# Componentes fuertemente conexas

Guillermo Palma

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información

## Plan

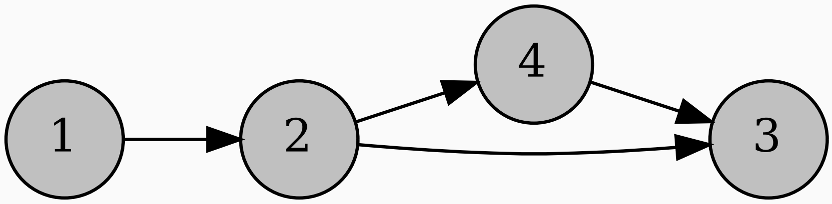
# Preliminares

## Digrafo inverso

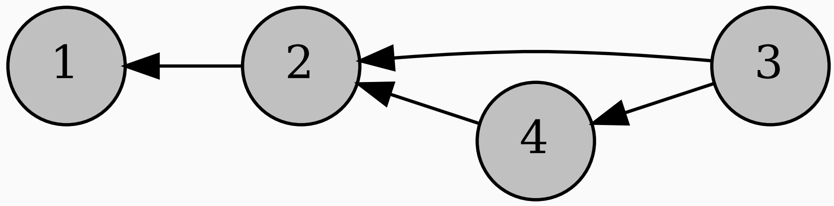
**Definición de digrafo inverso**

Un digrafo inverso, que denotamos como $G^{-1}$, es un digrafo que se obtiene de cambiar la dirección de los arcos de un digrafo $G$.

## Ejemplo de un digrafo inverso




(a) Digrafo acíclico $G$




(b) Digrafo acíclico $G^{-1}$ de $G$

**Figura 1:** Ejemplo de un digrafo acíclico y su digrafo inverso



## Algoritmo para obtener el digrafo inverso

**Función** grafo-inverso($G(V, E)$)

**inicio**
- $G^{-1}$ ; `/* Digrafo como lista de adyacencias */`
- $G^{-1}.adyacentes[|V|]$ ; `/* Se crea un arreglo de listas */`
- **para** $i \leftarrow 0$ **a** $|V| - 1$ **hacer**
  - $G^{-1}.adyacentes[i] \leftarrow$ **new** *Lista* ; `/* Se crean listas */`
- **para cada** $u \in V$ **hacer**
  - **para cada** $v \in G.adyacentes[u]$ **hacer**
    - $G^{-1}.adyacentes[v].agregar(u)$ ; `/* Nuevo arco */`
- **devolver** $G^{-1}$

## Análisis del tiempo del algoritmo `grafo-inverso`

- Creación de listas de adyacencias (líneas 4-5) es $\Theta(|V|)$.
- Las líneas 6-8 se ejecutan para todos los arcos, entonces es $\Theta(|E|)$.
- Por lo tanto, el tiempo del peor caso es $\Theta(|V| + |E|)$.



## Componente fuertemente conexas

**Definición componente fuertemente conexas**

Una componente fuertemente conexa (CFC) de un digrafo es el subconjunto máximo de vértices $C \subseteq V$, tal que para todo par de vértices $u, v \in C$ se cumple que "el vértice $u$ es alcanzable desde $v$ y el vértice $v$ es alcanzable desde $u$".

