Bazele electrotehnicii
Tema 2

Constantin Mihai
311 CD

Facultatea de Automatică şi Calculatoare
`mihai.constantin98@gmail.com`

13 iunie 2018

Cuprins

Enunţ

1. **Rezolvarea circuitelor de c.a.**
   În problema de circuit (fără surse comandate) pe care aţi inventat-o la tema 1
   a)

   - Adăugaţi în serie cu un rezistor $R_1 > 0$ o bobină cu inductivitatea $L = x*100/\pi$ mH, unde x este egală numeric cu R_1.
   - Adăugaţi în paralel cu un rezistor $R_2 > 0$ un condensator cu capacitatea $C = y * 100/\pi$ μF, unde y este egală numeric cu R_2.
   - Consideraţi $f = 50$ Hz.
   - Schimbaţi toate sursele independente în surse sinusoidale, cu frecvenţă f şi expresia $x(t) = X\sqrt{2}sin(\omega t + \varphi)$, unde X este valoarea pe care o avusese sursa în c.c., iar pentru φ alegeţi valori diferite din mulţimea $\{0, \pm\pi/2, \pm\pi/4\}$.
   - Desenaţi reprezentarea în complex a circuitului.
   - Aplicaţi aceeaşi metodă de rezolvare pe care aţi folosit-o la tema 1 şi scrieţi sistemul de ecuaţii de rezolvat în complex.
   - Scrieţi un mic program Matlab/Octave pentru rezolvarea acestei probleme.

   b) Completaţi codul cu instrucţiuni pentru verificarea bilanţului de puteri în complex.

   c) Ilustraţi trecerea în timp a mărimilor complexe pentru una din mărimile obţinute.

2. **Rezolvarea circuitelor în regim tranzitoriu**
   În problema de circuit (fără surse comandate) pe care aţi inventat-o la tema 1
   a)

   - Adăugaţi în serie cu un rezistor $R_1 > 0$ o bobină cu inductivitatea $L = x*100/\pi$ mH, unde x este egală numeric cu R_1 (puteţi păstra aceeaşi bobină ca la punctul 1).
   - Adăugaţi în paralel cu un rezistor $R_2 > 0$ un condensator cu capacitatea $C = y * 100/\pi$ μF, unde y este egală numeric cu R_2 (puteţi păstra acelaşi condensator ca la punctul 1).
   - Presupuneţi că la momentul $t = 0$ apare un "defect" şi se rupe o latură din circuit, alta decât cea pe care aţi înseriat bobina sau cea cu care aţi conectat în paralel condensatorul.

- Desenaţi schema în operaţional a circuitului.
- Scrieţi sistemul de rezolvat şi rezolvaţi-l simbolic într-un mediu potrivit (Matlab, Octave).

b) Analizaţi starea finală şi verificaţi teoremele valorilor iniţiale şi finale.

c) Calculaţi expresia instantanee a uneia dintre cele două variabile de stare şi reprezentaţi-o grafic.

3. Calculul şi reprezentarea unui câmp electric

- Alegeţi o distribuţie de sarcină care să depindă numai de rază într-un sistem de coordonate sferic.

$$\rho(r,\theta,\phi) = \begin{cases} f(r),\ r \in \big[0,a\big] \\ 0,\ r > a \end{cases}$$

Alegeţi expresia $f(r)$ cum doriţi în afară de o funcţie constantă.

a) Calculaţi vectorul inducţiei electrice $\overline{D}$, folosind legea fluxului magnetic.
b) Reprezentaţi spectrul lui $\overline{D}$.
c) Reprezentaţi echivalori ale $\mid \overline{D} \mid$.

1 Rezolvarea circuitelor de c.a.

1.1 Subpunctul a)

Am folosit circuitul inventat la tema 1, la care am adăugat o bobină în serie cu rezistorul R_1 şi un condensator în paralel cu rezistorul R_4. Circuitul nou format este reprezentat în Fig. 1.

Valorile elementelor de circuit sunt:

$$\begin{cases} R_1 &= 6\Omega \\ R_2 &= 2\Omega \\ R_3 &= 1\Omega \\ R_4 &= 1\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} J_1 &= -6\,\mathrm{A} \\ J_2 &= 2\,\mathrm{A} \\ J_3 &= 3\,\mathrm{A} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_1 &= -2\,\mathrm{V} \\ E_2 &= 4\,\mathrm{V} \end{cases}$$

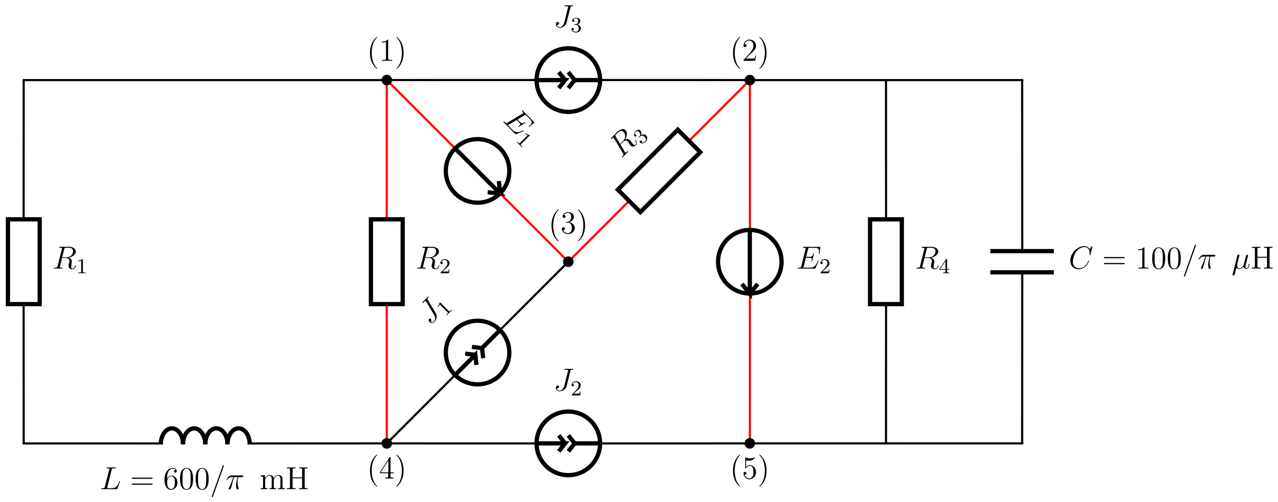


Figura 1: Graful circuitului.

