# Bazele electrotehnicii Tema 1

Constantin Mihai 311 CD

Facultatea de Automatică și Calculatoare mihai.constantin98@gmail.com

12 aprilie 2018

## Cuprins

1	nerarea unui circuit	4			
	1.1	Graful de tensiuni. Graful de intensități	4		
	1.2	Tipuri de elemente: R, SIT, SIC. Arbore normal	6		
	1.3	Teorema lui Tellegen. Bilanţul de puteri	7		
	1.4	Sursă de tensiune comandată în curent (SUCI)	8		
2	Met	toda Kirchhoff	8		
	2.1	Ecuațiile Kirchhoff pentru problema cu surse independente	8		
	2.2	Ecuațiile Kirchhoff pentru problema cu sursă comandată	10		
3	Sim	ulatorul Spice	12		
4	Rez	olvarea circuitelor rezistive neliniare	14		
5	5 Redactarea în ĿTĘX				
$\mathbf{B}^{\mathbf{i}}$	bliog	grafie	18		

### Enunţ

#### 1. Generarea unui circuit

Generați un circuit electric liniar, rezistiv, alcătuit din rezistoare, surse independente de tensiune și surse independente de curent (este obligatoriu să existe cel puțin o sursă de tensiune și cel puțin o sursă de curent). Procedați astfel:

a) Alegeți mai întâi o pereche de grafuri orientate  $(G_i, G_u)$  care să corespundă unui aceluiași circuit. Alegeți o topologie astfel încât graful să aibă cel puțin trei ochiuri și cel puțin cinci noduri. Alegeți orientări arbitrare, astfel încât să aveți și laturi orientate în regula de la receptoare, și laturi orientate în regula de la generatoare.

Alegeți valori întregi pentru curenții și tensiunile circuitului. **Indicație**: Folosiți metoda bazată pe alegerea unui arbore, fixarea arbitrară a tensiunilor din arbore și a curenților din coarbore și deducerea celorlalte valori.

- b) Alegeți tipuri de elemente (R, SIT, SIC) pe toate laturile și apoi calculați parametrii lor. Verificați că ați generat un circuit bine formulat, precizând un arbore normal.
- c) Verificați teorema lui Tellegen (pentru a verifica perechea de grafuri) și bilanțul de puteri (pentru a verifica faptul că ați calculat corect elementele de circuit).
- d) Modificați una din SIT într-o sursă de tensiune comandată în curent (SUCI) astfel încât soluția problemei să nu se modifice.

#### 2. Metoda Kirchhoff

a) Scrieți sistemul de ecuații al metodei Kirchhoff în curenți pentru problema cu surse independente.

Folosind notația standard pentru un sistem de ecuații algebrice liniare Ax = b, precizați care este dimensiunea matricei coeficienților, a vectorului necunoscutelor și a vectorului termenilor liberi și semnificația componentelor vectorului necunoscutelor în cazul circuitului generat. Precizați valorile matricei A și ale vectorului b.

Scrieţi un mic cod care să rezolve sistemul asamblat anterior. Vă recomandăm să folosiți un mediu de tip *Matlab* sau *Octave*.

b) Reluați cerințele de la punctul a) pentru problema cu sursă comandată. Observați care sunt diferențele.

#### 3. Simulatorul Spice

- a) Parcurgeți tutorialul SPICE din îndrumar.
- b) Descrieți în SPICE problema cu surse comandate.
- c) Simulați circuitul și verificați că obțineți rezultatele așteptate.

#### 4. Rezolvarea circuitelor rezistive neliniare

Conectați (în plus față de elementele deja existente) între două noduri ale problemei fără surse comandate o diodă Zener, cu o caracteristică pe care o alegeți (din literatură, definită analitic sau liniar pe porțiuni). Calculați punctul static de funcționare al diodei. Aveți libertatea de a alege o metodă dintre: **analitic** - metoda dreptei de sarcină sau **numeric** - formulați o ecuație algebrică neliniară și rezolvați-o cu un algoritm potrivit (de exemplu metoda Newton, un cod propriu sau dintr-o bibliotecă).

Indicaţie: indiferent de metoda aleasă, vă recomandăm să determinaţi generatorul echivalent de tensiune (sau de curent) faţă de nodurile între care aţi conectat elementul neliniar.

