https://github.com/migueserna/ModeladoySimulacion/blob/main/Simulaciones/Ejercicios_capitulo_2_MASG.ipynb

Nombre: Miguel Angel Serna gallego — 1007230971

Taller #1

Flujos en la linea

2.1) En los siguientes 3 ejercicios, interprete $\dot{x} = \sin$ como una linea de flujo.

2.1.1) Encuentre todos los puntos fijos del flujo

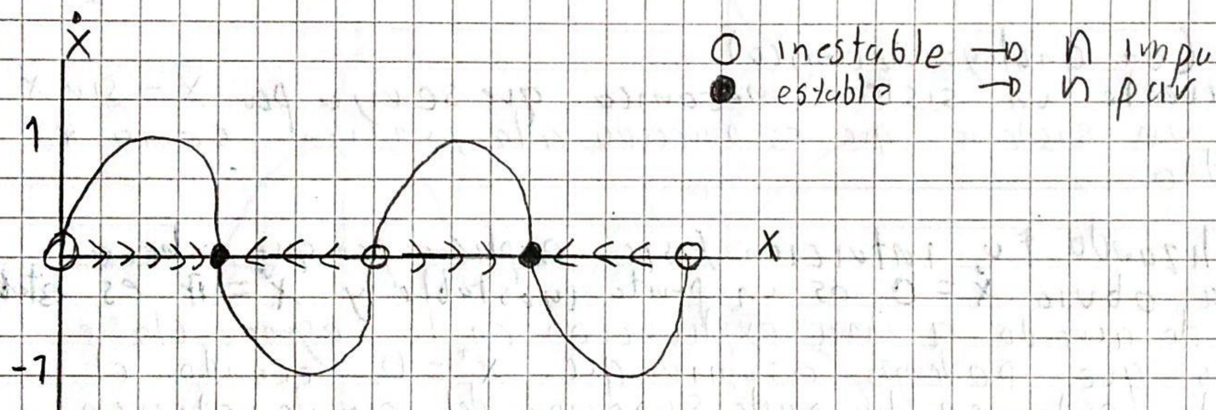
Rta//

$$\dot{x} = \sin(x)$$

Para $\dot{x} = 0$

$$\sin(x) = 0 \rightarrow x = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin(x) = \int \csc(x)\, dx$$

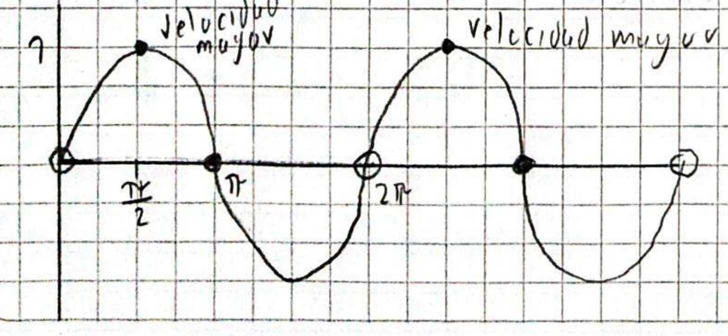


2.1.2) ¿en que puntos x tiene el flujo la mayor velocidad hacia la derecha?

Rta// el flujo tiene mayor velocidad hacia la derecha cuando $\dot{x} = \sin(x)$ es maximo es decir cuando $\sin(x) = 1$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$$

Siempre que n sea un entero positivo



2.1.3

a) encontrar la funcion de aceleracion del flujo $\ddot{x}$ en funcion de x

Rta// para encontrar la aceleracion derivamos $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\operatorname{sen}(x)}{dt} \Rightarrow \ddot{x} = \cos(x)\dot{x}$$

$$\ddot{x} = \cos(x)\operatorname{sen}(x)$$

B) encontrar los puntos donde el flujo tiene la maxima aceleracion positiva

$$\cos(x)\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) \to \ddot{x} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

los valores maximos son cuando

$$x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

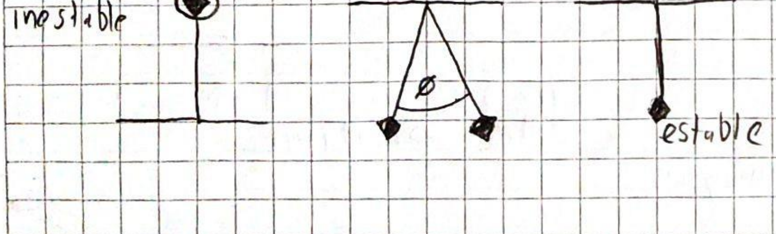
2.1.5 (un analogo mecanico)

a) encuentre un sistema mecanico que se rija por $\dot{x} = \sin x$

Rta// un sistema que es parecido a la funcion seria el pendulo

B) utilizando tu intuicion fisica explica porque ahora resulta obvio $\dot{x} = 0$ es un punto inestable y $x^* = \pi$ es estable

