



Identificarea modelelor circuitelor electrice pentru semnalele de tip treapta și impuls

9-Noiembrie-2021

Coordonator: Prof.univ.dr.ing. Petru DOBRA

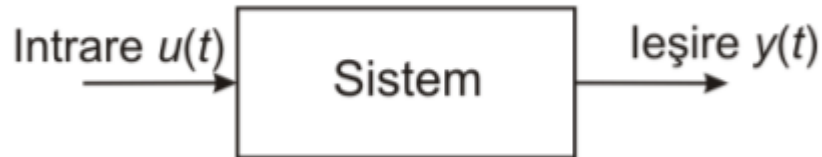
Student: Călbează Mihaela-Maria, 30135

AIA-romana

Cuprins

Introducere	3
Obținerea datelor experimentale	4
Achiziția datelor de intrare-ieșire	5
Desfășurarea experimentului	6
DATE DE INTRARE:	7
A. Răspunsul la impuls.....	7
A.1. Aspecte teoretice.....	7
A.2. Identificarea unui sistem de ordin 2.....	8
A.2.1 Factorul de proporționalitate (K).....	10
A.2.2. Factorul de amortizare (ζ).....	11
A.2.3. Pulsația naturală de oscilație (ω_n)	13
A.3. Simularea în condiții nenule și validarea:	14
B. Răspunsul la treaptă	16
B.1. Aspecte teoretice	16
B.2. Identificarea unui sistem de ordin 2:	16
B.2.1 Factorul de proporționalitate (K)	18
B.2.2. Factorul de amortizare (ζ).....	20
B.2.3. Pulsația naturală de oscilație (ω_n).....	21
B.3. Simularea în condiții nenule și validarea	22
C. Simularea modelului de la treaptă cu datele de la impuls	24
D. Simularea modelului de la impuls cu datele de la treaptă	25

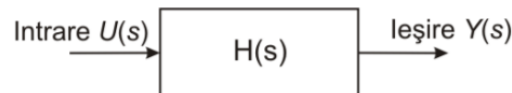
Introducere



Un sistem este liniar dacă satisface principiile de:

Superpoziție: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u_1(t)$ cu ieșirea $y_1(t)$; și la $u_2(t)$ cu ieșirea $y_2(t)$ atunci la intrarea $u_1(t) + u_2(t)$ va răspunde cu ieșirea $y_1(t) + y_2(t)$.

Omogenitate: Dacă sistemul răspunde la intrarea $u(t)$ cu ieșirea $y(t)$; atunci la $\alpha u(t)$ va răspunde cu $\alpha y(t)$.



Funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m \leq n$$

$U(s)$ și $Y(s)$ sunt transformatele Laplace ale semnalelor de intrare, ieșire în domeniul timp $u(t)$, $y(t)$ în condiții inițiale nule.

Transformata Laplace a unui semnal $f(t)$ este:

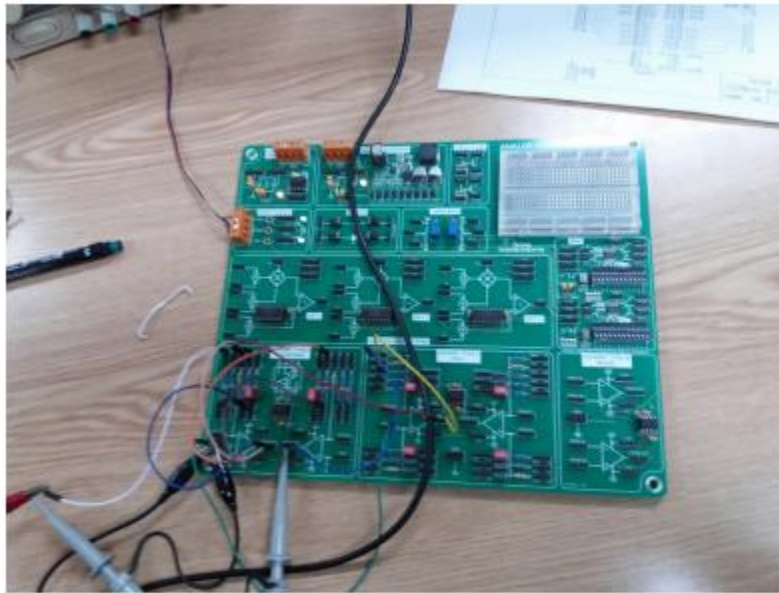
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Obținerea datelor experimentale

Se considera circuitul electric din figura 1.1, având următoarele caracteristici electrice:

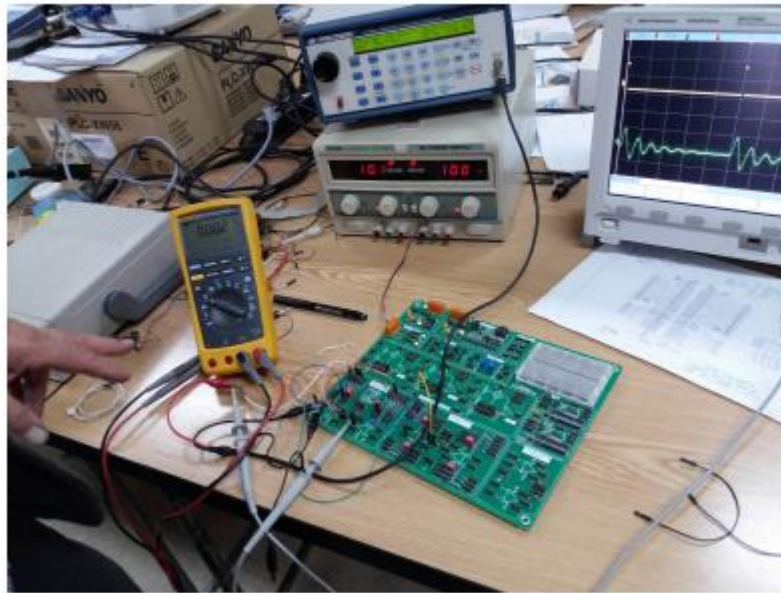
$$U_a = \pm 10 \text{ V}$$

$$U_{in} \in [-U_a, U_a] ; U_{out} \in [-U_a, U_a]$$



Figură 1: Circuit electric

Aparatura utilizata: sursa de alimentare, multimetru, generator de semnal, osciloscop (Figura 2):



Figură 2

Achiziția datelor de intrare-ieșire

Utilizând aparatura din dotare se vor genera semnalele necesare identificării experimentale a circuitului electric și se vor achiziționa datele intrare-ieșire în vederea procesării ulterioare.

