Definición de grafo, terminología, y representación

Guillermo Palma

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información

Plan

Definición de grafo

Grafo dirigido o digrafo

Definición

Un **grafo dirigido** o **digrafo** G es un par (V, E), donde V es un conjunto finito de elementos llamados **vértices**, y E es una relación binaria sobre V, en donde los elementos son llamados **lados**. V es llamado **conjunto de vértices** de G. E es llamado **conjunto de lados** de G y sus elementos son **pares ordenados** de vértices.

Ejemplo de un digrafo

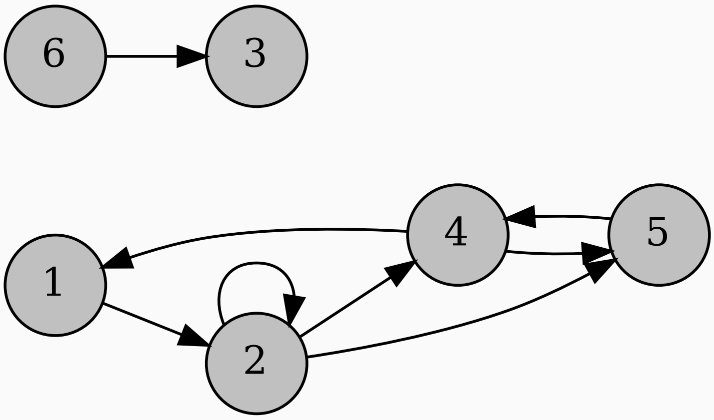


Figura 1: Ejemplo de digrafo $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $E = \{(2, 2), (1, 2), (4, 1), (2, 4), (2, 5), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$.
- El lado $(2, 2)$ es un bucle.

Grafo no dirigido

Definición

Un **grafo no dirigido** G es un par (V, E), donde V es un conjunto finito de elementos llamados **vértices**, y E es una relación binaria sobre V, en donde los elementos son llamados **lados**. V es llamado **conjunto de vértices** de G. E es llamado **conjunto de lados** de G y sus elementos son **pares no ordenados** de vértices. Es decir, un lado un conjunto $\{u, v\}$, tal que $u, v \in V$ y $u \neq v$.

Ejemplo de grafo no dirigido

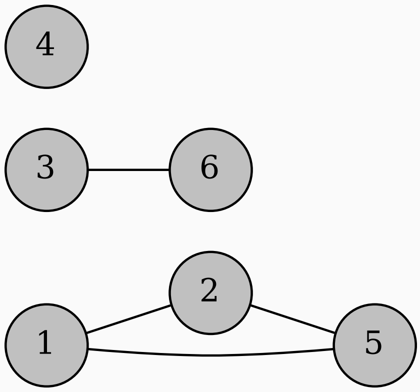


Figura 2: Ejemplo de grafo no dirigido $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$.
- Cada lado contiene dos vértices distintos.
- Observe que los lados $(u, v) = (v, u)$ son iguales, por ejemplo $(1, 2), (2, 1)$.
- Observe que no están permitidos los bucles.

Subgrafo

Definición

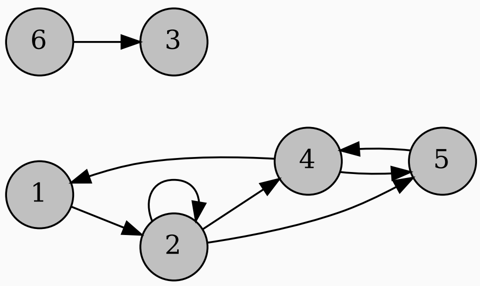
Dado un grafo $G = (V, E)$, un **subgrafo** de G es un grafo $G' = (A, F)$, donde $A \subseteq V$ y $F \subseteq E$, en donde los vértices del conjunto de lados F, están en A.

Subgrafo inducido

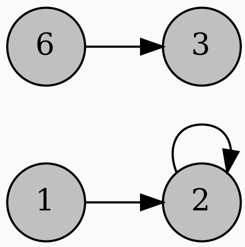
Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$, el **subgrafo inducido** por el conjunto V', tal que $V' \subseteq V$, es un grafo $G' = (V', E')$, donde $E' = \{(u, v) \in E \wedge u, v \in V'\}$.

Ejemplo de subgrafo



(a) Grafo $G = (V, E)$



(b) Subgrafo $G' = (A, F)$ de G

Figura 3: El grafo 3(b) es un subgrafo de 3(a) inducido por el conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 6\}$. Fuente: [1].

Tipos especiales de grafos

- Grafo completo.
- Grafo bipartito.
- Multigrafo.
- Hipergrafo.

Grafo completo

Definición

Un **grafo completo** es un grafo no dirigido en el cual, cada par de vértice es adyacente.

Ejemplo de un grafo completo

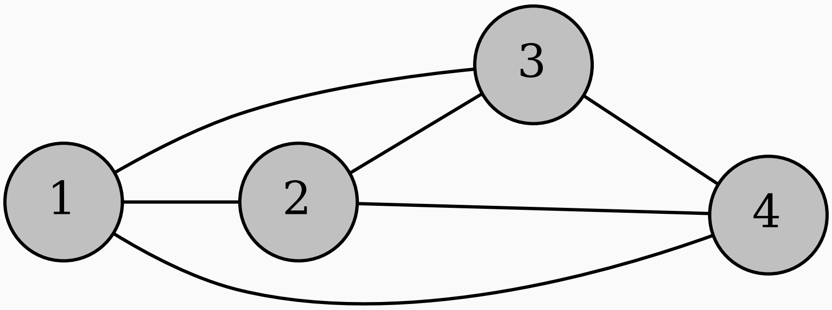


Figura 4: Ejemplo de un grafo completo con cuatro vértices.

