Propiedades de los caminos de costo mínimos desde un vértice fuente fijo y algoritmo de Bellman-Ford

Guillermo Palma

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información

Plan

1. Definiciones básicas
2. Estructuras
3. Representación
4. Propiedades
5. Algoritmo de Bellman-Ford

Definiciones básicas

Caminos de costo mínimo

Definición de camino de costo mínimo

Dado un grafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del grafo. El costo $w(p)$ del camino $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ es la suma de los costos de los lados del camino, es decir:

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

Se define el **camino de costo mínimo** $\delta(u, v)$ desde el vértice u hasta el vértice v como:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \text{mín}\{w(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{si existe un camino } p \text{ desde } u \text{ hasta } v \\ \infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Caminos de costo mínimos desde un vértice fuente fijo

Definición del problema de los caminos de costo mínimos desde un vértice fuente fijo

Dado un grafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del grafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$. Se define **el problema de los caminos de costo mínimos desde un vértice fuente fijo**, como el encontrar todos los caminos de costo mínimo $\delta(s, v)$ desde el vértice $s \in V$ hasta cada uno de los vértices $v \in V$ de G.

Variantes de problemas de caminos de costo mínimos

Problemas que son variantes del problema de los caminos de costo mínimos desde un vértice fuente fijo:

- Caminos de costo mínimos hasta un vértice destino fijo.
- Caminos de costo mínimos entre todos los pares de vértices.

Estructuras

Subestructura óptima de los caminos de costo mínimo

Lema 1 (Los subcaminos de los caminos de costo mínimos son caminos de costo mínimos)

Dado un digrafo $G = (V, E)$ con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del grafo, sea $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ el camino de costo mínimo desde v_0 hasta v_k, y para cualquier i, j tal que, $0 \leq i \leq j \leq k$, sea $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ el subcamino de p desde el vértice v_i hasta el vértice v_j. Entonces, p_{ij} es un camino de costo mínimo desde v_i hasta v_j.

Subestructura óptima de los caminos de costo mínimo, cont.

Prueba del Lema 1

Por contradicción.

- Se descompone el camino p en tres caminos $v_0 \overset{p_{0i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jk}}{\rightsquigarrow} v_k$.
- Entonces, $w(p) = w(p_{0i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$.
- Si p_{ij} no un camino de costo mínimo, entonces existe un camino p'_{ij}, tal que $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$.
- En consecuencia, existe un camino p' de la forma $v_0 \overset{p_{0i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p'_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jk}}{\rightsquigarrow} v_k$, tal que $w(p') = w(p_{0i}) + w(p'_{ij}) + w(p_{jk})$.
- Entonces, $w(p') < w(p)$ lo cual es una contradicción porque p es un camino de costo mínimo.
- Por lo tanto, p_{ij} es un camino de costo mínimo. $\square$

Lados de costo negativo

Dado un grafo $G = (V, E)$ con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$, y dado un vértice fuente fijo $s \in V$, se tiene que:

- Llamamos a un ciclo de G, un ciclo negativo si la suma de los costos de lados que lo componen es un número negativo.
- Si G no contiene ciclos negativos en los caminos hasta los vértices $v \in V$ que son alcanzables, entonces se dice que los caminos de costo mínimo $\delta(s, v)$ están bien definidos.
- En caso contrario, se tiene que los caminos de costo mínimo no están bien definidos y $\delta(s, v) = -\infty$.
- Observe que G **puede tener lados con costo negativo, pero no un ciclo negativo**.