#### 5. Redactați în LATEX rezolvarea acestei teme.

## 1 Generarea unui circuit

#### 1.1 Graful de tensiuni. Graful de intensități

Am ales mai întâi o pereche de grafuri orientate  $(G_i, G_u)$  care să corespundă unui aceluiași circuit. Topologia circuitului este următoarea:

$$\begin{cases} N = 5 & noduri \\ L = 9 & laturi \end{cases}$$

În continuare, am ales un **arbore** format din N-1 ramuri, ce poate fi observat în Fig. 1. Arbitrar, am atribuit valori intensităților de pe laturile **coarborelui**:

$$\begin{cases} i_1 &= 1 \text{ A} \\ i_4 &= 6 \text{ A} \\ i_6 &= 3 \text{ A} \\ i_7 &= 2 \text{ A} \\ i_9 &= 4 \text{ A} \end{cases}$$

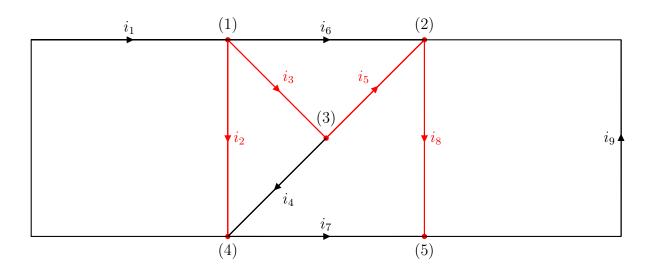


Figura 1: Graful intensităților.

Conform legii I a lui Kirchhoff, suma algebrică a curenților din laturile oricărei secțiuni într-un circuit este egală cu zero:

$$\sum_{k \in s} i_k = 0, \quad \forall s$$

Aplicând legea I a lui Kirchhoff pe fiecare secțiune din sistemul fundamental, au rezultat N-1=4 ecuații din care am aflat intensitățile de pe ramuri:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_4 + i_7 &= 0 \\ -i_3 + i_4 - i_6 - i_7 &= 0 \\ i_5 + i_6 + i_7 &= 0 \\ -i_7 - i_8 + i_9 &= 0 \end{cases}$$

 $\xrightarrow{Kirchhoff\ I}$ 

$$i_2 = -3 \,\mathrm{A}$$
  $i_3 = 1 \,\mathrm{A}$   $i_5 = -5 \,\mathrm{A}$   $i_8 = 2 \,\mathrm{A}$ 

Conform legii II a lui Kirchhoff, suma algebrică a tensiunilor din orice buclă a unui circuit este zero:

$$\sum_{k \in b} u_k = 0, \quad \forall b$$

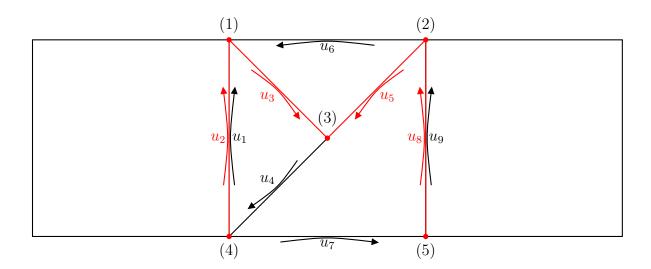


Figura 2: Graful tensiunilor.

Pentru graful tensiunilor, reprezentat în Fig. 2, am ales arbitrar valori pentru tensiunile de pe laturile **arborelui**:

$$u_2 = 6 \,\mathrm{V}$$
  $u_3 = 2 \,\mathrm{V}$   $u_5 = 5 \,\mathrm{V}$   $u_8 = 4 \,\mathrm{V}$ 

Aplicând legea II a lui Kirchhoff pe fiecare buclă din sistemul fundamental, au rezultat L-N+1=5 ecuații din care am aflat tensiunile de pe coarde:

$$\begin{cases} u_1 - u_2 &= 0 \\ u_2 + u_3 + u_4 &= 0 \\ u_3 - u_5 + u_6 &= 0 \\ u_7 + u_8 + u_5 - u_3 - u_2 &= 0 \\ u_9 - u_8 &= 0 \end{cases}$$

Kirchhoff II

$$u_1 = 6 \,\text{V}$$
  $u_4 = -8 \,\text{V}$   $u_6 = 3 \,\text{V}$   $u_7 = -1 \,\text{V}$   $u_9 = 4 \,\text{V}$ 

#### 1.2 Tipuri de elemente: R, SIT, SIC. Arbore normal

Am ales tipuri de elemente (R, SIT, SIC) pe toate laturile circuitului. Pentru ca circuitul generat să fie bine formulat, trebuie să existe un *arbore normal*, adică un graf conex aciclic care conține toate laturile de tip SIT și nicio latură de tip SIC. În plus, arborele normal trebuie să atingă toate nodurile circuitului. Acesta este marcat cu roșu în Fig. 3.