Rta// de acuerdo a una explicacion en la segunda clase vimos que podemos asumir que $x^* = 0$ cuando el pendulo esta en la parte superior del eje de rotacion por lo cual si no sufre perturbacion se quedaria allin pero si se pertuba nunca volvera a dicho punto en cambio de $x^* = \pi$ si se pertuba de su punto de equilibrio volvera a el



2.2 Puntos fijos y estabilidad

Analiza gráficamente las siguientes ecuaciones en cada caso dibuje el campo vectorial en la recta real, encuentre todos los puntos fijos clasifique su estabilidad y dibuje la gráfica $x(t)$ para diferentes condiciones iniciales, además intente obtener la solución analítica de $x(t)$ si te quedas atorado no lo intentes durante mucho tiempo ya que en varios en caso es imposible resolver la ecuación de forma cerrada

2.2.2

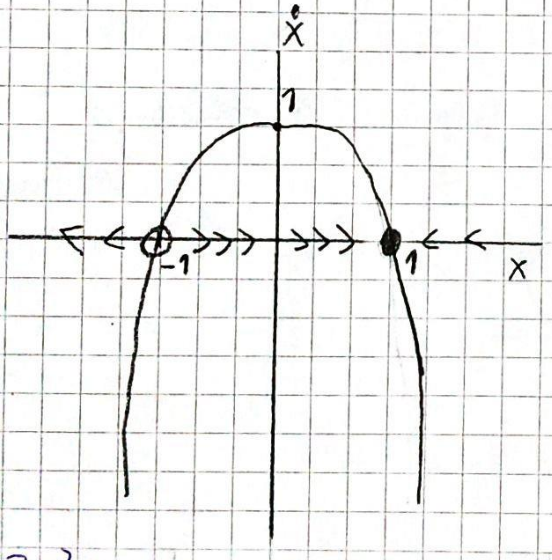
$\dot{x} = 1 - x^{14} \rightarrow f(x) = 1 - x^{14} \rightarrow 1 - x^{14} = 0 \rightarrow x^{14} = 1$

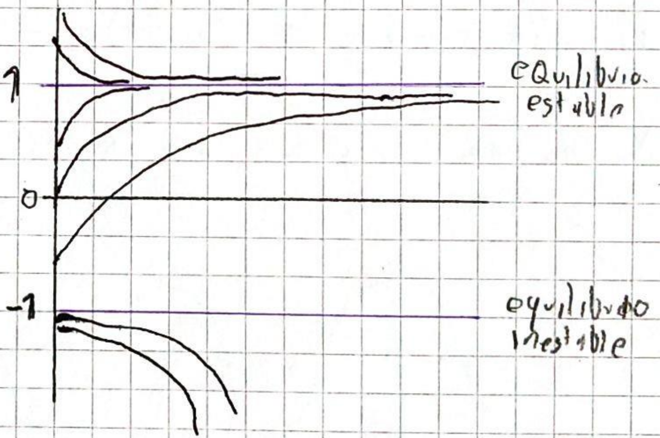
$x = \pm 1$ (soluciones reales)

