Curs 6

Cristian Niculescu

1 Media, dispersia şi deviaţia standard pentru variabile aleatoare continue

1.1 Scopurile învăţării

1. Să poată să calculeze şi să interpreteze media, dispersia şi deviaţia standard pentru variabile aleatoare continue.
2. Să poată să calculeze şi să interpreteze quantilele pentru variabile aleatoare continue sau discrete.

1.2 Introducere

Până acum am studiat media, deviaţia standard şi dispersia pentru variabile aleatoare discrete. Aceste statistici de rezumat au acelaşi înţeles pentru variabile aleatoare continue:

- Media $\mu = E(X)$ este o măsură a tendinţei centrale.
- Deviaţia standard σ este o măsură a împrăştierii.
- Dispersia $\sigma^2 = Var(X)$ este pătratul deviaţiei standard.

Pentru a trece de la discret la continuu, pur şi simplu înlocuim sumele din formule cu integrale. Un alt tip de statistică de rezumat sunt quantilele. 0.5 quantila unei repartiţii se mai numeşte mediana sau a 50-a percentilă.

1.3 Media unei variabile aleatoare continue

Definiţie: Fie X o variabilă aleatoare continuă cu domeniul de valori $[a, b]$ (cu convenţia că, dacă $a = -\infty$ sau $b = \infty$, intervalul este deschis în acel capăt) şi funcţia densitate de probabilitate $f(x)$. Media lui X este

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Să vedem cum se compară aceasta cu formula pentru o variabilă aleatoare discretă:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i).$$

Formula discretă spune să luăm o sumă ponderată a valorilor x_i ale lui X, unde ponderile sunt probabilităţile $p(x_i)$. Reamintim că $f(x)$ este o densitate de probabilitate. Unităţile ei de măsură sunt prob/(unitatea de măsură a lui X). Deci $f(x)dx$ reprezintă probabilitatea că X este într-un domeniu de valori infinitezimal de lăţime dx în jurul lui x. Astfel, putem interpreta formula pentru $E(X)$ ca o integrală ponderată de valorile x ale lui X, unde ponderile sunt probabilităţile $f(x)dx$.

1.3.1 Exemple

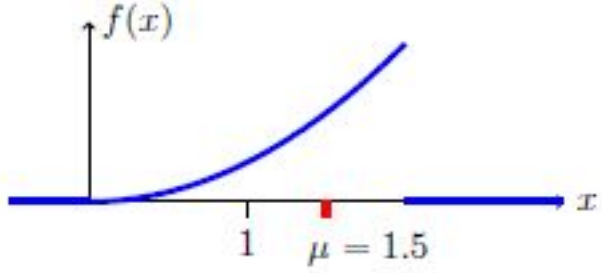
Exemplul 1. Fie $X \sim U(0,1)$. Aflaţi $E(X)$.
Răspuns: X are domeniul de valori [0,1] şi densitatea $f(x) = 1$. De aceea,

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Media este la mijlocul domeniului de valori.
Exemplul 2. Fie X cu domeniul de valori [0,2] şi densitatea $f(x) = \frac{3}{8}x^2$. Aflaţi $E(X)$.
Răspuns:

$$E(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{8}x^3 dx = \frac{3x^4}{32}\Big|_0^2 = \frac{3}{2}.$$

Are sens că X are media în jumătatea dreaptă a domeniului lui de valori?
Răspuns: Da. Deoarece densitatea de probabilitate creşte când x creşte în domeniul de valori, media lui X ar trebui să fie în jumătatea dreaptă a domeniului de valori.

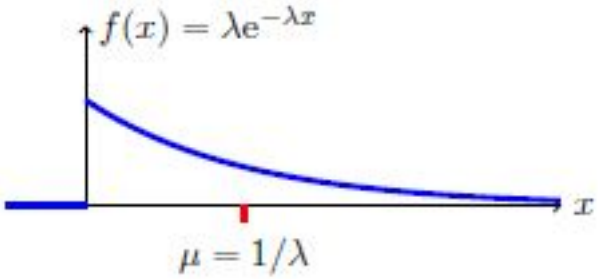


μ este "tras" la dreapta mijlocului 1 deoarece este mai multă masă la dreapta.
Exemplul 3. Fie $X \sim exp(\lambda)$. Aflaţi $E(X)$.

Răspuns: Domeniul de valori al lui X este $[0, \infty)$ şi pdf este $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Deci

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty x(-e^{-\lambda x})' dx$$
$$= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x' e^{-\lambda x} dx = 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Am folosit integrarea prin părţi şi faptul că $\lim_{x\to\infty} xe^{-\lambda x} = \lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} = 0$.



Media unei variabile aleatoare exponenţiale

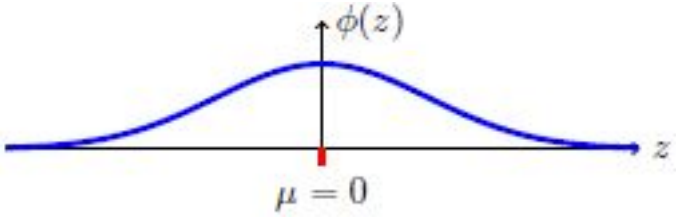
Exemplul 4. Fie $Z \sim N(0, 1)$. Aflaţi $E(Z)$.
Răspuns: Domeniul de valori al lui Z este $\mathbb{R}$ şi pdf este $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$. Avem $E(Z) = \int_{-\infty}^\infty z\phi(z)dz$. Arătăm că integrala converge, i.e. media chiar există (unele variabile aleatoare nu au medie).

$$\int_0^\infty z\phi(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z e^{-z^2/2} dz.$$

Substituţia $u = z^2/2$ dă $du = zdz$. Deci integrala devine

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u} du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Analog, $\int_{-\infty}^0 z\phi(z)dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Deci $E(Z) = \int_{-\infty}^\infty z\phi(z)dz = \int_{-\infty}^0 z\phi(z)dz + \int_0^\infty z\phi(z)dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$.



Repartiţia normală standard este simetrică şi are media 0.