Grafo bipartito

Definición

Un **grafo bipartito** es un grafo no dirigido $G = (V, E)$, tal que el conjunto de vértices V puede ser divido en dos conjuntos V_1 y V_2, tal que para cualquier lado $(u, v) \in E$, se cumple que $u \in V_1 \wedge v \in V_2$ o se cumple que $v \in V_1 \wedge u \in V_2$. Es decir, los lados tienen un extremo en V_1 y otro V_2.

Ejemplo de un grafo bipartito

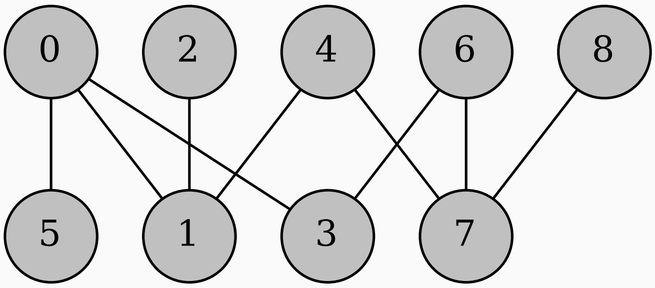


Figura 5: Grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$, donde $V_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $V_2 = \{1, 3, 5, 7\}$.

Multigrafo

Definición

Un **multigrafo** es un grafo no dirigido $G = (V, E)$, en el cual está permitido más de un lado $(u, v) \in E$, entre un par de vértices u y v, y en el cual están permitidos bucles.

Ejemplo de multigrafo

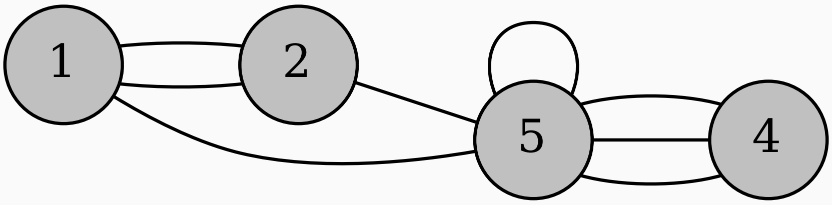


Figura 6: Ejemplo de multigrafo. Observe que hay un bucle en el vértice 5 y múltiples lados entre los vértices 1 y 2, y los vértices 4 y 5.

Hipergrafo

Definición

Un **hipergrafo** es un grafo no dirigido $G = (V, E)$, en el cual un lado puede conectar a un subconjunto arbitrario de vértices.

Ejemplo de hipergrafo

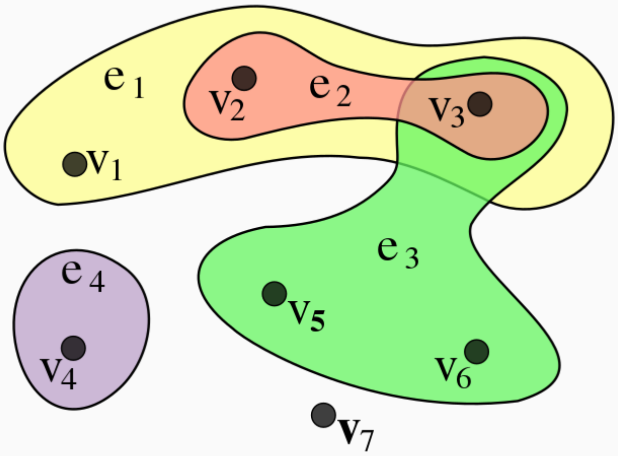


Figura 7: Ejemplo de un hipergrafo $G = (V, E)$ con siete vértices y cuatro lados. Se tiene que $V = \{v_1, v_2.v_3, v_4.v_5, v_6, v_7\}$ y $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Observe que $e_1 = (v_1, v_2, v_3)$, $e_2 = (v_2, v_3)$, $e_3 = (v_3, v_5, v_6)$ y $e_4 = (v_4)$. Fuente: [2].

Arista de un grafo no dirigido

Definición

Una **arista** es un lado de un grafo no dirigido.

Arco de un digrafo

Definición

Un **arco** es un lado de un digrafo.

Terminología

Incidencia de vértices

Definición

Un vértice es **incidente** de un lado de un grafo, si es uno de los extremos.

Ejemplo de incidencia de vértices

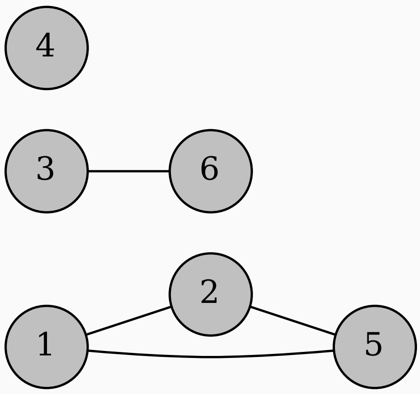


Figura 8: Ejemplo de grafo no dirigido $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- Los vértices 1 y 2 son incidentes del lado $(1, 2)$.
- Los vértices 1 y 5 son incidentes del lado $(1, 5)$.
- Los vértices 2 y 5 son incidentes del lado $(2, 5)$.
- Los vértices 3 y 6 son incidentes del lado $(3, 6)$.

Incidencia de lados

Definición

Un lado (u, v) es incidente a un vértice w, si $w = u$ o $w = v$. Si G es un digrafo se tiene que el lado (u, v) es **incidente desde** el vértice u y es **incidente hasta** v. Si G es un grafo no dirigido, un lado (u, v), es **incidente** a los vértices u y v.

