UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

TUTORIAT
ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE
I

STUDENȚI:
Radu Dimitrie Octavian
Țigănilă Ștefania
Bălan Mihai

BUCUREȘTI
2025

Metoda eliminării Gauss-Jordan

De ce e importantă ?

Rezolvarea unui sistem cu 20 de ecuații și 20 de necunoscute prin metoda Cramer (*cu date de intrare apropiate de realitate și frecvență de 1 GHz*) ar dura pentru un sistem de calcul aproximativ 633 de ani. Deci...☺

(În plus, deoarece numărul pivoților reprezintă rangul matricei coeficienților ⇒ oferă informații suplimentare față de Cramer.)

Exemplu 1:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 10 \\ 3x + 2y + 3z = 16 \\ 2x + 5y - 2z = 6 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 16 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{array}\right) \underset{L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 - 3L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right) \overset{L_3 - \frac{1}{7}L_2}{\sim}$$

$$\overset{L_3 - \frac{1}{7}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 1 & 10 \\ 0 & \mathbf{-7} & 0 & -14 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & -12 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{4}L_1}{\overset{-\frac{1}{7}L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{L_1 - 3L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{L_1 - L_3}{\sim}$$

Forma eșalon

$$\overset{L_1 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Forma eșalon redusă

Exemplu 2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$ ----------------------------> *de rezolvat la tablă*

Exemplu 3:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$ --------------------> *de rezolvat la tablă*

Inversa unei matrice folosind metoda Gauss-Jordan. Metode de calculare a inversei unei matrice.

Exemplu 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvare:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(\ \boldsymbol{A}\ |\ \boldsymbol{I_3}\ )} \underset{\sim}{\frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} L_2 - L_1 \\ \sim \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\frac{1}{2}L_1}$$

$$\underset{\sim}{\frac{2}{5}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_3 + \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{-5L_3}$$

$$\overset{-5L_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right) \overset{L_1-\frac{1}{2}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right) \underset{L_2-\frac{3}{5}L_3}{\overset{L_1-\frac{1}{5}L_3}{\sim}}$$

$$\underset{L_2-\frac{3}{5}L_3}{\overset{L_1-\frac{1}{5}L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$$(\quad \boldsymbol{I_3} \quad | \quad \boldsymbol{A} \quad)$$

Exemplu 2:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$-------------------------> *inversa de rezolvat asemănător*

Inversa unei matrice folosind Teorema Hamilton-Cayley.

Exemplu 1:

$$A^{-1} = ?\, pentru\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - Tr(A) * A + \det(A) * I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 - 4A + (-1)I_2 = O_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(A - 4I_2) = I_2 \Rightarrow A^{-1} = A - 4I_2 \Rightarrow \cdots$$

Exemplu 2:

Analog pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. În plus $\Rightarrow$Cum s-ar face A^7, A^n?

++++++++

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$A^3 - 6A^2 + 12A = O_n \ ; rg(2I_n - A) = ?$$

Idee: Polinoame 😊.