Algoritmi avansați

C12 - Elemente de programare liniară

Mihai-Sorin Stupariu

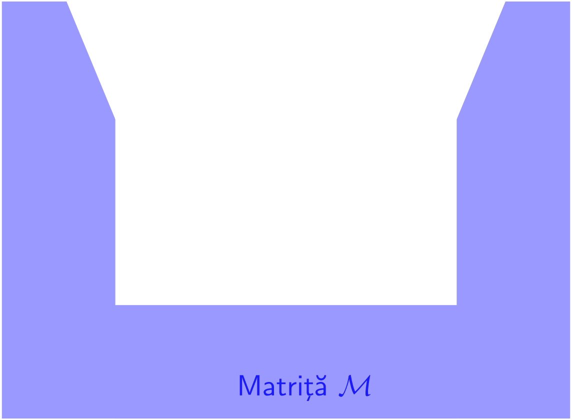
Sem. al II-lea, 2020-2021

Motivație: turnarea pieselor în matrițe

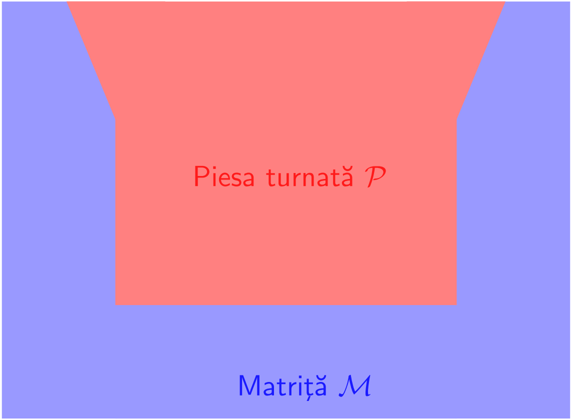
Intersecții de semiplane - abordare cantitativă

Dualitate

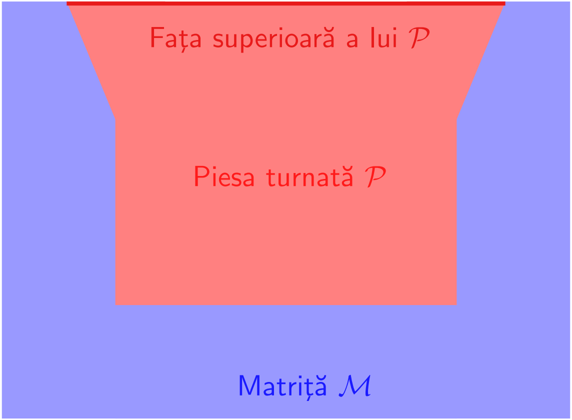
Turnarea pieselor în matrițe



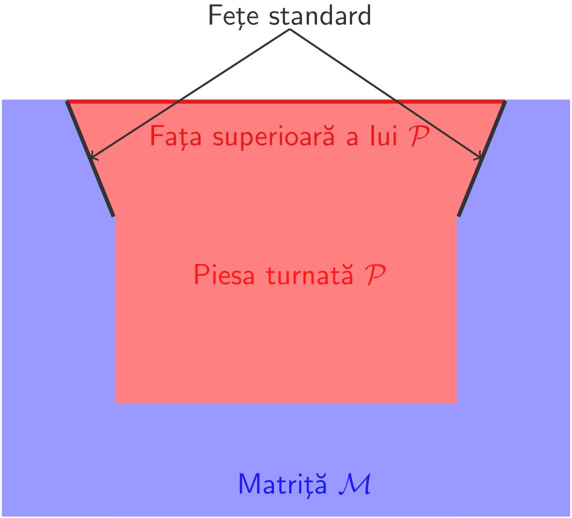
Turnarea pieselor în matrițe



Turnarea pieselor în matrițe



Turnarea pieselor în matrițe



Problematizare

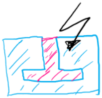
- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.

Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată.

Problematizare

- Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată.



- **Problema studiată.** Dat un obiect, există o matriță din care să poată fi extras?

Convenții

- Obiectele: **poliedrale**.

Convenții

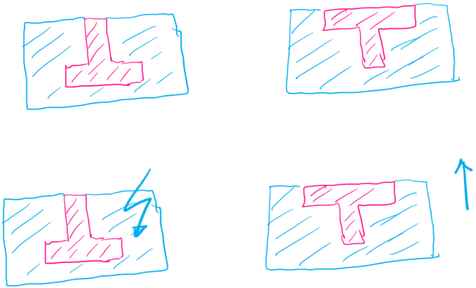
- Obiectele: **poliedrale**.
- Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect $\mathcal{P}$ îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$

Convenții

- Obiectele: **poliedrale**.
- Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect $\mathcal{P}$ îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$
- Obiectul: extras printr-o singură translație (sau o succesiune de translații)

Convenţii

- Obiectele: **poliedrale**.
- Matriţele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect $\mathcal{P}$ îi este asociată o matriţă $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$
- Obiectul: extras printr-o singură translaţie (sau o succesiune de translaţii)
- **Alegerea orientării:** diverse orientări ale obiectului pot genera diverse matriţe.