Am calculat valoarea inductivităţii L şi a capacităţii C:

$$\begin{cases} L &= \frac{R_1 * 100}{\pi}\ mH = \frac{600}{\pi}\ mH \\ C &= \frac{R_4 * 100}{\pi}\ \mu F = \frac{100}{\pi}\ \mu F \end{cases}$$

Deoarece valoarea frecvenţei f este egală cu 50 Hz $\Rightarrow \omega = 2\pi f = 100\pi$

Am trecut mărimile în regim sinusoidal şi am obţinut următoarele rezultate:

$$\begin{cases} j_1(t) &= -6\sqrt{2}sin(100\pi t - \frac{\pi}{2}) = -6e^{-\frac{j\pi}{2}} = -6[cos(-\frac{\pi}{2}) + jsin(-\frac{\pi}{2})] = 6j \\ j_2(t) &= 2\sqrt{2}sin(100\pi t + \frac{\pi}{4}) = 2e^{\frac{j\pi}{4}} = 2[cos(\frac{\pi}{4}) + jsin(\frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}(1+j) \\ j_3(t) &= 3\sqrt{2}sin(100\pi t - \frac{\pi}{4}) = 3e^{-\frac{j\pi}{4}} = 3[cos(-\frac{\pi}{4}) + jsin(-\frac{\pi}{4})] = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1(t) &= -2\sqrt{2}sin(100\pi t + 0) = -2e^{j*0} = -2 \\ e_2(t) &= 4\sqrt{2}sin(100\pi t + \frac{\pi}{2}) = 4e^{\frac{j\pi}{2}} = 4[cos(\frac{\pi}{2}) + jsin(\frac{\pi}{2})] = 4j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{z_{R_1}} &= R_1 = 6\Omega \\ \underline{z_{R_2}} &= R_2 = 2\Omega \\ \underline{z_{R_3}} &= R_3 = 1\Omega \\ \underline{z_{R_4}} &= R_4 = 1\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{z_L} &= j\omega L = 60j \\ \underline{z_C} &= -\frac{j}{\omega C} = -100j \end{cases}$$

Reprezentarea în complex a circuitului este realizată în Fig. 2.

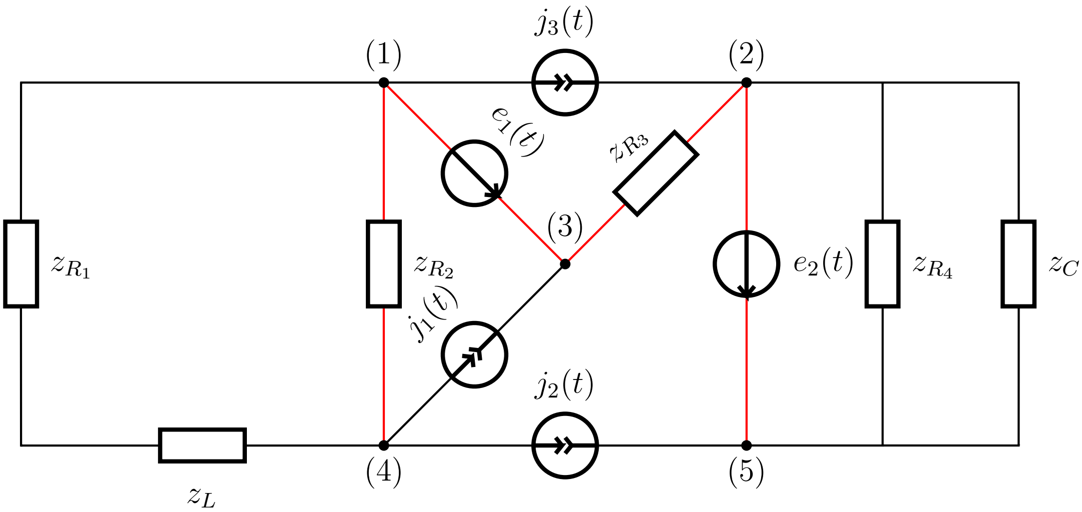


Figura 2: Circuitul în complex.

$$z_s = z_{R_1} + z_L = 6 + 60j$$

$$z_{p_1} = \frac{z_s * z_{R_2}}{z_s + z_{R_2}} = \frac{(6+60j)*2}{8+60j} = \frac{456+15j}{229}$$

$$z_{p_2} = \frac{z_{R_4} * z_C}{z_{R_4} + z_C} = \frac{-100j}{1-100j} = \frac{10^4-100j}{10^4+1}$$

Circuitul devine:

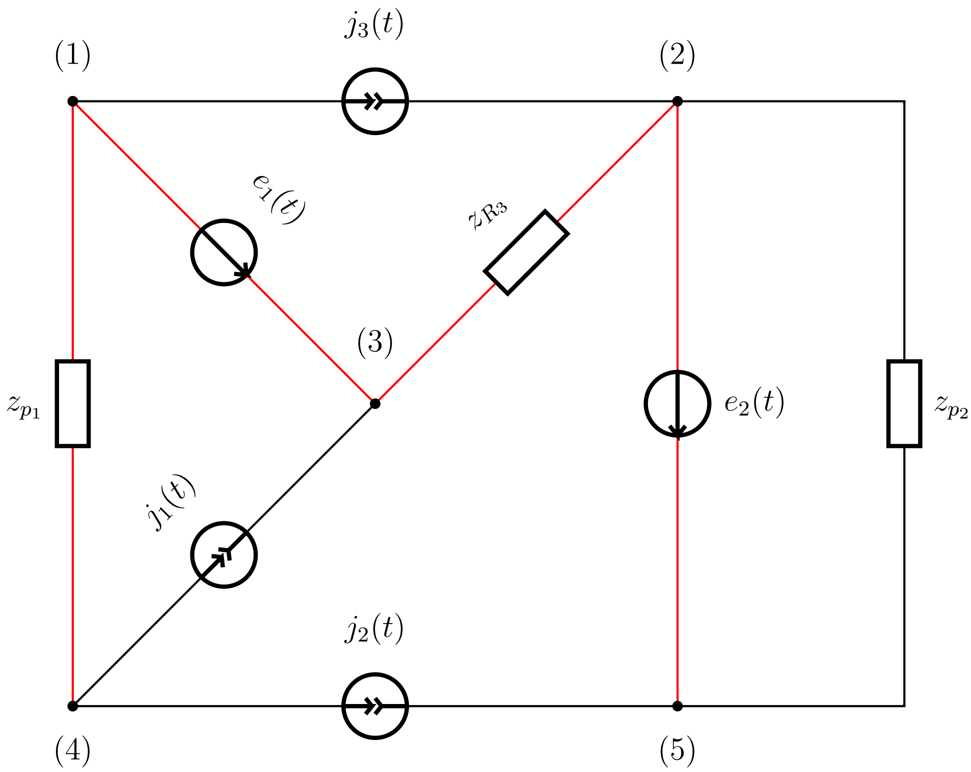


Figura 3: Circuitul în complex.