Desfășurarea experimentului

1. Se alimentează circuitul.
2. Se efectuează următoarele experimente:

Experiment A

A.1 Se generează un semnal de tip impuls având caracteristicile corelate cu dinamica circuitului electric și tensiunea de alimentare a acestuia;

A.2 Se vizualizează și se măsoară sincron intrarea și ieșirea circuitului, obținând datele experimentale: $[t_k, u_k, y_k] \quad k = 1, 2, \dots$.

Experiment B

B.1 Se generează un semnal de tip treaptă având caracteristicile corelate cu dinamica circuitului electric și tensiunea de alimentare a acestuia;

B.2 Se vizualizează și se măsoară sincron intrarea și ieșirea circuitului, obținând datele experimentale: $[t_k, u_k, y_k] \quad k = 1, 2, \dots$.

DATE DE INTRARE:

IMPULS: scope228

TREAPTA: scope227

Pentru realizarea acestui proiect am utilizat MATLAB, ca urmare graficele sunt făcute in MATLAB

A. Răspunsul la impuls

A.1. Aspecte teoretice

În procesarea semnalelor, răspunsul la impuls sau funcția de răspuns la impuls (IRF) a unui sistem dinamic este ieșirea acestuia atunci când este reprezentat ca un scurt semnal de intrare, numit impuls. În general, un răspuns la impuls este reacția oricărui sistem dinamic ca răspuns la o schimbare externă. În ambele cazuri, răspunsul la impuls descrie reacția sistemului la o funcție de timp (sau eventual ca o funcție a unei alte variabile independente care parametrizează comportamentul dinamic al sistemului).

În toate aceste cazuri, sistemul dinamic și răspunsul său la impuls pot fi obiecte fizice reale sau pot fi sisteme matematice de ecuații care descriu astfel de obiecte.

Deoarece funcția de impuls conține toate frecvențele, răspunsul la impuls definește răspunsul unui sistem liniar invariant (LTI) în timp pentru toate frecvențele.

Printre cele mai comune metode neparametrice de identificare se regăsește și identificarea unui sistem pe baza răspunsului la semnalul de tip impuls.

Am considerat aceasta metoda pentru sistemul de ordin II, cu 2 poli complex-conjugați

Definiție: Se poate spune despre un semnal ca e de tip impuls dacă, în afara unui interval suficient de mic, este constant, iar aria acestuia este unitara.

A.2. Identificarea unui sistem de ordin 2 folosind o intrare de tip impuls

$$H(s) = \frac{k * \omega_n^2}{s^2 + 2 * \zeta * \omega_n * s + \omega_n^2}, 0 \leq \zeta < 1$$

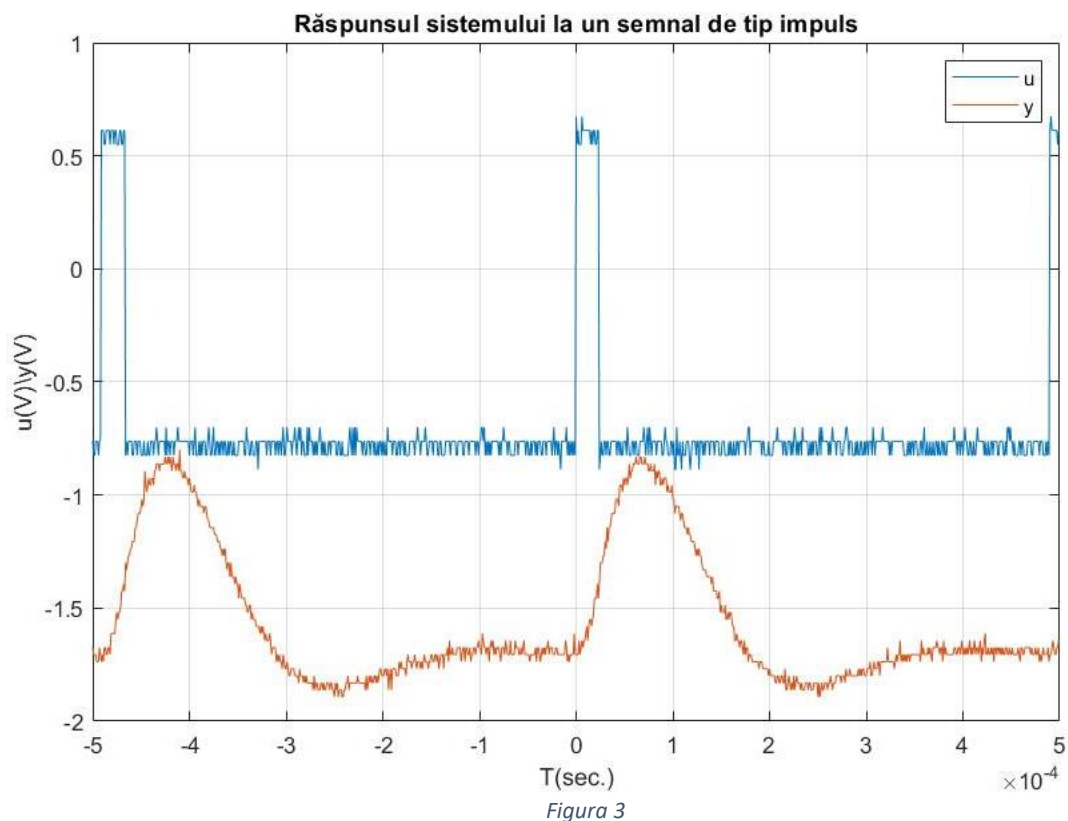
funcția de transfer a unui sistem LTI cu poli complex-conjugăți

Parametrii necesari identificării:

- Factorul de proporționalitate (K)
- Factorul de amortizare (ζ)
- Pulsația naturală de oscilație (ω_n [rad/sec])

Răspunsul sistemului la impuls Dirac este:

$$y(t) = k \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta * \omega_n * t} \sin(\omega_n * t * \sqrt{1-\zeta^2}), t \geq 0$$



A.2.1 Factorul de proporționalitate (K)

