

«

»

,

«

»

: 4
-02.03.01.02-41

: .

Содержание

.....	3
.....	5
.....	6
1.1.	6
1.2. SIR SIRS	9
..... SIR.....	11
2.1. SIRD.....	11
2.2. SEIR.....	12
2.3. SEIS.....	13
.....	14
3.1.	14
.....	15
.....	16

. -
 . ,
 ,
 « » [2] . .
 ,
 .
 , ,
 430—426 .
 , .
 «
 X» ,
 .
 , , 350 .
 . 1663 «
 », [7].
 , ,
 , ,
 1800- ,
 . ,
 .
 1927 [1]
 . SIR (susceptible–
 infected–recovered),
 ,
 « » [14],
 ,
 .

», . . . , [3]

1950-

[5].

[4]

- , t : N , -
 • $S(t)$ (susceptible) — ; -
 • $I(t)$ (infected) — ; -
 • $R(t)$ (removed) — « » , -
 , , .

N

:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$$

, ,

1:

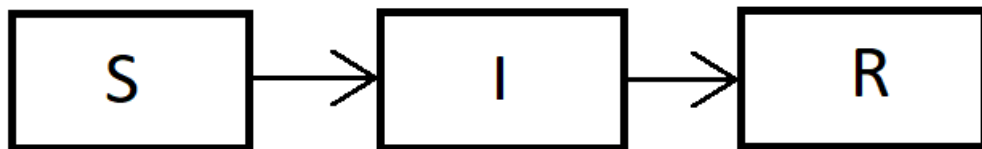


Рис. 1

, (SIR-) -
 . ,
 .

• N.

• , -

1/ , -

• .

SIR -

:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\lambda S, \\ \dot{I} &= -\lambda S - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned} & \text{---}, \\ \text{cN}), & \text{---} \text{p} \text{---} (\\ & \text{---} \frac{I(t)}{N} \text{---} \\ & = \text{cp} \tag{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\frac{\beta}{N}SI, \\ \dot{I} &= \frac{\beta}{N}SI - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I.\end{aligned}\tag{2}$$

SIR. -

-

-

• -

•

SIR- -

• -

,

-

•

SIR SIRS

SIR (2), ,
 (,).
 ,
 .
 .
 SIR с .
 -
 , $N=S(t)+I(t)+R(t)=\text{const}$

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \mu N - \frac{\beta}{N}SI - \mu S, \\ \dot{I} &= \frac{\beta}{N}SI - \gamma I - \mu I, \\ \dot{R} &= \gamma I - \mu R,\end{aligned}\quad (6)$$

 μ —
 SIR (6) ,
 ,
 ,
 ,
 4.

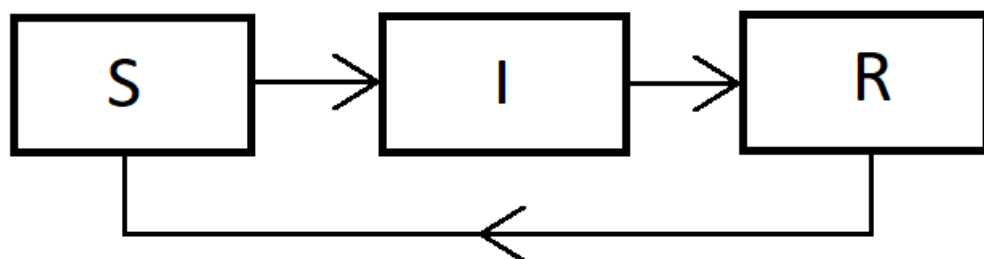


Рис. 4

Susceptible»):