## Ejemplo de componentes fuertemente conexas

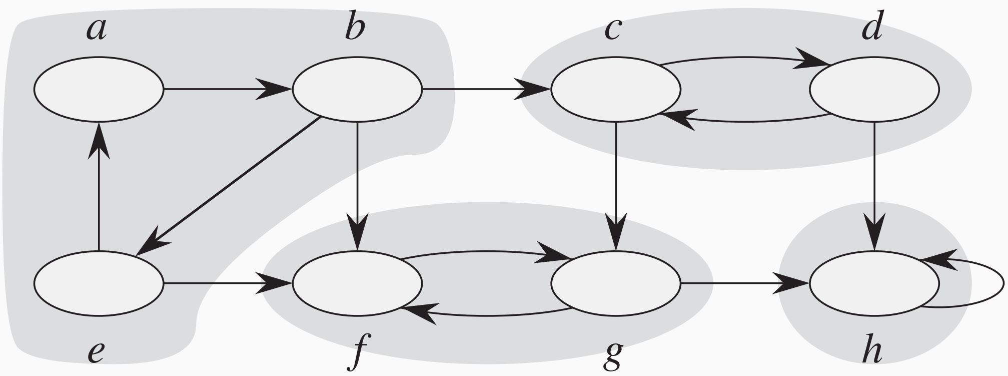



**Figura 2:** Grafo no dirigido con cuatro componentes fuertemente conexas $\{a, b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{f, g\}$ y $\{h\}$. Fuente: [1]

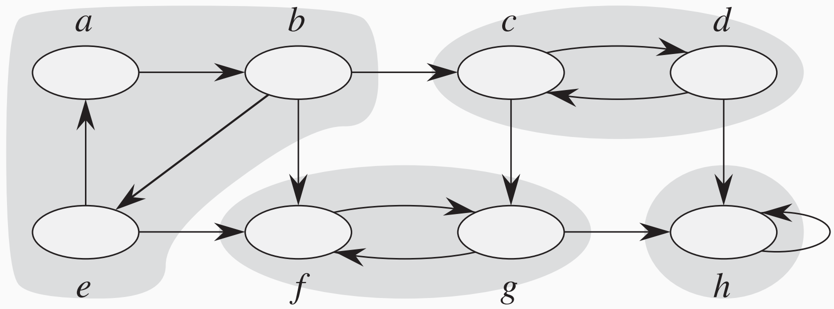


## Grafo componente

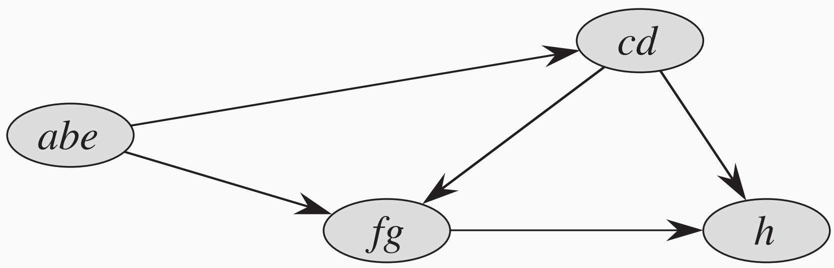
**Definición grafo componente**

Sea $G$ un grafo con las componentes conexas $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Se define el grafo componente $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$, tal que cada vértice $v_i \in V^{SCC}$ corresponde a una componente conexa $C_i$ de $G$ y existe un lado $(v_i, v_j) \in E^{SCC}$ si en $G$ existe un lado $(a, b)$ tal que $a \in C_i$ y $b \in C_j$ y $C_i \neq C_j$.

## Ejemplo de un grafo componente




(a) Grafo dirigido con 4 componentes fuertemente conexas.




(b) Grafo componente $G^{SCC}$ de $G$.

**Figura 3:** Ejemplo de un grafo componente $G^{SCC}$ derivado de $G$. Fuente: [1].



## Tiempo de descubrimiento y finalización de conj. de vértices

**Definición de las funciones $d$ y $f$ para conjuntos de vértices**

Sea un grafo $G = (V, E)$ al que se le aplica el algoritmo de búsqueda en profundidad y sea $U \subseteq V$. Se definen:

$$d(U) = \min_{u \in U}\{u.d\}$$

y

$$f(U) = \max_{u \in U}\{u.f\}$$

# Corolario y teorema de DFS

**Corolario anidamiento de intervalos de descendientes**

Un vértice $v$ es descendiente de un vértice $u$ en un bosque generado por la búsqueda en profundidad (DFS) en un grafo $G$, si solo si $u.d < v.d < v.f < u.f$.

**Teorema del camino blanco**

En un bosque generado por la búsqueda en profundidad (DFS) en un grafo $G$, un vértice $v$ es descendiente de un vértice $u$ si solo si existe en el tiempo $u.d$ en el que $u$ es descubierto, un camino de vértices blancos desde $u$ hasta $v$.