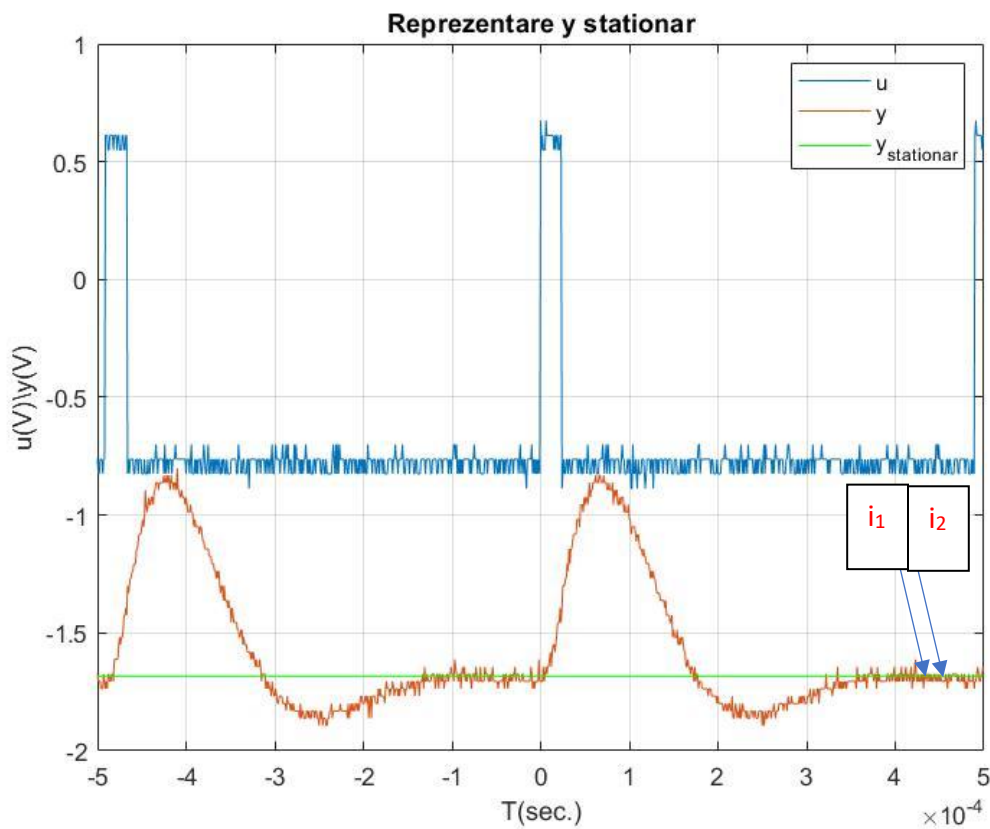
Factorul de proporționalitate este dat de raportul intrare-ieșire în regim staționar, datorită zgomotului de măsură este necesară o alegere cu atenție a valorilor inițiale și staționare.

$$k = \frac{\overline{y_{st}}}{\overline{u_{st}}}$$

Fiecare termen din formula precedentă reprezintă o valoare medie luată pe un interval adecvat

Alegerea punctelor în regim staționar: $i_1=937$, $i_2=950$

ust = -0.7714
yst = -1.6906
k = 2.1916



Figură 4

A.2.2. Factorul de amortizare (ζ)

Pentru a identifica valoarea factorului de amortizare, este necesară estimarea suprareglajului.

Datorită faptului că răspunsul la impuls poate fi privit ca derivata răspunsului la intrarea de tip treaptă se poate demonstra utilizând următoarea relație, folosind metoda dreptunghiului:

$$\sigma = \frac{\int_{t_1}^{t_2} |y(t) - \overline{y_{st}}| dt}{\int_{t_0}^{t_1} y(t) - \overline{y_{st}} dt} = \frac{A_-}{A_+}$$

t_0 - momentul finalizării impulsului

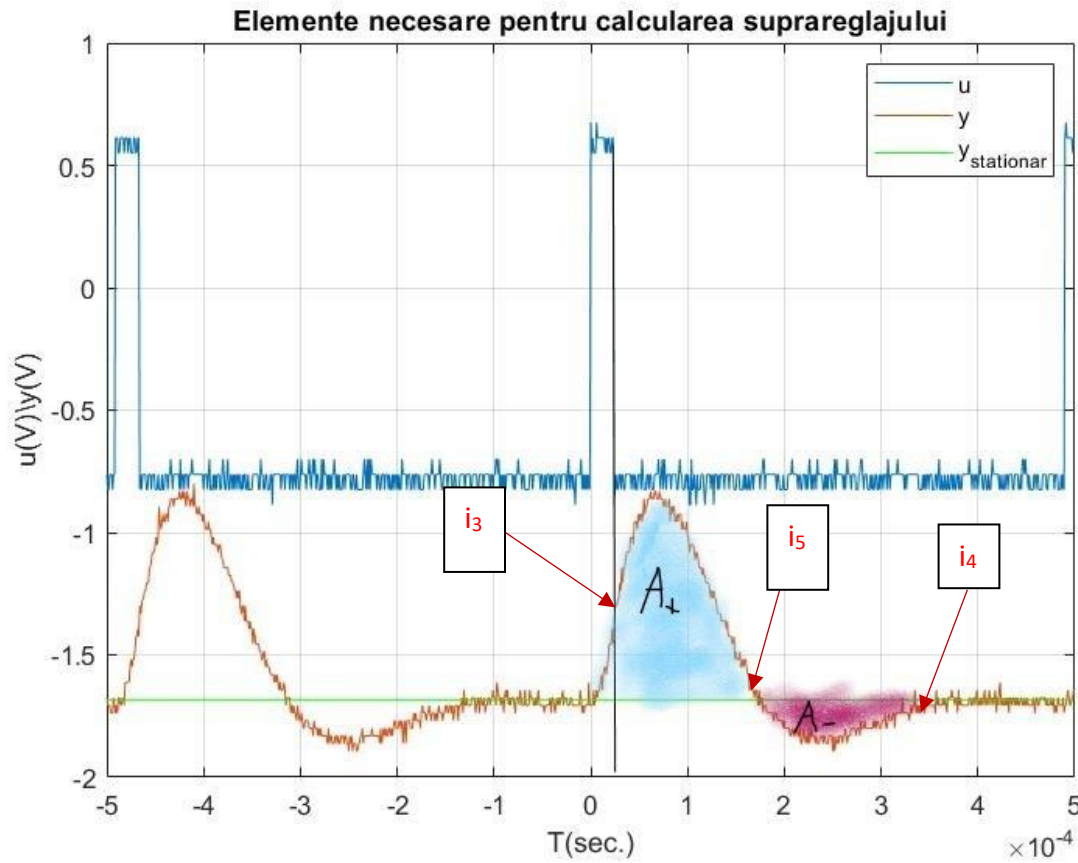
t_1, t_2 - momentele primelor două treceri prin valoarea staționară