1.3.2 Proprietăţile lui $E(X)$

Proprietăţile lui $E(X)$ pentru variabile aleatoare continue sunt aceleaşi ca pentru cele discrete:
1. Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare continue pe un spaţiu al probelor Ω, atunci

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y). \qquad \text{(liniaritate I)}$$

2. Dacă a şi b sunt constante, atunci

$$E(aX+b) = aE(X) + b. \qquad \text{(liniaritate II)}$$

Exemplul 5. Verificaţi că pentru $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ avem $E(X) = \mu$.
Răspuns: În exemplul 4 am arătat că pentru Z normală standard, $E(Z) = 0$. Am putea mima calculul de acolo pentru a arăta că $E(X) = \mu$. În loc de aceasta folosim proprietăţile de liniaritate ale lui $E(X)$. La manipularea variabilelor aleatoare am arătat că, dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, o putem standardiza:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

De aici avem $X = \sigma Z + \mu$. Liniaritatea mediei dă

$$E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \sigma E(Z) + \mu = \sigma \cdot 0 + \mu = \mu.$$

1.3.3 Media funcţiilor de X

Aceasta merge exact ca în cazul discret. Dacă h este o funcţie continuă, atunci $Y = h(X)$ este o variabilă aleatoare şi

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx.$$

Exemplul 6. Fie $X \sim exp(\lambda)$. Aflaţi $E(X^2)$.
Răspuns. Integrăm prin părţi de 2 ori:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x^2 (-e^{-\lambda x})' dx \\ &= -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = 0 + \int_0^{\infty} 2x \left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)' dx \\ &= -2x\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx = 0 - 2\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

1.4 Dispersia

Definiţia dispersiei este identică cu cea pentru variabile aleatoare discrete.
Definiţie: Fie X o variabilă aleatoare continuă cu media μ. Dispersia lui X este

$$Var(X) = E((X-\mu)^2).$$

1.4.1 Proprietăţi ale dispersiei

Acestea sunt exact aceleaşi ca în cazul discret.
1. Dacă X şi Y sunt independente, atunci $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$.
2. Pentru constantele a şi b, $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$.
3. **Teoremă:** $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$.
Proprietatea 3 dă o formulă pentru $Var(X)$ care este adesea mai uşor de folosit la calcule. Demonstraţiile proprietăţilor 2 şi 3 sunt analoage celor din cazul discret.
Exemplul 7. Fie $X \sim U(0,1)$. Aflaţi $Var(X)$ şi σ_X.
Răspuns: În exemplul 1 am aflat $\mu = 1/2$.

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \int_0^1 (x-1/2)^2 dx = \frac{(x-1/2)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$
$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Exemplul 8. Fie $X \sim exp(\lambda)$. Aflaţi $Var(X)$ şi σ_X.
Răspuns: În exemplele 3 şi 6 am calculat:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ şi } E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Deci, din proprietatea 3,

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ şi } \sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Puteam să calculăm şi direct din $Var(X) = \int_0^\infty (x-1/\lambda)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$.
Exemplul 9. Fie $Z \sim N(0,1)$. Arătaţi că $Var(Z) = 1$.
Răspuns: Deoarece $E(Z) = 0$, avem

$$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = E(Z^2) - 0^2 = E(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z(-e^{-z^2/2})' dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-ze^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz.$$

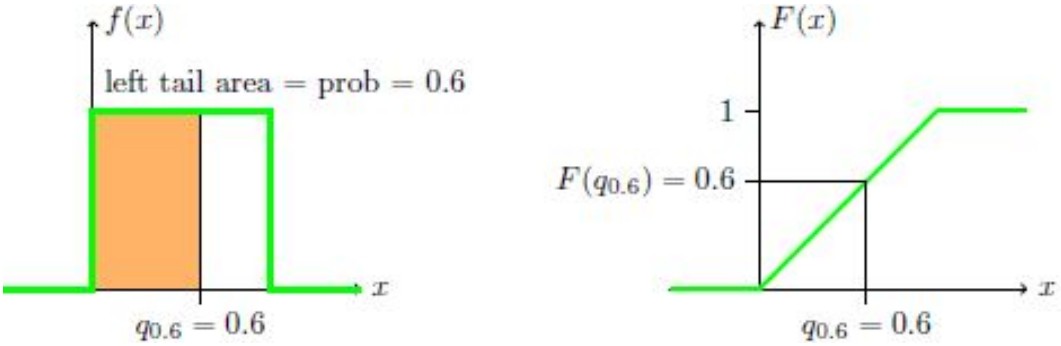
Primul termen este 0 deoarece exponenţiala tinde la 0 mai repede decât z tinde la $\pm\infty$. Al 2-lea termen este 1 deoarece este exact integrala probabilităţii totale a pdf $\phi(z)$ pentru $N(0,1)$. Deci $Var(Z) = 1$.
Exemplul 10. Fie $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Arătaţi că $Var(X) = \sigma^2$.
Răspuns: Făcând schimbarea de variabilă $z = (x-\mu)/\sigma$, avem

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$
$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \sigma^2.$$

Ultima integrală a fost calculată la exemplul 9.

1.5 Quantile

Definiţie: Mediana lui X este valoarea x pentru care $P(X \leq x) = 0.5$, i.e. valoarea lui x astfel încât $P(X \leq x) = P(X \geq x)$. Cu alte cuvinte, X are probabilitate egală de a fi deasupra sau sub mediană şi de aceea fiecare probabilitate este 1/2. În termeni de cdf $F(x) = P(X \leq x)$, putem defini echivalent mediana ca valoarea lui x satisfăcând $F(x) = 0.5$.
Gândiţi: Care este mediana lui Z?
Răspuns: Din simetrie, mediana este 0.
Exemplul 11. Aflaţi mediana lui $X \sim exp(\lambda)$.
Răspuns: Cdf a lui X este $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pe $[0, \infty)$. Mediana este valoarea lui x pentru care $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 0.5$. Rezolvând ecuaţia obţinem $x = (\ln 2)/\lambda$.
În acest caz mediana este mai mică decât media $\mu = 1/\lambda$.
Definiţie: A p-a quantilă a lui X este valoarea q_p astfel încât $P(X \leq q_p) = p$.
Observaţii. 1. Cu această notaţie mediana este $q_{0.5}$.
2. În termeni de cdf: $F(q_p) = p$.
În raport cu pdf f, quantila q_p este valoarea astfel încât sub graficul lui f este o arie de p la stânga lui q_p şi o arie de $1-p$ la dreapta lui q_p. În exemplele de mai jos, observaţi cum putem reprezenta quantila grafic folosind aria de sub graficul pdf sau înălţimea cdf.
Exemplul 12. Aflaţi 0.6 quantila pentru $X \sim U(0,1)$.
Răspuns. Cdf pentru X este $F(x) = x$ pe domeniul de valori [0,1]. Din $F(q_{0.6}) = 0.6 \Rightarrow q_{0.6} = 0.6$.

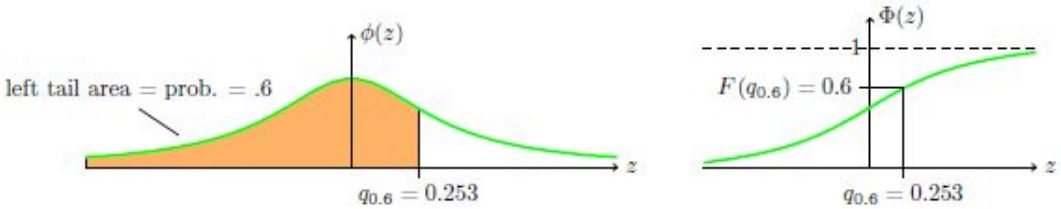


$q_{0.6}$: aria cozii stângi $= 0.6 \Leftrightarrow F(q_{0.6}) = 0.6$

Exemplul 13. Aflaţi 0.6 quantila repartiţiei normale standard.

