, o que é fisicamente aceitável.

b. $h(\xi)$ ímpar

Neste caso $\psi(-\xi) = -\psi(\xi)$, e, portanto, $h(-\xi) = -h(\xi)$, que terá uma expansão em série de Taylor com todos os expoentes ímpares:

$$h(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, \xi^{2n+1}, \qquad (15.16)$$

que, quando substituída na Equação (15.7), leva, após um tratamento similar ao feito no caso de $h(\xi)$ par, à seguinte relação entre os coeficientes:

$$d_{n+1} = \frac{4n+3-\lambda}{2(n+1)(2n+3)} d_n. \qquad (15.17)$$

Tal como no caso **a**, o quociente dos coeficientes $d_{n+1}/dn \approx 1/(n+1)$ para valores grandes de n, o que novamente leva à necessidade de interromper a série de potências em $n = N$, ou seja, $dN \neq 0$, $d_{N+1} = 0$. Nesse caso os valores possíveis de λ serão:

$$\lambda = 4N+3, \quad N = 0,1,2,\ldots . \qquad (15.18)$$

Assim, cada valor $N = 0, 1, 2, \ldots$ terá associado um polinômio $h(\xi)$ de grau $2N+1$ e uma função de onda ímpar, $\psi(\xi)$.

NÍVEIS DE ENERGIA

Juntando os casos **a** e **b**, temos que os autovalores λ da Equação (15.3) são da forma:

$$\lambda = 2n+1, \; n = 0,1,2,\ldots , \qquad (15.19)$$

e, como $\lambda = 2E/(\hbar\omega)$, os valores possíves para a energia são dados por:

$$E_n = (n+1/2)\hbar\omega, \quad n = 0,1,2,\ldots . \qquad (15.20)$$

Perceba as diferenças com relação ao oscilador harmônico clássico. No caso clássico, a energia pode ter qualquer valor, sendo determinada pelas condições iniciais do problema (velocidade e posição iniciais da massa). Já no caso quântico, o espectro de energias consiste em um número infinito de níveis discretos, como mostrado na **Figura 15.3**. Vemos que, para todos os valores da energia, a partícula está ligada, e que os níveis de energia estão igualmente espaçados, com separação $\hbar\omega$ entre eles; exatamente da mesma forma que Planck havia proposto quando formulou a teoria que explicava a radiação emitida por um corpo negro, que voce estudou em Física 4B. Outra diferença com relação ao oscilador clássico é que o nível de menor energia corresponde a $n = 0$ e é $E_0 = \hbar\omega/2$. Este valor finito da energia do estado fundamental, como vimos na discussão do poço infinito, é chamado de *energia de ponto zero*, um fenômeno essencialmente quântico e que está relacionado ao Princípio da Incerteza. Enquanto na Mecânica Clássica a menor energia possível para o oscilador seria a que corresponde à situação em que a partícula estiver em repouso na origem de coordenadas, ou seja, *energia igual a zero*, no caso da Mecânica Quântica a relação de incerteza não permite esta situação de termos a partícula com momento zero em uma posição determinada, pois assim teria posição e momento simultaneamente bem definidos. Notamos, finalmente, que, de acordo com a observação de que os estados ligados dos sistemas em uma dimensão são não-degenerados, também no caso do oscilador harmônico quântico existe apenas uma função de onda associada a cada energia E_n.

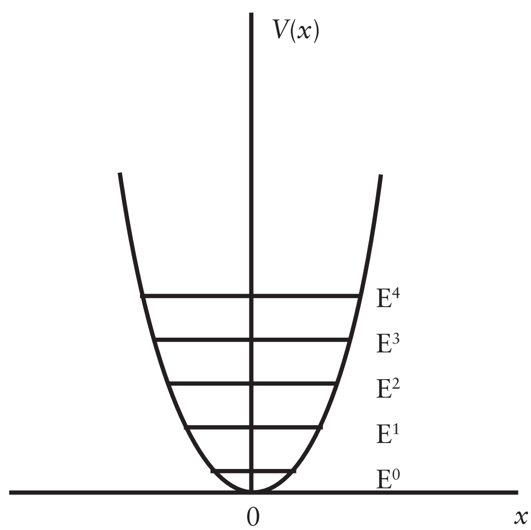

Figura 15.3: Espectro de energias para o potencial de oscilador harmônico quântico.