Terminologie și convenții

- **Fața superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o fața superioară (este orizontală, este singura care nu este adiacentă cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard $\hat{f}$ a matriței.

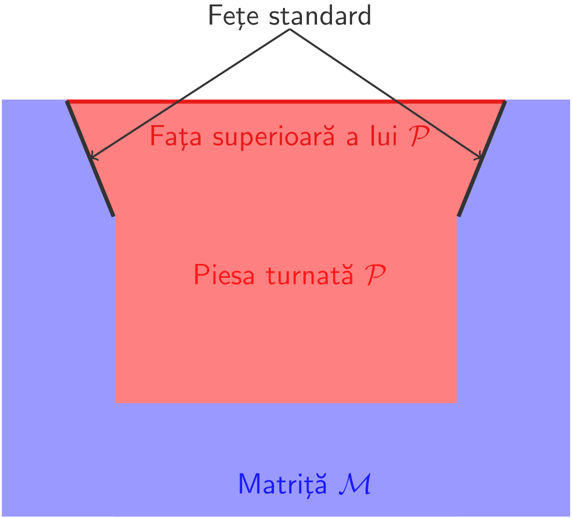
Terminologie și convenții

- **Fața superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o fața superioară (este orizontală, este singura care nu este adiacentă cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard $\hat{f}$ a matriței.
- **Obiect care poate fi turnat (*castable*):** există o orientare pentru care acesta poate fi turnat și apoi extras printr-o translație (succesiune de translații): *direcție admisibilă*.

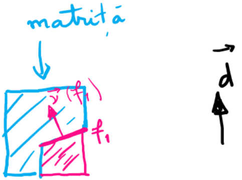
Terminologie și convenții

- **Fața superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o fața superioară (este orizontală, este singura care nu este adiacentă cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard $\hat{f}$ a matriței.
- **Obiect care poate fi turnat (*castable*):** există o orientare pentru care acesta poate fi turnat și apoi extras printr-o translație (succesiune de translații): *direcție admisibilă*.
- **Convenții:** Matrița este paralelipipedică și are o cavitate corespunzătoare obiectului; fața superioară a obiectului (și a matriței) este perpendiculară cu planul Oxy.

Turnarea pieselor în matrițe



Descrierea proprietății de a putea extrage o piesă într-o direcție dată



$\vec{\nu}(f_1)$ = normala exterioară la f_1

fața $\hat{f}_1$ a matriței blochează extragerea în direcția $\vec{d}$ <=>

$m(\sphericalangle(\vec{\nu}(f_1), \vec{d})) < 90^\circ$

<=> $\cos(\sphericalangle(\vec{\nu}(f_1), \vec{d})) > 0$

$\vec{\nu}(f_2)$

— " — $\hat{f}_2$ <u>nu</u> blochează

<=> $m(\sphericalangle(\vec{\nu}(f_2), \vec{d})) \geq 90^\circ$

<=> $\cos(\vec{\nu}(f_2), \vec{d}) \leq 0$

Această condiție tb. verificată ptr. toate fețele!

Detaliere (scriere în coordonate)

Dați $v, w \in \mathbb{R}^3$: $\cos(\measuredangle(v, w)) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}$ $\left(\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \right)$

Cum vrem să extragem obiectul "în sus", f.r.g. putem pp. că $\vec{d} = (d_x, d_y, 1)$ (de ce?)

Fie f o față fixată a obiectului; $\vec{\nu}(f) = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$

Faptul că fața $\hat{f}$ a matriței nu blochează extragerea în direcția $\vec{d}$ $\Leftrightarrow$

$$\langle \vec{\nu}(f), \vec{d} \rangle \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\nu_x \cdot d_x + \nu_y d_y + \nu_z \leq 0} \quad (*_f)$$

Fixată f ($\rightarrow (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$) căutăm $\vec{d}\,(d_x, d_y)$ a.î. să fie verificată $(*_f)$

$\boxed{(*_f)\text{: inecuație care descrie un semiplan}}$

Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$

Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.

Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.
- **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație $(*_f)$, care corespunde unui semiplan.

Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la față f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.
- **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație $(*_f)$, care corespunde unui semiplan.
- **Analitic - toate fețele:** Fie $\mathcal{P}$ un poliedru; fața superioară fixată, paralelă cu planul Oxy. Considerăm matrița asociată și toate fețele matriței (i.e. toate fețele standard ale poliedrului). A determina o direcție admisibilă revine la a determina o direcție care verifică toate inegalitățile de tip $(*)$, deci un sistem de inecuații.

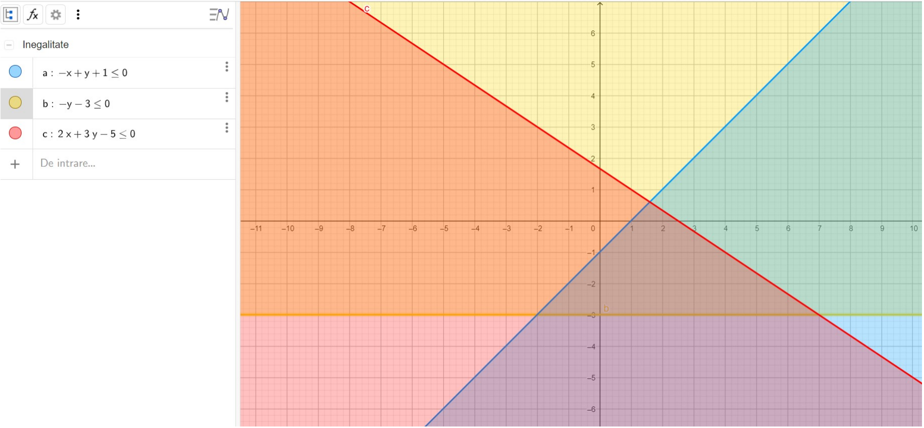
Fundamente geometrice

- **Condiție necesară:** direcția de extragere $\vec{d}$ trebuie să aibă componenta z pozitivă
- **În general:** o față standard $\hat{f}$ a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{\nu}(f)$ la fața f și $\vec{d}$ este mai mic de 90° împiedică translația în direcția $\vec{d}$
- **Propoziție.** *Un poliedru $\mathcal{P}$ poate fi extras din matrița sa $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ prin translație în direcția $\vec{d}$ dacă și numai dacă $\vec{d}$ face un unghi de cel puțin 90° cu normala exterioară a fiecărei fețe standard a lui $\mathcal{P}$.*
- **Reformulare.** Dat $\mathcal{P}$, trebuie găsită o direcție $\vec{d}$ astfel încât, pentru fiecare față standard f, unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90°.
- **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație $(*_f)$, care corespunde unui semiplan.
- **Analitic - toate fețele:** Fie $\mathcal{P}$ un poliedru; fața superioară fixată, paralelă cu planul Oxy. Considerăm matrița asociată și <u>toate</u> fețele matriței (i.e. toate fețele standard ale poliedrului). A determina o direcție admisibilă revine la a determina o direcție care verifică <u>toate</u> inegalitățile de tip $(*)$, deci un sistem de inecuații.
- **Concluzie:** Pentru a stabili dacă există o direcție admisibilă, trebuie stabilit dacă o **<u>intersecție de semiplane</u>** este nevidă.

Exemple

1. Intersecția semiplanelor

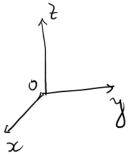
$$-x + y + 1 \leq 0; \quad -y - 3 \leq 0; \quad 2x + 3y - 5 \leq 0.$$

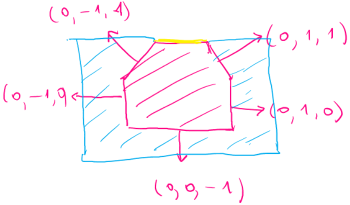


Exemple

2 (a). Normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0, -1, 1),\ (0, 1, 1),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, -1),\ (0, -1, 0).$$





$$\left.\begin{array}{l}
(0,-1,1) \rightsquigarrow 0\cdot x + (-1)\cdot y + 1 \le 0 \\
(0,1,1) \rightsquigarrow 0\cdot x + 1\cdot y + 1 \le 0 \\
(0,1,0) \longrightarrow 0\cdot x + 1\cdot y + 0 \le 0 \\
(0,0,-1) \rightsquigarrow 0\cdot x + 0\cdot y + (-1) \le 0 \\
(0,-1,0) \rightsquigarrow 0\cdot x + (-1)\cdot y + 0 \le 0
\end{array}\right\} \quad
\begin{array}{l}
y \ge 1 \\
y \le -1 \\
y \le 0 \\
-1 \le 0 \\
y \ge 0
\end{array}$$