Răspuns. Nu avem o formulă pentru cdf, deci vom folosi "funcţia quantilă" din R, `qnorm`.

$$q_{0.6} = \texttt{qnorm}(0.6, 0, 1) = \texttt{0.2533471}$$



$q_{0.6}$: aria cozii stângi $= 0.6 \Leftrightarrow F(q_{0.6}) = 0.6$

Quantilele dau o măsură utilă a locaţiei pentru o variabilă aleatoare.

1.5.1 Percentile, decile, quartile

Pentru confort, quantilele sunt adesea descrise în termeni de percentile, decile sau quartile. A 60-a percentilă este 0.6 quantila. De exemplu, sunteţi în a 60-a percentilă pentru înălţime dacă sunteţi mai înalt(ă) decât 60% din populaţie, i.e. probabilitatea să fiţi mai înalt(ă) decât o persoană aleasă aleator este 60%.

De asemenea, decilele reprezintă paşi de 1/10. A 3-a decilă este 0.3 cuantila. Quartilele sunt în paşi de 1/4. A 3-a quartilă este 0.75 quantila şi a 75-a percentilă.

2 Teorema limită centrală şi legea numerelor mari

2.1 Scopurile învăţării

1. Să înţeleagă enunţul legii numerelor mari.
2. Să înţeleagă enunţul teoremei limită centrală.
3. Să poată să utilizeze teorema limită centrală pentru a aproxima probabilităţi ale mediilor şi sumelor de variabile aleatoare independente identic distribuite.

2.2 Introducere

Media multor măsurări ale aceleiaşi cantităţi necunoscute tinde să dea o estimare mai bună decât o singură măsurare. Intuitiv, aceasta este deoarece eroarea aleatoare a fiecărei măsurări se reduce în medie. 2 moduri de a face precisă această intuiţie sunt legea numerelor mari (LoLN) şi teorema limită centrală (CLT).
Scurt, atât legea numerelor mari cât şi teorema limită centrală sunt despre multe date independente din aceeaşi repartiţie. LoLN ne spune 2 lucruri:
1. Media multor date independente este (cu mare probabilitate) aproape de media repartiţiei de bază.
2. Histograma densităţii multor date independente este (cu mare probabilitate) aproape de graficul densităţii repartiţiei de bază.
Pentru a fi absolut corecţi matematic trebuie să facem aceste afirmaţii mai precise, dar, aşa cum au fost făcute, sunt un bun mod de a gândi despre legea numerelor mari.
Teorema limită centrală spune că suma sau media multor copii independente ale unei variabile aleatoare este aproximativ o variabilă aleatoare normală. CLT continuă dând valori precise pentru media şi deviaţia standard ale variabilei normale.
Adesea în practică n nu trebuie să fie foarte mare. Valorile $n > 30$ sunt adesea suficiente.

2.2.1 Este mai multă experimentare decât matematică

Matematica LoLN spune că media unui lot de date independente dintr-o variabilă aleatoare se va apropia aproape sigur de media variabilei. Matematica nu ne spune dacă instrumentul sau experimentul produce date care merită să li se facă media. De exemplu, dacă dispozitivul de măsurare este defect sau

prost calibrat, atunci media multor măsurări va fi o estimare foarte precisă a unui lucru greşit! Acesta este un exemplu de eroare sistematică sau deplasare a datelor, în contrast cu eroarea aleatoare controlată de legea numerelor mari.

2.3 Legea numerelor mari

Presupunem că $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt variabile aleatoare independente cu aceeaşi repartiţie. În acest caz, spunem că X_i sunt independente şi identic distribuite sau i.i.d. În particular, X_i au aceeaşi medie μ şi deviaţie standard σ.
Fie $\overline{X}_n$ media lui $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

$\overline{X}_n$ este ea însăşi o variabilă aleatoare. Legea numerelor mari şi teorema limită centrală ne spun despre valoarea, respectiv, repartiţia lui $\overline{X}_n$.
LoLN: Când n creşte, probabilitatea că $\overline{X}_n$ este aproape de μ tinde la 1.
CLT: Când n creşte, repartiţia lui $\overline{X}_n$ converge la repartiţia normală $N(\mu, \sigma^2/n)$.
Exemplul 1. Medii ale variabilelor aleatoare Bernoulli
Presupunem că fiecare X_i este o aruncare independentă a unei monede corecte, deci $X_i \sim$ Bernoulli(0.5) şi $\mu = 0.5$. Atunci $\overline{X}_n$ este proporţia de aversuri în n aruncări şi ne aşteptăm că această proporţie este aproape de 0.5 pentru n mare. Acest fapt nu este garantat; de exemplu, putem obţine 1000 de aversuri în 1000 de aruncări, deşi probabilitatea ca aceasta să aibă loc este foarte mică.
Cu mare probabilitate media de selecţie $\overline{X}_n$ este aproape de media 0.5 pentru n mare. Vom verifica asta făcând unele calcule în R.
La început, vom considera probabilitatea de a fi în 0.1 a mediei. Putem exprima această probabilitate ca

$$P(|\overline{X}_n - 0.5| \leq 0.1) = P(0.4 \leq \overline{X}_n \leq 0.6).$$

Legea numerelor mari spune că această probabilitate tinde la 1 când numărul de aruncări n devine mare. Codul R produce următoarele valori pentru $P(0.4 \leq \overline{X}_n \leq 0.6)$:

$$\begin{aligned}
n = 10: &\ \texttt{pbinom}(6, 10, 0.5) - \texttt{pbinom}(3, 10, 0.5) = 0.65625 \\
n = 50: &\ \texttt{pbinom}(30, 50, 0.5) - \texttt{pbinom}(19, 50, 0.5) = 0.8810795 \\
n = 100: &\ \texttt{pbinom}(60, 100, 0.5) - \texttt{pbinom}(39, 100, 0.5) = 0.9647998 \\
n = 500: &\ \texttt{pbinom}(300, 500, 0.5) - \texttt{pbinom}(199, 500, 0.5) = 0.9999941 \\
n = 1000: &\ \texttt{pbinom}(600, 1000, 0.5) - \texttt{pbinom}(399, 1000, 0.5) = 1
\end{aligned}$$

După cum s-a prezis de LoLN, probabilitatea tinde la 1 când n creşte.
Refacem aceste calcule pentru a vedea probabilitatea de a fi în 0.01 a mediei.
Codul R produce următoarele valori pentru $P(0.49 \leq \overline{X}_n \leq 0.51)$:

$$\begin{aligned}
n = 10: &\ \texttt{pbinom}(5, 10, 0.5) - \texttt{pbinom}(4, 10, 0.5) = 0.2460937 \\
n = 100: &\ \texttt{pbinom}(51, 100, 0.5) - \texttt{pbinom}(48, 100, 0.5) = 0.2356466 \\
n = 1000: &\ \texttt{pbinom}(510, 1000, 0.5) - \texttt{pbinom}(489, 1000, 0.5) = 0.49334 \\
n = 10000: &\ \texttt{pbinom}(5100, 10000, 0.5) - \texttt{pbinom}(4899, 10000, 0.5) = 0.9555742
\end{aligned}$$

Din nou, vedem probabilitatea de a fi aproape de medie tinzând la 1 când n creşte. Deoarece $0.01 < 0.1$ este nevoie de valori mai mari ale lui n pentru a creşte probabilitatea să se apropie de 1.
Convergenţa probabilităţii la 1 este LoLN în acţiune! Astfel, conform LoLN, cu probabilitate mare, media unui mare număr de date independente din aceeaşi repartiţie va fi foarte aproape de media repartiţiei.

