

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

TUTORIAT
ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE
VI

STUDENȚI:

Radu Dimitrie Octavian

Țigănilă Ștefania

Bălan Mihai

BUCUREȘTI

2025

Breviar – Forme biliniare (de văzut în curs!).

$$(V, +, \cdot)|_{\mathbb{K}}$$

$g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ se numeste forma biliniara $\Leftrightarrow g$ este liniara in fiecare argument

$$\begin{aligned} g(ax + by, z) &= a g(x, z) + b g(y, z) \\ g(x, ay + bz) &= a g(x, y) + b g(x, z) \end{aligned} \quad \forall a, b \in \mathbb{K}; x, y, z \in V$$

si notam cu $L(V, V; \mathbb{K})$ multimea formelor biliniare pe V

g forma simetrica $\Leftrightarrow g(x, y) = g(y, x)$ cu $L^s(V, V; \mathbb{K})$ multimea f.bilin. simetrice

g forma antisimetrica $\Leftrightarrow g(x, y) = -g(y, x)$ cu $L^a(V, V; \mathbb{K})$ multimea f.antisimetrice

$Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ se numeste forma patratica $\Leftrightarrow \exists g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$ astfel incat

$$Q(x) = g(x, x) \quad \forall x \in V$$

Breviar – Matricea asociată unei forme biliniare (de văzut în curs!).

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= a_{11}(x_1, y_1) + a_{12}(x_1, y_2) + a_{13}(x_1, y_3) + a_{21}(x_2, y_1) + a_{22}(x_2, y_2) + \\ &+ a_{23}(x_2, y_3) + a_{31}(x_3, y_1) + a_{32}(x_3, y_2) + a_{33}(x_3, y_3). \end{aligned}$$

g nedegenerata $\Leftrightarrow G$ nedegenerata (inversabila)

$$(V, +, \cdot)|_{\mathbb{R}}$$

$Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ forma patratica reala

g forma biliniara simetrica pozitiv definita $\Leftrightarrow Q$ forma patratica asociata pozitiv

definita $\Leftrightarrow \begin{cases} 1) Q(x) > 0 \forall x \in V \setminus \{0_V\} \\ 2) Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V \end{cases}$ sau *signatura* \mathbb{J} este $(n, 0)$.

Metoda Jacobi. Metoda Gauss (de văzut în curs).

Metoda Jacobi:

$Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ forma patratică reală

Fie R reper în V astfel încât G asociată formei Q verifică:

$$\Delta_1 = g_{11}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}; \dots; \Delta_n = \det(G) \text{ toți nenuli}$$

Atunci \exists un reper în V astfel încât

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2$$

Mai mult, *dacă* $\Delta_i > 0 \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow Q$ este pozitiv definită.

Metoda Gauss:

$Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ forma patratică $\Rightarrow \exists$ *un reper* în V astfel încât Q are o formă canonică

± exemple la tutorial

Procedeul Gram-Schmidt.

Exemplu 1:

$$(\mathbb{R}^3, g_0), \quad V = \langle \{(1, -1, 1), (2, -1, 3), (1, 3, 5)\} \rangle$$

a) $V^\perp = ?$

b) $R = R_1 \cup R_2$ reper ortonormat = ?; unde R_1 reper ortonormat in V respectiv R_2 in V^\perp .

c) Fie p proiectia ortogonală pe V . $p(0, 1, 0) = ?$

Rezolvare:

a)

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_0(x, f_1) = 0, g_0(x, f_2) = 0, g_0(x, f_3) = 0\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \right\}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 3 + 6 + 1 - 9 + 10 = 17 - 17 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 \\ 2x_1 - x_2 = -3x_3 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = -2x_3; x_2 = -x_3.$$

$$V^\perp = \{(-2x_3, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(-2, -1, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$V^\perp = \langle \{(-2, -1, 1)\} \rangle$$

b)

$$V = \langle \{f_1 = (1, -1, 1), f_2 = (2, -1, 3)\} \rangle$$

Aplicam Gram – Schmidt:

$$e_1 = f_1 = (1, -1, 1)$$

$$e_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} f_1$$

Calculam $\langle f_2, e_1 \rangle$:

$$f_2 = (2, -1, 3)$$

$$e_1 = (1, -1, 1)$$

$$\langle f_2, e_1 \rangle = 2 * 1 + (-1) * (-1) + 3 * 1 = 2 + 1 + 3 = 6$$

Calculam $\langle e_1, e_1 \rangle$:

$$e_1 = (1, -1, 1)$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 1 * 1 + (-1) * (-1) + 1 * 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$e_2 = (2, -1, 3) - \frac{6}{3}(1, -1, 1) = (2, -1, 3) - (2, -2, 2) = (0, 1, 1)$$

$$R'_1 = \{e_1 = (1, -1, 1), e_2 = (0, 1, 1)\} \text{ reper ortogonal in } V$$

$$R_1 = \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|} \right\} \text{ reper ortonormat in } V$$

$$\|e_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\|e_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$R_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \right\} \text{ reper ortonormat in } V$$

$$V^\perp = \langle \{f_3 = (-2, -1, 1)\} \rangle$$

$$R'_2 = \{e_3 = (-2, -1, 1)\} \text{ reper ortogonal in } V^\perp$$

$$R_2 = \left\{ \frac{e_3}{\|e_3\|} \right\} \text{ reper ortonormat in } V^\perp$$

$$\|e_3\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$R_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, 1) \right\} \text{ reper ortonormat in } V^\perp(2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow R = R_1 \cup R_2 \text{ reper ortonormat in } \mathbb{R}^3$$

c)

$$(0, 1, 0) = a \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \right) + b \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \right) + c \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, 1) \right)$$

$$a = \dots; b = \dots; c = \dots$$

$$\Rightarrow p(0, 1, 0) = a \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \right) + b \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) \right) = \dots \text{ (de vazut in Tutoriatul 5 -}$$

– Proiectii si simetrii ☺)

Exemplu 2:

$$(\mathbb{R}^3, g_0), \quad U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right. \right\}$$

$$a) U^\perp = ?$$

$$b) R = R_1 \cup R_2 \text{ reper ortonormat} = ?; \text{ unde } R_1 \text{ reper ortonormat in } U \text{ respectiv } R_2 \text{ in } U^\perp.$$

$$c) \text{ Fie } s \text{ simetria ortogonală față de } U^\perp. s(-1, 0, 1) = ?$$

-----> de facut

Exemplu 3:

$$(\mathbb{R}^3, g_0), v = (1, 5, -1)$$

a) $\langle \{v\}^\perp \rangle = ?$

b) *Determinati un reper ortonormat in $\langle \{v\}^\perp \rangle$.*

-----> *de facut*