Ejemplo de lados y ciclos de costo negativo

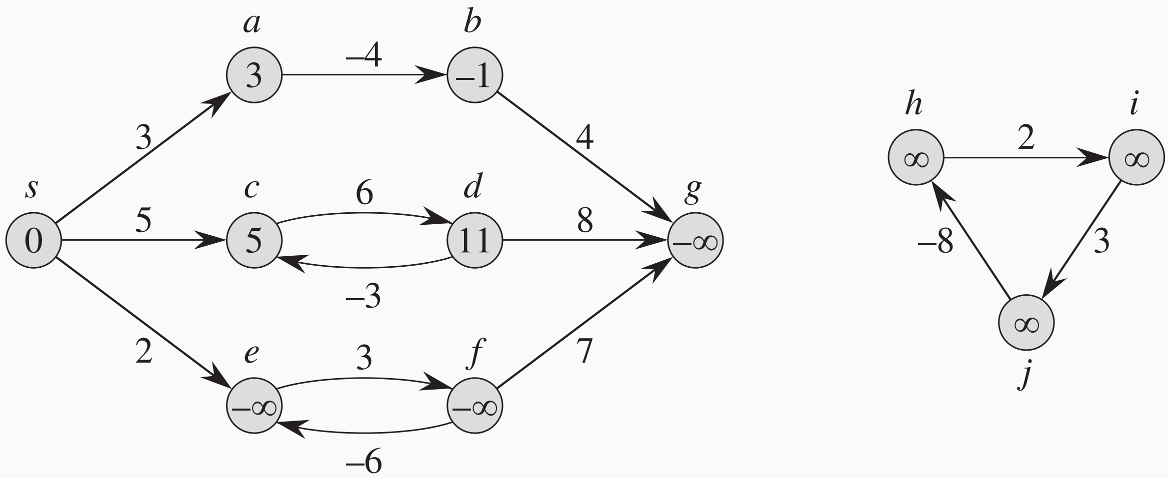


Figura 1: Digrafo con lados con costo negativo y un ciclo negativo. Fuente [?]

Ciclos en caminos de costo mínimo

- Los caminos de costo mínimo no pueden contener ciclos negativos.
- Los caminos de costo mínimo no deben contener ciclos positivos:
  - Si tuviera un ciclo con costo positivos, entonces se elimina el ciclo y se tiene un camino de costo menor
  - Si tuviera un ciclo con costo cero, entonces se elimina el ciclo y se tiene un camino de igual costo.
- En conclusión, **los caminos de costo mínimo son caminos simples**.

Representación

Subgrafo predecesor

Se usa el subgrafo predecesor definido para la *búsqueda en amplitud*, para representar los caminos parciales y finales de los algoritmos que obtienen los caminos de costo mínimo.

Definición subgrafo predecesor

Sea $G = (V, E)$ un digrafo o un grafo no dirigido con vértice fuente s, tal que $s \in V$. Se define el **subgrafo predecesor** como: $G_{pred} = (V_{pred}, E_{pred})$ donde:

- $V_{pred} = \{v \in V : v.pred \neq NIL\} \cup \{s\}$.
- $E_{pred} = \{(v_{pred}, v) : v \in V_{pred} - \{s\}\}$.

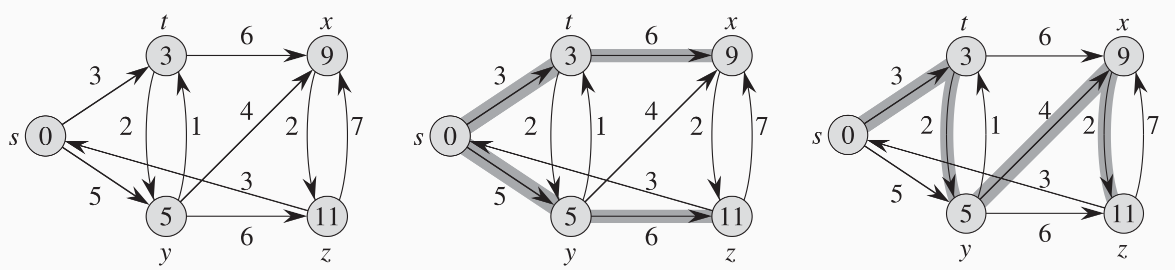
Árbol de caminos de costo mínimo

Definición árbol de caminos de costo mínimo

Dado un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del digrafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$. El digrafo G no tiene ciclos negativos. Se define un **árbol de caminos de costo mínimo** con raíz s, como digrafo $G = (V', E')$, donde $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, tal que:

1. V' es el conjunto de vértices alcanzables desde s.
2. G' es un árbol con raíz s.
3. Para todo $v \in V$ el único camino simple desde s hasta v en G', es el camino de costo mínimo $\delta(s, v)$ en G.