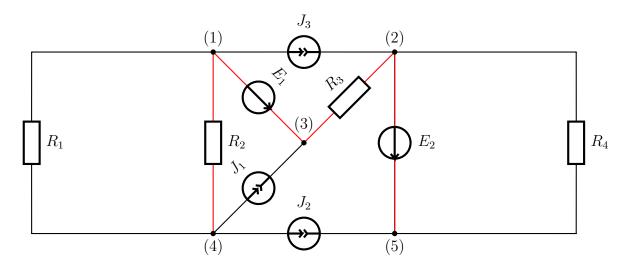


Figura 3: Graful circuitului.

În continuare, am determinat valorile fiecărui element de circuit, folosind următoarele ecuații:

$$\begin{cases} R_1 &= \frac{u_1}{i_1} = 6\Omega \\ R_2 &= -\frac{u_2}{i_2} = 2\Omega \\ R_3 &= -\frac{u_5}{i_5} = 1\Omega \\ R_4 &= \frac{u_9}{i_9} = 1\Omega \end{cases} \qquad \begin{cases} J_1 &= -i_4 = -6 \text{ A} \\ J_2 &= i_7 = 2 \text{ A} \\ J_3 &= i_6 = 3 \text{ A} \end{cases} \end{cases} \begin{cases} E_1 &= -u_3 = -2 \text{ V} \\ E_2 &= u_8 = 4 \text{ V} \end{cases}$$

### 1.3 Teorema lui Tellegen. Bilanțul de puteri

Pentru a verifica perechea de grafuri  $(G_i, G_u)$ , am realizat următorul tabel în care am trecut puterea de pe fiecare latură a circuitului în funcție de regula respectată:

Tabela 1: Verincarea	teoremei iui Tellegen
Regula de la generatoare	Regula de la receptoare
$u_2 i_2 = -18 \mathrm{W}$	$u_1 i_1 = 6 \mathrm{W}$
$u_5 i_5 = -25 \mathrm{W}$	$u_3i_3=2\mathrm{W}$
$u_6 i_6 = 9 \mathrm{W}$	$u_4 i_4 = -48 \mathrm{W}$
$u_8 i_8 = 8 \mathrm{W}$	$u_7 i_7 = -2 \mathrm{W}$
	$u_9 i_9 = 16 \mathrm{W}$

Tabela 1: Verificarea teoremei lui Tellegen

Adunând valorile obținute, rezultă egalitatea  $P_{generatoare} = P_{receptoare} = -26 \,\mathrm{W}$ , ce verifică teorema lui Tellegen.

În continuare, am realizat **bilanțul de puteri** pentru a verifica faptul că am calculat corect elementele de circuit.

Folosind formula  $P_{cons} = \sum Ri^2$ , am calculat valoarea puterii consumate:

$$P_{cons} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_5^2 + R_4 i_9^2 = 65 \,\mathrm{W}.$$

Folosind formula

$$P_{gen} = \sum_{k=1}^{n_{SIT}} Ei + \sum_{k=1}^{n_{SIC}} u_g J,$$

am calculat valoarea puterii generate:

$$P_{gen} = E_1 i_3 + E_2 i_8 + u_4 J_1 - u_7 J_2 + u_6 J_3 = 65 \,\mathrm{W}.$$

Din cele două ecuații de mai sus, rezultă că  $P_{cons}=P_{gen}=65\,\mathrm{W},$  ceea ce verifică bilanțul de puteri.

#### 1.4 Sursă de tensiune comandată în curent (SUCI)

Am modificat circuitul iniţial, înlocuind sursa ideală de tensiune  $E_1$  cu o sursă de tensiune comandată în curent astfel încât soluţia problemei să nu se modifice. Noul circuit se poate observa în Fig. 4.

