



### Laboratorul 11

#### *Algoritmul Dijkstra. Algoritmul Prim.*

---

Fiind dat un graf  $G = (V, E)$ , se consideră funcția  $w: E \rightarrow W$ , numită funcție de cost, care asociază fiecărei muchii o valoare numerică. Domeniul funcției poate fi extins, pentru a include și perechile de noduri între care nu există muchie directă, caz în care valoarea este  $+\infty$ .

**Costul minim al drumului dintre două noduri** este minimul dintre costurile drumurilor existente între cele doua noduri.

Relaxarea unei muchii  $(v1, v2)$  constă în a testa dacă se poate reduce costul ei, trecând printr-un nod intermediar  $u$ . Fie  $w_{12}$  costul inițial al muchiei  $(v1, v2)$ ,  $w_{1u}$  costul muchiei  $(v1, u)$  și  $w_{u2}$  costul muchiei  $(u, v2)$ . Dacă  $w > w_{1u} + w_{u2}$ , muchia directă este înlocuită cu succesiunea de muchii  $(v1, u)$ ,  $(u, v2)$ .

#### ALGORITMUL DIJKSTRA

Algoritmul Dijkstra poate fi folosit doar în grafuri care au toate muchiile nenegative.

Optimul local căutat este reprezentat de costul drumului dintre nodul sursă  $s$  și un nod  $v$ . Pentru fiecare nod se reține un cost estimat  $d[v]$ , inițializat la început cu costul muchiei  $(s, v)$ , sau cu  $+\infty$ , dacă nu există muchie. Algoritmul selectează, în mod repetat, nodul  $u$  care are, la momentul respectiv, costul estimat minim (față de nodul sursă). În continuare se încearcă să se relaxeze restul costurilor  $d[v]$ . Dacă  $d[v] \geq d[u] + w_{uv}$ , atunci  $d[v]$  ia valoarea  $d[u] + w_{uv}$ .

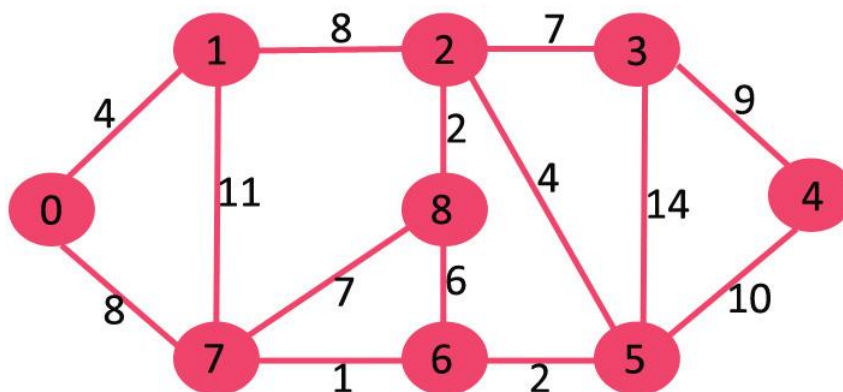
Pentru a ține evidența muchiilor care trebuie relaxate, se folosesc două structuri: una care conține lista de vârfuri deja vizitate și o coadă cu priorități – Min Heap (în care se află noduri nevizitate încă sau pentru care nu s-a determinat drumul minim). Nodurile se află ordonate după distanța față de sursă. Din Min Heap este mereu extras nodul aflat la distanța minimă față de nodul sursă. Complexitatea algoritmului pentru implementarea cu Min Heap este  $O(\log V)$ , pentru implementarea cu matrice de adiacență este  $O(V^2)$ , iar pentru cea cu liste de adiacență,  $O(E \log V)$ .

#### Pașii algoritmului:

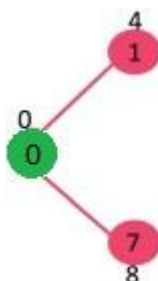
1. Se crează un Min Heap de dimensiune  $V$ , unde  $V$  reprezintă numărul de vârfuri din graf. Fiecare nod al Min Heap-ului trebuie să conțină indexul vârfului și distanța față de nodul sursă.
2. Se inițializează Min Heap-ul cu nodul sursă în rădăcină (distanța asociată nodului sursă este 0). Distanța asignată tuturor celorlalte vârfuri este INF.
3. Cât timp în Min Heap mai există elemente, se execută:
  - a. Se extrage  $u$ , primul nod din Min Heap și cel pentru care distanța față de nodul sursă este minimă.
  - b. Pentru fiecare nod  $v$  adiacent cu  $u$ , se verifică dacă  $v$  este în Min Heap. Dacă  $v$  este în Min Heap și  $d[v] > w_{uv} + d[u]$ , atunci se actualizează  $d[v] = w_{uv} + d[u]$ .