Ejemplo de incidencias de lados

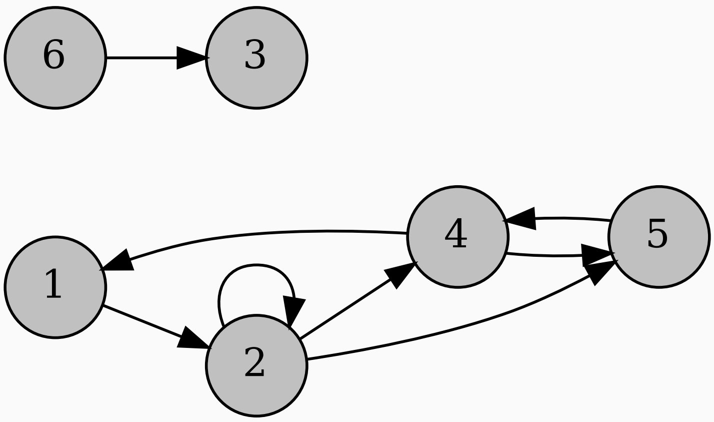


Figura 9: Ejemplo de digrafo $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- El lado $(1, 2)$ es incidente desde el vértice 1 y es incidente hasta el vértice 2.
- El lado $(6, 3)$ es incidente desde el vértice 6 y es incidente hasta el vértice 3.

Adyacencia de nodos

Definición

Un vértice v es **adyacente** a un vértice u en un grafo $G = (V, E)$, si existe un lado (u, v) tal que $(u, v) \in E$.

Ejemplo de adyacencias de nodos en un digrafo

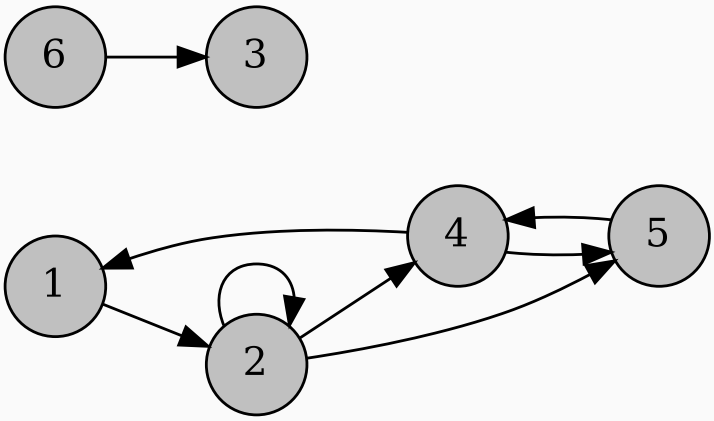


Figura 10: Ejemplo de digrafo $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- El vértice 2 es adyacente a los vértices 1 y 2.
- El vértice 5 es adyacente a los vértices 2 y 4.
- El vértice 4 es adyacente a los vértices 2 y 5.
- El vértice 3 es adyacente al vértice 6.
- Los vértices adyacentes del vértice 2 son 2, 4 y 5.

Ejemplo de adyacencias de nodo en un grafo no dirigido

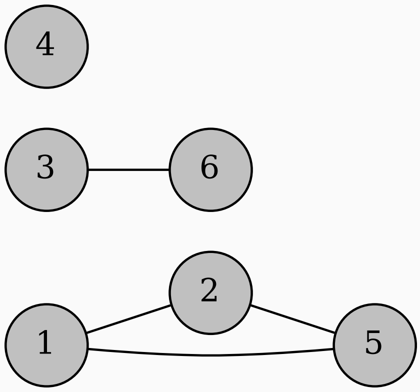


Figura 11: Ejemplo de grafo no dirigido $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- El vértice 1 es adyacente a los vértices 2 y 5.
- El vértice 2 es adyacente a los vértices 1 y 5.
- El vértice 5 es adyacente a los vértices 1 y 2.
- El vértice 3 es adyacente al vértice 6.
- El vértice 6 es adyacente al vértice 3.
- Los vértices adyacentes del vértice 2 son 1 y 5.

Adyacencia de lados

Definición

Dos lados son adyacentes en un grafo $G = (V, E)$, si los lados tienen un extremo en común.

Ejemplo de adyacencias de lados en un digrafo

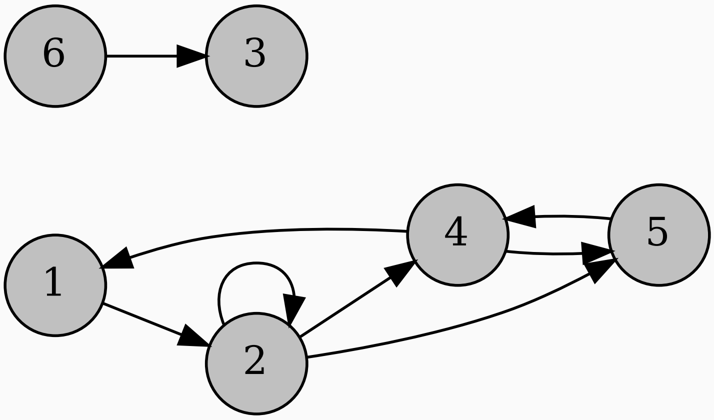


Figura 12: Ejemplo de digrafo $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- El lado $(2, 4)$ es adyacente al lado $(4, 5)$.
- El lado $(1, 2)$ es adyacente a los lados $(2, 4)$ y $(2, 5)$.

Grado de grafo no dirigido

Definición

El **grado** de un vértice es el número de lados incidentes a él.

Ejemplo de grado en un grafo no dirigido

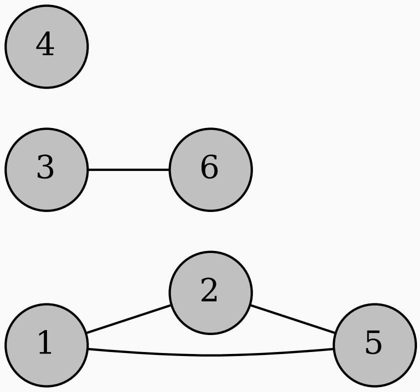


Figura 13: Ejemplo de grafo no dirigido $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- El grado del vértice 1 es 2.
- El grado del vértice 2 es 2.
- El grado del vértice 5 es 2.
- El grado del vértice 3 es 1.
- El grado del vértice 6 es 1.
- El grado del vértice 4 es 0.