2.3.1 Enunţul formal al legii numerelor mari

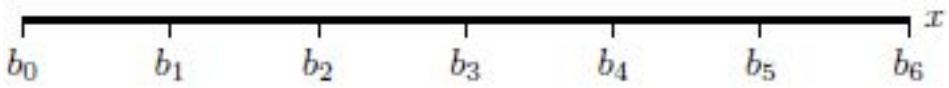
Teoremă (Legea numerelor mari): Presupunem că $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ sunt variabile aleatoare i.i.d. cu media μ şi dispersia σ^2. Pentru fiecare n, fie $\overline{X}_n$ media primelor n variabile. Atunci pentru orice $a > 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| < a) = 1.$$

Aceasta spune precis că atunci când n creşte, probabilitatea de a fi în a a mediei tinde la 1. Ne gândim la a ca la o mică toleranţă a erorii de la adevărata medie μ. În exemplul nostru, dacă vrem ca probabilitatea să fie cel puţin $p = 0.99999$ ca proporţia de aversuri $\overline{X}_n$ este în $a = 0.1$ a lui $\mu = 0.5$, atunci $n > N = 500$ va fi suficient de mare. Dacă descreştem toleranţa a şi/sau creştem probabilitatea p, atunci N trebuie să fie mai mare.

2.4 Histograme

Putem rezuma date multiple $x_1, ..., x_n$ ale unei variabile aleatoare într-o histogramă. Aici vrem să construim histogramele cu grijă astfel încât ele să semene cu aria de sub pdf.
Instrucţiunile pas cu pas pentru a construi o histogramă de densitate sunt următoarele.
1. Alegem un interval de pe dreapta reală şi-l împărţim în m intervale, cu capetele $b_0, b_1, ..., b_m$. De obicei aceste intervale au lungimi egale, deci presupunem asta de la început.



Fiecare din intervale este numit coş (în engleză bin). De exemplu, în figura de mai sus, primul coş este $[b_0, b_1]$ şi ultimul coş este $[b_5, b_6]$. Fiecare coş are o lăţime a coşului, de exemplu $b_1 - b_0$ este lăţimea primului a coş. De obicei toate coşurile au aceeaşi lăţime, numită lăţimea coşului histogramei.

2. Plasăm fiecare x_i în coşul care-i conţine valoarea. Dacă x_i este pe frontiera a 2 coşuri, îl punem în coşul din stânga (aceasta este modul implicit în R, deşi poate fi schimbat).

3. Pentru a desena o histogramă de frecvenţe: punem un dreptunghi vertical deasupra fiecărui coş. Înălţimea dreptunghiului ar trebui să fie egală cu numărul de x_i-uri din coş.

4. Pentru a desena o histogramă de densitate: punem un dreptunghi vertical deasupra fiecărui coş. Aria dreptunghiului ar trebui să fie egală cu fracţia din toate datele care sunt în coş.

Observaţii:

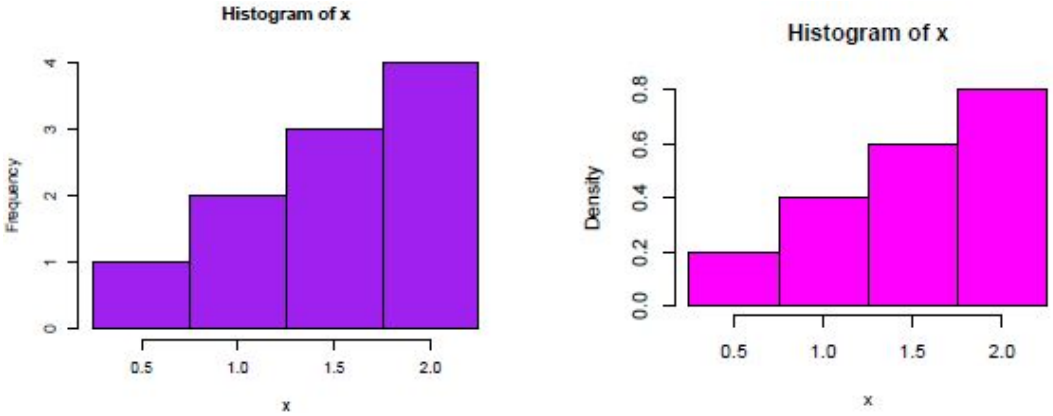
1. Când toate coşurile au aceeaşi lăţime, dreptunghiurile histogramei de frecvenţe au aria proporţională cu numărul. Deci histograma de densitate rezultă simplu din împărţirea înălţimii fiecărui dreptunghi la aria totală a histogramei de frecvenţe. Ignorând scala verticală, cele 2 histograme arată identic.

2. Atenţie: dacă lăţimile coşurilor diferă, histogramele de frecvenţă şi de densitate pot arăta foarte diferit.

În general, preferăm histograma de densitate deoarece scala ei verticală este aceeaşi cu cea a pdf.

Exemple. Iată câteva exemple de histograme, toate cu datele [0.5,1,1,1.5,1.5,1.5,2,2,2,2].

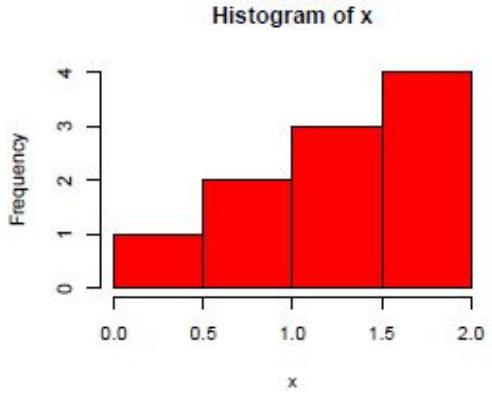
1. Aici reprezentările frecvenţei şi densităţii arată la fel, dar au scale verticale diferite.

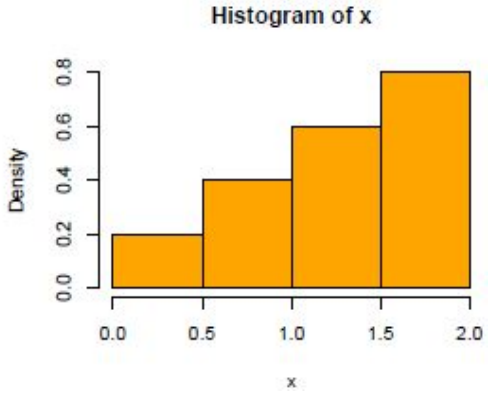


Coşuri centrate în 0.5, 1, 1.5, 2, i.e. lăţime 0.5, margini la 0.25, 0.75, 1.25,

1.75, 2.25.