# Componentes fuertemente conexas

## Algoritmo de las componentes fuertemente conexas

**Función** componentes-fuertemente-conexas($G(V, E)$)

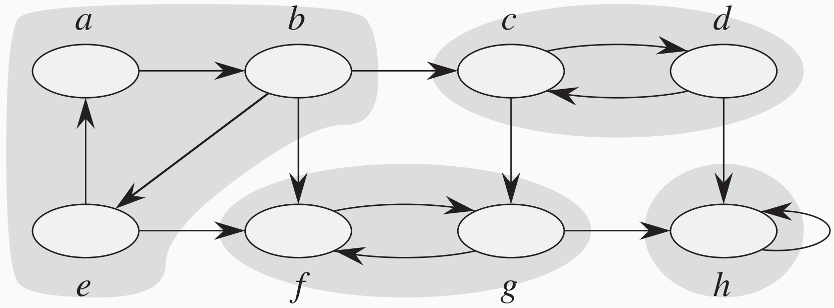
1 **inicio**
2 Ejecutar $DFS(G)$ y obtener el orden topológico de todos los vértices ;
3 $G^{-1} \leftarrow$ `grafo-inverso`$(G)$ ;
4 Ejecutar $DFS(G^{-1})$ modificado, tal que considere en ciclo principal `DFS` a los vértices en el orden topológico obtenido en la línea 2 ;
5 $CFC \leftarrow$ Los vértices que componen cada árbol $i$ del bosque de `DFS` (*depth-first trees*) de la línea 4 van a formar parte de la componente fuertemente conexa $C_i$, se crea un conjunto con todas las componentes fuertemente conexas $C_i$, esto es $\{C_1, \ldots C_n\}$. ;
6 **devolver** $CFC$ ; `/* Se tiene que` $CFC = \{C_1, \ldots C_n\}$ `*/`



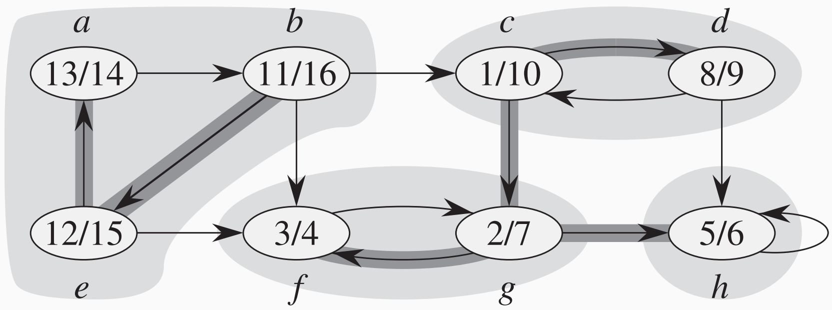
## Análisis del algoritmo de las componentes fuertemente conexas

- DFS y ordenamiento topológico en la línea 2 es $\Theta(|V| + |E|)$.
- Obtener grafo inverso en la línea 3 es $\Theta(|V| + |E|)$.
- $DFS(G^{-1})$ modificado en la línea 4 es $O(|V| + |E|)$.
- Recorrer el bosque de DFS en la línea 5 es $O(|V| + |E|)$.
- Por lo tanto, el tiempo del peor caso es de $\Theta(|V| + |E|)$.

# Ejemplo de `componentes-fuertemente-conexas`




(a) Digrafo $G$ con 4 componentes fuertemente conexas.

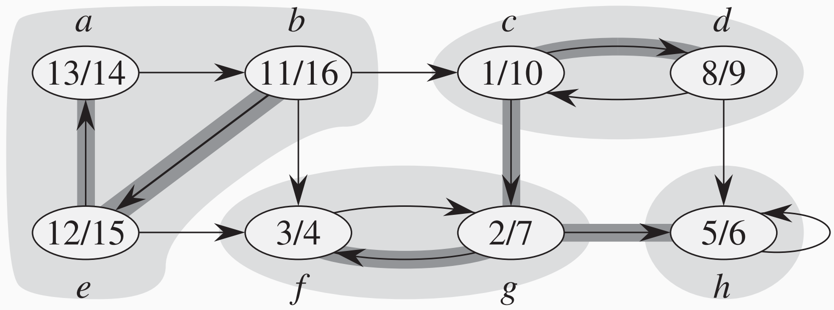



(b) Resultado de $DFS(G)$, con orden topológico $\langle b, e, a, c, d, g, h, f \rangle$.

