UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

TUTORIAT
ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE
IX

STUDENȚI:

Radu Dimitrie Octavian

Țigănilă Ștefania

Bălan Mihai

BUCUREȘTI

2025

Ecuația unei drepte afine în $\mathbb{R}^n$

Exemplu 1:

$(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, g_0), \varphi)$

$Sa\ se\ afle\ \mathcal{D}\ dreapta\ afina\ care\ trece\ prin\ A(9\ ,2\ ,-5) si\ are\ v = (3\ ,2\ ,2)\ vector$

$director.$

Rezolvare:

$$\mathcal{D}: \frac{x_1 - 9}{3} = \frac{x_2 - 2}{2} = \frac{x_3 + 5}{2} = t\ sau\ \mathcal{D}: \begin{cases} x_1 = 3t + 9 \\ x_2 = 2t + 2 \\ x_3 = 2t - 5 \end{cases} ;\ \ t \in \mathbb{R}$$

Exemplu 2:

$Sa\ se\ afle\ \mathcal{D}\ dreapta\ afina\ stiind\ ca\ A(1\ ,2\ ,4), B(7\ ,3\ ,5) \in \mathcal{D}.$

Rezolvare:

$$\mathcal{D}: \frac{x_1 - 1}{7 - 1} = \frac{x_2 - 2}{3 - 2} = \frac{x_3 - 4}{5 - 4} \Leftrightarrow \mathcal{D}: \frac{x_1 - 1}{6} = \frac{x_2 - 2}{1} = \frac{x_3 - 4}{1} = t$$

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x_1 = 6t + 1 \\ x_2 = t + 2 \\ x_3 = t + 4 \end{cases} ;\ \ t \in \mathbb{R}$$

Poziția relativă a două drepte în $\mathbb{R}^n$

$n = 3$

$$\begin{cases} tv_1 - sv_1' = b_1 - a_1 \\ tv_2 - sv_2' = b_2 - a_2 \\ tv_3 - sv_3' = b_3 - a_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} v_1 & -v_1' & b_1 - a_1 \\ v_1 & -v_1' & b_1 - a_1 \\ v_1 & -v_1' & b_1 - a_1 \end{array}\right) = C$$

1) $rg(C) = 2(maxim) \to rg(\bar{C}) = 3 \Rightarrow necoplanare$

$\to rg(\bar{C}) = 2 \Rightarrow concurente$

2) $rg(c) = 1 \to rg(\bar{C}) = 1 \ \Rightarrow coincid$

$\to rg(\bar{C}) \neq 1 \ \Rightarrow paralele$

Ecuația unui plan afin în $\mathbb{R}^n$

$$A(a_1, a_2, a_3); \ \ B(b_1, b_2, b_3); \ \ C(c_1, c_2, c_3) \in \Pi$$

$$\Pi: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \cdots$$

Exemplu 1:

$A(a_1, a_2, a_3) \in \Pi \qquad u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)\ vectori\ directori$

$a)\ N = ?$

$b)\ ecuatia\ lui\ \Pi = ?$

Rezolvare:

$$a)\ N = u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \cdots = (a, b, c)$$

$b)\ \Pi: ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\ (+de\ aflat\ d)$

Exemplu 2:

$A(a_1, a_2, a_3) \in \Pi$

$\mathcal{D}: \dfrac{x_1 - b_1}{u_1} = \dfrac{x_2 - b_2}{u_2} = \dfrac{x_3 - b_3}{u_3}$; $\mathcal{D} \perp \Pi$

$Ecuatia\ planului\ \Pi = ?$

Rezolvare:

$N_\perp = u_{\mathcal{D}} = (u_1, u_2, u_3)$

$\forall\ M \in \Pi, < \overrightarrow{AM}, N = 0 \ \Rightarrow\ u_1(x_1 - b_1) + u_2(x_2 - b_2) + u_3(x_3 - b_3) = 0 \Rightarrow \cdots$

Perpendiculara comuna a doua drepte necoplanare

$n = 3$

$\mathcal{D}_1: \dfrac{x_1 - a_1}{u_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{u_2} = \dfrac{x_3 - a_3}{u_3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = tu_1 + a_1 \\ x_2 = tu_2 + a_2 \\ x_3 = tu_3 + a_3 \end{cases}$

$\mathcal{D}_2: \dfrac{x_1 - b_1}{v_1} = \dfrac{x_2 - b_2}{v_2} = \dfrac{x_3 - b_3}{v_3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = tv_1 + b_1 \\ x_2 = tv_2 + b_2 \\ x_3 = tv_3 + b_3 \end{cases}$

$u, v\ vectori\ directori\ pentru\ \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$

$A \in \mathcal{D}_1, B \in \mathcal{D}_2$

$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\ necoplanare\ \Rightarrow \left| u, v, \overrightarrow{AB} \right| \neq 0$

$Fie\ \mathcal{D}\ perpendiculara\ comuna$

$p_1(tu_1 + a_1, tu_2 + a_2, tu_3 + a_3) \in \mathcal{D}_1$

$p_2(tv_1 + b_1, tv_2 + b_2, tv_3 + b_3) \in \mathcal{D}_2$

$< \overrightarrow{p_1p_2}, u >= 0 \ \Rightarrow t$

$< \overrightarrow{p_1p_2}, v >= 0 \ \Rightarrow s$

$\Rightarrow\; p_1 = \cdots;\; p_2 = \cdots \;\Rightarrow\; \mathcal{D} = p_1 p_2$ ($+Interpretare\ geometrica \rightarrow in\ curs$)

$In\ plus, Dist(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = Dist(p_1, p_2) = \|\overrightarrow{p_1 p_2}\|.$