Am aplicat metoda ***Kirchhoff+***. Topologia circuitului este:

$$\begin{cases} N &= 5 & \textit{noduri} \\ L &= 8 & \textit{laturi} \end{cases}$$

Graful intensităţilor este reprezentat în Fig. 4.

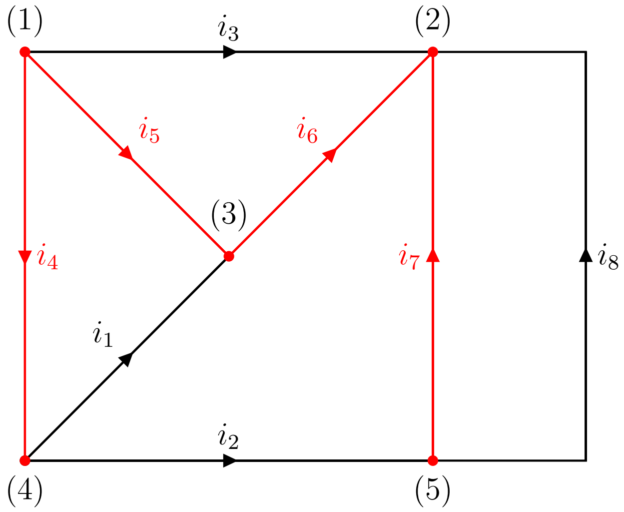


Figura 4: Graful de intensităţi.

Graful tensiunilor este reprezentat în Fig. 5.

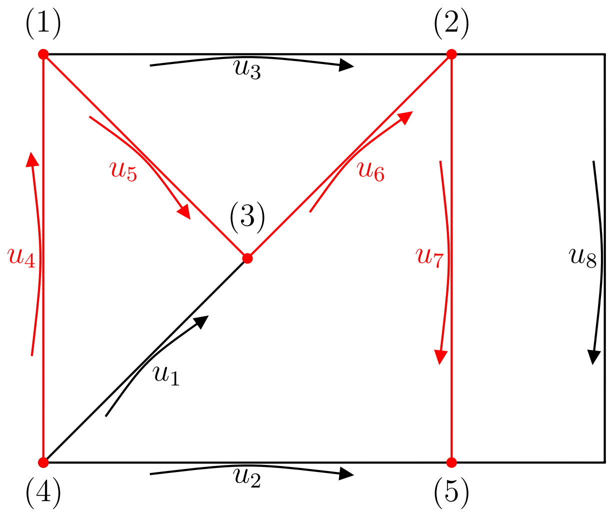


Figura 5: Graful de tensiuni.

Aplicând legea II a lui Kirchhoff pe fiecare buclă din sistemul fundamental, au rezultat $L - N + 1 = 4$ ecuaţii din care am aflat tensiunile de pe coarde:

$$\begin{cases} i_4 z_{p_1} + u_1 &= -e_1(t) \\ i_6 z_{R_3} - u_3 &= e_1(t) \\ -i_6 z_{R_3} + i_4 z_{p_1} + u_2 &= -e_1(t) - e_2(t) \\ i_8 z_{p_2} &= e_2(t) \end{cases}$$

Folosind notaţia standard pentru un sistem de ecuaţii algebrice liniare $\boldsymbol{Ax{=}b}$, am obţinut următoarea egalitate:

$$\begin{pmatrix} z_{p_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_8 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2(t) \\ -i_4 z_{p_1} - e_1(t) \\ i_6 z_{R_3} - i_4 z_{p_1} - e_1(t) - e_2(t) \\ i_6 z_{R_3} - e_1(t) \end{pmatrix},$$

unde matricea coeficienţilor A are dimensiunea (4×4), iar vectorul necunoscutelor şi cel al termenilor liberi au dimensiunea (4×1).

Soluţia sistemului este:

$$\begin{cases} i_8 &= -0.04 + 4j \\ u_1 &= -0.33043 - 14.85631j \\ u_2 &= -3.86596 - 18.14920j \\ u_3 &= -1.53553 + 0.70711j \end{cases}$$

```
A =

   0.99990 - 0.01000i   0.00000 + 0.00000i   0.00000 + 0.00000i   0.00000 + 0.00000i
   0.00000 + 0.00000i   1.00000 + 0.00000i   0.00000 + 0.00000i   0.00000 + 0.00000i
   0.00000 + 0.00000i   0.00000 + 0.00000i   1.00000 + 0.00000i   0.00000 + 0.00000i
   0.00000 + 0.00000i   0.00000 + 0.00000i   0.00000 + 0.00000i   1.00000 + 0.00000i

b =

    0.00000 +  4.00000i
   -0.33043 - 14.85631i
   -3.86596 - 18.14920i
   -1.53553 +  0.70711i

x =

   -0.04000 +  4.00000i
   -0.33043 - 14.85631i
   -3.86596 - 18.14920i
   -1.53553 +  0.70711i
```

Valorile intensităţilor din circuit sunt:

$$\begin{cases} \underline{i_1} & = & j_1(t) = 6j \\ \underline{i_2} & = & j_2(t) = \sqrt{2}(1+j) \\ \underline{i_3} & = & j_3(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-j) \\ \underline{i_4} & = & i_1 + i_2 = \sqrt{2} + j(6+\sqrt{2}) \\ \underline{i_5} & = & -i_3 - i_4 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + j(\frac{\sqrt{2}}{2} - 6) \\ \underline{i_6} & = & i_1 + i_5 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \underline{i_7} & = & i_2 - i_8 = \sqrt{2}(1+j) - i_8 = 1.4542 - 2.5858j \\ \underline{i_8} & = & -0.04 + 4j \end{cases}$$