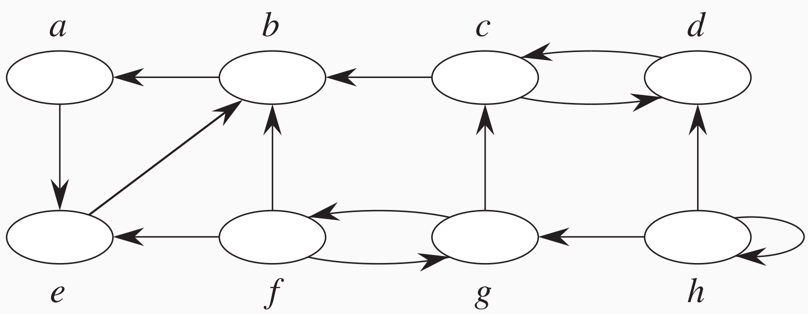
**Figura 4:** Se ejecuta $DFS(G)$. Fuente: [1].



# Ejemplo de `componentes-fuertemente-conexas`, cont.



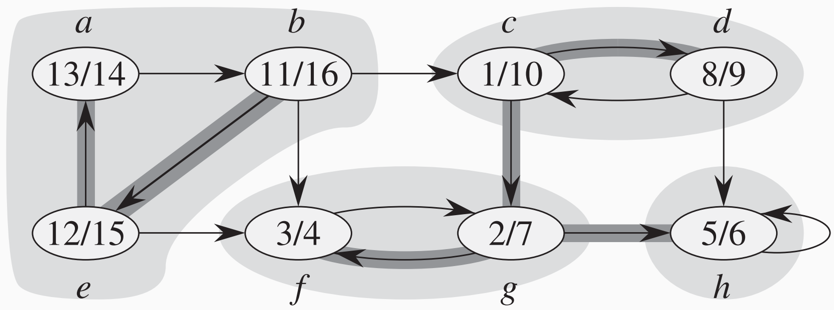

(a) Resultado de $DFS(G)$, con orden topológico $\langle b, e, a, c, d, g, h, f \rangle$.



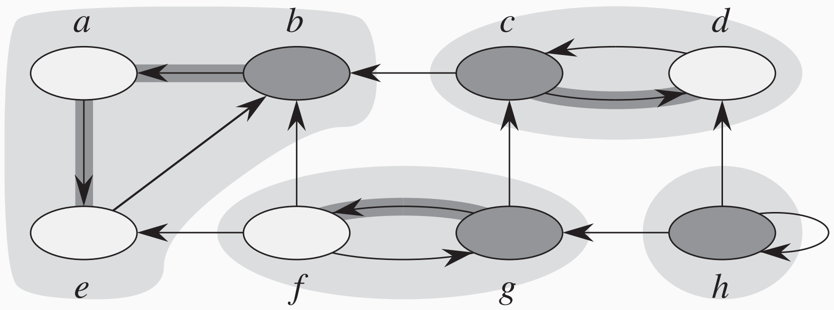

(b) Grafo inverso $G^{-1}$ de $G$.

**Figura 5:** Se ejecuta `grafo-inverso`$(G)$. Fuente: [1].

## Ejemplo de `componentes-fuertemente-conexas`, cont.




(a) Resultado de $DFS(G)$, con orden topológico $\langle b, e, a, c, d, g, h, f \rangle$.