Ejemplo de árboles de caminos de costo mínimo



(a) Digrafo con vértice fuente s y costo en los lados.

(b) Primer árbol de caminos de costo mínimo.

(c) Segundo árbol de caminos de costo mínimo.

Figura 2: Se muestran dos posibles árboles de caminos de costo mínimo. Fuente [?].

Relajación del costo de un lado

- Cada vértice tiene un atributo $v.d$ que guarda una cota superior del camino de costo mínimo desde s hasta v.
- Se llama a $v.d$, el **estimado del camino de costo mínimo**.
- Los valores $v.d$ y $v.pred$ se inicializan con el procedimiento INICIALIZAR-FUENTE-FIJA.
- La relajación de un lado (u, v), consiste en ver si yendo por ese lado hasta v, se mejora el valor de $v.d$ hasta ahora.

Inicialización de los costos y predecesores

Procedimiento Inicializar-fuente-fija($G = (V, E)$, s)

inicio
    para cada $(v \in V)$ **hacer**
        $v.d \leftarrow \infty$;
        $v.pred \leftarrow NIL$;
    $s.d \leftarrow 0$;

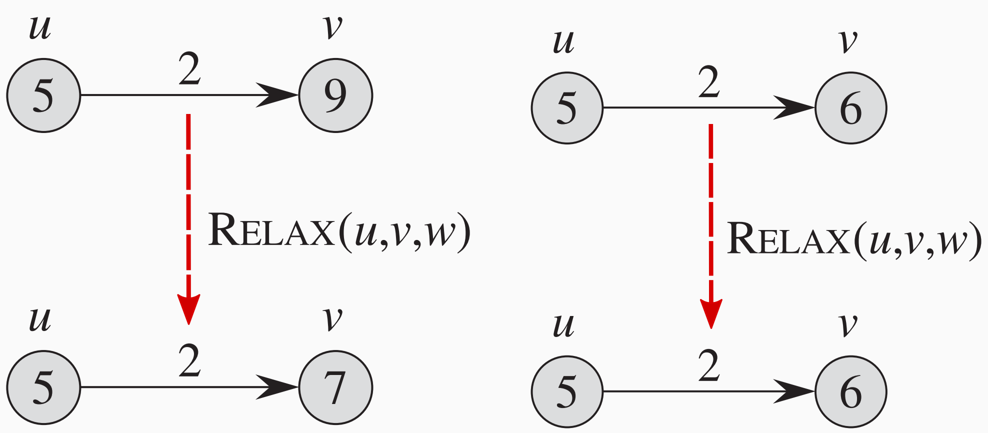
Relajación del costo de un lado

Procedimiento Relajacion(u, v, w)

---

inicio
  si $(v.d > u.d + w(u,v))$ **entonces**
    $v.d \leftarrow u.d + w(u,v)$;
    $v.pred \leftarrow u$;

Ejemplos de relajación de lados



(a) Se actualiza $v.d$ porque $(v.d > u.d + w(u,v))$.

(b) No se actualiza $v.d$ porque $(v.d \leq u.d + w(u,v))$.

Figura 3: Dos ejemplos de relajación del lado (u, v) con $w(u, v) = 2$. El número de los vértices, es el costo hasta ahora del camino hasta esos vértices, es decir $v.d$ Fuente [**?**].

Propiedades

Sobre las propiedades de los caminos de costo mínimo

- Las propiedades son la base para mostrar el funcionamiento de los algoritmos de caminos de costo mínimo.
- Se asume que cada grafo es inicializado por el procedimiento Inicializar-fuente-fija.
- Se asume que el procedimiento Relajacion es el que se usa para actualizar los valores estimados de los caminos de costo mínimo y los predecesores.
- Se asume que si dado un número real a, se cumple que:
  - $a + \infty = \infty + a = \infty$.
  - $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$.

Desigualdad triangular

Lema 2 (Desigualdad triangular)

Dado un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del digrafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$. Entonces para todos los lados $(u, v) \in E$ se cumple que $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$.