Grado de grafo dirigido

Definición grado exterior

El **grado exterior** de un vértice es el número de lados incidentes desde el vértice.

Definición grado interior

El **grado interior** de un vértice es el número de lados incidentes hasta el vértice.

Definición grado en un grafo dirigido

El **grado** de un vértice es la sumatoria de grado interior y exterior.

Ejemplo de grado en un grafo no dirigido

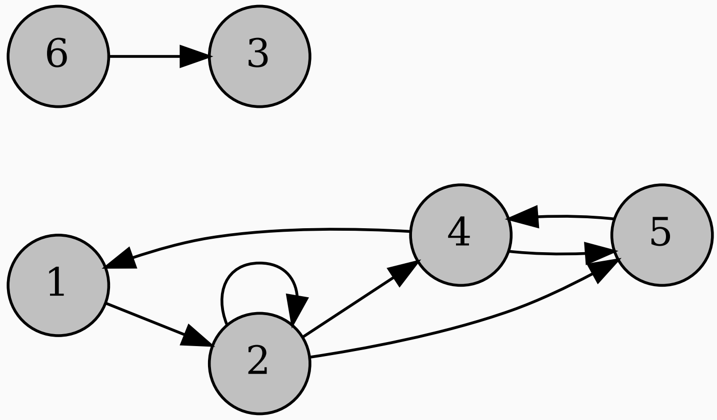


Figura 14: Ejemplo de digrafo $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- El vértice 5 tiene un grado exterior de 1.
- El vértice 5 tiene un grado interior de 2.
- El vértice 5 tiene un grado de 3.

Grafo disperso y grafo denso

Grado disperso

Un **grafo es disperso** si $|E|$ es mucho menor que $|V|^2$.

Grafo denso

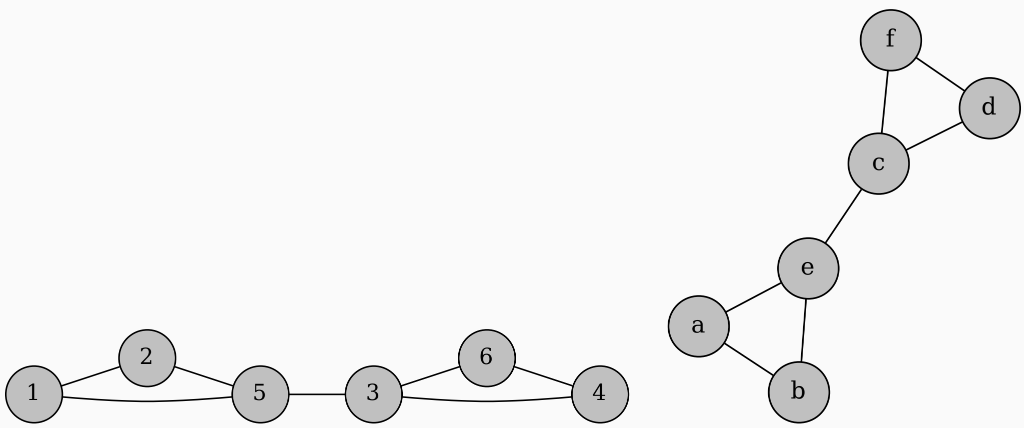
Un **grafo es denso** si $|E|$ es aproximadamente $|V|^2$.

Isomorfismos

Definición

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son **isomorfos**, si existe una función biyectiva $f : V \to V'$, tal que $(u, v) \in E$ sí solo si $(f(u), f(v)) \in E'$.

Ejemplo de dos grafos isomorfos



(a) Grafo $G = (V, E)$. (b) Grafo $G' = (V', E')$.

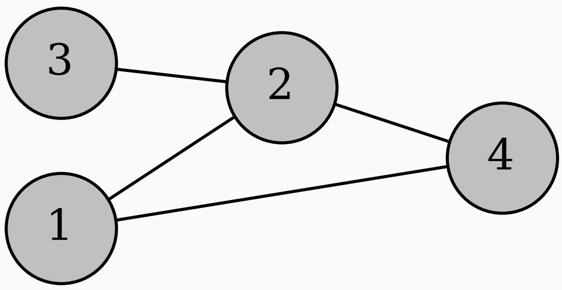
Figura 15: Los grafos de las Figuras 15(a) y 15(b) son isomorfos por medio de $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$, $f(5) = e$ y $f(6) = f$.

Digrafo de un grafo no dirigido

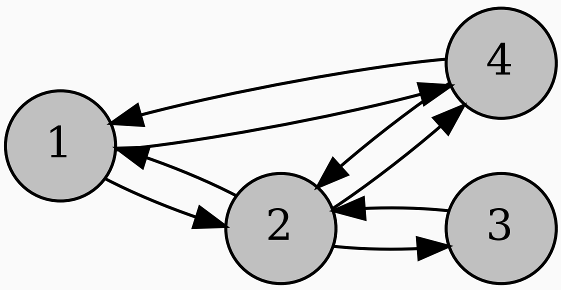
Definición

Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$, la versión directa de G es un digrafo $G' = (V, E')$, donde $(u, v) \in E'$, si solo si $(u, v) \in E$. Esto es, por cada arista $(u, v) \in E$, se crean dos arcos (u, v) y (v, u) en E'.

Ejemplo de un digrafo de un grafo no dirigido



(a) Grafo no dirigido $G = (V, E)$.



(b) Digrafo $G' = (V, E')$ de G.