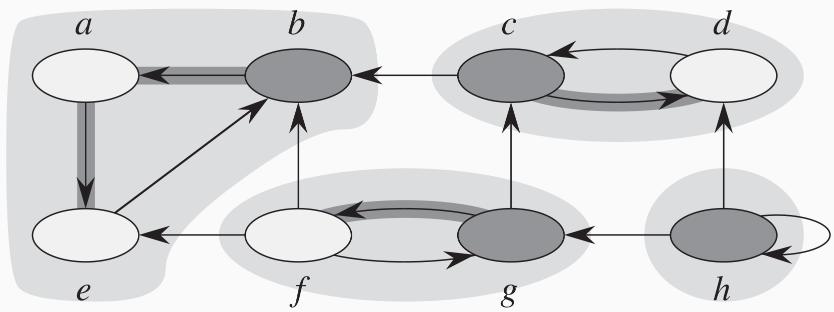



(b) Resultado de $DFS(G^{-1})$.

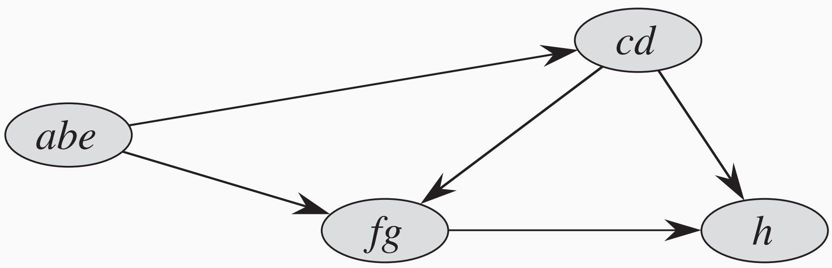
**Figura 6:** Se ejecuta $DFS(G^{-1})$ con orden topológico 6(a). Fuente: [1]



## Ejemplo de `componentes-fuertemente-conexas`, cont.




(a) Resultado de $DFS(G^{-1})$.




(b) Grafo componente con los vértices de las CFC obtenidas de $DFS(G^{-1})$ y los lados de $G$.

**Figura 7:** Componentes fuertemente conexas $CFC = \{\{a, b, e\}, \{c, d\}, \{f, g\}, \{h\}\}$ de 7(a). Fuente: [1]

## Caminos entre componentes fuertemente conexas

**Lema 1**

Sean $C$ y $C'$ dos componentes fuertemente conexas de un digrafo $G$, sean $u, v \in C$ y $u', v' \in C'$ y suponga que en $G$ existe el camino $u \rightsquigarrow u'$. Entonces $G$ no puede tener un camino $v' \rightsquigarrow v$.



## Caminos entre componentes fuertemente conexas, cont.

**Prueba Lema 1**

Por contradicción.

- Supongamos que existe un camino $v' \rightsquigarrow v$ en $G$.
- Entonces, existe un camino $v' \rightsquigarrow v \rightsquigarrow u$, porque $u, v \in C$.
- En consecuencia, existe un camino $u \rightsquigarrow u' \rightsquigarrow v'$.
- Entonces, $u$ y $v'$ están en la misma componente fuertemente conexa.
- Esto es una contradicción porque $u$ y $v'$ están en componentes fuertemente conexas diferentes.
- Por lo tanto, no existe un camino $v' \rightsquigarrow v$ en $G$.

$\square$

## Lados entre componentes fuertemente conexas

**Lema 2**

Sean $C$ y $C'$ dos componentes fuertemente conexas de un digrafo $G = (V, E)$. Suponga que existe un lado $(u, v) \in E$, donde $u \in C$ y $v \in C'$. Entonces $f(C) > f(C')$.



## Lados entre componentes fuertemente conexas, cont.

**Prueba del Lema 2**

Caso 1 $d(C) < d(C')$:

- Sea $x$ el primer vértice descubierto por DFS en $C$.
- Los demás vértices de $C$ son descendientes de $x$.
- Por *Teorema de camino blanco* los demás vértices en $C$ son blancos.
- Por el lado $(u, v)$, para cualquier vértice $w \in C'$ hay camino $x \rightsquigarrow u \rightarrow v \rightsquigarrow w$.
- En consecuencia, los vértices de $C'$ son descendientes de $x$.
- Por *Teorema de camino blanco* los vértices en $C'$ son blancos.
- Por *Corolario anidamiento de intervalos de descendientes* $\forall u \in C$ tal que $u \neq x$ se tiene que $x.f > u.f$.
- Entonces, por definición de $f$ se tiene que $x.f = f(C)$.
- Por *Corolario anidamiento de intervalos de descendientes* $x.f = f(C) > f(C')$.