Desigualdad triangular, cont.

Prueba del Lema 2

Caso 1 existe $s \rightsquigarrow v$: se tiene $\delta(s, v)$ de $s \rightsquigarrow v$. Se tiene que $s \rightsquigarrow u \to v$ es un camino hasta v y su costo es $\delta(s, u) + w(u, v)$. Como $\delta(s, v)$ es el costo mínimo hasta v, entonces $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$.

Caso 2 no existe $s \rightsquigarrow v$: se tiene que $\delta(s, v) = \infty$. En consecuencia, el camino hasta v dado por $s \rightsquigarrow u \to v$ tampoco existe, entonces $\delta(s, u) + w(u, v) = \infty$. Por lo tanto, se cumple porque $\infty = \infty$.

Caso 3 hay un ciclo negativo en $s \rightsquigarrow v$: se tiene que $\delta(s, v) = -\infty$. En $s \rightsquigarrow u \to v$ también hay un ciclo negativo, entonces $\delta(s, u) + w(u, v) = -\infty$. Por lo tanto, se cumple porque $-\infty = -\infty$.

Propiedad de la cota superior

Lema 3 (Propiedad de la cota superior)

Dado un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del digrafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$. Sea G inicializado con el procedimiento INICIALIZAR-FUENTE-FIJA(G, s). Entonces, $\delta(s, v) \leq v.d$ para todo $v \in V$, y este invariante es mantenido sobre cualquier secuencia de pasos de relajación de lados de G. Además, una vez que $v.d$ alcanza su cota inferior $\delta(s, v)$, esta nunca cambia.

Propiedad de la cota superior, cont.

Prueba del Lema 3

- Con INICIALIZAR-FUENTE-FIJA se cumple que $\delta(s, v) \leq v.d$ para todo $v \in V$.
- Por contradicción, suponemos que existe un vértice $v.d < \delta(s, v)$.
- Sea v es el primer vértice que ocurre esto y u que hace $v.d$ cambie.
- Se tiene que $v.d = u.d + w(u, v)$.
-
$$\begin{aligned} v.d &< \delta(s, v) \\ &\leq \delta(s, u) + w(u, v) \text{ (des. triangular)} \\ &\leq u.d + w(u, v) \text{ (v es el primer vértice que $v.d < \delta(s, v)$)} \end{aligned}$$

  Entonces, $v.d < u.d + w(u, v)$ lo cual es una contradicción.
- No hay valor menor que $\delta(s, v)$ y no aumenta porque la relajación no aumenta valor. $\square$

Propiedad de ningún camino

Corolario 1 (Propiedad de ningún camino)

Dado un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del digrafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$, tal que no existe un camino que conecte a s con cualquier vértice $v \in V$. Entonces, después que el grafo es inicializado con el procedimiento $\textsc{Inicializar-fuente-fija}(G, s)$, se tiene que $v.d = \delta(s, v) = \infty$, y esta igualdad es mantenida sobre cualquier secuencia de pasos de relajación de los lados de G.

Prueba del Colorado 1

Por propiedad de la cota superior se tiene que $v.d \geq \delta(s, v) = \infty$, por la tanto $v.d = \infty$. $\square$

Sobre la relajación de lados

Lema 4

Dado un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del digrafo y sea un lado $(u, v) \in E$. Entonces, después de relajar el lado (u, v) por ejecutar $\textsc{Relajacion}(\text{u, v, w})$, se tiene que $v.d \leq u.d + w(u, v)$.

Prueba del Lema 4

Hay dos casos que pueden ocurrir antes de la relajación

Caso 1 $v.d > u.d + w(u, v)$**:** entonces se aplica la relajación y queda $v.d = u.d + w(u, v)$

Caso 2 $v.d \leq u.d + w(u, v)$**:** entonces no se aplica la relajación y queda $v.d \leq u.d + w(u, v)$

Propiedad de la convergencia

Lema 5 (Propiedad de la convergencia)

Dado un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del digrafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$. Sea $s \rightsquigarrow u \to v$ el camino más corto en G hasta los vértices $u, v \in V$. Suponga que G es inicializado con el procedimiento $\textsc{Inicializar-fuente-fija}(G, s)$ y entonces se aplica una secuencia de pasos de relajación que incluye la llamada a $\textsc{Relajacion}(\text{u, v, w})$ sobre los lados de G. Si $u.d = \delta(s, u)$ antes de la llamada a la relajación, entonces $v.d = \delta(s, v)$ todo el tiempo después de la llamada.