Folosind formula  $E_1 = \rho i_1$ , a rezultat valoarea rezistenței de transfer  $\rho = \frac{E_1}{i_1} = -2\Omega$ . În consecință, valoarea sursei de tensiune comandate în curent este  $E_1 = -2i_1$ .

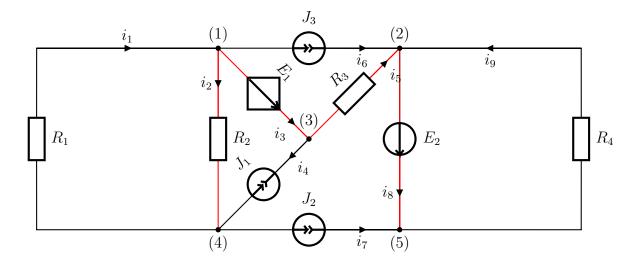


Figura 4: Graful circuitului.

#### 2 Metoda Kirchhoff

#### 2.1 Ecuațiile Kirchhoff pentru problema cu surse independente

Pentru circuitul reprezentat în Fig. 5, am folosit metoda *Kirchhoff+*. Arborele ales (cel marcat cu roşu) nu conține nicio latură de tip SIC. Am scris curenții de pe ramuri în funcție de cei de pe coarde. Deoarece cunosc valorile intensităților de pe laturile de tip SIC, rezultă următorul sistem:

$$\begin{cases} i_2 = i_1 - i_4 + i_7 = i_1 - 4 \\ i_3 = i_4 - i_6 - i_7 = 1 \text{ A} \\ i_5 = -i_6 - i_7 = -5 \text{ A} \\ i_8 = i_9 - i_7 = i_9 - 2 \end{cases}$$

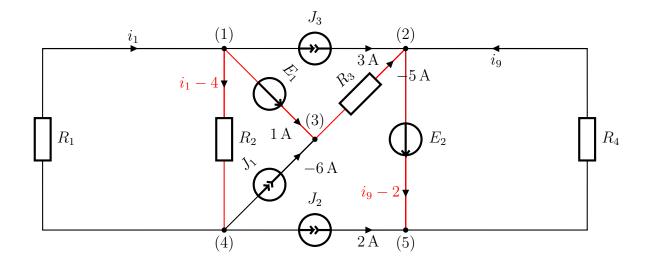


Figura 5: Graful circuitului.

În continuare, am aplicat Kirchhoff II pe L - N + 1 = 5 bucle. A rezultat următorul sistem cu necunoscutele:  $i_1, i_9, u_4, u_6, u_7$ .

$$\begin{cases}
 i_1R_1 + (i_1 - 4)R_2 &= 0 \\
 i_9R_4 &= E_2 \\
 i_5R_3 + u_6 &= E_1 \\
 (i_1 - 4)R_2 - u_4 &= -E_1 \\
 i_5R_3 - (i_1 - 4)R_2 - u_7 &= E_1 + E_2
\end{cases}$$

Folosind notația standard pentru un sistem de ecuații algebrice liniare Ax=b, am obținut următoarea egalitate:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_9 \\ u_4 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

unde matricea coeficienților A are dimensiunea  $(5 \times 5)$ , iar vectorul necunoscutelor și cel al termenilor liberi au dimensiunea  $(5 \times 1)$ .

Soluția sistemului este:

$$i_1 = 1 \,\mathrm{A}$$
  $i_9 = 4 \,\mathrm{A}$   $u_4 = -8 \,\mathrm{V}$   $u_6 = 3 \,\mathrm{V}$   $u_7 = -1 \,\mathrm{V},$ 

fiind verificată cu ajutorul codului de mai jos scris în Octave.