## Lados entre componentes fuertemente conexas, cont.

**Prueba del Lema 2, cont.**

Caso 2 $d(C) > d(C')$:

- Sea $y$ el primer vértice descubierto por DFS en $C'$.
- Los demás vértices en $C'$ son descendientes de $y$.
- Por *Teorema de camino blanco* los demás vértices en $C'$ son blancos.
- Por *Corolario anidamiento de intervalos de descendientes* $\forall w \in C'$ tal que $w \neq x$ se tiene que $y.f > w.f$.
- Entonces, por definición de $f$ se tiene que $y.f = f(C')$.
- En el momento $y$ es descubierto, los vértices de $C$ están blancos.
- Por *Lema 1* no hay camino desde $y$ hasta cualquier vértice de $C$.
- En consecuencia, los vértices de $C$ son descubiertos después que $C'$ es finalizado.
- Por lo tanto, $\forall w \in C : w.f > y.f$ implica que $f(C) > f(C')$. $\square$



## Tiempo de finalización en un digrafo inverso

**Corolario 1**

Sean $C$ y $C'$ dos componentes fuertemente conexas de un digrafo $G = (V, E)$ y sea $G^{-1} = (V, E^{-1})$ su digrafo inverso. Suponga que existe un arco $(u, v) \in E^{-1}$, donde $u \in C$ y $v \in C'$. Entonces $f(C) < f(C')$.

**Prueba del Corolario 1**

- Como $(u, v) \in E^{-1}$, entonces por definición de grafo inverso $(v, u) \in E$.
- Se tiene que $v \in C'$ y $u \in C$ porque las componentes fuertemente conexas en $G$ y $G^{-1}$ son las mismas.
- Entonces, aplicando el *Lema 2* se tiene por lo tanto que $f(C') > f(C)$. $\square$

# Correctitud de `componentes-fuertemente-conexas`

**Teorema correctitud de `componentes-fuertemente-conexas`**

El algoritmo `componentes-fuertemente-conexas` obtiene las componentes fuertemente conexas del digrafo $G$ que se le da como entrada.

**Prueba de correctitud `componentes-fuertemente-conexas`**

- **Por inducción**: sobre los árboles del bosque (*depth-first trees*) generados por $DFS(G^{-1})$ en la línea 4.
- **H.I.**: suponemos que los primeros $k$ árboles del bosque de $DFS(G^{-1})$ corresponden a componentes fuertemente conexa.
- **Caso base**: $k = 0$ se cumple.
- **Queremos probar**: el árbol $(k + 1)$ del bosque de $DFS(G^{-1})$ corresponde a una componente fuertemente conexa.



# Correctitud de `componentes-fuertemente-conexas`, cont.

**Prueba de correctitud `componentes-fuertemente-conexas`, cont.**

- Sea $u$ la raíz del árbol $(k + 1)$ y sea $C$ la CFC de $u$.
- En la línea 4, se escogieron las raíces de $DFS(G^{-1})$, por lo tanto $u.f = f(C) > f(C')$ para toda otra CFC $C'$ visitada.
- $u$ es el primer vértice descubierto por $DFS(G^{-1})$ y por H.I., por lo tanto los vértices de $C$ son blancos.
- Por *Teorema de camino blanco* los demás vértices de $C$ son descendientes de $u$ en el árbol $(k + 1)$.
- Por H.I. y por Corolario 1, para cualquier $(w, v) \in E^{-1}$ se tiene que $w$ pertenece a una de las CFC $C'$ visitadas anteriormente y $v \in C$.
- Entonces, todos los descendientes de $u$ están en $C$ cuando $DFS(G^{-1})$ genera el árbol $(k + 1)$.
- Por lo tanto, los vértices en el árbol $(k + 1)$ corresponden a una CFC de $G^{-1}$ y $G$. $\square$

## Referencias


[1] T. Cormen, C. Leirserson, R. Rivest, and C. Stein.
**Introduction to Algorithms.**
McGraw Hill, 3ra edition, 2009.