Propiedad de la convergencia, cont.

Prueba del Lema 5

- Después de la relajación se tiene que:
- $$\begin{aligned} v.d &\leq u.d + w(u, v) \text{ (Por Lema 4 (relajación de lados))} \\ &= \delta(s, u) + w(u, v) \\ &= \delta(s, v) \text{ (Por Lema 1)} \end{aligned}$$
- Se tiene que $v.d \geq \delta(s, v)$ (Por Lema 3 (propiedad de la cota superior)).
- Por lo tanto $v.d = \delta(s, v)$ $\square$

Propiedad de la relajación del camino

Lema 6 (Propiedad de la relajación del camino)

Dado un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del digrafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$. Considere el camino de costo mínimo $p = \langle v_0, v_1 \ldots, v_k \rangle$ desde $s = v_0$ hasta v_k. Si G es inicializado con el procedimiento $\textsc{Inicializar-fuente-fija}(G, s)$ y entonces se aplica una secuencia de pasos de relajación, que incluye la relajación de los siguientes lados en orden $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$, entonces $v_k.d = \delta(s, v_k)$ después de las relajaciones y todo el tiempo después. Esta propiedad se mantiene sin importar que otras relajaciones se efectúen, incluyendo relajaciones que incluyan algunos de los lados de p.

Propiedad de la relajación del camino, cont.

Prueba del Lema 6 (Propiedad de la relajación del camino)

Se prueba por inducción para mostrar que $v_i.d = \delta(s, v_i)$, después de que el lado (v_{i-i}, v_i) es relajado.

Caso base: $i = 0$ entonces $v_0.d = 0 = \delta(s, v_0) = \delta(s, s)$

Paso inductivo:
- Se asume como cierto que $v_{i-1} = \delta(s, v_{i-1})$
- Se relaja el lado (v_{i-1}, v_i)
- Por Lema 5 (Propiedad de la convergencia) $v_i = \delta(s, v_i)$ y su valor nunca cambia después. □

Algoritmo de Bellman-Ford

Sobre el algoritmo de Bellman-Ford

- El algoritmo resuelve el problema de encontrar los caminos de costo mínimo desde un vértice s fuente fijo, en un digrafo $G = (V, E)$.
- Se tiene como entrada un digrafo G con costos y una función de costo sobre los lados $w : E \to \mathbb{R}$.
- El algoritmo retorna un *True* si G no tiene un ciclo negativo alcanzable desde s, y *False* en caso contrario.
- El algoritmo aplica la relajación de lados $(u, v) \in E$ progresivamente para disminuir los valores de $v.d$.
- La relajación se aplica a todos los lados para cada vértices $v \in V$ para obtener $v.d = \delta(s, v)$.
- Se alcanza los caminos de costo mínimo desde s hasta todos los vértices $v \in V$, si no existe un ciclo negativo alcanzable desde s.
- El algoritmo permite obtener los caminos de costo mínimo en grafos con lados negativos y sin ciclos negativos.

Algoritmo de Bellman-Ford

Función Bellman-Ford(G =(V, E), w, s)

```
1 inicio
2     Inicializar-fuente-fija(G, s);
3     para i ← 1 a |V| − 1 hacer
4         para cada (u, v) ∈ E hacer
5             Relajacion(u, v, w)
6     para cada (u, v) ∈ E hacer
7         si v.d > u.d + w(u, v) entonces
8             devolver False ;
9     devolver True ;
```


Análisis del algoritmo de Bellman-Ford

- El procedimiento `Inicializar-fuente-fija` es $\Theta(|V|)$.
- Las líneas 3-5 son $O(|V||E|)$.
- Las líneas 6-8 son $O(|E|)$.
- Por lo tanto, el algoritmo de Bellman-Ford es $O(|V||E|)$.