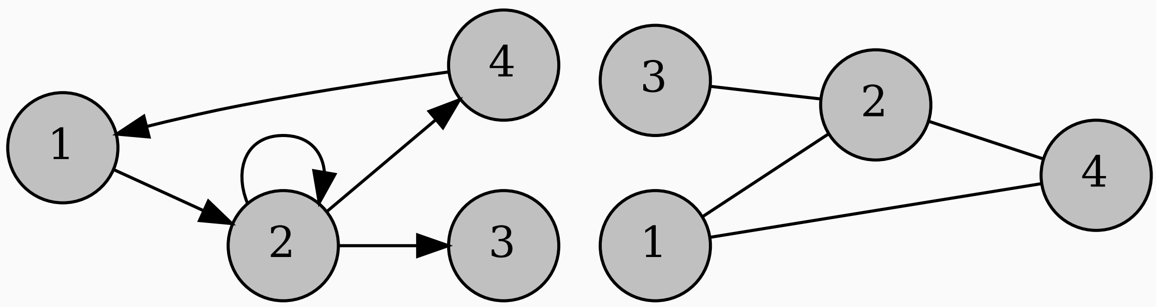
Figura 16: El digrafo de la Figura 16(b) es el versión directa del grafo no dirigido de la Figura 16(a).

Grafo no dirigido de un digrafo

Definición

Dado un digrafo $G = (V, E)$, la versión no dirigida de G es un grafo no dirigido $G' = (V, E')$, donde $(u, v) \in E'$, si solo si $u \neq v \wedge (u, v) \in E$.

Ejemplo de un grafo no dirigido de un digrafo



(a) Digrafo $G = (V, E)$ de G.

(b) Grafo no dirigido $G' = (V, E')$.

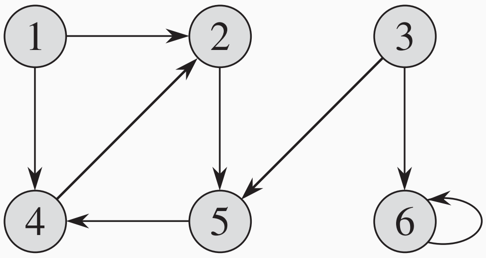
Figura 17: El grafo no dirigido de la Figura 17(b) es el versión no dirigida del digrafo de la Figura 17(a).

Representación de grafo

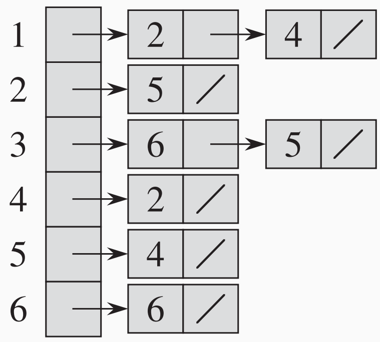
Lista de adyacencias

- Se quiere representar un grafo $G = (V, E)$.
- Es un arreglo de listas de tamaño $|V|$, una casilla corresponde a cada vértice.
- Para cada vértice v la lista $Ady[v]$ contiene a los vértices adyacentes de v en G, o apuntadores a los vértices.
- Se asumen que las listas de adyacencias son atributos del grafo.
- Si el grafo es dirigido la suma de todos los elementos de la lista de adyacencias es $|E|$.
- Si el grafo es no dirigido la suma de todos los elementos de la lista de adyacencias es $2|E|$.
- Buena opción para representar grafos dispersos.
- La cantidad de espacio requerido es $\Theta(|V| + |E|)$.

Ejemplo de una lista de adyacencias en un grafo dirigido



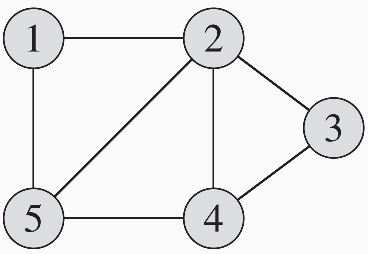
(a) Grafo $G = (V, E)$.



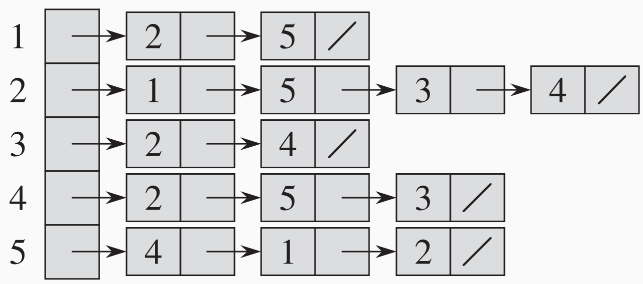
(b) Lista de adyacencias de G.

Figura 18: La Figura 18(b) es la representación del grafo dirigido de la Figura 18(a) como lista de adyacencias. Fuente: [1].

Ejemplo de una lista de adyacencias en un grafo no dirigido



(a) Grafo $G = (V, E)$.



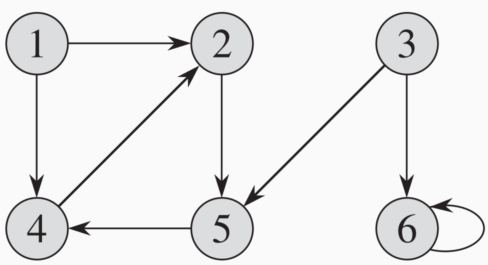
(b) Lista de adyacencias de G.

Figura 19: La Figura 19(b) es la representación del grafo no dirigido de la Figura 19(a) como lista de adyacencias. Fuente: [1].

Matriz de adyacencias

- Se quiere representar un grafo $G = (V, E)$.
- G esta representado por una matriz A de dimensión $|V|x|V|$.
- Las filas de columnas representan a los vértices en V.
- Se asume que los vértices están identificados por números.
- $A = a_{ij}$, tal que la casilla $a_{ij} = 1$ si el lado $(i, j) \in E$, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario.
- En grafos no dirigidos $A = A^T$.
- La cantidad de espacio requerido es $\Theta(|V|^2)$.
- Buena opción para representar grafos densos.