A_+, A_- - ariile răspunsului la impuls față de valoarea staționară

Pe baza formulei analitice a dependenței dintre factorul de amortizare (ζ) și suprareglaj, pentru sistemul nostru de ordin 2 descris prin funcția de transfer, se poate utiliza următoarea formulă:

$$\sigma = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta = \frac{-\ln(\sigma)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\sigma)}}$$

În Figura 3 am evidențiat răspunsul pe frontul descrescător al semnalului și cele 2 arii pozitive și negative împreună cu valorile maxime, respectiv minime



Figură 5

$$A_+ = 8.1313e-05$$

$$A_- = 1.6688e-05$$

Factorul de amortizare determină forma răspunsului:

$\zeta = 0 \Rightarrow$ răspuns neamortizat

ζ cuprins în intervalul $(0,1) \Rightarrow$ subamortizat (valori pentru ζ mici duc la oscilații mai mari)

$\zeta = 1 \Rightarrow$ critic amortizat

$\zeta > 1 \Rightarrow$ supraamortizat

$t(2)-t(1)$ – perioada de achiziție

$$\text{suprareglaj} = 0.2052 \Rightarrow 20\%$$

$$\text{factor_amortizare} = 0.4501 \Rightarrow \text{subamortizat}$$

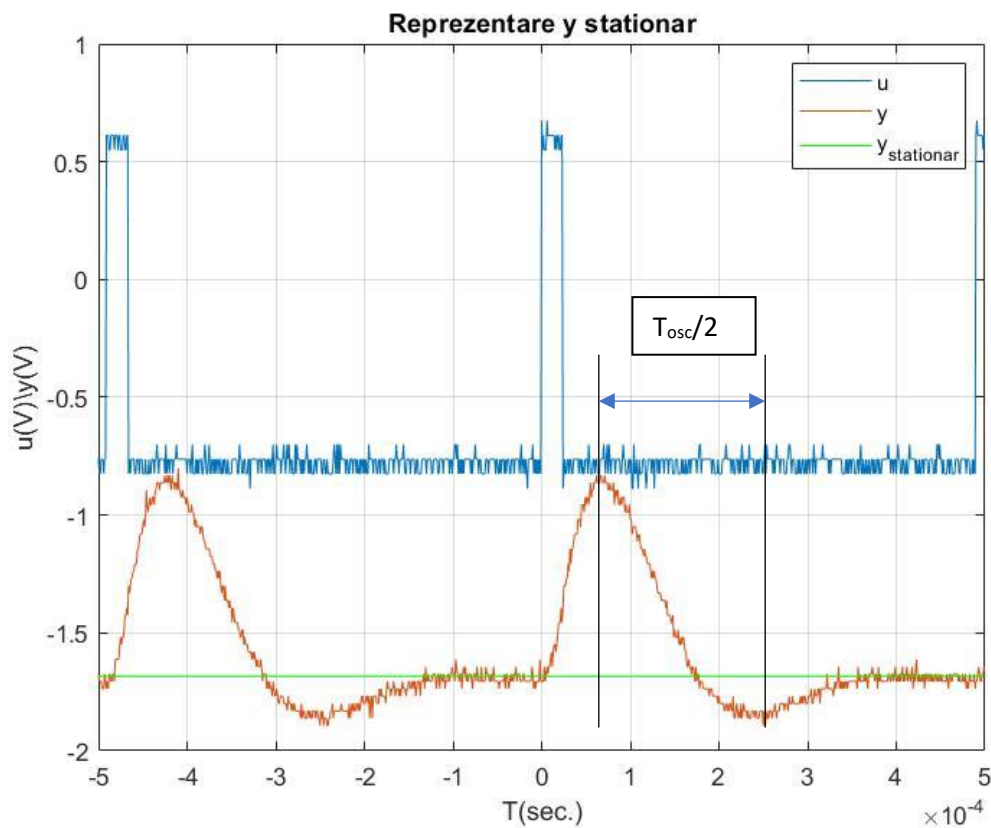
A.2.3. Pulsația naturală de oscilație (ω_n)

Pentru identificare pulsației naturale de oscilație am folosit legătura cu

pulsația de oscilație și perioada de oscilație : $\omega_n = \frac{\omega_{osc}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

i_4, i_5 - momentele corespunzătoare primelor 2 vârfuri

$$\omega_{osc} = \frac{2\pi}{T_{osc}} = \frac{2\pi}{i_4 - i_3} \Rightarrow \omega_{osc} = \frac{\pi}{(i_4 - i_3)} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_{osc}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



Figură 6

tosc = 3.3400e-04

wosc = 1.8812e+04

wn = 2.1067e+04

A.3. Simularea în condiții nenule și validarea:

Pentru simularea răspunsului la intrare de tip impuls în condiții nenule este necesar modelul matematic de tip spațiul stărilor.

$$H_f(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2 * \omega_n * \zeta * s + \omega_n^2}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n}{s^2 + 2 * \omega_n * \zeta * s + \omega_n^2}$$

$$Y(s) * (s^2 + 2 * \omega_n * \zeta * s + \omega_n^2) = U(s) * \omega_n$$

Aplic inversa transformatei Laplace și rezulta:

$$\ddot{y}(t) + 2 * \omega_n * \zeta * \dot{y}(t) + \omega_n^2 * y(t) = u(s) * \omega_n$$

Notăm:
$$\begin{aligned} x(1) &= y(t) & \dot{x}(1) &= x(2) \\ x(2) &= \dot{y}(t) & \dot{x}(2) &= -2 * \omega_n * \zeta * x(2) - \omega_n^2 * x(1) - u(s) * k * \omega_n \end{aligned}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2 * \omega_n * \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4.4381e+08 & -0.0002e+04 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ k * \omega_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9.7264e+08 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