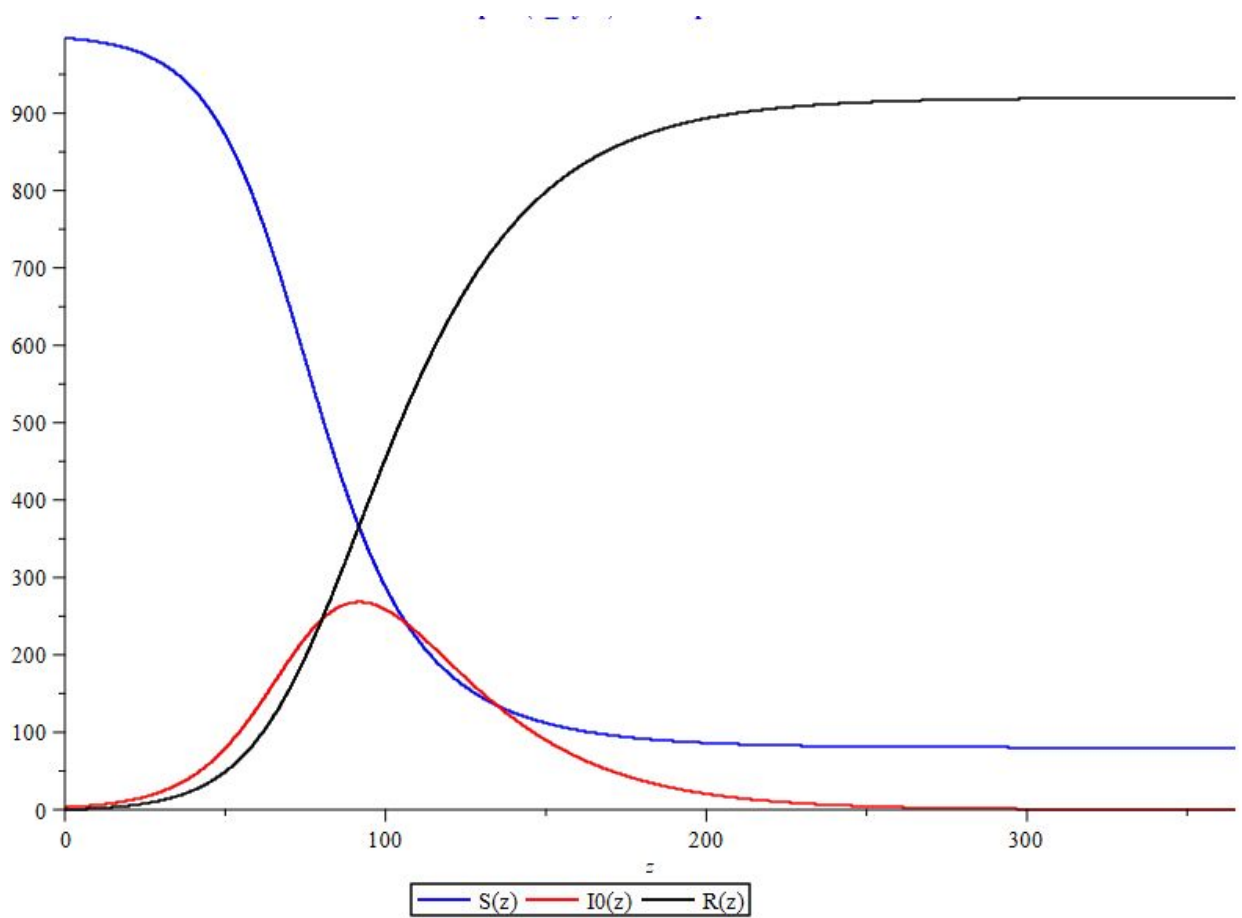
$$\dot{S} = \mu N - \frac{\beta}{N}SI - \mu S + \xi R, \quad (7)$$

$$\dot{I} = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I - \mu I,$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R - \xi R,$$