Temă

2 (b). Normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0,1,0),\ (0,1,-1),\ (0,0,-1),\ (0,-1,-1),\ (0,-1,0).$$

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.
- **Rezultate:** (descrise în detaliu ulterior)

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  - (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  - (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.
- **Rezultate:** (descrise în detaliu ulterior)
  - (i) *Intersecția unei mulțimi de n semiplane poate fi determinată cu complexitate-timp $O(n \log n)$ și folosind $O(n)$ memorie.*

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

- **Probleme studiate:**
  (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
  (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.
- **Rezultate:** (descrise în detaliu ulterior)
  (i) *Intersecția unei mulțimi de n semiplane poate fi determinată cu complexitate-timp $O(n \log n)$ și folosind $O(n)$ memorie.*
  (ii) *Se poate stabili cu complexitate-timp medie $O(n)$ dacă o intersecție de semiplane este nevidă.*
  (ii)' *Fie $\mathcal{P}$ un poliedru cu n fețe. Se poate decide dacă $\mathcal{P}$ reprezintă un obiect care poate fi turnat cu complexitate-timp medie $O(n^2)$ și folosind $O(n)$ spațiu. În caz afirmativ, o matriță și o direcție admisibilă în care poate fi extras $\mathcal{P}$ este determinată cu aceeași complexitate-timp.*

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

- Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din $\mathbb{R}^2$; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0$$

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

- Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din $\mathbb{R}^2$; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0$$

- Intersecția $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$ este dată de un sistem de inecuații; este o mulțime poligonală convexă, mărginită de cel mult n muchii (poate fi vidă, mărginită, nemărginită,...)

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

- Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din $\mathbb{R}^2$; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0$$

- Intersecția $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$ este dată de un sistem de inecuații; este o mulțime poligonală convexă, mărginită de cel mult n muchii (poate fi vidă, mărginită, nemărginită,...)
- Semiplane inferioare, semiplane superioare

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**

Dualitate — motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?
- **2**

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?
- **2**
- Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?
- **2**
- Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?
- **DA: dualitate**

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan**?
- **2**
- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan**?
- **2**
- Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?
- **DA: dualitate**
- Cum se reflectă / respectă diferite proprietăți geometrice (de exemplu incidența) prin dualitate?

Dualitate – definiții

- unui punct $p = (p_x, p_y)$ din planul $\mathbb{R}^2$ (plan primal) i se asociază o dreaptă notată p^* (în planul dual)

$$\boxed{p^* : (y = p_x x - p_y)}$$ duala lui p

- unei drepte neverticale $d : (y = m_d \cdot x + n_d)$ din planul primal i se asociază un punct din planul dual, notat d^* :

$$\boxed{d^* = (m_d, -n_d)}$$ dualul lui d

Obs. Această transformare este polaritatea față de parabola $y = \frac{x^2}{2}$.

Dualitate – proprietăți elementare

1) Păstrează incidența

$$p \in d \iff d^* \in p^*$$

Exemplu

Pl. primal	Pl. dual
$d: (y = 2x + 1)$	$d^* = (2, -1)$
$p = (1, 3)$	$p^*: (y = x - 3)$

Dualitate – proprietăți elementare

2) Păstrează "ordinea"

p este situat deasupra dreptei d (neverticală) $\Leftrightarrow$

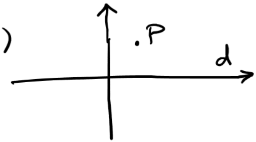
d^* —"— —"— p^*

Exemplu

Pl. primal

$p = (1,1)$

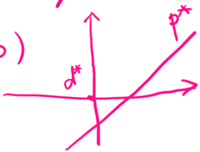
$d : (y = 0)$



Pl. dual

$p^* : (y = x - 1)$

$d^* = (0,0)$

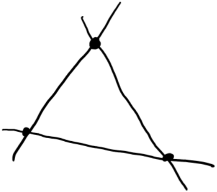


Dualitate – "dicționar" concepte și configurații

Plan primal	**Plan dual**
Punct p	Dreaptă neverticală p^*
Dreaptă neverticală d	Punct d^*
Dreaptă determinată de două puncte	Punct de intersecție a două drepte
Punctul p deasupra dreptei d	Punctul d^* deasupra dreptei p^*
Segment	Fascicul de drepte (*wedge*)

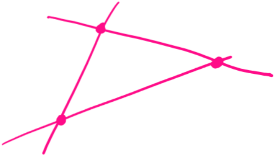
Exemplu

Configurație primală



3 puncte necoliniare
și dreptele determinate
de ele

Configurație duală



3 drepte care nu
trec prin același punct
și punctele determinate
de ele