Ejemplo de una matriz de adyacencias en un digrafo



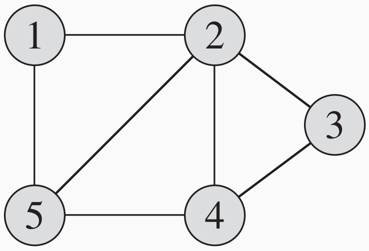
(a) Grafo $G = (V, E)$.

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

(b) Matriz de adyacencias de G.

Figura 20: La Figura 20(b) es la representación del grafo dirigido de la Figura 20(a) como matriz de adyacencias. Fuente: [1].

Ejemplo de una matriz de adyacencias en un grafo no dirigido



(a) Grafo $G = (V, E)$.

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

(b) Matriz de adyacencias de G.

Figura 21: La Figura 21(b) es la representación del grafo no dirigido de la Figura 21(a) como matriz de adyacencias. Fuente: [1].

Otras representaciones de grafos

- Lista de lados.
- Matriz de incidencias.
- *Forward star* y *Reverse star*.

Atributos de grafos

Algunos atributos de grafos

Un grafo G puede tener entre otros atributos:

- Lista de lados.
- Lista de vértices.
- Vértices de diferente tipo (inicio, llegada, etc).

Algunos atributos de lados

Cada lado $e = (u, v)$ puede puede tener entre otros atributos:

- Etiqueta ($e.label$).
- Peso o costo ($e.costo$).
- Capacidad ($e.cap$).
- Lista de lados adyacentes.

Algunos atributos de vértices

Un vértice v puede tener entre otros atributos:

- Etiqueta ($v.label$).
- Color ($v.color$).
- Lista de adyacentes ($Ady[v]$).
- Peso ($v.peso$).
- Grado.
- Lista de incidentes.

Caminos y ciclos en grafos

Caminos en un grafo

Definición de camino

Un **camino** de un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ del grafo G, que comienzan en en vértice v_0 y terminan en vértice v_k, tal que para cada par de vértices (u_{i-1}, u_i) de la secuencia, se cumple que $(u_{i-1}, u_i) \in E$, para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Definición de longitud de un camino

La **longitud** de un camino $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, viene dada por los k lados que componen el camino.

Definición de camino simple

Un **camino** es **simple** si todos sus vértices son diferentes.

Definición de subcamino

Un **subcamino** de un camino P es una subsecuencia de elementos continuos de P.

Ejemplos de caminos

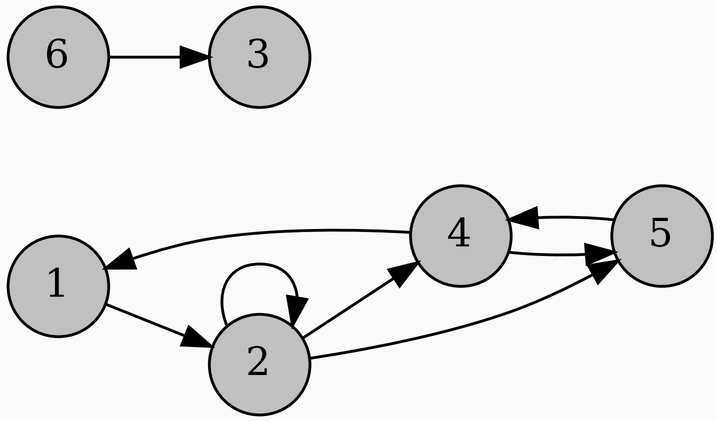


Figura 22: Digrafo $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- $P = \langle 1, 2, 2, 4, 5, 4 \rangle$ es un camino de longitud 5.
- $Q = \langle 2, 5, 4, 1 \rangle$ es un camino simple de longitud 3.
- $R = \langle 2, 4, 5 \rangle$ es un subcamino del camino P.

Alcance de un vértice

Definición

Un vértice v es **alcanzable** desde un vértice u, si existe un camino P desde u hasta v.

Ejemplos de alcance

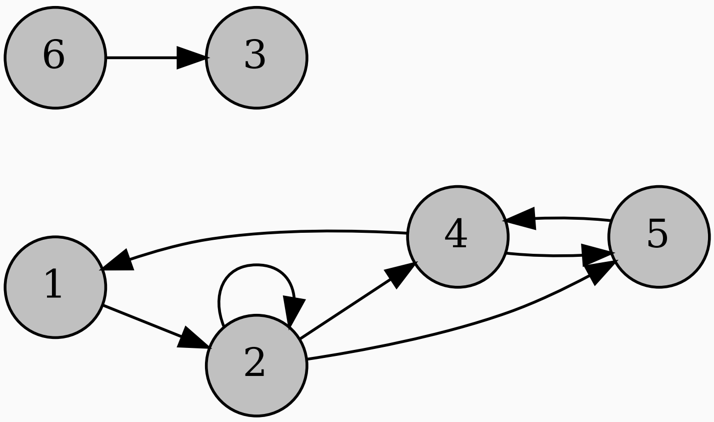


Figura 23: Digrafo $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- $P = \langle 2, 4, 5 \rangle$ es un camino de longitud 3.
- El vértice 5 es alcanzable desde el vértice 2 a través de P.
- El vértice 3 es alcanzable desde el vértice 6 a través del camino $\langle 6, 3 \rangle$.

Ciclos

Ciclo en un digrafo

Un **ciclo en un digrafo**, es un camino $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, donde $v_0 = v_k$ y $k \geq 1$.

Ciclo en un grafo no dirigido

Un **ciclo en un grafo no dirigido**, es un camino $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, donde $v_0 = v_k$ y $k \geq 3$.

Ciclo simple

Un ciclo $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ es **simple**, si los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son diferentes.