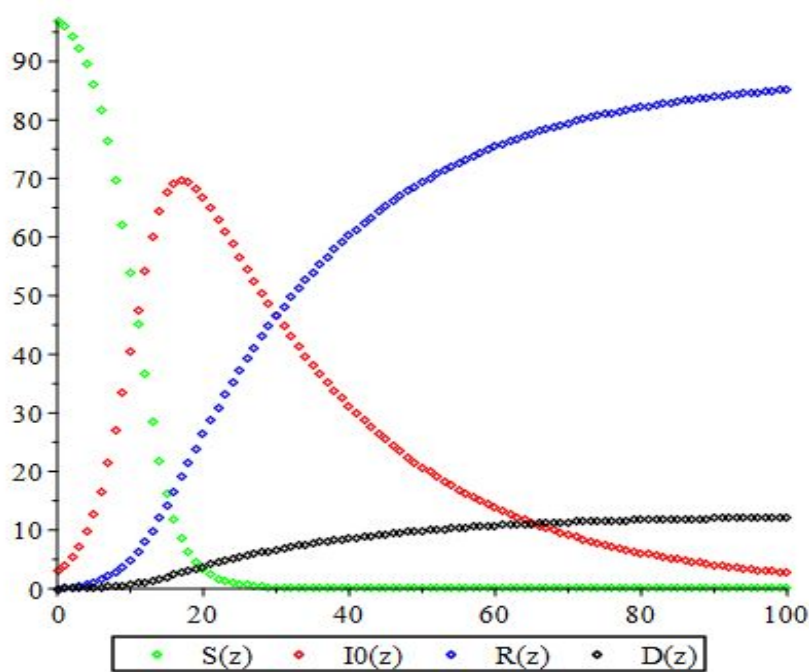
$$N = S + I + R.$$

SIRS (7)



SIR

SIRD



SIRD

$S(0) = 97, I(0) = 3, R(0) = 0, \beta = 0.4, \gamma = 0.035, \mu = 0.005$

« « - » () , , , »
:
:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N},$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I - \mu I,$$

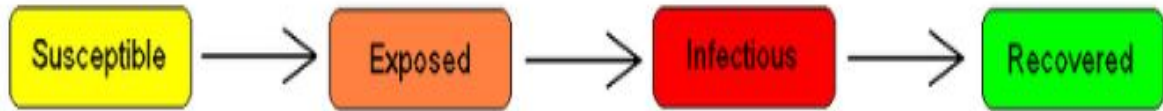
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

$$\frac{dD}{dt} = \mu I,$$

beta, gamma, mu -

SEIR

’
 . E (,).



,
),
),
 , :
 (

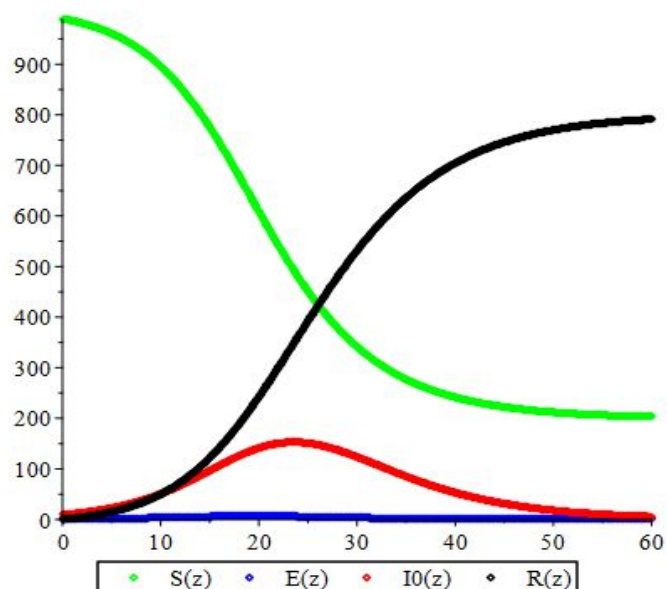
$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \frac{\beta IS}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - (\mu + a)E$$

$$\frac{dI}{dt} = aE - (\gamma + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R.$$

$$: R_0 = \frac{a}{\mu + a} \frac{\beta}{\mu + \gamma}.$$



SEIS

SEIS SEIR (.) ,

$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$

,

$S(t).$
 \vdots

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{N} - \mu S + \gamma I$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\epsilon + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\gamma + \mu)I$$