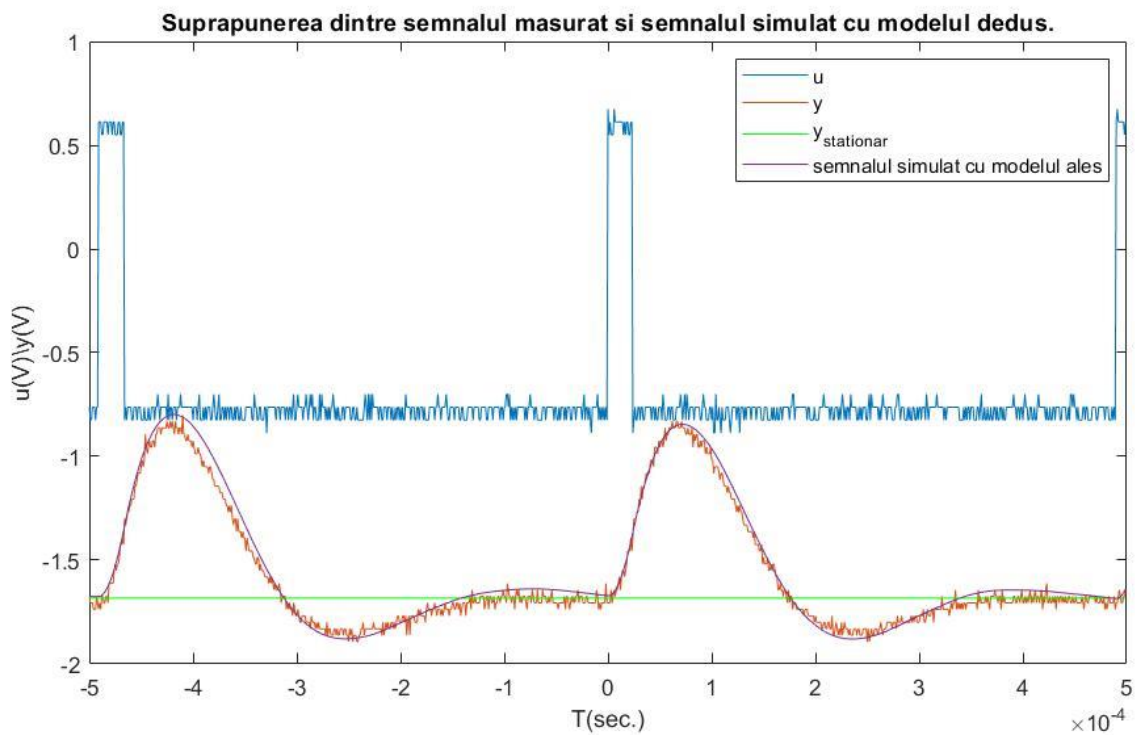
Validarea rezultatelor se realizează folosind următorii indici de performanță:

$$\text{Eroarea medie pătratică: } J = \|y - y_{sim}\| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (y - y_{sim})^2}$$

$$\text{Eroarea medie pătratică relativă (\%): } \varepsilon_{MPN} = \frac{\|y - y_{sim}\|}{\|y - \bar{y}\|}$$

Eroare medie pătratică este utila pentru a face o comparație între mai multe modele obținute pe același set de date

Eroarea medie pătratică relativă se exprima în procente și este mai sugestivă pentru prezentarea unui model dedus chiar și din măsurătorile diferite ale aceluiași proces.



Figură 8

$J = 0.0354$

$e_{\text{MIN}} = 0.0791 \Rightarrow 7.9\%$

B. Răspunsul la treaptă

B.1. Aspecte teoretice

Printre cele mai comune metode neparametrice de identificare se regăsește și identificarea unui sistem pe baza răspunsului la semnalul de tip treaptă.

B.2. Identificarea unui sistem de ordin 2 folosind o intrare de tip treaptă:

$$H(s) = \frac{k * \omega_n^2}{s^2 + 2 * \zeta * \omega_n * s + \omega_n^2}, 0 \leq \zeta < 1$$

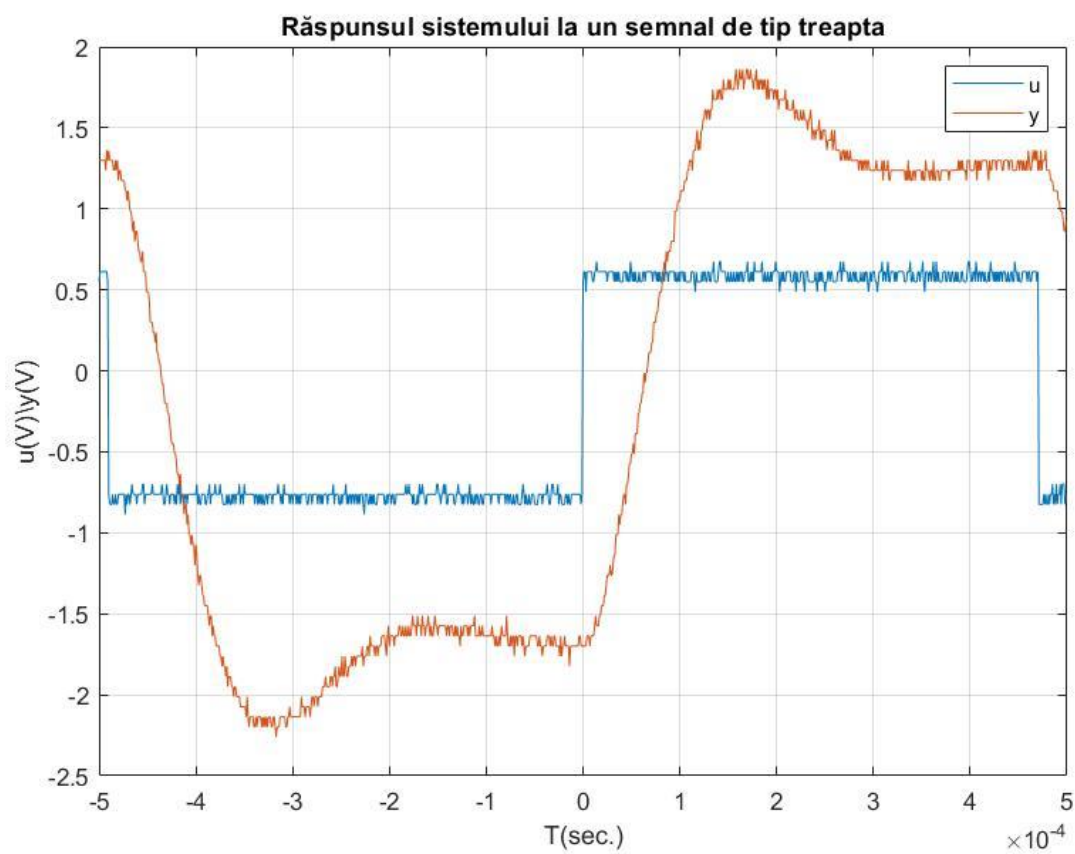
funcția de transfer a unui sistem LTI cu poli complex-conjugăți