Valorile tensiunilor din circuit sunt:

$$\begin{cases} \underline{u_1} & = & -0.33043 - 14.85631j \\ \underline{u_2} & = & -3.86596 - 18.14920j \\ \underline{u_3} & = & -1.53553 + 0.70711j \\ \underline{u_4} & = & u_1 - u_5 = -2.3304 - 14.8563j \\ \underline{u_5} & = & -e_1(t) = 2 \\ \underline{u_6} & = & u_3 - u_5 = -3.53553 + 0.70711j \\ \underline{u_7} & = & -e_2(t) = -4j \\ \underline{u_8} & = & u_7 = -4j \end{cases}$$

Trec toate valorile din complex în scriere sinusoidală, cu ajutorul unei functii Octave.

```
I1 = 6.000000 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t + 1.570796)
I2 = 2.000000 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t + 0.785398)
I3 = 3.000000 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t - 0.785398)
I4 = 7.547885 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t + 1.382317)
I5 = 6.365117 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t - 2.159706)
I6 = 3.605551 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t + 2.944197)
I7 = 2.966653 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t - 1.058492)
I8 = 4.000200 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t + 1.580796)

U1 = 14.859984 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t - 1.593034)
U2 = 18.556376 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t - 1.780670)
U3 = 1.690520 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t + 2.710042)
U4 = 15.037966 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t - 1.726391)
U6 = 3.605548 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t + 2.944196)
U7 = 4.000000 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t - 1.570796)
U8 = 4.000000 * sqrt(2) * sin(100 * pi * t - 1.570796)
```

1.2 Subpunctul b)

În continuare, am realizat **bilanţul de puteri** pentru a verifica faptul că am calculat corect elementele de circuit.

$$\underline{S_{gen}} = \sum_{k=1}^{n_{SIT}} \underline{E_k} * \underline{I_k}' + \sum_{k=1}^{n_{SIC}} \underline{U_{g_k}} * \underline{J_k}'$$

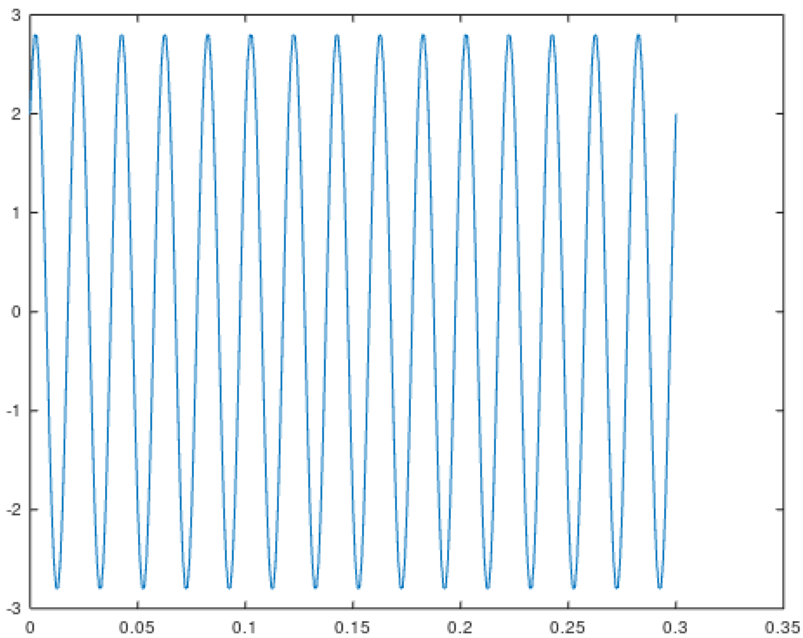
$$\underline{S_{cons}} = \sum_{k=1}^{n_z} \underline{z_k} * \mid \underline{I_k} \mid^2$$

Calculul puterilor a fost determinat cu ajutorul unei funcţii Octave.

```
octave:9> [S_gen S_cons] = puteri()
S_gen =  142.4436 +   3.5717i
S_cons =  142.4436 +   3.5717i
```

1.3 Subpunctul c)

Am trasat graficul ce prezintă evoluţia în timp a parametrului $j_2(t)$.



2 Rezolvarea circuitelor în regim tranzitoriu

2.1 Subpunctul a)

Am folosit circuitul inventat la tema 1, la care am adăugat o bobină în serie cu rezistorul R_1 şi un condensator în paralel cu rezistorul R_4. Circuitul nou format este reprezentat în Fig. 6.

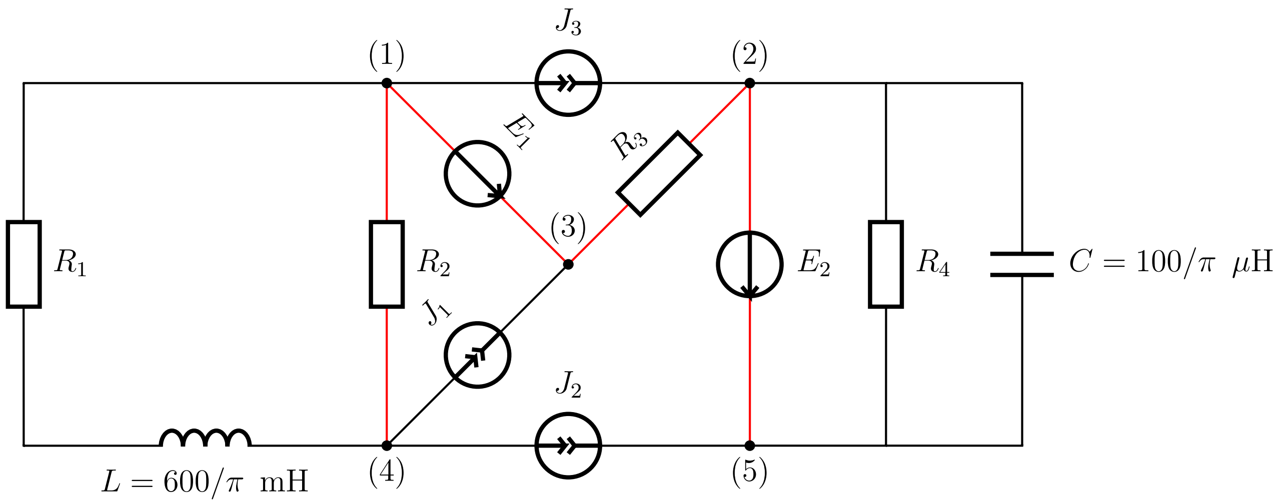


Figura 6: Graful circuitului.