FUNÇÕES DE ONDA

Voltando às funções de onda $\psi(\xi)$, vimos que elas podem ser colocadas na forma

$$\psi_n(\xi) = H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}, \qquad (15.21)$$

onde as funções $H_n(\xi)$, que vínhamos chamando de $h(\xi)$, são polinômios de grau n chamados de *polinômios de Hermite*. A partir do que discutimos anteriormente, as funções $H_n(\xi)$ satisfazem à equação de Hermite (15.5) para $\lambda = 2n+1$, ou seja:

$$\frac{d^2 H_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH_n(\xi)}{d\xi} + 2nH_n(\xi) = 0. \qquad (15.22)$$

As soluções desta equação são obtidas a partir das equações (15.6) e (15.16):

$$H_{2N}(\xi) = \sum_{i=0}^{N} c_i \xi^{2i} \quad (n = 2N\text{, caso par}), \qquad (15.23)$$

$$H_{2N+1}(\xi) = \sum_{i=0}^{N} d_i \xi^{2i+1} \quad (n = 2N+1\text{, caso ímpar}). \qquad (15.24)$$

Como a Equação (15.22) é homogênea, os polinômios de Hermite estão definidos a menos de uma constante multiplicativa. Por convenção, costuma-se escolher esta constante de modo que o coeficiente de ξ^n em $H_n(\xi)$ seja 2^n. Isto define completamente os demais coeficientes a partir das relações de recorrência (15.9) e (15.17), que, usando os valores permitidos para λ, tornam-se:

$$c_{i+1} = \frac{4(i-N)}{2(i+1)(2i+1)}c_i \quad \text{(caso par, polinômio de grau } 2N\text{)}, \qquad (15.25)$$

$$d_{i+1} = \frac{4(i-N)}{2(i+1)(2i+3)}d_i \quad \text{(caso ímpar, polinômio de grau } 2N+1\text{)}. \qquad (15.26)$$

Os cinco primeiros polinômios de Hermite são:

$$\begin{aligned}
H_0(\xi) &= 1 \\
H_1(\xi) &= 2\xi \\
H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2 \\
H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi \\
H_4(\xi) &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12
\end{aligned} \qquad (15.27)$$

ATIVIDADE

3. A partir das definições (15.23) e (15.24) e das relações de recorrência (15.25) e (15.26), obtenha os quatro primeiros polinômios de Hermite.

____

____

____

____

RESPOSTA COMENTADA

1º. n = 0 (par). Só haverá um termo constante no polinômio, que pela convenção adotada será $c_0 = 2^0 = 1$*. Assim, o polinômio será* $H_0(\xi) = 1$*.*

2º. n = 1 (ímpar). Mais uma vez, só haverá um termo no polinômio, correspondendo a N = 0. Usando novamente a convenção, o coeficiente deste termo será $d_0 = 2^1 = 2$*. Assim, o polinômio será* $H_1(\xi) = 2\xi$*.*

3º. n = 2 (par). Desta vez, teremos dois termos no polinômio. O coeficiente do termo de ordem mais alta será $c_1 = 2^2 = 4$*. O coeficiente* c_0 *pode ser obtido pela relação de recorrência (15.23):* $c_1 = \dfrac{4(0-1)}{2(0+1)(0+1)} c_0$ *, que dá* $c_0 = -2$*. Assim, o polinômio é*

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2 .$$

4º. n = 3 (ímpar). Novamente, teremos dois termos no polinômio. O coeficiente do termo de ordem mais alta será $d_1 = 2^3 = 8$*. O coeficiente* d_0 *pode ser obtido pela relação de recorrência (15.24):*

$$d_1 = \frac{4(0-1)}{2(0+1)(0+3)} d_0$$

, que dá $d_0 = -12$*. Assim, o polinômio é* $H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$ *.*

!

Existe uma fórmula geral que permite calcular todos os polinômios de Hermite:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} . \qquad (15.28)$$

Finalmente, concluimos que para cada autovalor da energia, $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, corresponde uma única autofunção $\psi_n(x)$, que pode ser escrita na forma:

$$\psi_n(x) = C_n H_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2}, \qquad (15.29)$$

onde $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ vem da definição da variável ξ, e C_n é uma constante que vem da exigência da função de onda estar normalizada, ou seja, que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 \, dx = \frac{C_n^{\ 2}}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^{\ 2}(\xi) d\xi = 1. \qquad (15.30)$$

A partir de uma propriedade geral dos polinômios de Hermite, de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}, \qquad (15.31)$$

onde δ_{nm} é a delta de Kronecker, $\delta_{nm} = 0$ para $n \neq m$, $\delta_{nm} = 1$, encontramos que

$$C_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} \right)^{1/2}, \qquad (15.32)$$

de onde temos a expressão geral para $\psi_n(x)$:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} \right)^{1/2} H_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2}. \qquad (15.33)$$

Na **Figura 15.4**, mostramos algumas funções de onda do oscilador harmônico. Em particular, notamos que, à medida que aumenta a energia, a paridade das funções de onda vai alternando entre par e ímpar. Note ainda que a energia da partícula aumenta com o número de nodos de sua função de onda, da mesma maneira que observamos nos poços de potencial finito e infinito.