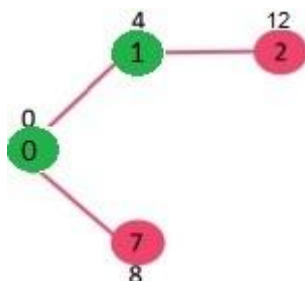
Fie următorul graf:



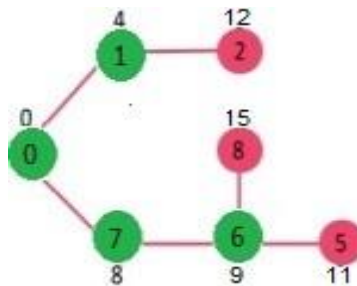
Nodul sursă este 0. Dorim să aflăm costurile drumurilor de lungime minimă de la nodul 0 la toate celelalte noduri din graf. Inițial,  $d[0]=0$ , iar  $d[v]=\text{INF}$ , pentru toate celelalte vârfuri din graf. Nodul sursă (0) este extras din Min Heap și se actualizează distanțele pentru vârfurile adiacente (1 și 7). Astfel,  $d[1]=4$  și  $d[7]=8$ . Acum, Min Heap-ul conține toate vârfurile grafului, mai puțin nodul 0 care a fost eliminat.



Se extrage nodul 1 din Min Heap și se actualizează distanța pentru nodurile adiacente cu 1 (distanța este actualizată dacă nodul se găsește în Min Heap și distanța prin vârful 1 este mai mică decât distanța anterioară).

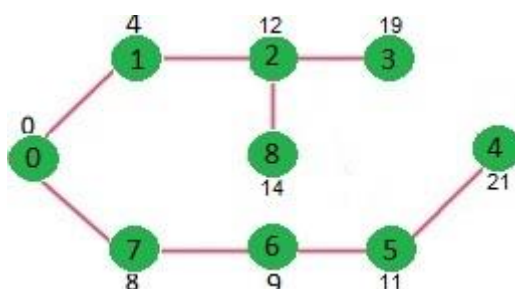


Se extrage nodul 7 din Min Heap și se actualizează distanțele nodurilor adiacente cu el.



Se repetă pașii de mai sus cât timp se mai găsesc elemente în Min Heap.

La final, costurile drumurilor minime de la nodul sursă 0 la fiecare dintre nodurile grafului sunt următoarele:



### ALGORITMUL PRIM

Dându-se un graf conex neorientat  $G = (V, E)$ , se numește arbore de acoperire al lui  $G$  un subgraf  $G' = (V, E')$  care conține toate vârfurile grafului  $G$  și o submulțime minimă de muchii  $E' \subseteq E$  cu proprietatea că unește toate vârfurile și nu conține cicluri. Cum  $G'$  este conex și aciclic, el este arbore. Pentru un graf oarecare, există mai mulți arbori de acoperire.

Dacă asociem o matrice de costuri,  $w$ , pentru muchiile din  $G$ , fiecare arbore de acoperire va avea asociat un cost egal cu suma costurilor muchiilor conținute. Un arbore care are costul asociat mai mic sau egal cu costul oricărui alt arbore de acoperire se numește **arbore minim de acoperire** (minimum spanning tree) al grafului  $G$ . Un graf poate avea mai mulți arbori minimi de acoperire. Dacă toate costurile muchiilor sunt diferite, există un singur AMA.

Algoritmul PRIM consideră ca există un arbore principal, iar la fiecare pas se adaugă acestuia muchia cu cel mai mic cost care unește un nod din arbore cu un nod din afara sa. Nodul rădăcină al arborelui principal se alege arbitrar. Când s-au adăugat muchii care ajung în toate nodurile grafului, s-a obținut arborele minim de acoperire (sau arborele parțial de cost minim) dorit. Abordarea seamănă cu algoritmul Dijkstra de găsire a drumului minim între două noduri ale unui graf.