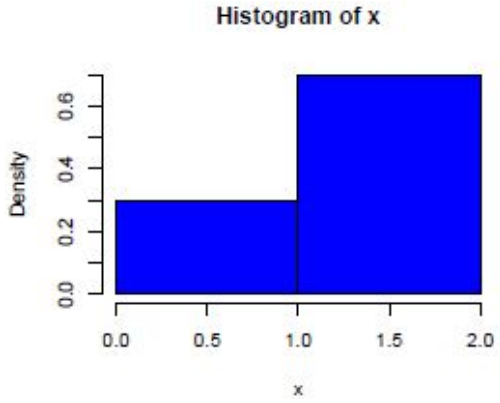
2. Aici valoarile sunt toate pe frontierele coşurilor şi sunt puse în coşul din stânga. Adică, coşurile sunt închise la dreapta, de exemplu primul coş este intervalul închis la dreapta (0,0.5].



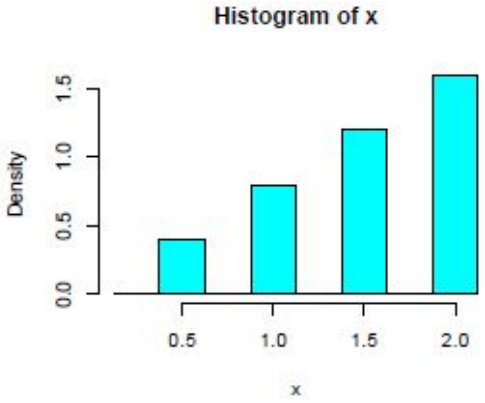


Marginile coşurilor la 0, 0.5, 1, 1.5, 2.

3. Aici sunt histograme de densitate bazate pe diferite lăţimi de coşuri. Scala păstrează aria totală egală cu 1. Golurile sunt coşuri cu zero date.

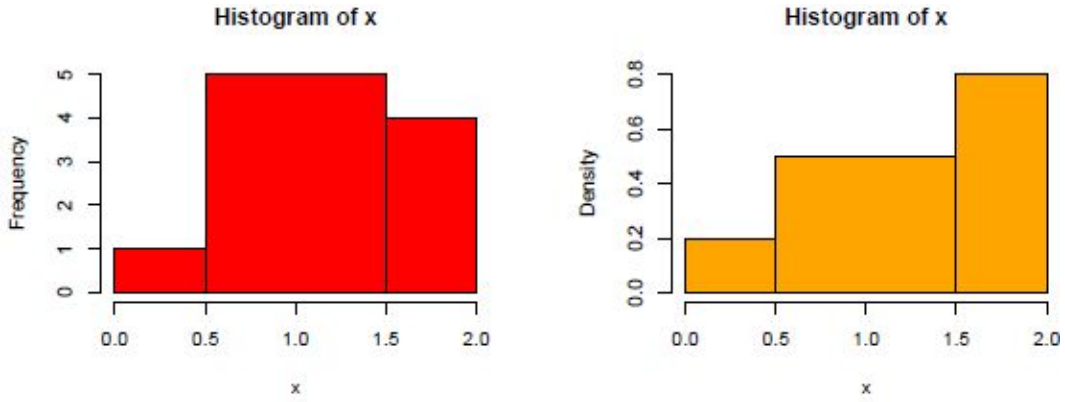


Stânga: coşuri late.



Dreapta: coşuri înguste.

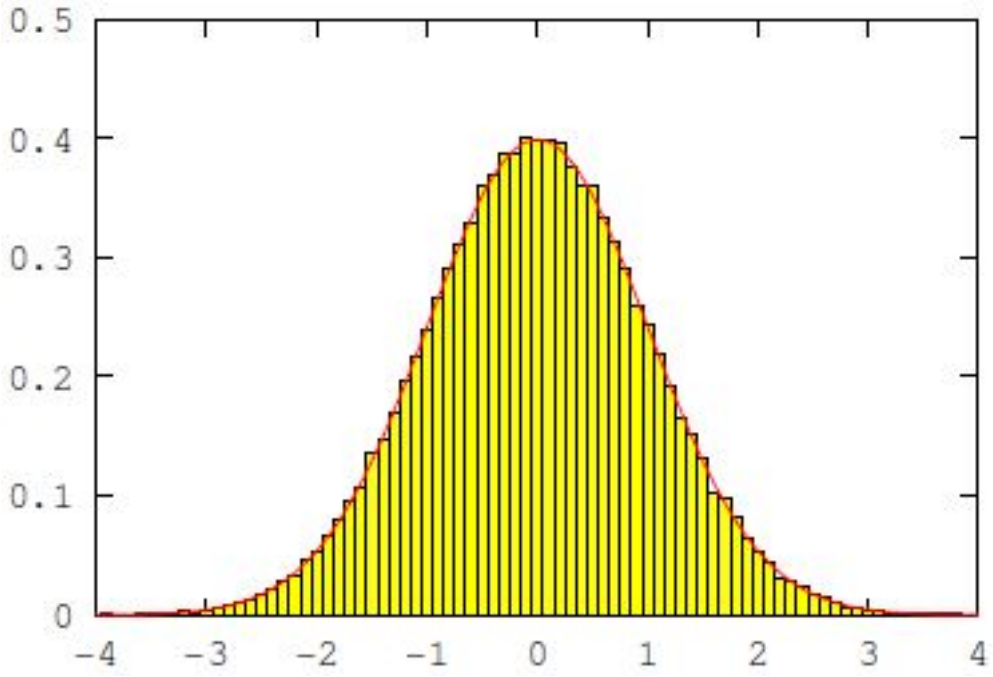
4. Aici folosim lăţimi diferite de coşuri, aşa că histogramele de frecvenţă şi densitate arată diferit.



Nu vă lăsaţi păcăliţi! Acestea sunt bazate pe aceleaşi date.
Histograma de densitate este alegerea mai bună la lăţimi diferite de coşuri. De fapt, R se va plânge dacă încercăm să facem o histogramă de frecvenţe cu lăţimi diferite de coşuri. Comparaţi histograma de frecvenţe cu lăţimi diferite de coşuri cu toate celelalte histograme pe care le-am desenat pentru aceste date. Arată clar diferit. Ce s-a întâmplat este că prin combinarea datelor din coşurile (0.5,1] şi (1,1.5] într-un coş (0.5,1.5] am făcut mai mare înălţimea ambelor coşuri mai mici.

2.4.1 Legea numerelor mari şi histogramele

Legea numerelor mari are o consecinţă importantă pentru histograme de densitate.
LoLN pentru histograme: Cu probabilitate mare histograma de densitate a unui mare număr de date dintr-o repartiţie este o bună aproximare a graficului pdf f a repartiţiei.
Ilustrăm aceasta generând o histogramă de densitate cu lăţimea coşului 0.1 din 10000 de date dintr-o repartiţie normală standard. Histograma de densitate urmăreşte foarte aproape graficul pdf normală standard ϕ.



Histograma de densitate a 10000 de date dintr-o repartiţie normală standard, cu graficul lui ϕ în roşu.