Ejemplo del algoritmo de Bellman-Ford

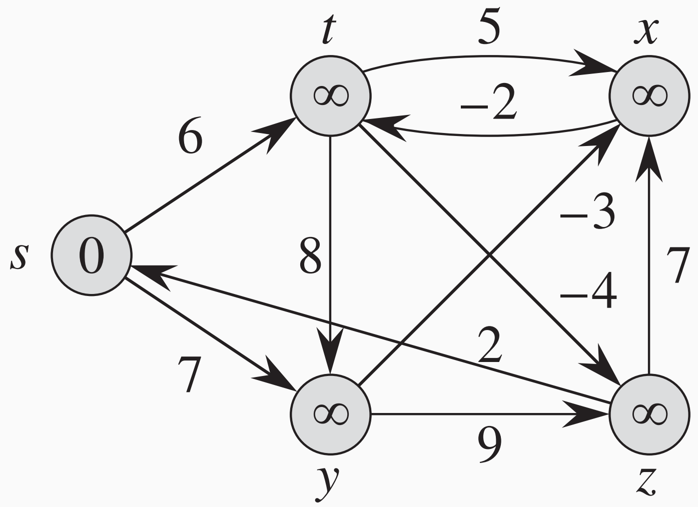


Figura 4: Se aplica el procedimiento INICIALIZAR-FUENTE-FIJA al grafo de entrada. Fuente [?]

Ejemplo del algoritmo de Bellman-Ford, cont.

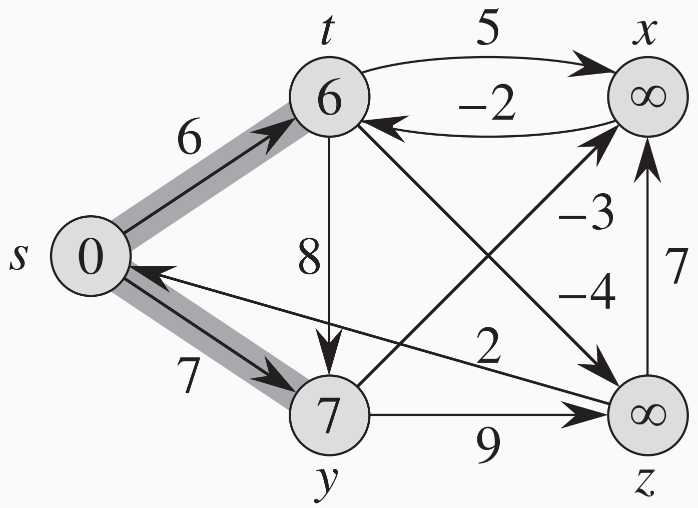


Figura 5: Se aplica RELAJACION para $i = 1$. El orden de los lados son relajados es (t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t) y (s, y). Fuente [?]

Ejemplo del algoritmo de Bellman-Ford, cont.

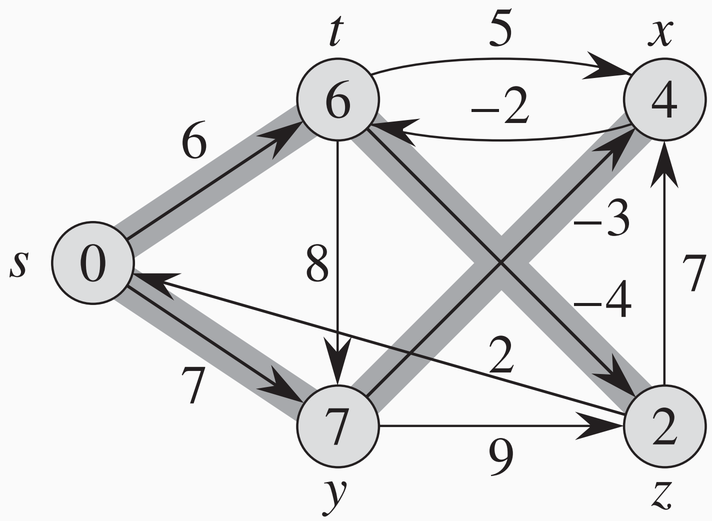


Figura 6: Se aplica RELAJACION para $i = 2$. El orden de los lados son relajados es (t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t) y (s, y). Fuente [?]