$f_x = -14x^{13}$

$f_x|_{x=-1} = 14 \rightarrow$ inestable

$f_x|_{x=1} = -14 \rightarrow$ estable





2.2.3

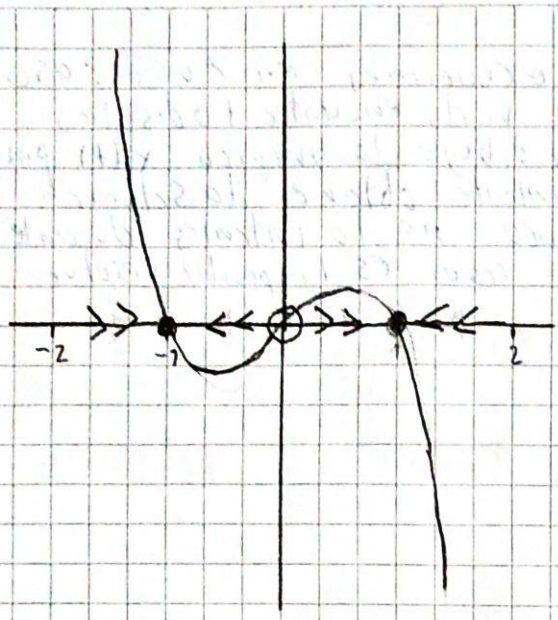
$\dot{x} = x - x^3 \rightarrow f(x) = x - x^3 \rightarrow -x^3 + x = 0$

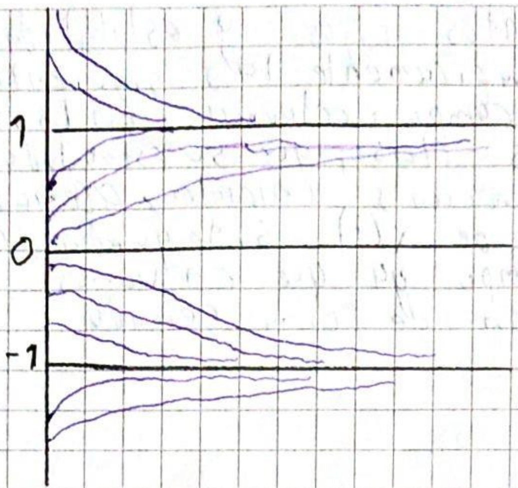
$x = \{-1, 0, 1\}$ $\quad f_x = 1 - 3x^2$

$f_x|_{x=1} = -2 < 0$ estable

$f_x|_{x=0} = 1 > 0$ inestable

$f_x|_{x=-1} = -2 < 0$ estable



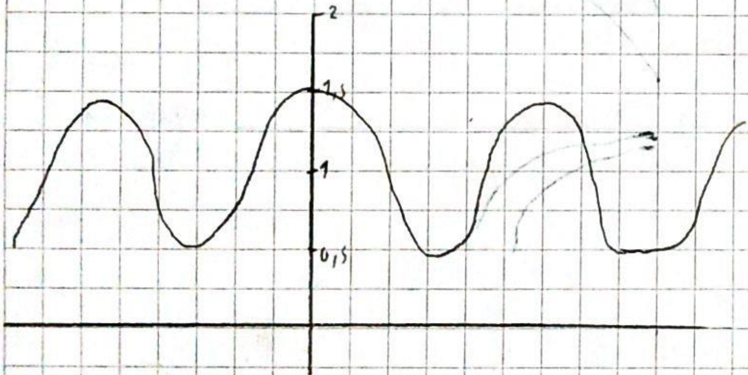


2.2.5

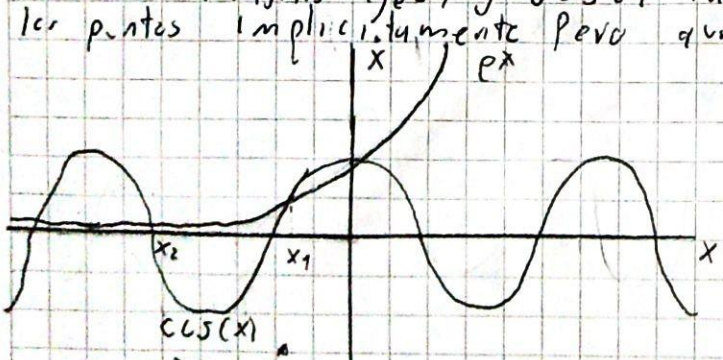
$\dot{x} = 1 + \frac{1}{2}\cos(x) \rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x \rightarrow 1 + \frac{1}{2}\cos(x) = 0$