Digrafo simple

Un **digrafo simple** es un digrafo sin bucles.

Grafo acíclico

Un grafo es acíclico si no tiene ciclos.

Ejemplos de ciclos

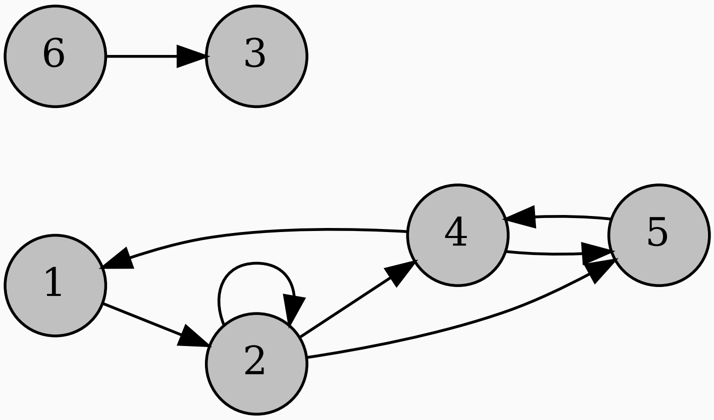


Figura 24: Digrafo $G = (V, E)$. Fuente: [1].

- Los caminos $\langle 2, 2\rangle$, $\langle 5, 4, 5\rangle$ y $\langle 4, 5, 4, 1, 2, 4\rangle$ son ciclos.
- El camino $\langle 1, 2, 5, 4, 1\rangle$ es un ciclo simple.

Ejemplo de digrafo simple y grafo acíclico

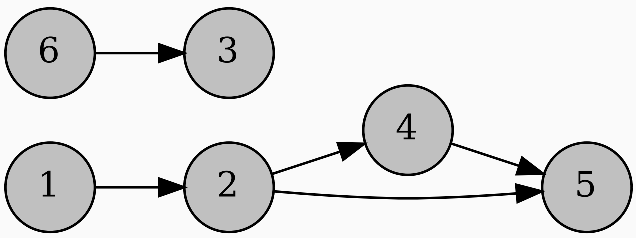


Figura 25: Ejemplo de un digrafo simple y acíclico.

Igualdad de ciclos

Definición

Dos caminos $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_0\rangle$ y $\langle v'_0, v'_1, v'_2, \dots, v'_{k-1}, v'_0\rangle$ **son el mismo ciclo** si existe un número entero j, tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Ejemplo de igualdad de ciclos

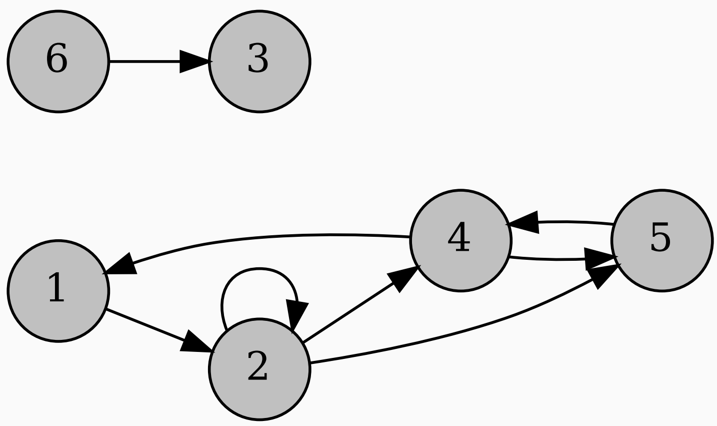


Figura 26: En este digrafo se puede observar que los caminos $\langle 1, 2, 4, 1\rangle$, $\langle 2, 4, 1, 2\rangle$ y $\langle 4, 1, 2, 4\rangle$ corresponden a un mismo ciclo. Fuente: [1].

Ciclo, camino y grafo euleriano

Ciclo euleriano

Un **ciclo es euleriano** si los lados que asociados al camino que lo compone, son todos los lados del grafo y cada uno de ellos aparece solo una vez.

Camino euleriano

Un **camino es euleriano** si sus lados asociados, son todos los lados del grafo y cada uno de ellos aparece solo una vez.

Grafo euleriano

Un **grafo es euleriano** si tiene un ciclo euleriano.

Ejemplo de un grafo euleriano

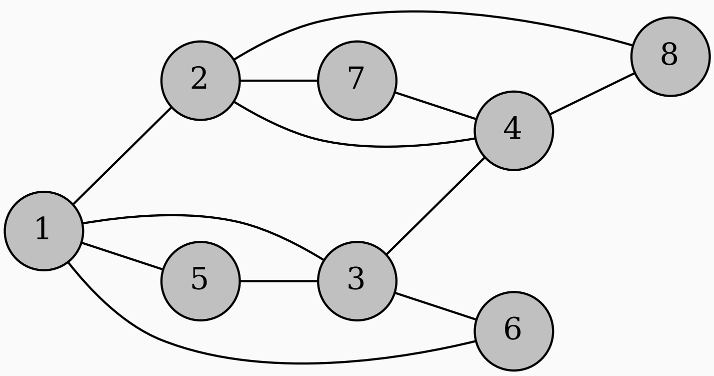


Figura 27: Ejemplo de grafo euleriano que contiene un ciclo euleriano $\langle 2, 4, 3, 1, 6, 3, 5, 1, 2, 8, 4, 7, 2 \rangle$.

Sobre los ciclos, caminos y grafos eulerianos

Proposición 1

Sea G un grafo no dirigido, se cumple que:

1. Si G tiene un ciclo euleriano, entonces todos los vértices del grafo tienen grado par.
2. Si G tiene un camino euleriano que comienza v y finaliza en w, entonces todos los vértices de G tienen grado par excepto v y w que tienen grado impar.