Parametrii necesari identificării:

- Factorul de proporționalitate (K)
- Factorul de amortizare (ζ)
- Pulsația naturală de oscilație (ω_n [rad/sec])

Răspunsul sistemului la treaptă Heaviside este:

$$y(t) = k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta * \omega_n * t} \sin \left(\omega_n * t * \sqrt{1-\zeta^2} + \cos^{-1}(\zeta) \right) \right), t \geq 0$$



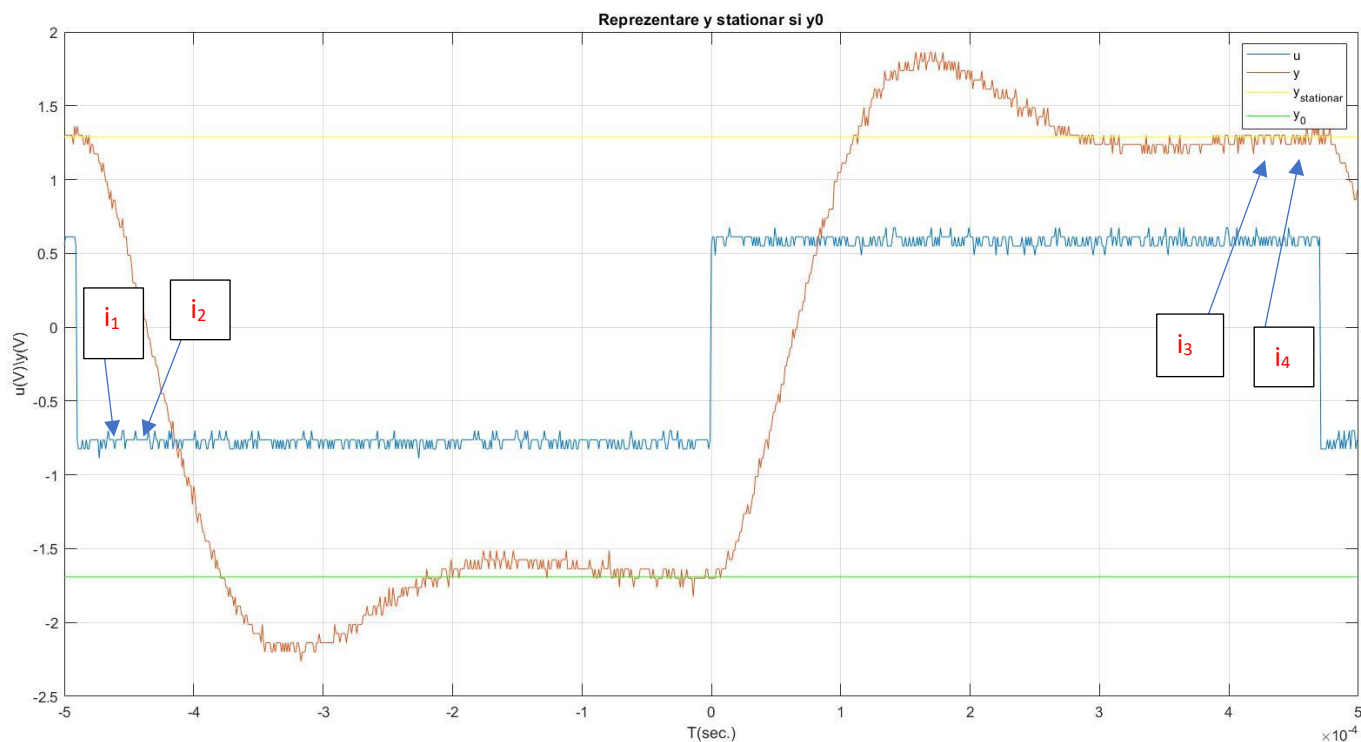
Figură 9

B.2.1 Factorul de proporționalitate (K)

Factorul de proporționalitate este dat de raportul dintre intrare și ieșire în regim staționar și condiții inițiale nenule.

În general treapta nu este ideală iar raportul devine variația dintre intrare și ieșire, dar, în prezența zgomotului de măsură, necesită o alegere atentă a valorilor inițiale (i_1, i_2) și staționare (i_3, i_4):

$$k = \frac{\overline{y_{st}} - \overline{y_0}}{\overline{u_{st}} - \overline{u_0}}$$



Figură 10

i1=453;

i2=488;

i3=924;

i4=944;

yst = 1.2881

y0 = -1.6913

ust = 0.5857

u0 = -0.7781

k = 2.1846

B.2.2. Factorul de amortizare (ζ)

Pentru a identifica valoarea factorului de amortizare, este necesara estimarea suprareglajului.

$$\sigma = \frac{\overline{y_{\max}} - \overline{y_0}}{\overline{y_{st}} - \overline{y_0}}$$

Pe baza formulei analitice a dependenței suprareglajului și factorului de amortizare pentru sistemul descris prin funcția de gradul 2 de mai sus:

$$\sigma = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta = \frac{|\ln(\sigma)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\sigma)}}$$

Factorul de amortizare determină forma răspunsului:

$\zeta = 0 \Rightarrow$ răspuns neamortizat

ζ cuprins în intervalul (0,1) \Rightarrow subamortizat (valori pentru ζ mici duc la oscilații mai mari)