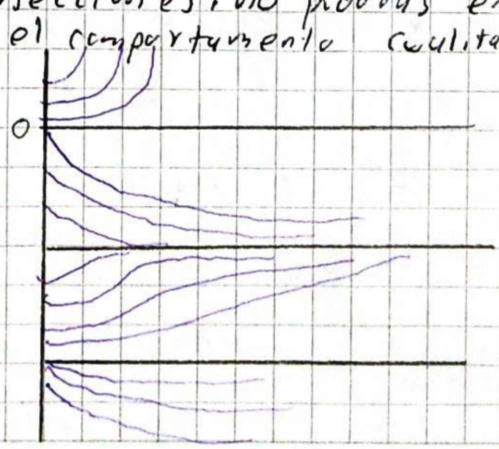
$\frac{1}{2}\cos(x) = -1 \rightarrow \cos(x) = -2$

x no tiene solucion en R → No hay puntos de equilibrio



2.2.7 $\dot{x} = e^x - \cos(x)$ (sugerencia: esboza los graficos de e^x y $\cos(x)$ en los mismos ejes, y busca intersecciones, no podras encontrar los puntos implicitamente pero aun el comportamiento cualitativo





para $x > 0$ $\dot{x}$ siempre es cero

2.3 Crecimiento de la población

2.3.1 (Solución exacta de la ecuación logística) Hay dos formas de resolver la ecuación logística $\dot{N} = rN(1-N/K)$ analíticamente para una condición inicial arbitraria N_0

a) Separar variables e integrar utilizando fracciones parciales

Rta//

$$\frac{dN}{dt} = \frac{R}{K} N(K-N) \rightarrow \frac{dN}{N(K-N)} = \frac{R}{K}\,dt \rightarrow \int \frac{dN}{N(K-N)} = \int \frac{R}{K}\,dt$$

$$\int \left(\frac{1/K}{N} - \frac{1/K}{N-K} \right) dN = \int \frac{R}{K}\,dt \rightarrow \frac{1}{K} \ln|N| - \frac{1}{K} \ln|N-K| = \frac{R}{K} t + C$$

$$\ln|N| - \ln|N-K| = rt + CK \rightarrow \ln\left|\frac{N}{N-K}\right| = rt + CK$$

$$\left|\frac{N}{N-K}\right| = e^{rt+CK} \rightarrow \frac{N}{N-K} = \pm e^{CK} e^{rt} \rightarrow \frac{N}{N-K} = A e^{rt}$$

aplicamos la condición inicial N_0 para hallar A

$$\frac{N_0}{N_0-K} = A \rightarrow \frac{N}{N-K} = \frac{N_0}{N_0-K} e^{rt} \rightarrow N = N \frac{N_0}{N_0-K} e^{rt} - K \frac{N_0}{N_0-K} e^{rt}$$

$$\left(1 - \frac{N_0}{N_0-K} e^{rt}\right) N = -K \frac{N_0}{N_0-K} e^{rt} \rightarrow \frac{N_0 - K - N_0 e^{rt}}{N_0 - K} N = -K \frac{N_0 e^{rt}}{N_0-K}$$

Se multiplica a ambos lados por $N_0 - K$

$$[N_0(1-e^{rt}) - K] N = -K N_0 e^{rt}$$

$$N(t) = \frac{K N_0 e^{rt}}{K - N_0(1-e^{rt})}$$

B) Realizar cambio de variable $x = 1/N$, a continuación derivar y resolver la edo resultante para x

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad N(0) = N_0, \quad x = \frac{1}{N}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{R}{x}\left(1 - \frac{1}{Kx}\right), \quad x_0 = \frac{1}{N(0)} = \frac{1}{N_0}$$

$$\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{r}{x}\left(1-\frac{1}{Kx}\right) \rightarrow \frac{dx}{dt} = r\left(\frac{1}{K} - x\right) \rightarrow \frac{dx}{dt} + rx = \frac{r}{K}$$

$$I = \exp\left(\int^t r\,ds\right) = e^{rt} \rightarrow e^{rt}\frac{dx}{dt} + re^{rt}x = \frac{r}{K}e^{rt}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}x) = \frac{r}{K}e^{rt} \rightarrow e^{rt}x = \frac{1}{K}e^{rt} + D \rightarrow \frac{1}{N_0} = \frac{1}{K} + D$$

$$D = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K} = \frac{K-N_0}{KN_0} \rightarrow e^{rt}x = \frac{1}{K}e^{rt} + \frac{K-N_0}{KN_0}$$

$$x(t) = \frac{1}{K} + \frac{K-N_0}{KN_0e^{rt}} = \frac{N_0e^{rt}}{KN_0e^{rt}} + \frac{K-N_0}{KN_0e^{rt}} = \frac{N_0e^{rt} + K - N_0}{KN_0e^{rt}} = \frac{K - N_0(1-e^{rt})}{KN_0e^{rt}}$$

$$N(t) = \frac{1}{x(t)} \rightarrow N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K - N_0(1-e^{rt})}$$