Am calculat valoarea inductivităţii L şi a capacităţii C:

$$\begin{cases} L &= \frac{R_1 * 100}{\pi}\ mH = \frac{600}{\pi}\ mH \\ C &= \frac{R_4 * 100}{\pi}\ \mu F = \frac{100}{\pi}\ \mu F \end{cases}$$

Am considerat că la momentul $t = 0$ apare un defect în circuit şi se rupe latura ce conţine sursa ideală de tensiune E_2.

La $t = 0_-$, circuitul este în curent continuu. Bobina se comportă ca un conductor perfect ($R \to 0$), în timp ce condensatorul ca un izolator perfect ($R \to \infty$). Latura nu este încă ruptă. Circuitul la $t = 0_-$ este ilustrat în Fig. 7.

Circuitul este identic cu cel de la tema 1, de unde rezultă:

$$\begin{cases} u_{C_{(0_-)}} &= 4\,\mathrm{V} \\ i_{L_{(0_-)}} &= 1\,\mathrm{A} \end{cases}$$

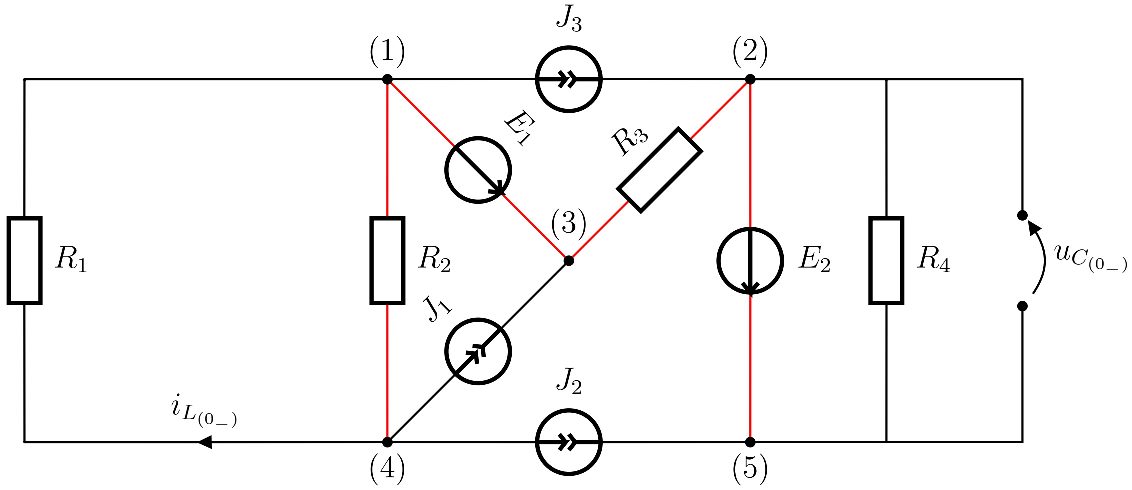


Figura 7: Graful circuitului la $t = 0_-$

La $t \to \infty$, circuitul este în curent continuu. Precum la $t = 0_-$, bobina se comportă ca un conductor perfect ($R \to 0$), iar condensatorul ca un izolator perfect ($R \to \infty$). Latura ce conţine sursa E_2 este ruptă. Graful circuitului la $t \to \infty$ este reprezentat în Fig. 8.

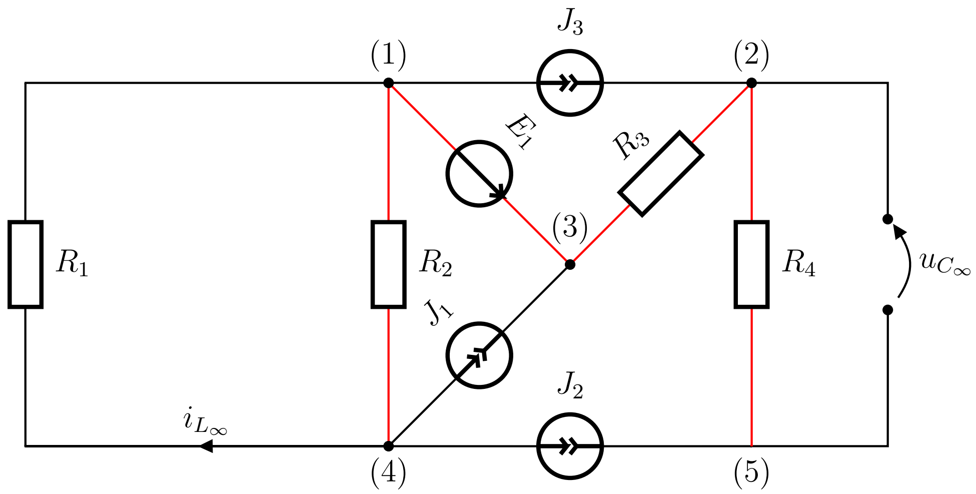


Figura 8: Graful circuitului la $t \to \infty$

Pentru a calcula valorile intensităţilor şi tensiunilor la $t \to \infty$ am folosit simulatorul Spice.

```
% t -> inf

R1 4 1 6
R2 1 4 2
R3 2 3 1
R4 0 2 1
V1 1 3 2
I1 4 3 -6
I2 4 0 2
I3 1 2 3

.op
```

```
        --- Operating Point ---

V(4):          1              voltage
V(1):          -5             voltage
V(2):          -2             voltage
V(3):          -7             voltage
I(I3):         3              device_current
I(I2):         2              device_current
I(I1):         -6             device_current
I(R4):         2              device_current
I(R3):         5              device_current
I(R2):         -3             device_current
I(R1):         1              device_current
I(V1):         1              device_current
```

Graful de intensităţi şi de tensiuni sunt reprezentate în Fig. 9, respectiv în Fig. 10.