$\zeta = 1 \Rightarrow$ critic amortizat

$\zeta > 1 \Rightarrow$ supraamortizat

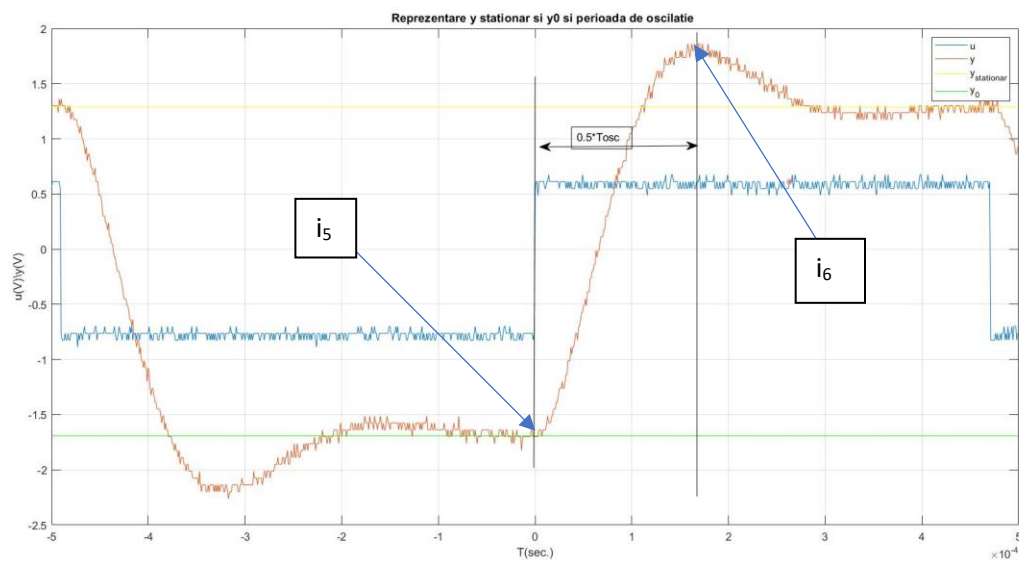
suprareglaj = 0.1928 \Rightarrow 19%

factor_amortizare = 0.4641

B.2.3. Pulsația naturala de oscilație (ω_n)

Pentru a identifica pulsația naturala de oscilație (ω_n) se poate utiliza pulsația oscilațiilor ω_{osc} care este data de modul sistemului:

$$\omega_{osc} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_{osc}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



Figură 11

i5=497;
i6=666;

Tosc = 3.3800e-04

wosc = 1.8589e+04

wn = 2.0987e+04

B.3. Simularea în condiții nenule și validarea

Pentru simularea răspunsului la intrare de tip treapta în condiții inițiale nenule este necesar modelul matematic de tip spațiul stărilor.

$$H_f(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2 * \omega_n * \zeta * s + \omega_n^2}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n}{s^2 + 2 * \omega_n * \zeta * s + \omega_n^2}$$

$$Y(s) * (s^2 + 2 * \omega_n * \zeta * s + \omega_n^2) = U(s) * \omega_n$$

Aplic inversa transformatei Laplace și rezulta:

$$\ddot{y}(t) + 2 * \omega_n * \zeta * \dot{y}(t) + \omega_n^2 * y(t) = u(s) * \omega_n$$

$$\text{Notam: } \begin{matrix} x(1) = y(t) \\ x(2) = \dot{y}(t) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}(1) = x(2) \\ \dot{x}(2) = -2 * \omega_n * \zeta * x(2) - \omega_n^2 * x(1) - u(s) * k * \omega_n \end{matrix}$$

$$y = (1 \ 0) \dot{x} + (0)u$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2 * \omega_n * \zeta \end{pmatrix} = 1.0e+08 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4.4044 & -0.0002 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ k * \omega_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9.6218e+08 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0) \quad D = 0$$

Validarea rezultatelor se realizează folosind următorii indici de performanță:

$$\text{Eroarea medie pătratică: } J = \|y - y_{sim}\| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (y - y_{sim})^2}$$

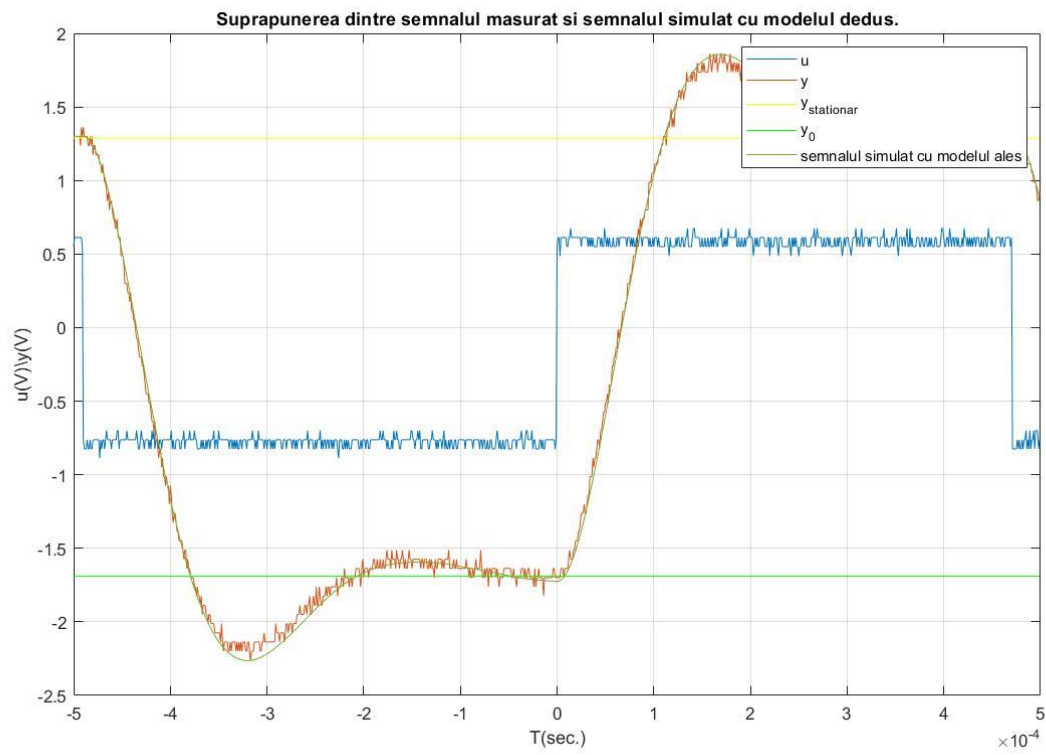
$$\text{Eroarea medie pătratică relativă (%): } \varepsilon_{MPN} = \frac{\|y - y_{sim}\|}{\|y - y\|}$$

Eroarea medie pătratică este utilă pentru a face o comparație între mai multe modele obținute pe același set de date

Eroarea medie pătratică relativă se exprimă în procente și este mai sugestivă pentru prezentarea unui model dedus chiar și din măsurătorile diferite ale aceluiași proces.