Vemos também que a expressão (15.31) também leva à *ortonormalidade* das funções de onda, ou seja, cada $\psi_n(x)$ está apropriadamente normalizada e funções $\psi_n(x)$ e $\psi_m(x)$ para $n \neq m$ são ortogonais. Matematicamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\psi_m(x)\,dx = \delta_{nm}\,. \qquad (15.34)$$

A partir do conhecimento das funções de onda $\psi_n(x)$, podemos calcular todas as propriedades do oscilador harmônico quântico. Por exemplo, podemos mostrar muito facilmente que o valor esperado da posição x, para qualquer $\psi_n(x)$, é nulo. De fato, na expressão

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\,x\,\psi_\text{n}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2\, x\, dx\,. \qquad (15.35)$$

temos que, como $\psi_n(x)$ tem paridade definida, par ou ímpar, $|\psi_n(x)|^2$ vai ser sempre uma função par, e quando multiplicada por x vai resultar em um integrando ímpar na Equação (15.35), que vai levar sempre a uma integral nula. De forma semelhante, utilizando as propriedades de $\psi_n(x)$, ou mais precisamente, dos polinômios de Hermite, que podem ser encontradas em livros-texto, podemos mostrar que:

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\,x^2\,\psi_n(x)\,dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega} \qquad (15.36)$$

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\left(-i\hbar\frac{d\psi_n(x)}{dx}\right)dx = 0$$

$$\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x)\left(-\hbar^2\,\frac{d^2\psi_\text{n}(x)}{dx^2}\right)dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)m\hbar\omega$$

Concluímos enfatizando, mais uma vez, a importância do oscilador harmônico na Mecânica Quântica. Como vimos, trata-se de um sistema que pode ser solucionado exatamente, apesar de que as dificuldades matemáticas são um pouco maiores do que as que vimos nos sistemas que estudamos anteriormente. No entanto, o importante é que encontramos todas as funções de onda e autovalores da energia. Isto não é comum em Mecânica Quântica; pelo contrário, a maioria dos sistemas quânticos não tem solução exata!

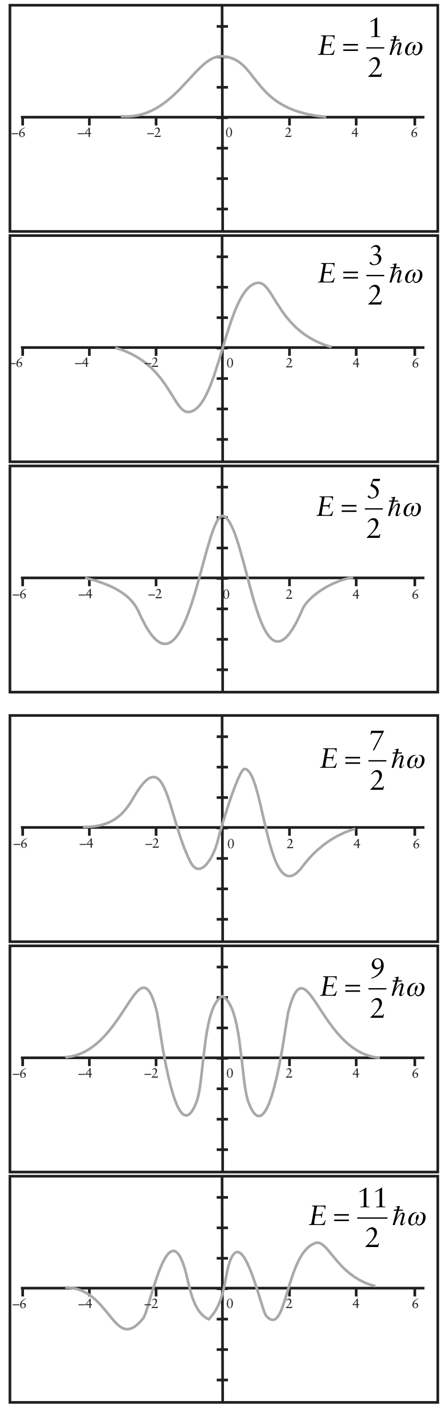

Figura 15.4: As funções de onda do oscilador harmônico para n = 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

ATIVIDADE FINAL

No oscilador harmônico clássico, o valor médio temporal da energia cinética é igual ao da energia potencial. Usando as relações (15.36), mostre que algo semelhante ocorre com o oscilador harmônico quântico: os valores esperados da energia cinética e da energia potencial são ambos iguais à metade da energia do oscilador, qualquer que seja o estado quântico em que ele se encontre.

RESPOSTA COMENTADA

Os valores esperados da energia cinética e da energia potencial são, respectivamente, $\frac{\langle p^2 \rangle}{2m}$ *e* $\frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle$. *Usando as expressões (15.36) para a função de onda* $\psi_n(x)$, *obtemos:* $\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{(n+\frac{1}{2})m\hbar\omega}{2m} = \frac{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}{2}$ *e*

$$\frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega} = \frac{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}{2}$$

, como queríamos demonstrar.

RESUMO

Um oscilador harmônico quântico possui níveis discretos de energia dados por $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega,\ n = 0, 1, 2, ...$ São, portanto, níveis de energia igualmente espaçados. Note ainda que a energia do estado fundamental não é nula, e sim $\hbar\omega/2$, em acordo com o Princípio da Incerteza. As funções de onda do oscilador são pares ou ímpares, com um número de nodos que cresce com a energia.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, passaremos ao estudo dos sistemas quânticos em três dimensões, investigando inicialmente a partícula livre e a caixa de potencial tridimensional.