Ejemplo del algoritmo de Bellman-Ford, cont.

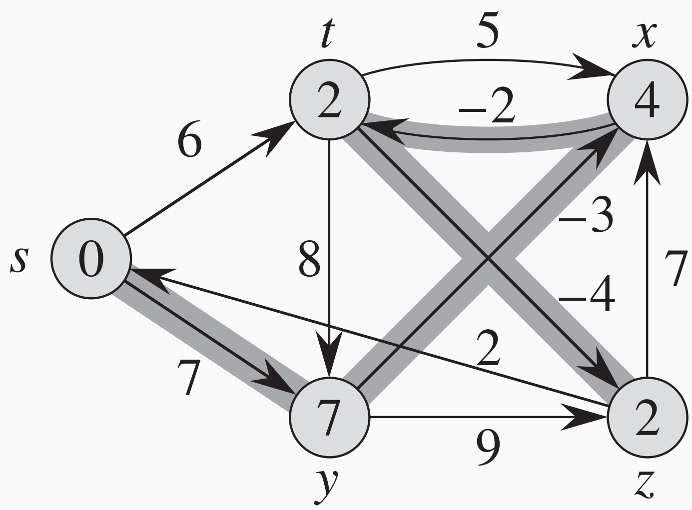


Figura 7: Se aplica RELAJACION para $i = 3$. El orden de los lados son relajados es (t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t) y (s, y). Fuente [?]

Ejemplo del algoritmo de Bellman-Ford, cont.

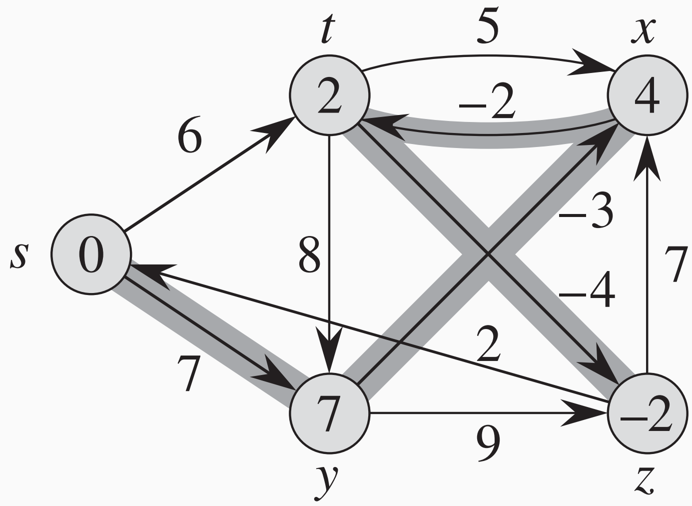


Figura 8: Se aplica RELAJACION para $i = 4$. El orden de los lados son relajados es (t,x), (t,y), (t,z), (x,t), (y,x), (y,z), (z,x), (z,s), (s,t) y (s,y). Fuente [**?**]

Obteniendo los caminos de costo mínimo

Lema 7

Dado un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del grafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$, tal que no hay ciclos negativos que sean alcanzables desde el vértice s. Entonces, después de $|V| - 1$ iteraciones del ciclo **para** de las líneas 3-5 del algoritmo de BELLMAN-FORD, se obtiene que $v.d = \delta(s, v)$ para todos los vértices v que son alcanzables desde s.

Obteniendo los caminos de costo mínimo, cont.