2.33 (crecimiento tumoral) el crecimiento de tumores cancerosos puede ser modelado por la ley de gompertz $\dot{N} = -aN\ln(bN)$ donde $N(t)$ es proporcional al numero de celulas en el tumor y $a, b > 0$ son parametros

a) interprete a y b biologicamente

Rta// a se podria interpretar como un parametro que da la velocidad del crecimiento del tumor y b se podria interpretar como el crecimiento del tumor

B) esboce el campo vectorial y luego grafique $N(t)$ para valores iniciales

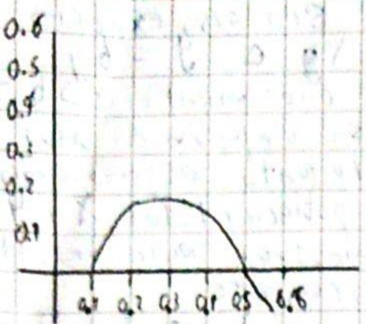
$$\dot{N} = -aN\ln(bN) \rightarrow \frac{dN}{dt} = -aN\ln(bN) \rightarrow \int\frac{dN}{-aN\ln(bN)} = \int dt$$

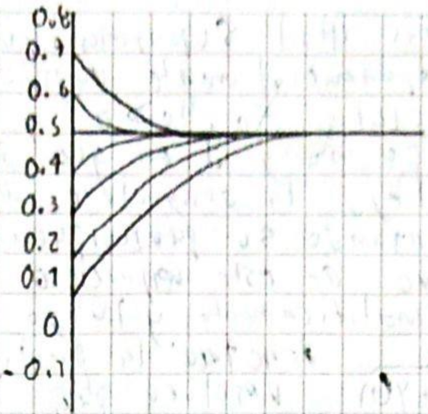
$$t = \int\frac{dN}{-aN\ln(bN)} \rightarrow u = \ln(bN) \rightarrow \frac{du}{dN} = \frac{1}{N} \rightarrow dN = N\,du$$

$$t = -\frac{1}{a}\int\frac{1}{u}du \rightarrow t = -\frac{\ln|u|}{a}$$

$$t = -\frac{\ln\ln bN}{a} + C \rightarrow e^t = e^{\ln\ln bN/a} + C$$

$$N(t) = \frac{e^{e^{-at+C_1}}}{b}$$





2.3.4 (efecto allen) para ciertas especies de organismos, la tasa de crecimiento efectivo $\dot{N}/N$ es mas alta en N intermedio. Esto se llama el efecto Allen. por ejemplo imagine que es demasiado dificil encontrar parejas cuando N es muy pequeño y hay demasiado competencia por alimentos y otros recursos cuando N es grande

a) mostrar que $\dot{N}/N = r - a(N-b)^2$ proporciona un ejemplo del efecto allen si $R, a, y\ b$ satisfacen ciertas restricciones por determinar
b) encontrar todos los puntos fijos del sistema y clasificar su estabilidad
c) esbozar las soluciones, $N(t)$ para diferentes condiciones iniciales