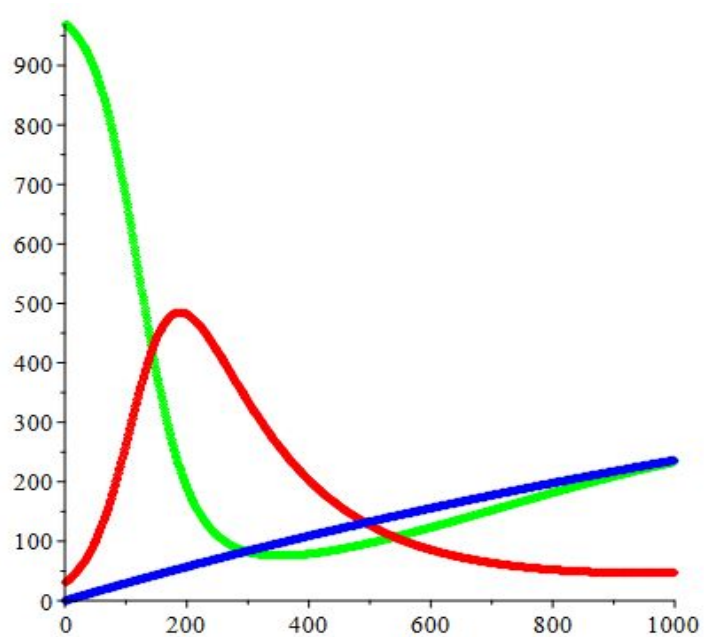
SIR^{*}

$$\frac{dS}{dt} = \nu N(1 - P) - \mu S - \beta \frac{I}{N} S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - (\mu + \gamma)I$$

$$\frac{dV}{dt} = \nu NP - \mu V$$

18, 94,4%



SIR,

(S (susceptible), I (Infected), R (removed))

, SIRS,

SIR

.

SIR.

Maple

,

.

,

.

Список литературы

- [1] Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of the Royal Society. 1927. No 115. P.700—721.
- [2] Брико Н.И.. Парадигма современной эпидемиологии // Журнал Меди-Аль. 2014. Т 3(13) , С. 8–36.
- [3] Братусь А.С., Новожилов А.С.,Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии М.: ФИЗМАТЛИТ. 2010. 151–177 с.
- [4] Gromov D. V., Bulla I., Romero-Severson E. O., Serea O. S. Numerical optimal control for HIV prevention with dynamic budget allocation // Mathematical Medicine and Biology. 2016. Vol. 35. No 4. P. 469-491.
- [5] Sharomi O., Malik T. Optimal control in epidemiology // Springer Science+Business Media New York. 2015. P. 3–5.
- [6] Ногин В. Д. Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое пособие — СПб: ЮТАС, 2008. 92 с.
- [7] D. BERNOULLI, An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it, reprint, Rev. Med. Virol., 14 2004, P. 275–288.
- [8] Shen J., Tang T., Wang L.-L. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications / Vol. 41 of Springer Series in Computational Mathematics — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. 472 p.
- [9] Михеева И.В., Герасимов А.Н., Салтыкова Т.С., Ермоленко М.В., Воронин Е.М. Применение математического моделирования для анализа вспышек ветряной оспы в детских организованных коллективах. // Эпидемиология и вакцинопрофилактика. 2013. Т. 1(68). С. 69–73.
- [10] Guerra, Fiona M.; Bolotin, Shelly; Lim, Gillian; Heffernan, Jane; Deeks, Shelley L.; Li, Ye; Crowcroft, Natasha S. The basic reproduction number

- (R0) of measles: a systematic review. // The Lancet Infectious Diseases. 2017. Vol. 17. No. 12. P. 420–428.
- [11] Ferguson N.M. Strategies for mitigating an influenza pandemic. // Nature. 2006. Vol. 42 No. 7101 P. 448—452.
- [12] Berrut J-P., Trefethen L. N. Barycentric Lagrange interpolation. // SIAM Review. 2004. Vol. 46. No 3. P. 501–517.
- [13] Гуменюк А.С., Выпускная квалификационная работа: «Разработка программного комплекса для численной идентификации эпидемиологических моделей на основе данных наблюдений». Факультет ПМ-ПУ, СПбГУ, 2020.
- [14] Андерсон Р., Мэй Р. Инфекционные болезни человека. Динамика и контроль. М.: Научный мир, 2004. 784 с.