



Análisis Amortizado

Guillermo Palma

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información

Plan

1. Introducción
2. El método del análisis agregado
3. El método de la contabilidad



Introducción

Algoritmo para tomar café

Procedimiento servirTazaCafe(*Cafetera*, *tazaTomada*)

```
1 inicio
2   si La Cafetera está vacía entonces
3     | Hacer café con la Cafetera ;
4   Llenar taza con café de la Cafetera ;
5   tazaTomada  $\leftarrow$  tazaTomada + 1 ;
```

- *tazaTomada* y *Cafetera* son variables globales.
- En la primera llamada del procedimiento, se tiene que como precondiciones que la *Cafetera* esta llena y *tazaTomada* = 0.
- El peor caso es encontrar la *Cafetera* vacía.
- El peor caso es muy pesimista.
- Servir una taza de café se hace rápidamente la mayoría de las veces.



Definición

Es comportamiento asintótico de un algoritmo que viene dado por la función de costo:

$$C(n) = \frac{\text{Costo total del peor caso de una secuencia de } n \text{ operaciones}}{n}$$



Sobre el análisis amortizado

- En el análisis del caso promedio se supone que todas las posibles entradas son igualmente probables.
- El análisis amortizado garantiza el tiempo promedio teniendo en cuenta en el peor caso de cada operación.
- El análisis amortizado no involucra un análisis probabilístico.
- El costo amortizado puede ser pequeño aunque alguna de las operaciones de la secuencia sea costosa.
- En el análisis amortizado puede mostrar que en un algoritmo el tiempo de las operaciones costosas es amortizado por el resto de las operaciones más rápidas.
- El análisis del peor caso puede ser muy pesimista.
- El análisis del caso promedio puede ser poco realista por las suposiciones que se deben hacer.
- El análisis amortizado puede mostrar una expectativa realista del comportamiento de un algoritmo o secuencia de operaciones.



Ejemplo ilustrativo

- Se tiene una Pila S con tres operaciones:

- $\text{POP}(S)$ que es $\Theta(1)$
- $\text{PUSH}(S, x)$ que es $\Theta(1)$
- $\text{MULTIPOP}(S, k)$ que es $\Theta(\min(|S|, k))$

-

Procedimiento $\text{multipop}(S, k)$

1 inicio

2 **mientras** S no es vacía y $k > 0$ **hacer**

3 $\text{POP}(S)$;

4 $k \leftarrow k - 1$

-
- Se quiere analizar el tiempo de una secuencia de n operaciones POP , PUSH y MULTIPOP



Peor caso del ejemplo ilustrativo

- Las n operaciones son MULTIPOP .
- Se tiene que MULTIPOP se ejecuta con pila con n elementos.
- Entonces, MULTIPOP es $\Theta(n)$.
- En consecuencia, en el peor caso las n operaciones son $\Theta(n^2)$.
- Este análisis es muy pesimista.



El método del análisis agregado

Sobre el método del análisis agregado

- Obtiene una cota superior ajustada para las n operaciones como un todo.
- No hay distinción entre las operaciones y las estructuras de datos al hacer el análisis.



- Si MULTIPOP es $\Theta(n)$ entonces se aplicó n operaciones POP de $\Theta(1)$.
- Si se aplicó n operaciones POP de $\Theta(1)$ entonces tuvo haber antes n operaciones PUSH de $\Theta(1)$.
- Esto es, 1 operación MULTIPOP y n PUSH toma $\Theta(n) \cdot 1 = \Theta(1) \cdot n = \Theta(n)$.
- Entonces, cada operación de la secuencia toma en promedio $\Theta(1)$.
- Si hay r operaciones MULTIPOP con valores, k_1, k_2, \dots, k_r tuvo que haber $k_1 + k_2 + \dots + k_r$ operaciones PUSH.
- Se tiene una cota superior de $O(n)$ para la operaciones que son $O(1)$.
- Entonces, el costo de n operaciones es $O(n) * O(1) + O(n) = O(n)$.
- En consecuencia, el tiempo amortizado promedio de cada operación es $O(1)$.



El método de la contabilidad

Sobre el método de la contabilidad

- A cada una de las operaciones se le asigna un costo amortizado.
- El costo amortizado puede ser menor o mayor al costo real de la operación.
- La idea es que al final la suma del costo amortizado de todas las operaciones resulte mayor que el costo real de las mismas.
- Se quiere facilitar el cálculo del costo de las operaciones.
- Cuando el costo amortizado de una operación es mayor que el costo real, entonces se obtiene un crédito (*costo amortizado - costo real*).
- El crédito, o balance del banco, puede ser usado para pagar cuando el costo amortizado es menor que el costo real.
- La cantidad de crédito, o balance del banco, siempre tiene que ser mayor o igual a cero durante la ejecución de todas las operaciones.



Sobre el método de la contabilidad, continuación

- Para la i -ésima operación, se denota como c_i el costo de la operación y \hat{c}_i el costo amortizado
- Para cualquier secuencia de n operaciones se debe cumplir que:

$$\sum_{i=1}^n \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^n c_i$$

- El crédito acumulado en cualquier punto de la secuencia de operaciones viene dado por:

$$\sum \hat{c}_i - \sum c_i$$

- El crédito acumulado siempre debe ser mayor o igual a cero.



Método de la contabilidad aplicado al ejemplo ilustrativo

- Se determina el costo de las operaciones:
 - El costo de PUSH es 1.
 - El costo de POP es 1.
 - El costo de MULTIPOP es $\min(|S|, k)$.
- Se asignan los costos amortizados de las operaciones:
 - El costo amortizado de PUSH es 2.
 - El costo amortizado de POP es 0.
 - El costo amortizado de MULTIPOP es 0.
- La idea es que antes de las poder realizar las operaciones POP y MULTIPOP, se deben haber realizado las correspondiente operaciones PUSH.
- Entonces, con el costo amortizado de PUSH, se pagan el resto de las operaciones.



Método de la contabilidad aplicado a un ejemplo concreto

- Sea el número de operaciones $n = 6$.
- Al comienzo de las operaciones la pila $S = \emptyset$.
- Ejecución de las seis operaciones:

Operación	i	\hat{c}_i	c_i	Crédito
$push(S, 3)$	1	2	1	1
$pop(S)$	2	0	1	0
$push(S, 4)$	3	2	1	1
$push(S, 1)$	4	2	1	2
$push(S, 2)$	5	2	1	3
$multipop(S, 100)$	6	0	3	0

Tabla 1: Aplicación del método de la contabilidad a seis operaciones de *push*, *pop* y *multipop*.



- Supongamos que los costos están expresados en dólares.
- Cuando se aplica una operación, hay que pagar su costo con el costo amortizado y si sobra dinero se guarda en el banco.
- Para cada operación PUSH se paga 1\$ con el costo amortizado de 2\$ y el 1\$ sobrante se guarda en el banco.
- Si se hace una operación POP su costo se paga con lo que está en el banco por la operación PUSH, del elemento que se expulsa de la pila.
- La operación MULTIPOP que puede costar k \$ que son pagados con el dinero en el banco, de las k operaciones PUSH realizadas.
- Entonces, el costo amortizado de cada operación es $O(1)$.
- En consecuencia, el costo amortizado de n operaciones es $O(n)$, porque es una cota superior del costo de las operaciones de la secuencia.