cuando $N = b$ y $a > 0$, $\dot{N}/N$ es máxima

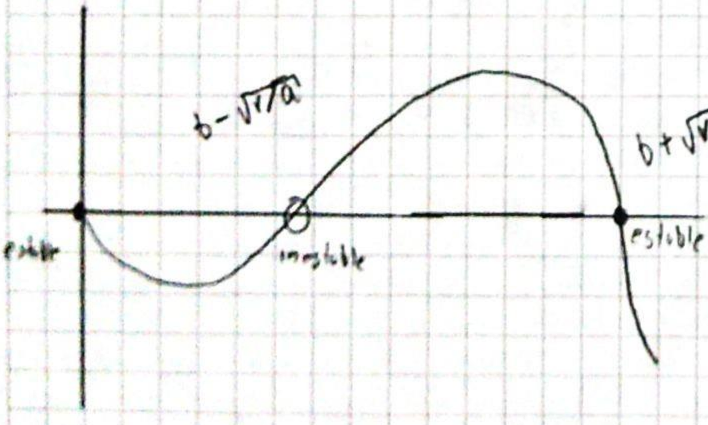
$\dot{N} = N[r - a(N-b)^2]$

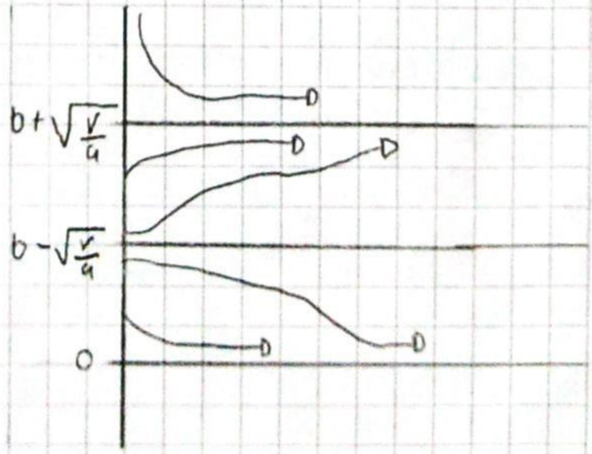
el punto fijo ocurre cuando $\dot{N} = 0$

$N^*[r - a(N^*-b)^2] = 0$

$N^* = 0$ ó $r - a(N^*-b)^2 = 0$

$N^* = 0$ ó $N^* = b \pm \sqrt{\frac{r}{a}} \to b - \sqrt{\frac{r}{a}} > 0$





2.3.5 (Dominancia mas alto) Supongamos que X y Y son dos especies que se reproducen exponencialmente rapido $\dot{X} = aX$ e $\dot{Y} = bY$ con condiciones iniciales $X_0, Y_0 > 0$ y tasas de crecimiento $a > b > 0$ aqui X es mas la forma y Y en que sentido se reproducen mas rapido, como lo refleja la desigualdad $a > b$ por lo tanto esperariamos que X siguiera aumentando su participacion en la poblacion total $X + Y$ $t \to \infty$. el objetivo de este ejercicio es demostrar este resultado intuitivo, primero analiticamente y luego geometricamente

a) Sea $x(t) = \frac{X(t)}{X(t) + Y(t)}$ denotar la participacion de X en la poblacion total. al resolver para $X(t)$ y $Y(t)$ muestra que $x(t)$ aumentan se acerca a 1 como $t \to \infty$

$$X(t) = e^{at}; \quad Y(t) = e^{bt} \to \text{Remplazando } x(t) \quad x(t) = \frac{e^{at}}{e^{at} + e^{bt}}$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + e^{(b-a)t}} \to a > b > 0 \; ; \; 0 > b - a$$

$$x(t) \to \frac{1}{1 + 0} = 0$$

b) alternativamente, podemos llegar a las misma conclusiones derivando una ecuacion diferencial para $x(t)$. para ello, tome la derivada temporal de $x(t) = \frac{X(t)}{X(t) + Y(t)}$ usando las reglas de cociente y cadena luego sustituya $\dot{X}$, $\dot{Y}$ y asi muestre que $x(t)$ obedece a la ecuacion logistica $\dot{x} = (a - b)x(1 - x)$. explique por que esto implica q $x(t)$ aumenta monotamente y se acerca a 1 como $t \to \infty$

$$\dot{x} = \frac{\dot{X}Y - X\dot{Y}}{(X + Y)^2} \to \dot{x} = \frac{aXY - bXY}{(X + Y)^2}$$

$$\dot{x} = (a - b)\frac{X}{X + Y}\left(1 - \frac{X}{X + Y}\right)$$

$$\dot{x} = (a - b)\,x(1 - x)$$

Se observa que esto tiene forma a la ecuacion logistica $(a - b)$ y corresponde a r y K corresponde a 1

2.4) Utilice el analisis de estabilidad lineal para clasificar los puntos fijos de los siguientes sistemas. Si el analisis de estabilidad falla porque $f'(x^*)=0$ use un argumento grafico para decir la estabilidad