2.5 Teorema limită centrală

2.5.1 Standardizare

Fiind dată o variabilă aleatoare X cu media μ şi deviaţia standard σ, definim standardizarea lui X ca noua variabilă aleatoare

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Z are media 0 şi deviaţia standard 1. Dacă X are o repartiţie normală, atunci standardizarea lui X are repartiţia normală standard Z cu media 0 şi dispersia 1. Aceasta explică termenul "standardizare" şi notaţia Z de mai sus.

2.5.2 Enunţul teoremei limită centrală

Presupunem că $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ sunt variabile aleatoare i.i.d., fiecare având media μ şi deviaţia standard σ. Pentru fiecare n notăm cu S_n suma şi cu $\overline{X}_n$

media lui $X_1, ..., X_n$.

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}.$$

Proprietăţile mediei şi dispersiei arată că

$$E(S_n) = n\mu,\ Var(S_n) = n\sigma^2,\ \sigma_{S_n} = \sigma\sqrt{n}$$
$$E(\overline{X}_n) = \mu,\ Var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n},\ \sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Deoarece S_n este multiplu al lui $\overline{X}_n$, S_n şi $\overline{X}_n$ au aceeaşi standardizare

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Teorema limită centrală: Pentru n mare,

$$\overline{X}_n \approx N(\mu, \sigma^2/n),\ S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2),\ Z_n \approx N(0,1).$$

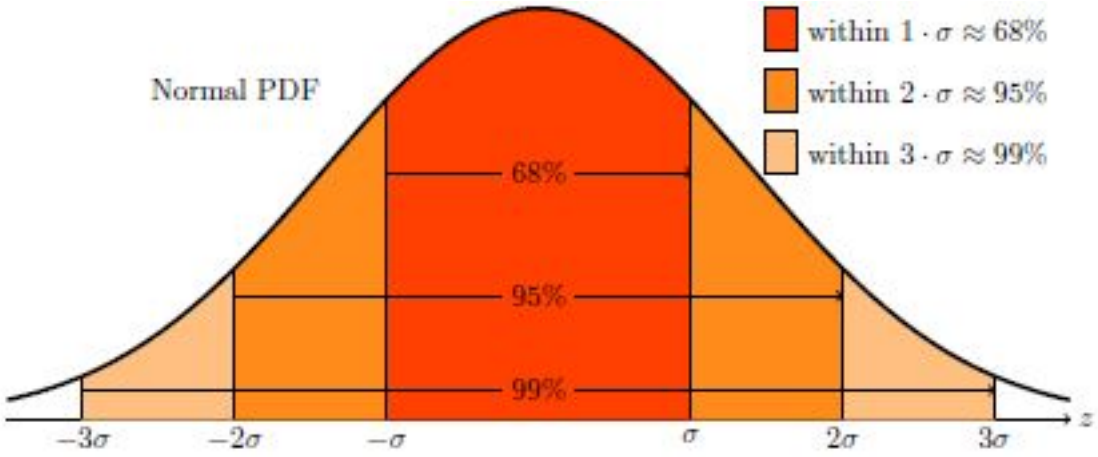
Observaţii: 1. În cuvinte: $\overline{X}_n$ este aproximativ o repartiţie normală cu aceeaşi medie ca X, dar o dispersie mai mică.
2. S_n este aproximativ normală.
3. $\overline{X}_n$ şi S_n standardizate sunt aproximativ normale standard.
Teorema limită centrală ne permite să aproximăm o sumă sau medie de variabile aleatoare i.i.d. printr-o variabilă aleatoare normală. Ea este extrem de folositoare deoarece de obicei este uşor să facem calcule cu repartiţia normală.
Un enunţ precis al CLT este: cdf-urile lui Z_n converg la Φ:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \Phi(z).$$

2.5.3 Probabilităţi normale standard

Pentru a aplica CLT vrem să avem la îndemână unele probabilităţi normale standard. Reamintim: dacă $Z \sim N(0,1)$, atunci cu rotunjire avem:
1. $P(|Z| < 1) = 0.68$.
2. $P(|Z| < 2) = 0.95$; mai precis, $P(|Z| < 1.96) \approx 0.95$.
3. $P(|Z| < 3) = 0.997$.
Aceste numere sunt uşor de calculat în R folosind `pnorm`. Oricum, ele sunt

demne de reamintit ca regula degetului mare.
1. Probabilitatea că o variabilă aleatoare normală este într-o deviaţie standard de la media ei este 0.68. (Adică, $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(|X - \mu| < \sigma) \approx 0.68$.)
2. Probabilitatea că o variabilă aleatoare normală este în 2 deviaţii standard de la media ei este 0.95.
3. Probabilitatea că o variabilă aleatoare normală este în 3 deviaţii standard de la media ei este 0.997.



Consecinţe:
1. $P(Z < 1) \approx 0.84$.
2. $P(Z < 2) \approx 0.977$.
3. $P(Z < 3) \approx 0.999$.

Demonstraţie: 1. Ştim că $P(|Z| < 1) = 0.68$. Probabilitatea rămasă de 0.32 este în 2 regiuni $Z > 1$ şi $Z < -1$. Aceste regiuni sunt numite coada dreaptă, respectiv coada stângă. Din simetrie, fiecare coadă are 0.16. Deci,

$$P(Z < 1) = P(|Z| < 1) + P(\text{coada stângă}) \approx 0.68 + 0.16 = 0.84.$$

Celelalte 2 consecinţe se fac similar.

2.5.4 Aplicaţii ale CLT

Exemplul 2. Aruncăm o monedă corectă de 100 de ori. Estimaţi probabilitatea a mai mult de 55 de aversuri.
Răspuns: Fie X_j rezultatul celei de-a j-a aruncări, deci $X_j = 1$ pentru avers şi $X_j = 0$ pentru revers. Numărul total de aversuri este

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_{100}.$$

Ştim că $E(X_j) = 0.5$ şi $Var(X_j) = 1/4$. Deoarece $n = 100$, avem

$$E(S) = 50, \ Var(S) = 25, \ \text{şi } \sigma_S = 5.$$

Teorema limită centrală spune că standardizarea lui S este aproximativ $N(0,1)$. Se cere estimarea $P(S > 55)$. Standardizând şi folosind CLT obţinem

$$P(S > 55) = P\left(\frac{S-50}{5} > \frac{55-50}{5}\right) \approx P(Z > 1) \approx 0.16.$$

Aici Z este o variabilă aleatoare normală şi $P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) \approx 1 - 0.84 = 0.16$.

Exemplul 3. Estimaţi probabilitatea a mai mult de 220 de aversuri în 400 de aruncări.

Răspuns: Este aproape identic cu exemplul precedent. Acum $\mu_S = 200$ şi σ_S=10 şi se cere estimarea $P(S > 220)$. Standardizând şi folosind CLT obţinem:

$$P(S > 220) = P\left(\frac{S-\mu_S}{\sigma_S} > \frac{220-200}{10}\right) \approx P(Z > 2) \approx 0.023.$$

Din nou, $Z \sim N(0,1)$ şi regulile degetului mare arată că $P(Z > 2) \approx 0.023$.