Componentes de un grafo

Componentes conexas en un grafo no dirigido

Definición grafo conexo

Un grafo no dirigido es **conexo** si cada vértice es alcanzable desde cada uno de los vértices del grafo.

Definición componentes conexas

Las **componentes conexas** de un grafo no dirigido son las clases de equivalencia de vértices bajo la relación "*el vértice u es alcanzable desde v*".

Ejemplo de componentes conexas

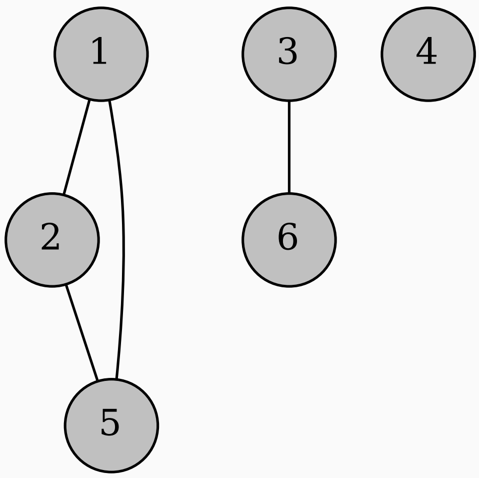


Figura 28: Grafo no dirigido con tres componentes conexas $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 6\}$ y $\{4\}$. Fuente: [1].

Componentes fuertemente conexas en un digrafo

Definición grafo fuertemente conexo

Un grafo dirigido es **fuertemente conexo** si cada par de vértices son alcanzables entre sí en el grafo.

Definición componentes fuertemente conexas

Las **componentes fuertemente conexas** de un grafo dirigido son las clases de equivalencia de vértices bajo la relación "*el vértice u es alcanzable desde v y el vértice v es alcanzable desde u*".

Ejemplo de componentes fuertemente conexas

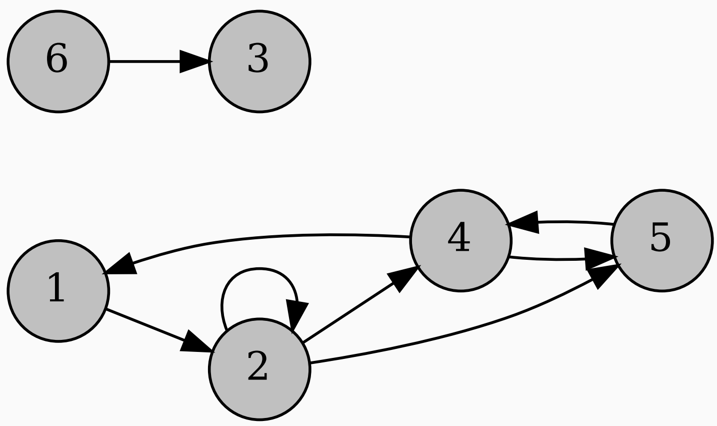


Figura 29: Grafo dirigido con tres componentes conexas $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ y $\{6\}$. Fuente: [1].

Árbol

Definición

Un **árbol** (*free tree* en [1]) es un grafo no dirigido, conectado y acíclico.

Ejemplo de un árbol

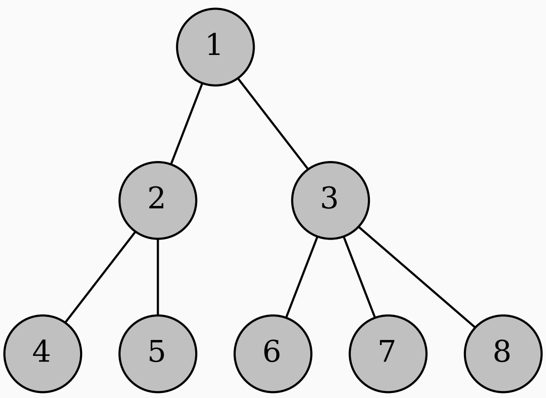


Figura 30: Grafo no dirigido que es árbol.

Bosque

Definición

Un **bosque** es un grafo no dirigido acíclico.

Ejemplo de un bosque

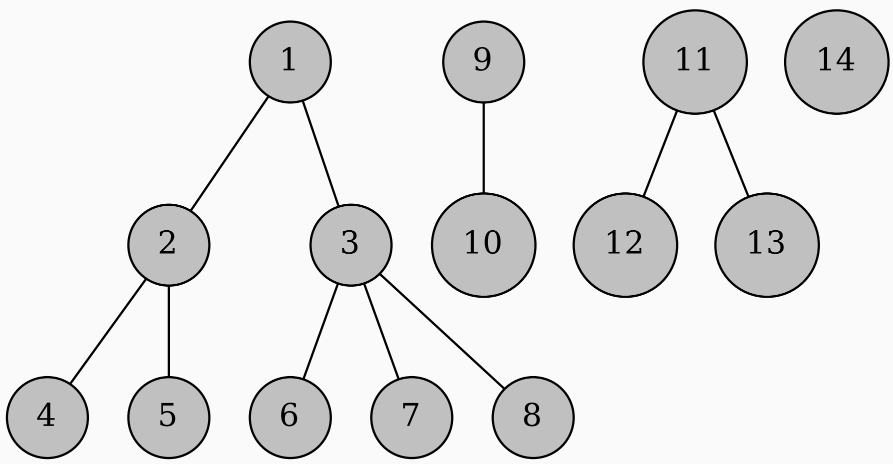


Figura 31: Grafo no dirigido que es bosque con cuatro componentes conexas.

Referencias

[1] T. Cormen, C. Leirserson, R. Rivest, and C. Stein.
Introduction to Algorithms.
McGraw Hill, 3ra edition, 2009.

[2] Wikipedia contributors.
Hypergraph — Wikipedia, the free encyclopedia, 2022.
[Online; accessed 23-May-2022].