#### 2.2 Ecuațiile Kirchhoff pentru problema cu sursă comandată

La fel ca la punctul precedent, am aplicat metoda Kirchhoff+. Am ales același arbore (cel marcat cu roșu din Fig. 6), deoarece nu conține nicio latură de tip SIC. Sistemul rezultat, în urma scrierii celor L-N+1=5 ecuații se modifică, deoarece avem în circuit o sursă de tensiune comandată în curent:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + (i_1 - 4) R_2 & = 0 \\ i_9 R_4 & = E_2 \\ i_5 R_3 + 2i_1 + u_6 & = 0 \\ (i_1 - 4) R_2 - 2i_1 - u_4 & = 0 \\ i_5 R_3 - (i_1 - 4) R_2 + 2i_1 - u_7 & = E_2 \end{cases}$$

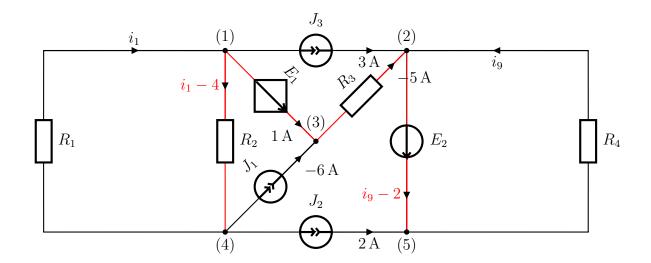


Figura 6: Graful circuitului.

Folosind notația standard pentru un sistem de ecuații algebrice liniare Ax=b, am obținut următoarea egalitate:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_9 \\ u_4 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

unde matricea coeficienților A are dimensiunea  $(5 \times 5)$ , iar vectorul necunoscutelor și cel al termenilor liberi au dimensiunea  $(5 \times 1)$ .

Observație: Deoarece sistemul de ecuații s-a modificat, matricea coeficienților A şi vectorul termenilor liberi au suferit modificări.

Soluția sistemului este, bineînțeles, aceeași:

$$i_1 = 1 \,\mathrm{A}$$
  $i_9 = 4 \,\mathrm{A}$   $u_4 = -8 \,\mathrm{V}$   $u_6 = 3 \,\mathrm{V}$   $u_7 = -1 \,\mathrm{V},$ 

fiind verificată cu ajutorul codului de mai jos scris în Octave.

```
1 %functia primeste ca parametri matricea A si coloana termenilor liberi
2 %intoarce vectorul necunoscutelor
3 function [x] = sistem(A, b)
4
5 x = A \ b;
6
7 endfunction
```

## 3 Simulatorul Spice

Folosind LTSpice, am simulat circuitul din Fig. 7 pentru a verifica rezultatele obținute la exercițiul 1. Deoarece pe latura prin care circulă curentul de comandă  $i_1$  nu se află nicio sursă independentă de tensiune, am introdus un SIT de valoare nulă  $E_1$ . În Tab. 2 este realizată o schemă a netlistului implementat mai jos.

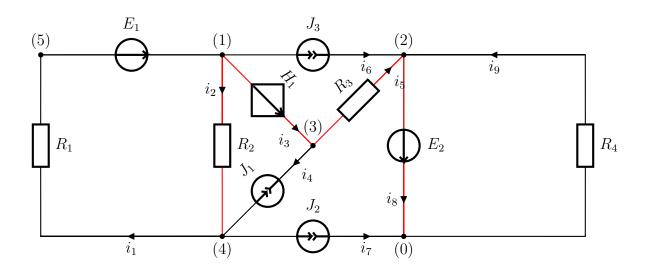


Figura 7: Graful circuitului.

тa	<u>beia 2. Netiis</u>	· U
bol	Nod iniţial	No

Tip element	Simbol	Nod iniţial	Nod final	Valoare
R	$R_1$	(4)	(5)	$6\Omega$
R	$R_2$	(1)	(4)	$2\Omega$
R	$R_3$	(3)	(2)	$1\Omega$
R	$R_4$	(0)	(2)	$1\Omega$
SIC	$I_1$	(4)	(3)	$-6\mathrm{A}$
SIC	$I_2$	(4)	(0)	2 A
SIC	$I_3$	(1)	(2)	3 A
SIT	$V_1$	(5)	(1)	0 V
SUCI	$H_1$	(3)	(1)	$-2*i_1$
SIT	$V_2$	(2)	(0)	$-4\mathrm{V}$

*circuit		Operating Po	int
*CIRCUIT R1 4 5 6 R2 1 4 2 R3 3 2 1 R4 0 2 1 I1 4 3 -6 I2 4 0 2 I3 1 2 3 V1 5 1 0	V(4): V(5): V(1): V(3): V(2): I(H1): I(I3): I(I2): I(I1):	-1 -7 -7 -9 -4 -1 3 2 -6	voltage voltage voltage voltage voltage device_current device_current device_current
H1 3 1 V1 -2 V2 2 0 -4	I (R4): I (R3): I (R2): I (R1): I (V2): I (V1):	4 -5 -3 1 2	device_current device_current device_current device_current device_current device_current

După simularea circuitului, am obținut valoarea intensităților de pe fiecare latură, cât și valoarea potențialelor asociate fiecărui nod. Am considerat ca nod de referință nodul (0). Valorile obținute verifică rezultatele de la exercițiul 1.