Pentru o implementare eficientă, următoarea muchie de adăugat la arbore trebuie să fie ușor de selectat. Vârfurile care nu sunt în arbore trebuie sortate în funcție de distanța până la acesta (de fapt costul minim al unei muchii care leagă nodul dat de un nod din interiorul arborelui). Se poate folosi pentru aceasta o structură de heap. Presupunând că  $(u, v)$  este muchia de cost minim care unește nodul  $u$  cu un nod  $v$  din arbore, se vor reține două informații:

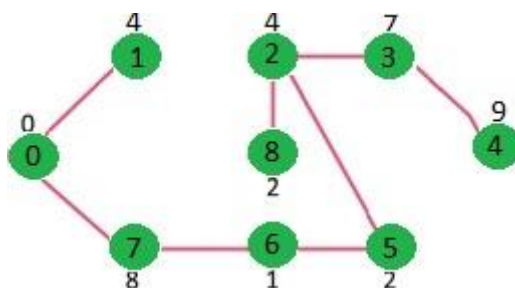
$d[u] = w[u, v]$  - distanța de la  $u$  la arbore

$p[u] = v$  - predecesorul lui  $u$  în drumul minim de la arbore la  $u$ .



La fiecare pas se va selecta nodul u cel mai apropiat de arborele principal, reunind apoi arborele principal cu subarborele corespunzător nodului selectat. Se verifică apoi dacă există noduri mai apropiate de u decât de nodurile care erau anterior în arbore, caz în care trebuie modificate distanțele dar și predecesorul. Modificarea unei distanțe impune și refacerea structurii de heap. Complexitatea este  $O(\log V)$ .

Pentru exemplul anterior, arborele minim de acoperire este:



### CERINȚE

1). Pornind de la Min Heap-ul studiat în Laboratorul 9 și a cărei implementare vă este prezentată în fișierul MinHeap.h, completați funcțiile echivalente din heap.h, pentru lucrul cu heap-uri de noduri. Aveți următoarele definiții:

```
typedef struct MinHeapNode
{
    int v;
    int d;
} MinHeapNode;
```

```
typedef struct MinHeap
{
    int size;
    int capacity;
    int *pos;
    MinHeapNode **elem;
} MinHeap;
```



*MinHeapNode\* newNode(int v, int d)* – inițializează un nou nod din Min Heap (0.2 p)

*MinHeap\* newQueue(int capacity)* – inițializează Min Heap-ul (coada cu priorități) (0.2 p)

*void swap(MinHeapNode\*\* a, MinHeapNode\*\* b)* – interschimbă doua noduri din Min Heap (0.2 p)

*void SiftDown(MinHeap\* h, int idx)* – actualizează Min Heap-ul și pozițiile nodurilor care sunt interschimbate (0.75 p)

*int isEmpty(MinHeap\* h)* – întoarce 1 dacă Min Heap-ul este vid, 1 altfel (0.2 p)

*MinHeapNode\* removeMin(MinHeap\* h)* – elimină și întoarce elementul minim din Min Heap (0.5 p)

*void SiftUp(MinHeap\* h, int v, int d)* (0.75 p)

*int isInMinHeap(MinHeap \*h, int v)* – întoarce 1 dacă nodul v se găsește în Min Heap și 0 altfel (0.2 p)

2). În fișierul graph.c, definiți funcția *void dijkstra(TGraphL G, int s)*, care afișează costurile tuturor drumurilor minime de la nodul de start s la toate celelalte noduri din graf. Pentru exemplul anterior, unde nodul de start este 0, funcția va afișa:

Varf	Drum minim
0	0
1	4
2	12
3	19
4	21
5	11
6	9
7	8
8	14

(3 p)



3). În fișierul `graph.c`, definiți funcția `void Prim(TGraphL G)`, care determină arborele minim de acoperire al grafului `G`. Funcția va afișa muchiile care fac parte din arborele minim de acoperire. Pentru exemplul anterior, se va afișa:

Parinte	Varf
0	1
5	2
2	3
3	4
6	5
7	6
0	7
2	8

(3 p)