Prueba del Lema 7

- Sea un $v \in V$ un vértice cualquiera.
- Sea $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, donde $s = v_0$ y $v_k = v$, el camino más corto desde s hasta v.
- p tiene a lo sumo $|V| - 1$ lados, entonces $k \leq |V| - 1$.
- Las líneas 3-5 del algoritmo de BELLMAN-FORD relajan todos los lados por $|V| - 1$ iteraciones.
- Entre los lados relajados en la i-ésima iteración, para $i = 1, 2, \ldots, k$ esta (v_{i-1}, v_i).
- Por *propiedad de la relajación del camino*, entonces $v.d = v_k.d = \delta(s, v_k) = \delta(s, v)$. $\square$

Obteniendo los caminos de costo mínimo

Corolario 2

Dado un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del grafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$, tal que no hay ciclos negativos que sean alcanzables desde el vértice s. Entonces, para cada vértice $v \in V$, existe un camino desde s hasta v si solo si, el algoritmo BELLMAN-FORD termina con $v.d \leq \infty$ cuando se ejecuta sobre G.

Propiedad subgrafo-predecesor

Lema 8 (Propiedad subgrafo-predecesor)

Una vez que $v.d = \delta(s, v)$ para todo $v \in V$, el subgrafo predecesor es un árbol de caminos de costo mínimo con raíz en s.

Correctitud del algoritmo de Bellman-Ford

Teorema Correctitud del algoritmo de Bellman-Ford

Sea el algoritmo BELLMAN-FORD ejecutado sobre un un digrafo $G = (V, E)$, con una función de costo $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna un costo real a cada uno de los lados del grafo y dado un vértice fuente fijo $s \in V$, tal que no hay ciclos negativos que sean alcanzables desde el vértice s. Entonces, el algoritmo retorna *True*, y se tiene que $v.d = \delta(s, v)$ para todos los vértices $v \in V$, y el subgrafo predecesor G_{pred} es un árbol de caminos de costo mínimos con raíz en s. Si G contiene un ciclo negativo alcanzable desde el vértice s, entonces el algoritmo retorna *False*.

Correctitud del algoritmo de Bellman-Ford. cont.

Prueba de la correctitud del algoritmo de Bellman-Ford

Caso 1: Tenemos un digrafo G sin ciclos negativos alcanzables desde s.

- Si existe un camino desde s cualquier vértice $v \in V$ se cumple por Lema 7 $v.d = \delta(s, v)$.
- Si no existe un camino desde s cualquier vértice $v \in V$ por Propiedad de ningún camino se cumple que $v.d = \delta(s, v) = \infty$.
- Entonces, cuando el algoritmo termina:
  - Para cualquier $v \in V$ se cumple que $v.d = \delta(s, v)$.
  - Por propiedad subgrafo-predecesor se obtiene un árbol de caminos de costo mínimo con raíz en s.
  - Para todos los lados $(u, v) \in E$:

$$\begin{aligned} v.d &= \delta(s, v) \\ &\leq \delta(s, u) + w(u, v) \text{ (desigualdad triangular)} \\ &= u.d + w(u, v) \end{aligned}$$

- En consecuencia, para el caso 1 el algoritmo siempre retorna *True*.

Prueba de la correctitud del algoritmo de Bellman-Ford, cont.

Caso 2: Tenemos un digrafo G con ciclos negativos alcanzables desde s.

- Sea el ciclo negativo $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, donde $v_0 = v_k$, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0 \tag{1}$$

- Probamos por contradicción, el algoritmo retorna *True*, entonces $v_i.d \leq v_{i-1}.d + w(v_{i-1}, v_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Sumando las desigualdades en el ciclo: $\sum_{i=1}^{k} v_i.d \leq \sum_{i=1}^{k}(v_{i-1}.d + w(v_{i-1}, v_i)) = \sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$.
- Como $v_0 = v_k$, cada vértice aparece una vez en la suma $\sum_{i=1}^{k} v_i.d$ y $\sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d$ y se tiene que $\sum_{i=1}^{k} v_i.d = \sum_{i=1}^{k} v_{i-1}.d$.
- Por Corolario 2. $v_i.d$ es finito para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \tag{2}$$

- Las ecuaciones 1 y 2 son contradictorias.
- Por lo tanto, el algoritmo retorna *False* en el caso 2. $\square$

Referencias

[1] T. Cormen, C. Leirserson, R. Rivest, and C. Stein.
Introduction to Algorithms.
McGraw Hill, 3ra edition, 2009.