### 4 Rezolvarea circuitelor rezistive neliniare

Am conectat (în plus față de elementele deja existente) între nodurile A și B ale problemei fără surse comandate o diodă Zener, cu o caracteristică liniară pe porțiuni.

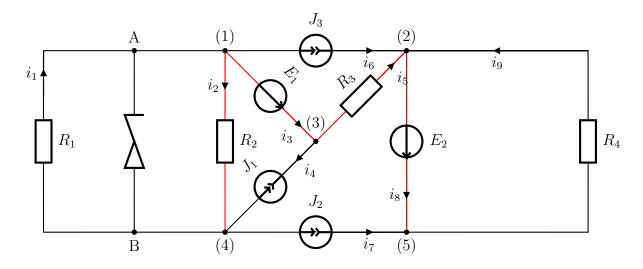


Figura 8: Graful circuitului.

Am pasivizat circuitul din Fig. 8 și am obținut următorul circuit:

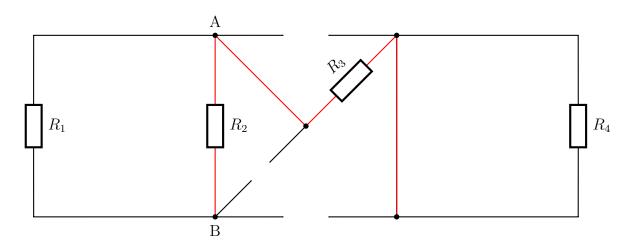


Figura 9: Graful circuitului pasivizat.

Tensiunea dintre nodurile A și B este egală cu valoarea lui  $u_1$  din graful de tensiuni. Așadar,  $U_{AB_0}=6\,\mathrm{V}.$ 

Calculând valoarea rezistenței echivalente a circuitului din Fig. 9, am obținut:

$$R_{AB_0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3}{2}\Omega = 1.5\Omega$$

În continuare, am format circuitul echivalent alcătuit dintr-o rezistență  $R_{AB_0}$ , o sursă ideală de tensiune  $U_{AB_0}$  și o diodă Zener.

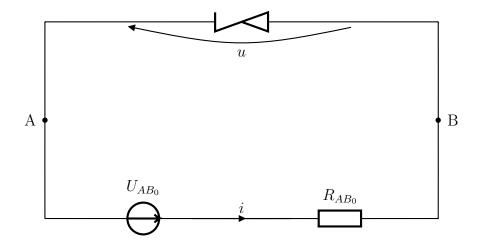


Figura 10: Circuitul echivalent.

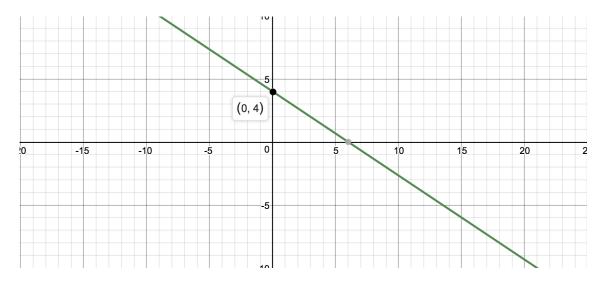
Aplicând Kirchhoff II pe circuitul din Fig. 10 şi considerând că dioda este controlată în tensiune, obținem sistemul următor:

$$\begin{cases} iR_{AB_0} + u - U_{AB_0} = 0 \\ i = f(u) \end{cases}$$

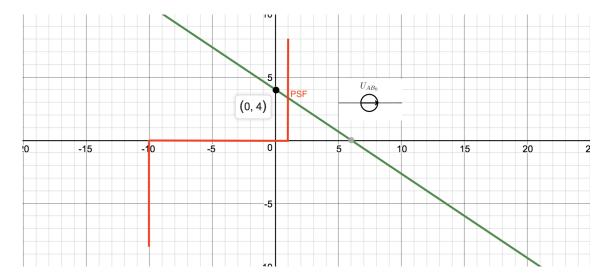
Considerând tensiunea de deschidere a diodei  $u = 0.7 \,\mathrm{V}$ , rezultă valoarea intensității:

$$i = \frac{U_{AB_0} - u}{R_{AB_0}} \approx 3.53 \,\mathrm{A}$$

Dreapta de sarcină este reprezentată în graficul de mai jos. Ea este determinată de punctele de coordonate  $(U_{AB_0}, 0) = (6, 0)$  și  $(0, U_{AB_0}/R_{AB_0}) = (0, 4)$ .