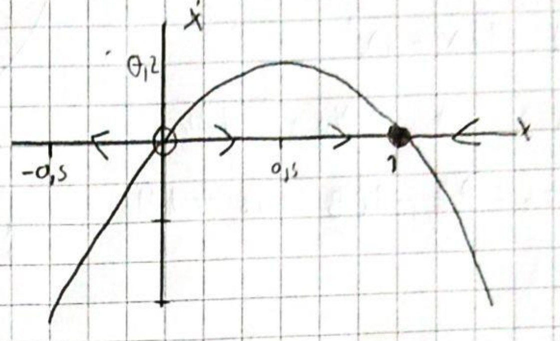
2.4.1 $\dot{x} = x(1-x) \to f(x) = x(1-x) \to x(1-x)=0$

$x^* = [0,1]$ Puntos fijos

$f(x) = x - x^2 \to f'(x) = 1 - 2x$

$Fx|_{x=0} = 1 > 0 \to$ inestable

$Fx|_{x=1} = -1 < 0 \to$ estable



2.4.2 $\dot{x} = x(1-x)(2-x) \to f(x) = x(1-x)(2-x)$

$x = [0,1,2]$ Puntos fijos

$f(x) = (x - x^2)(2-x)$

$f(x) = 2x - 2x^2 - x^2 - x^3$

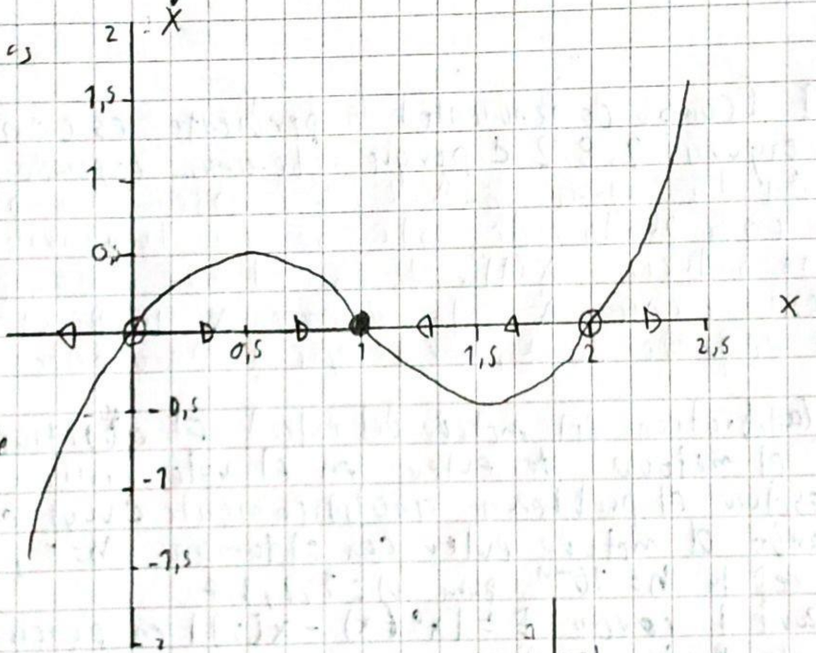
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$Fx|_{x=0} = 2 > 0$ inestable

$Fx|_{x=1} = -1 < 0$ estable

$Fx|_{x=2} = 2 > 0$ inestable



2.4.3

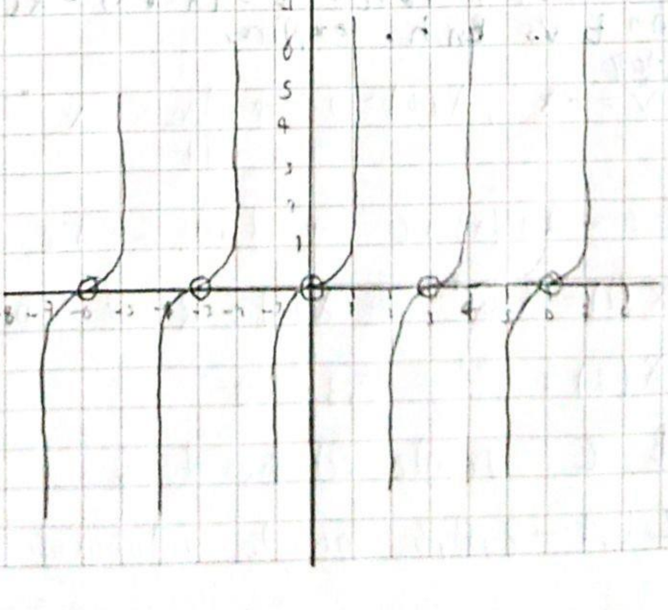
$\dot{x} = \tan(x) \to f(x) = \tan(x)$

$\tan(x) = 0 \to x^* = n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$

$F(x) = \tan(x) \ , \ f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$Fx|_{x=n\pi} = \frac{1}{\cos(\pi n)} = 1 > 0$