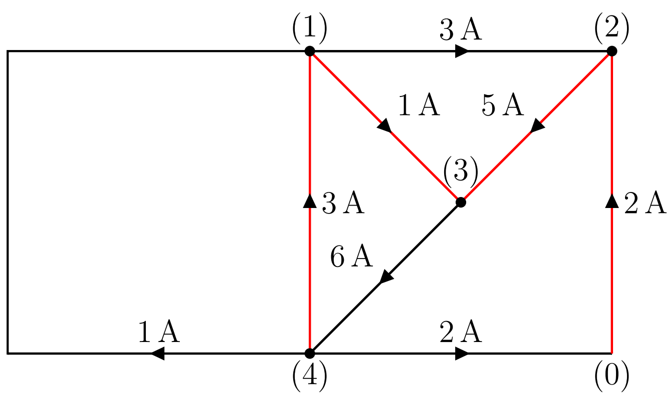


Figura 9: Graful intensităţilor la $t \to \infty$

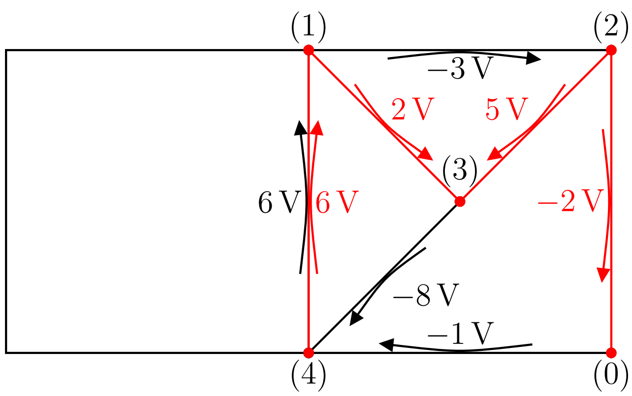


Figura 10: Graful tensiunilor la $t \to \infty$

Rezultă următoarele valori pentru parametri căutaţi:

$$\begin{cases} u_{C_\infty} & = & 2\,\mathrm{V} \\ i_{L_\infty} & = & 1\,\mathrm{A} \end{cases}$$

La $t = 0_+$, latura este ruptă. Reprezentarea circuitului în operaţional este ilustrată în Fig. 11.

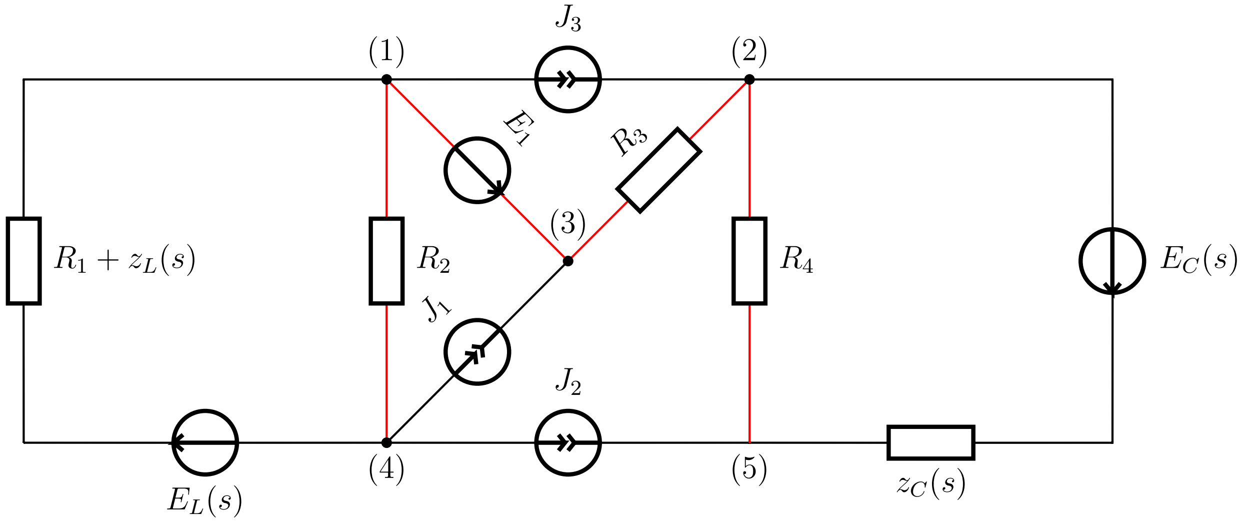


Figura 11: Reprezentarea circuitului în operaţional.

Parametri bobină:

$$\begin{cases} z_L(s) & = & s * L = s * \frac{600*10^{-3}}{\pi} = \frac{0.6s}{\pi} \\ E_L(s) & = & L * i_{L_{(0_-)}} = \frac{600*10^{-3}}{\pi} * 1 = \frac{0.6}{\pi} \end{cases}$$

Parametri condensator:

$$\begin{cases} z_C(s) & = & \frac{1}{sC} = \frac{1}{s*\frac{100*10^{-6}}{\pi}} = \frac{10^4\pi}{s} \\ E_C(s) & = & \frac{u_{C_{(0_-)}}}{s} = \frac{4}{s} \end{cases}$$

Am aplicat metoda Kirchhoff pentru a determina intensităţile de pe laturile care nu sunt de tip SIC şi tensiunile de pe laturile de tip SIC.

Folosind notaţia standard pentru un sistem de ecuaţii algebrice liniare $\boldsymbol{Ax{=}b}$, am obţinut următoarea egalitate:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4+\frac{3s}{5\pi} & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{10000\pi}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_6(s) \\ I_7(s) \\ I_8(s) \\ I_9(s) \\ U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{s} \\ \frac{-3}{s} \\ \frac{6}{s} \\ \frac{4}{s} \\ \frac{0.6}{\pi} \\ \frac{-2}{s} \\ \frac{-2}{s} \\ 0 \\ -\frac{4}{s} \end{pmatrix},$$

unde matricea coeficienţilor A are dimensiunea (9×9), iar vectorul necunoscutelor şi cel al termenilor liberi au dimensiunea (9×1).