Observaţie: Cu toate că 55/100=220/400, probabilitatea a mai mult de 55 de aversuri în 100 de aruncări este mai mare decât probabilitatea a mai mult de 220 de aversuri în 400 de aruncări. Aceasta este datorată LoLN şi valorii mai mari a lui n în ultimul caz.

Exemplul 4. Estimaţi probabilitatea unui număr între 40 şi 60 de aversuri în 100 de aruncări.

Răspuns: Ca în primul exemplu, $E(S) = 50$, $Var(S) = 25$ şi $\sigma_S = 5$. Deci

$$P(40 \le S \le 60) = P\left(\frac{40-50}{5} \le \frac{S-50}{5} \le \frac{60-50}{5}\right) \approx P(-2 \le Z \le 2).$$

Putem calcula ultimul membru folosind regula degetului mare. Pentru un răspuns mai precis folosim R:

$$\texttt{pnorm}(2) - \texttt{pnorm}(-2) = \texttt{0.9544997}.$$

Reamintim că am folosit repartiţia binomială pentru a calcula un răspuns de 0.9647998. Deci răspunsul nostru aproximativ folosind CLT are o eroare de aproximativ 1%.

Gândiţi: Vă aşteptaţi ca metoda CLT să dea o aproximare mai bună sau mai rea pentru $P(200 < S < 300)$ cu $n = 500$?
Verificaţi răspunsul folosind R.

Exemplul 5. Sondaj. Când se face un sondaj politic, rezultatele sunt adesea raportate ca un număr cu o margine de eroare. De exemplu, $52\% \pm 3\%$ susţin

candidatul A. Regula degetului mare este că dacă sondezi n oameni, atunci marginea de eroare este $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$. Vom vedea acum exact ce înseamnă aceasta şi că este o aplicaţie a teoremei limită centrală.
Presupunem că sunt 2 candidaţi A şi B. Presupunem mai departe că fracţia din populaţie care preferă pe A este p_0. Adică, dacă întrebi o persoană aleatoare pe cine preferă, probabilitatea să răspundă A este p_0.
Pentru a face sondajul, un sondator alege aleator n persoane şi le întreabă "Susţineţi candidatul A sau candidatul B?" Astfel, putem vedea sondajul ca o secvenţă de n date Bernoulli(p_0) independente, $X_1, X_2, ..., X_n$, unde X_i este 1 dacă a i-a persoană preferă pe A şi 0 dacă preferă pe B. Fracţia de oameni sondaţi că-l preferă pe A este chiar media $\overline{X}$.
Ştim că fiecare $X_i \sim$ Bernoulli(p_0), deci

$$E(X_i) = p_0 \text{ şi } \sigma_{X_i} = \sqrt{p_0(1-p_0)}.$$

De aceea, teorema limită centrală ne spune că

$$\overline{X} \approx N(p_0, \sigma/\sqrt{n}), \text{ unde } \sigma = \sqrt{p_0(1-p_0)}.$$

Într-o repartiţie normală 95% din probabilitate este în 2 deviaţii de la medie. Aceasta înseamnă că în 95% din sondajele a n oameni media de selecţie $\overline{X}$ va fi în $2\sigma/\sqrt{n}$ de la adevărata medie p_0. Pasul final este să observăm că pentru orice valoare p_0 avem $\sigma \leq 1/2$. (De exemplu, se poate aplica inegalitatea mediilor.) Aceasta înseamnă că putem spune că în 95% din sondajele a n oameni media de selecţie este în $1/\sqrt{n}$ de la adevărata medie. Statisticianul frecvenţionist ia intervalul $[\overline{X} - 1/\sqrt{n}, \overline{X} + 1/\sqrt{n}]$ şi-l numeşte intervalul de 95% încredere pentru p_0.
Un cuvânt de precauţie: este tentant şi uzual, dar greşit, a gândi că este o probabilitate de 95% ca adevărata fracţie p_0 să fie în intervalul de încredere. Acest fapt este subtil, dar eroarea este aceeaşi cu a gândi că ai boala dacă un test 95% precis iese pozitiv. Este adevărat că 95% din oamenii care fac testul primesc rezultatul corect. Nu este necesar adevărat că 95% dintre toate testele pozitive sunt corecte.

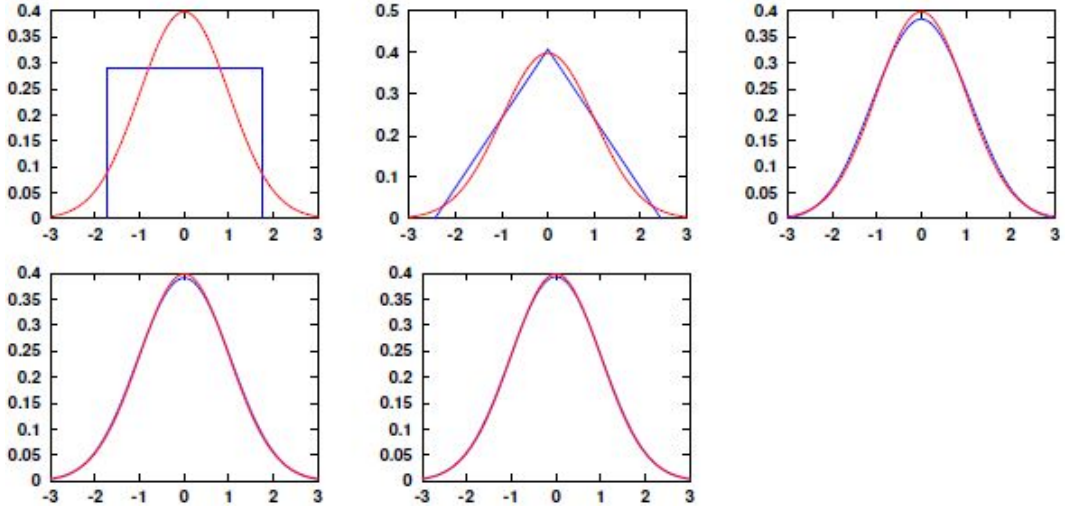
2.5.5 De ce folosim CLT?