$x^* = n\pi$ puntos inestables



2.4.4

$\dot{x} = x^2(6-x) \rightarrow f(x) = x^2(6-x) \rightarrow f(x) = 0$

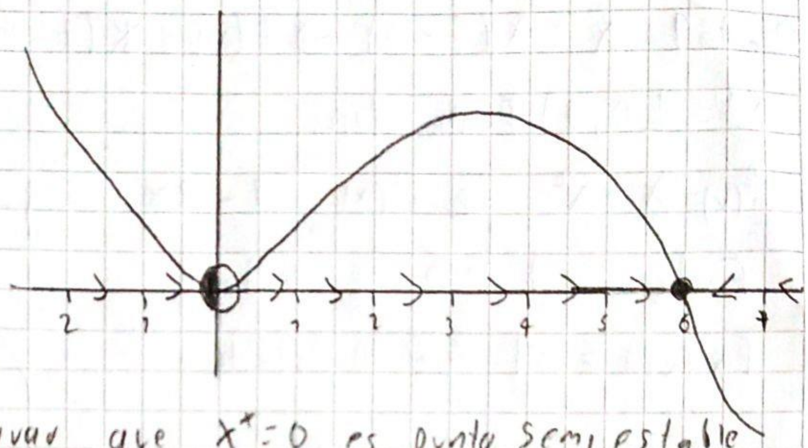
$x^2(6-x) = 0 \qquad x = [0, 6]$ puntos fijos

$f(x) = 6x^2 - x^3$

$f'(x) = 12x - 3x^2$

$f_x|_{x=0} = 0 \rightarrow$ No se establece

$f_x|_{x=6} = 72 - 108 = -36$ estable



De la grafica se puede observar que $x^* = 0$ es punto semiestable

2.8

2.8.1 (Campo de pendiente) la pendiente es constante a lo largo de lineas en la figura 2.8.2 ¿porque deberiamos esperado esto?

R1a/ en la figura 2.8.2 se observa un plano cartesiano tx y en cada punto de este se da la pendiente de la recta tangente a una solucion $x(t)$, t es el eje horizontal y x es el eje vertical como $\dot{x}$ solo depende x la pendiente varia verticalmente $\dot{x}$ no depende de t, por lo que la pendiente permane constante horizontal

2.8.3 (calibration del metodo del euler) el objetivo de este problema es probar el metodo de euler en el valor inicial $\dot{x} = -x \quad x(0) = 1$

a) Resolver el problema analiticamente ¿cual es el valor exacto de $t(1)$

B) usando el metodo euler con el tamaño $h = 1$, estimar $x(1)$ numericamente luego repita $h = 10^{-n}$ para $n = 1, 2, 3, 4$

C) trazaré l error $E = |x^0(x) - x(1)|$ en funcion de h, luego la grafica ln E vs ln h. explicar

R1a/

$\dot{x} = -x \; , x(0) = 1 \rightarrow \frac{dx}{dt} = -x \rightarrow -\frac{dx}{x} = dt \rightarrow t = -\int \frac{dx}{x}$

$t = -\ln(x) + C \rightarrow \ln(x) = -t + C \rightarrow x = e^{(-t+c)} \rightarrow x = e^{-t} \underbrace{e^{c}}_{K}$

$x(t) = K e^{-t} \rightarrow x(0) = K = 1 \rightarrow x(t) = e^{-t}$

$x(1) = e^{-1} = 0{,}3678$

B, C google colaboratory

2.8.4 - 2.8.5 google colaboratory

https://github.com/miguesserna/ModeladoySimulacion/blob/main/Simulaciones/Ejercicios_capitulo_2_MASG.ipynb