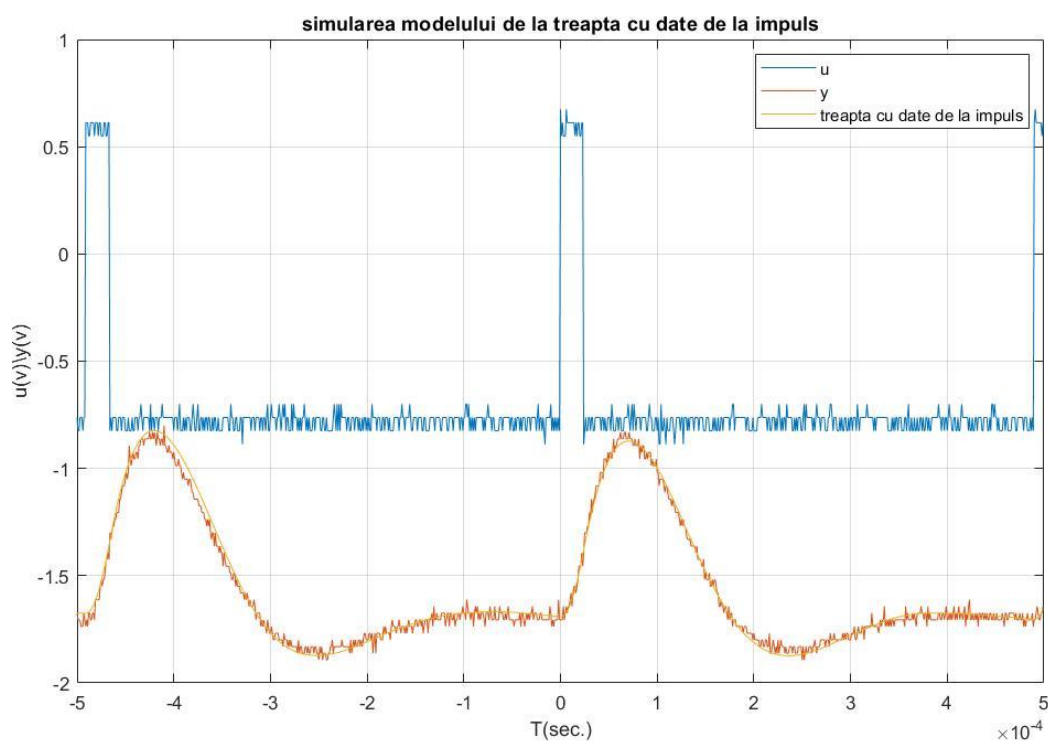
$$J = 0.0547$$

$$e_{\text{MIN}} = 0.0213 \Rightarrow 2.1\%$$



Figură 12

C. Simularea modelului de la treaptă cu datele de la impuls

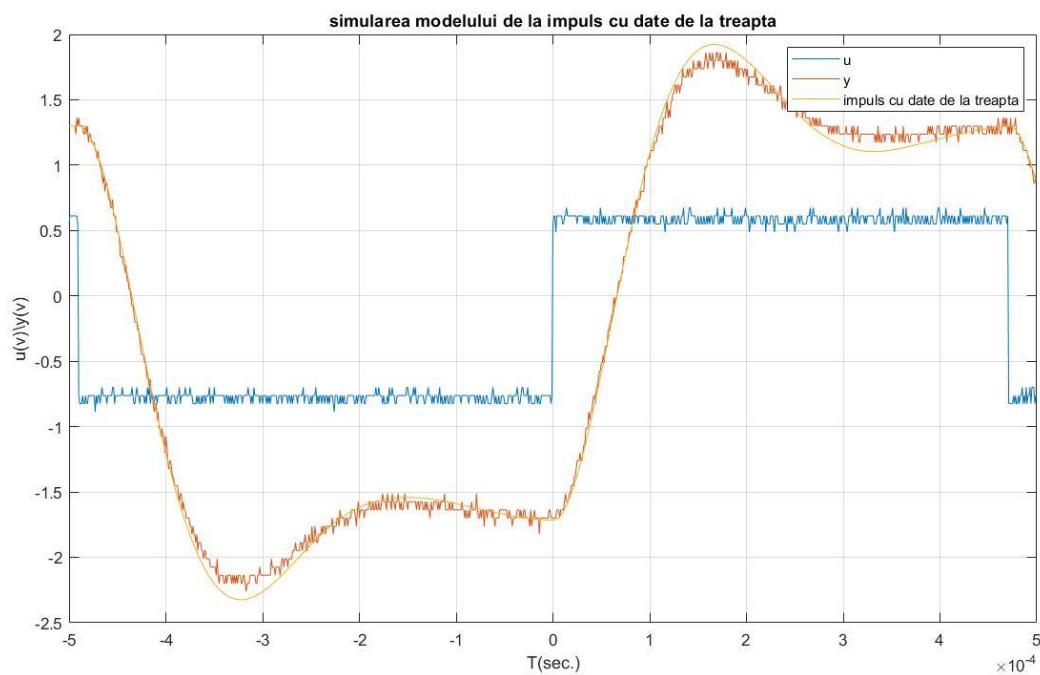


Figură 13

$$\mathbf{J_nou = 0.0307}$$

$$\mathbf{eMIN_nou = 0.0685 \Rightarrow 6.8\%}$$

D. Simularea modelului de la impuls cu datele de la treaptă



Figură 14

$$\mathbf{J_nou = 0.0669}$$

$$\mathbf{eMIN_nou = 0.0260 \Rightarrow 2.6\%}$$

Treaptă	Impuls	Încrucișare Treaptă-Impuls	Încrucișare Impuls-Treaptă
eMIN = 0.0213 => 2.1%	eMIN = 0.0791 => 7.9%	eMIN_nou = 0.0685 => 6.8%	eMIN_nou = 0.0260 => 2.6%