Am intersectat dreapta de sarcină cu caracteristica liniară pe porțiuni a diodei Zener. Intersecția reprezintă punctul static de funcționare al diodei (PSF). Cum tensiunea de deschidere este  $u=0.7\,\mathrm{V},\,\mathrm{i}\approx3.53\,\mathrm{A}.$  Așadar, PSF(0.7, 3.53).



### 5 Redactarea în LaTeX

Tema a fost realizată în L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, un editor text de înaltă performanță. Mai jos, se poate observa un fragment de cod utilizat pentru generarea acestui fisier PDF.

```
% Graful intensitatilor (Gi)
Am ales maj \{i}nt\{a}i o pereche de grafuri orientate (G_{i}, G_{u}) care s'a corespund'a unui aceluia'si circuit.
Topologia circuitului este urm'atoarea:
\begin{equation}
\begin{array}{ccl} % c - centrat, l - aliniat la stanga
N & = &5 \tab noduri \\
L & = & 9 \tab laturi
\end{array}
\right. \nonumber % marcarea inchiderii - falsa; blocarea numerotarii
\end{equation}
'In continuare, am ales un \textbf{arbore} format din $N-1$ ramuri, ce poate fi observat 'in Fig.~\ref{fig:circuit1}.
Arbitrar, am atribuit valori intensit'a'tilor de pe laturile \textbf{coarborelui}:
\begin{equation}
\left\.
begin{array}{ccl} % c - centrat, l - aliniat la stanaa
i_1 & = & \SI{1}{\ampere} \\
i_4 & = & \SI{6}{\ampere} \\
i_6 & = & \SI{3}{\ampere} \\
i_7 & = & \SI{2}{\ampere} \\
i_9 & = & SI{4}{\alpha pere}
\end{array}
\right. \nonumber % marcarea inchiderii - falsa; blocarea numerotarii
\end{equation}
\begin{figure} [ht]
     \begin{circuitikz}[scale=1.3,european resistors,american inductors]
     \draw[red, thick]
     (0,0) to [short, *-*, i=$i_5$, color = red] (2, 2) (-2,2) to [short, *-, i=$i_3$, color = red] (0,0) (-2,2) to [short, -*, i=$i_2$, color = red](-2,-2) (2,2) to [short, -*, i=$i_8$, color = red] (2,-2);
     \draw[black, thick]
     % coarborele
     (-2,2) to [short, i=\$i_6\$] (2,2)
     (-2,-2) to [short, i=$i_7$] (2,-2)
(0,0) to [short, i=$i_4$] (-2, -2)
(-2, 2) -- (-6,2) -- (-6,0) -- (-6,-2) -- (-2,-2)
     (-6,2) to [short, i=$i_1$] (-2,2)
(2,2) -- (6,2) -- (6,0) -- (6,-2) -- (2,-2)
     (6,-2) to [short, i=\$i_9\$] (6,2)
     ;\end{circuitikz}
 \caption{Graful intensit'a'tilor.}
    \label{fig:circuit1}
    \end{center}
\end{figure}
```

## Bibliografie

- [1] Daniel Ioan, Circuite electrice rezistive breviare teoretice şi probleme, http://www.lmn.pub.ro/daniel/culegere.pdf, 2000.
- [2] G. Ciuprina, A. Gheorghe, M. Popescu, D. Niculae, A.S. Lup, R. Bărbulescu, D. Ioan, Modelarea şi simularea circuitelor electrice. Îndrumar de laborator, http://cs.curs.pub.ro/2017/course/view.php?id=50
- [3] Gabriela Ciuprina, Template pentru redactarea rapoartelor în LaTeX (v4), http://cs.curs.pub.ro/2017/course/view.php?id=50