$$\begin{bmatrix} I_1 + I_2 - I_9 = \frac{3}{s} \\ I_6 + I_7 + I_8 = \frac{-3}{s} \\ -I_8 + I_9 = \frac{6}{s} \\ I_1 + I_2 = \frac{4}{s} \\ I_1 \cdot \left(\frac{3 \cdot s}{5 \cdot \pi} + 4\right) - 2 \cdot I_2 = \frac{339}{1775} \\ 2 \cdot I_2 + U_1 = \frac{-2}{s} \\ I_8 + U_3 = \frac{-2}{s} \\ I_6 - I_8 + U_1 + U_2 = 0 \\ -I_6 + \frac{2 \cdot \sqrt{246740110} \cdot I_7}{s} = \frac{-4}{s} \end{bmatrix}$$

```
I1 = (sym)

  π⋅(339⋅s + 14200)
  ─────────────────
  1065⋅s⋅(s + 10⋅π)

I2 = (sym)

  -339⋅π⋅s + 4260⋅s + 28400⋅π
  ───────────────────────────
       1065⋅s⋅(s + 10⋅π)

I6 = (sym)

   4⋅(s + √246740110)
  ────────────────────
  s⋅(s + 2⋅√246740110)

I7 = (sym)

        -2
  ────────────────
  s + 2⋅√246740110

I8 = (sym)

  -5
  ───
   s

I9 = (sym)

  1
  ─
  s

U1 = (sym)

  2⋅(-5325⋅s + 339⋅π⋅s - 39050⋅π)
  ───────────────────────────────
         1065⋅s⋅(s + 10⋅π)

U2 = (sym)

           2           2
  - 678⋅π⋅s  + 1065⋅s  - 1356⋅√246740110⋅π⋅s - 17750⋅π⋅s + 6390⋅√246740110⋅s + 7
  ──────────────────────────────────────────────────────────────────────────────
                     ⎛ 2                                                 ⎞
               1065⋅s⋅⎝s  + 10⋅π⋅s + 2⋅√246740110⋅s + 20⋅√246740110⋅π⎠

  100⋅√246740110⋅π
  ────────────────


U3 = (sym)

  3
  ─
  s
```

2.2 Subpunctul b)

Cu ajutorul unui cod Octave, am verificat daca este respectată teorema valorilor iniţiale şi finale. Valorile iniţiale se determină la $t \to 0$, iar cele finale la $t \to \infty$.

```
I_L_0 = (sym)

  113·π
  ─────
   355

U_C_0 = (sym) 4
I_L_inf = (sym) 1
U_C_inf = (sym) 2
```

Din poza de mai sus se poate observa că sistemul următor este verificat:

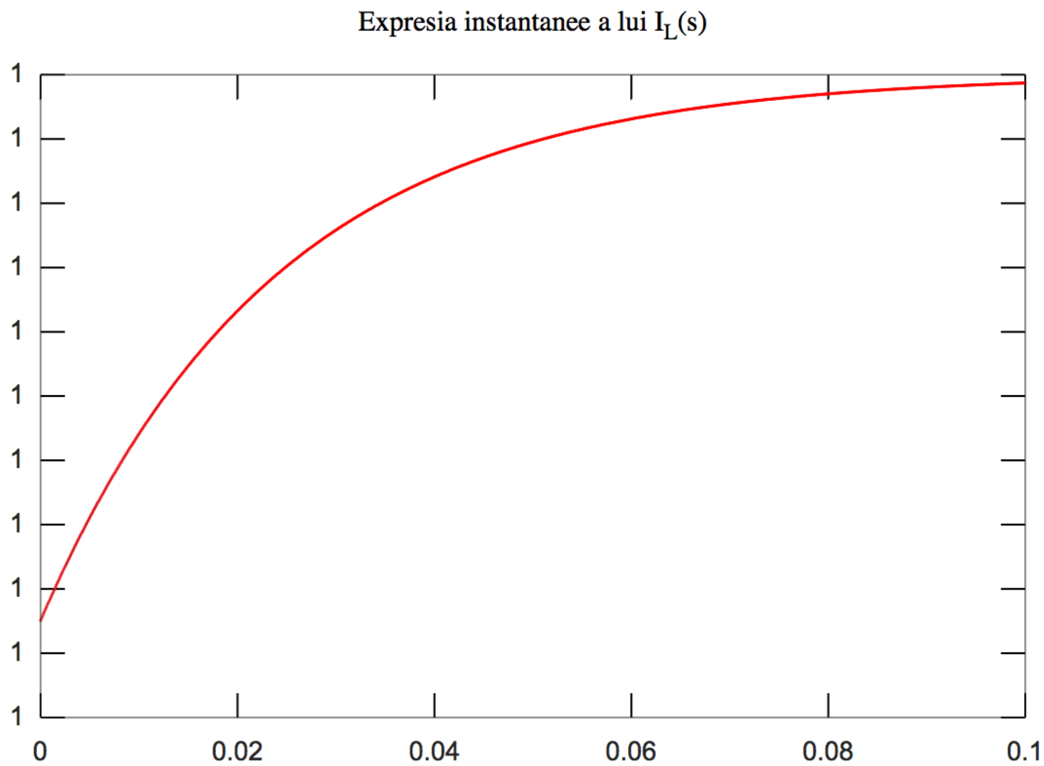
$$\begin{cases} i_{L_{(0_-)}} &= 1\,\mathrm{A} \\ u_{C_{(0_-)}} &= 4\,\mathrm{V} \\ i_{L_\infty} &= 1\,\mathrm{A} \\ u_{C_\infty} &= 2\,\mathrm{V} \end{cases}$$

2.3 Subpunctul c)

Am calculat expresia instantanee a variabilei $I_L(s)$ şi am reprezentat-o grafic.

```
graph = (sym)

                                -40·π·t
                                ───────
         -40·π·t                   3
         ───────
            3           113·π·e
  1 - e             +   ───────────────
                              355
```



3 Calculul şi reprezentarea unui câmp electric

3.1 Subpunctul a)

Am ales funcţia $f(r) = r^3 + 7$. Distribuţia de sarcină devine:

$$\rho(r, \theta, \phi) = \begin{cases} r^3 + 7,\ r \in \left[0, a\right] \\ 0,\ r > a \end{cases}$$

Calculez vectorul inducţiei electrice $\overline{D}$ folosind legea fluxului electric.
Am considerat o sferă Σ de rază a.

$\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}$

$\int_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{dA} = \int_{D_\Sigma} \rho dV$

$\int_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{dA} = D \int_\Sigma dA = D \cdot 4\pi r^2$

Tratez două cazuri:
1) $r \in [0, a]$
$q_{D_\Sigma} = \int_{D_\Sigma} \rho dV = \int_0^r (t^3 + 7) 4\pi t^2 dt = 4\pi \int_0^r (t^5 + 7t^2) dt = 4\pi(\frac{r^6}{6} + \frac{7r^3}{3})$