Deoarece probabilităţile din exemplele de mai sus puteau fi calculate folosind repartiţia binomială, poate vă întrebaţi care este rostul aflării unui răspuns aproximativ folosind CLT. De fapt, puteam să calculăm exact aceste probabilităţi deoarece X_i erau Bernoulli şi de aceea suma S era binomială. În general, repartiţia lui S nu va fi familiară, de aceea nu vom putea calcula exact probabilităţile pentru S; se poate întâmpla ca să fie posibil calculul

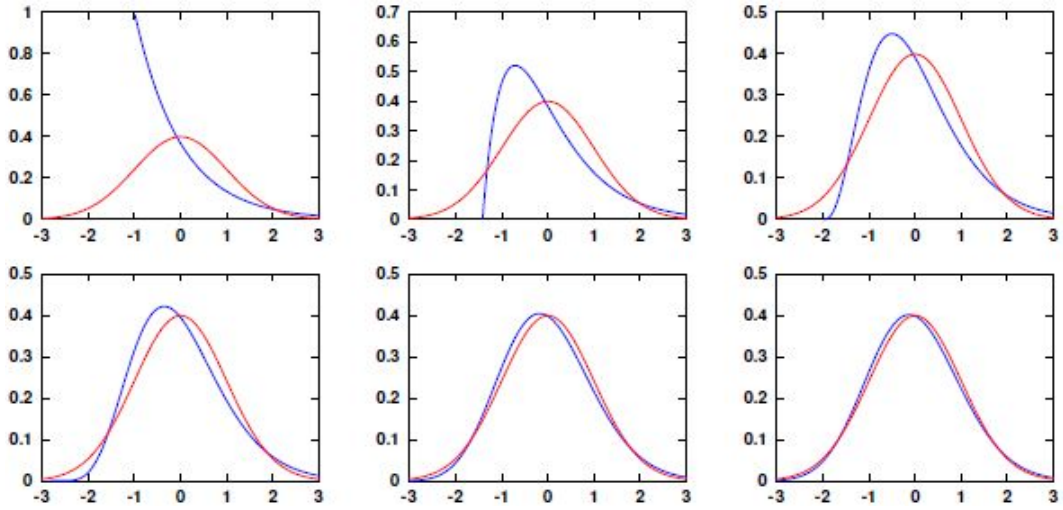
exact în teorie, dar să fie prea greu de calculat în practică, chiar şi pentru un computer. Puterea CLT este că se poate aplica când X_i are aproape orice repartiţie.

2.5.6 Cât de mare trebuie să fie n pentru a aplica CLT?

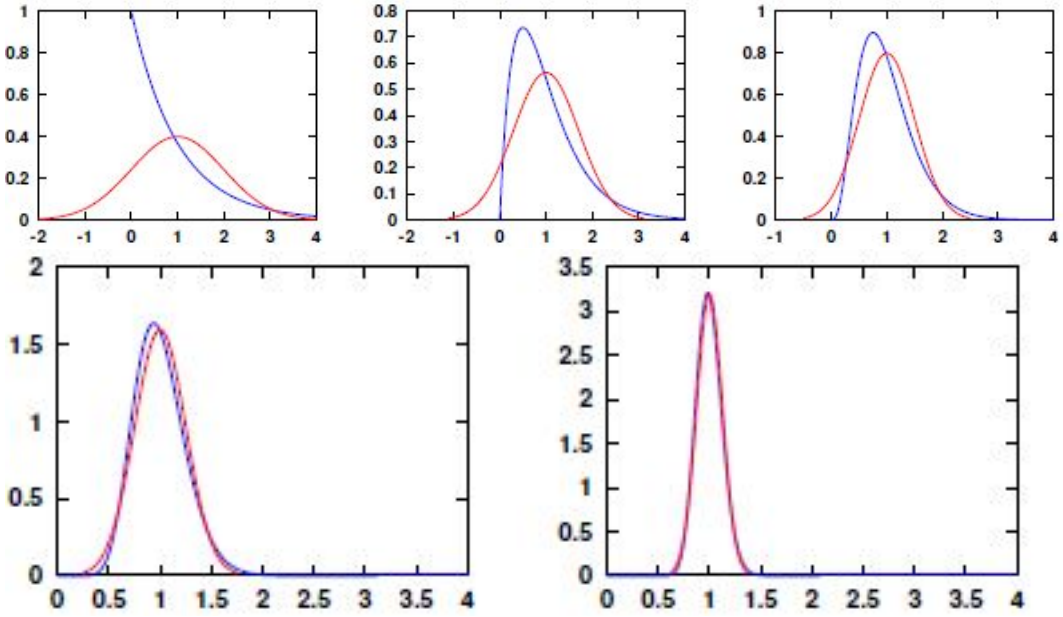
Răspuns scurt: adesea, nu aşa mare.
Următoarele secvenţe de imagini arată convergenţa la o repartiţie normală. Întâi arătăm media standardizată a n variabile aleatoare **uniforme** i.i.d. cu $n = 1, 2, 4, 8, 12$. Pdf a mediei este cu albastru şi pdf normală standard este în roşu. La $n = 12$ potrivirea dintre media standardizată şi adevărata normală arată foarte bine.



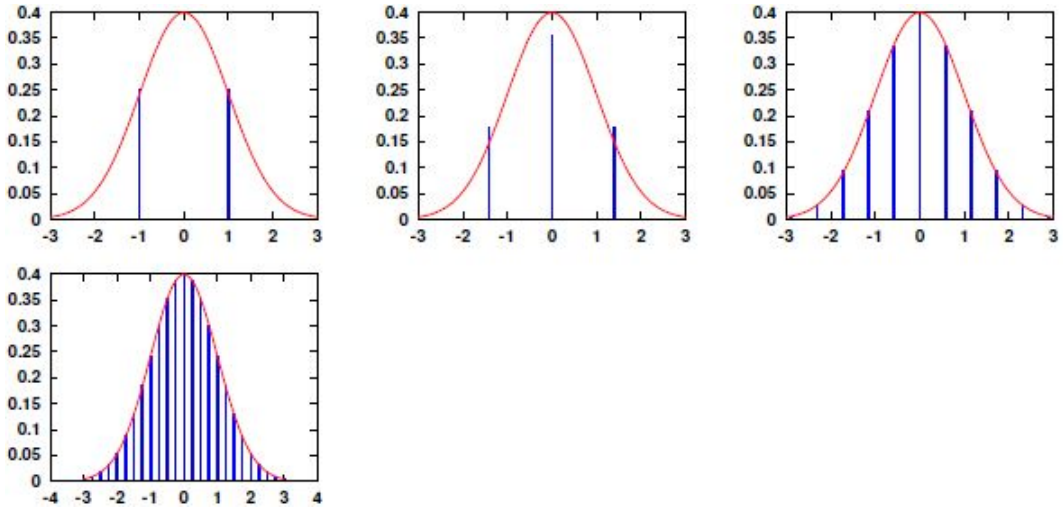
Apoi arătăm media standardizată a n variabile aleatoare **exponenţiale** i.i.d. cu $n = 1, 2, 4, 8, 16, 64$. Această densitate asimetrică ia mai mulţi termeni pentru a se apropia de densitatea normală.



Apoi arătăm media (nestandardizată) a n variabile aleatoare exponenţiale cu $n = 1, 2, 4, 16, 64$. Deviaţia standard de micşorează când n creşte, rezultând o densitate mai ascuţită.



Teorema limită centrală funcţionează şi pentru variabile aleatoare discrete. Aici este media standardizată a n variabile aleatoare Bernoulli(0.5) i.i.d. cu $n = 1, 2, 12, 64$. Când n creşte, media poate lua mai multe valori, ceea ce permite repartiţiei discrete să "umple" densitatea normală.



La sfârşit arătăm media (nestandardizată) a n variabile aleatoare Bernoulli(0.5), cu $n = 4, 12, 64$. Deviaţia standard devine mai mică rezultând o densitate mai ascuţită.