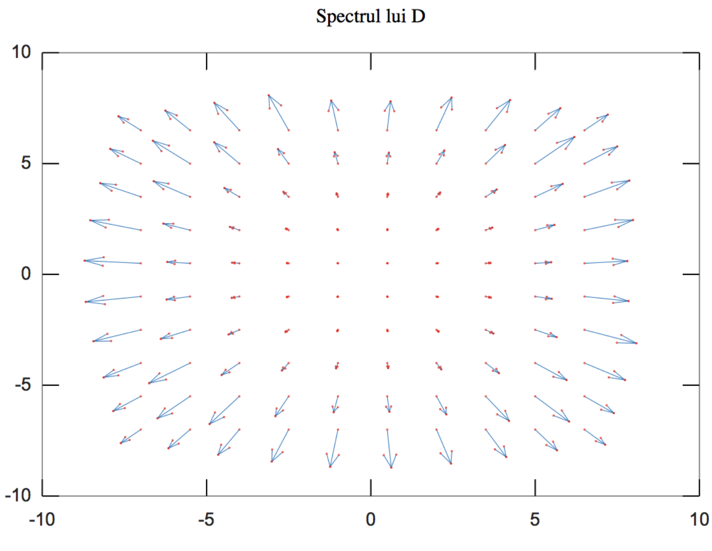
2) $r > a$
$q_{D_\Sigma} = \int_{D_\Sigma} \rho dV = \int_0^a (r^3 + 7) 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^a (r^5 + 7r^2) dr = 4\pi(\frac{a^6}{6} + \frac{7a^3}{3})$

$D(r) = \frac{q_{D_\Sigma}}{4\pi r^2}$

$$D(r) = \begin{cases} \frac{r^4}{6} + \frac{7r}{3},\ r \in [0, a] \\ \frac{1}{r^2}(\frac{a^6}{6} + \frac{7a^3}{3}),\ r > a \end{cases}$$

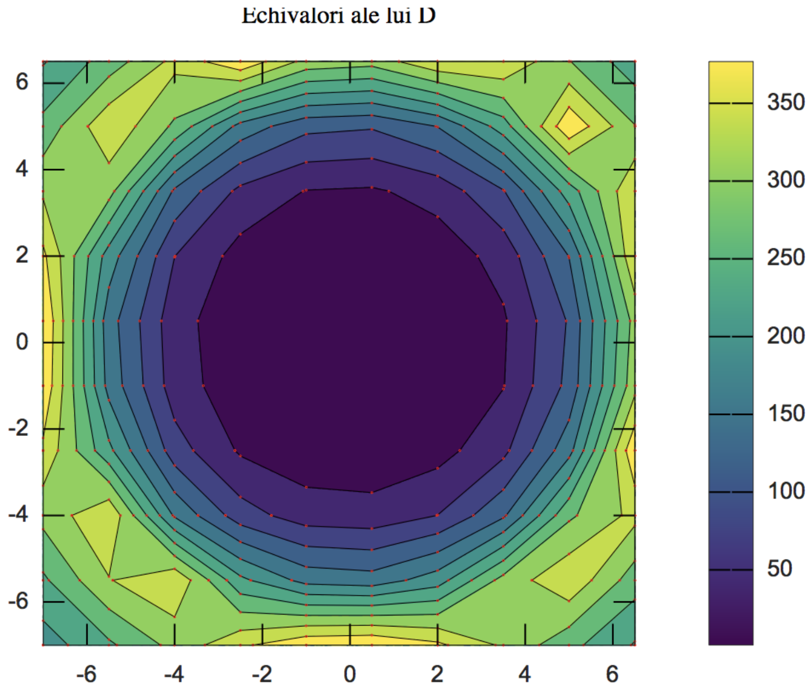
3.2 Subpunctul b)

Am reprezentat spectrul lui $\overline{D}$.



3.3 Subpunctul c)

Am reprezentat echivalori ale lui $| \overline{D} |$.



Codul aferent exerciţiului 3 poate fi observat mai jos.

```
% Exercitiul 3
a = 7; % raza

[x y] = meshgrid(-a : 1.5 : a);

alpha = atan2(y,x);

r = sqrt(x.^2 + y.^2);
n = length(r);

for i = 1 : n
    for j = 1 : n
        D(i,j) = f(r(i,j), a);
    endfor
endfor

u = D .* cos(alpha);
v = D .* sin(alpha);

figure;
quiver(x, y, u, v);
title('Spectrul lui D');

figure;
contourf(x, y, D);
colorbar;
title('Echivalori ale lui D');
```

```
function y = f(r, a)

    if r > a
        y = (1/r^2) * (a^6/6 + 7*a^3/3);
    else
        y = r^4/6 + 7*r/3;
    endif

endfunction
```

4 Redactarea în LATEX

Tema a fost realizată în LATEX, un editor text de înaltă performanţă. Mai jos, se poate observa un fragment de cod utilizat pentru generarea acestui fişier PDF.

```
Graful intensit'a'tilor este reprezentat 'in Fig.~\ref{fig:circuit4}.

% GI

\begin{figure} [ht]
    \begin{center}

    \begin{circuitikz}[scale=1.35,european resistors,american inductors]

    \draw[black, thick]
    % coarborele
    (-2,2) to [short, i=$i_3$] (2,2)
    (-2,-2) to [short, i=$i_2$, *-] (2,-2)
    (-2,-2) to [short, i=$i_1$] (0,0)

    (2,2) -- (3.5,2) to [short, i<=$i_8$] (3.5,-2) -- (2,-2)

    %nodurile
    (-2,2.3) node{(1)}
    (2,2.3) node{(2)}
    (0,0.4) node{(3)}
    (-2,-2.3) node{(4)}
    (2,-2.3) node{(5)};

    \draw[red, thick]
    %elementele de cicuit de pe arbore
    (-2,2) to [short, i=$i_4$, color = red, *-*] (-2,-2)
    (0,0) to [short, i=$i_6$, color = red, *-*] (2,2)
    (-2,2) to [short, i=$i_5$, color = red, *-] (0,0)
    (2,-2) to [short, i=$i_7$, color = red, *-] (2, 2)

    ;\end{circuitikz}
 \caption{Graful de intensit'a'ti.}
   \label{fig:circuit4}
   \end{center}
\end{figure}
```

Bibliografie

[1] Daniel Ioan, *Circuite electrice rezistive - breviare teoretice şi probleme*, `http://www.lmn.pub.ro/daniel/culegere.pdf`, 2000.

[2] G. Ciuprina, A. Gheorghe, M. Popescu, D. Niculae, A.S. Lup, R. Bărbulescu, D. Ioan, *Modelarea şi simularea circuitelor electrice. Îndrumar de laborator*, `http://cs.curs.pub.ro/2017/course/view.php?id=50`

[3] Gabriela Ciuprina, *Template pentru redactarea rapoartelor în LaTeX (v4)*, `http://cs.curs.pub.ro/2017/course/view.php?id=50`