Mulțimea părților lui T se n $2^T = \mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

$f|_X$ Restricția

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$ def1.1Funcția caracteristică

Mulțimea funcțiilor de la A la B se notează $Fun(A, B)$ sau B^A. $f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

Funcția identică a lui A: 1_A

Definiția 1.2

Spunem că A este echipotentă cu B dacă există $f : A \to B$. Notație: $A \sim B$.

Teorema 1.4 (Teorema Cantor-Schröder-Bernstein)

Fie A și B două mulțimi astfel încât există $f : A \to B$ și $g : B \to A$ funcții injective. Atunci $A \sim B$.

(i) Pentru orice mulțime A, $Fun(\emptyset, A)$ are un singur element, funcția vidă.

(ii) Pentru orice mulțime nevidă A, $Fun(A, \emptyset) = \emptyset$.

Definiția 1.5

O mulțime A se numește finită dacă $A = \emptyset$ sau dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. A este echipotentă cu $\{1, \ldots, n\}$.

Definiția 1.7

O mulțime A este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.
O mulțime finită sau numărabilă se numește cel mult numărabilă.

Exemple de mulțimi numărabile: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$.

Teorema Cantor

$\mathbb{R}$, $2^{\mathbb{N}}$ nu sunt mulțimi numărabile.
Se poate demonstra că

Propoziția 1.8

$\mathbb{R}$ este echipotentă cu $2^{\mathbb{N}}$.

Propoziția 1.9

(i) Orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.
(ii) Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este cel mult numărabilă.
(iii) O mulțime A este cel mult numărabilă ddacă există o funcție injectivă de la A la o mulțime numărabilă.
(iv) Produsul cartezian a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.
(v) Reuniunea a două mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Corolar 1.10

Fie A o mulțime numărabilă și B o mulțime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ și $A \cup B$ sunt numărabile.

- Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele transfinite sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citește alef zero).
- $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și puterea continuumului.
- O mulțime A este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.
- $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$.
- $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

Fie I o mulțime nevidă.

Definiția 1.11

Fie A o mulțime. O familie de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i, obținem o familie (indexată) de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$.

Definiția 1.12

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se definește astfel:

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.$$

- $\prod_{i\in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

Propoziția 1.13

(i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.
(ii) Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabilă.
(iii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabil.

Definiția 1.14

O relație n-ară între $A_1, \ldots, A_n$ este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$.
O relație n-ară pe A este o submulțime a lui A^n. Dacă R este relație n-ară, spunem că n este aritatea lui R.

Exemple
- relația de divizibilitate pe $\mathbb{N}$: $| = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid$ există $m \in \mathbb{N}$ a.î. $mk = n\}$
- relația de ordine strictă pe $\mathbb{N}$: $<= \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid$ există $m \in \mathbb{N}$ a.î. $m \neq 0$ și $m + k = n\}$

Fie A o mulțime nevidă și R o relație binară pe A.

Definiția 1.17

R este relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Definiția 1.18

R este relație de
- *ordine parțială dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.*
- *ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă.*
- *ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.*

Notație: Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiția 1.16

- *R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.*
- *R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.*
- *R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx.*
- *R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy și yRx implică $x = y$.*
- *R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$, xRy și yRz implică xRz.*
- *R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx.*

Am terminat Prolog-ul :)) (0-20 pagini). Urmează LOGICA PROPOZIȚIONALĂ.

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe propoziții sau enunțuri declarative, despre care se poate argumenta în principiu că sunt adevărate sau false. Adică nu întrebări sau exclamații.

Considerăm anumite propoziții ca fiind atomice și le notăm $p, q, r, \ldots$ sau $p_1, p_2, p_3, \ldots$.
Exemple: p=Numărul 2 este par. q=Mâine plouă. r=Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate φ, ψ, χ, $\cdots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\to$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

Definiția 2.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:
- *o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;*
- *conectori logici: $\neg$ (se citește non), $\to$ (se citește implică)*
- *paranteze: (,).*

- Mulțimea *Sim* a simbolurilor lui *LP* este $$Sim := V \cup \{\neg, \to, (,)\}.$$
- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \ldots$

Operația de bază pentru expresii este concatenarea: dacă $\varphi = \varphi_0 \ldots \varphi_{k-1}$ și $\psi = \psi_0 \ldots \psi_{l-1}$ sunt expresii, atunci concatenarea lor, notată $\varphi\psi$, este expresia $\varphi_0 \ldots \varphi_{k-1}\psi_0 \ldots \psi_{l-1}$.

Definiția 2.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.
- *Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numește (i, j)-subexpresia lui θ;*

Definiția 2.2

Mulțimea Expr a expresiilor lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.
- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ. Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui *LP* de lungime n.
- Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n$.

Definiția 2.4 definiție inductivă.

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:
(F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
(F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
(F2) Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.
(F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notații: Mulțimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
- Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Propoziția 2.5

Mulțimea Form a formulelor lui LP este numărabilă.

"Introducere informală" în Logica Propozițională. Urm. inducție și recursie.

Propoziția 2.6 (Principiul inducției pe formule)

Fie $\boldsymbol{P}$ o proprietate. Presupunem că:
(0) Orice variabilă are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
(1) Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
(2) Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ și ψ au proprietatea $\boldsymbol{P}$, atunci $(\varphi \to \psi)$ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
Atunci orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Dem.: Pentru orice formulă φ, notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ, $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.
Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n + 1$. Avem trei cazuri:
- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea $\boldsymbol{P}$. Rezultă din (2) că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. □

Principiul inducției pe formule

Propoziția 2.7 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:
- *$V \subseteq \Gamma$;*
- *Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;*
- *Γ este închisă la $\to$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$.*

Atunci $\Gamma = Form$.

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ ddacă $\varphi \in \Gamma$.

Conform definiției lui Γ, rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 2.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea $\boldsymbol{P}$, deci orice formulă φ este în Γ. Așadar, $\Gamma = Form$. □

Principiul recursiei pe formule

Propoziția 2.9 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \to A, \quad G_\neg : A \to A, \quad G_\to : A \times A \to A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \to A$$

care satisface următoarele proprietăți:
(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.
(R1) $F(\neg\varphi) = G_\neg(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ.
(R2) $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ.

Principiul recursiei pe formule

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da definiții recursive ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : Form \to \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ, $c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ.

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned} c(v) &= 0 && \text{pentru orice variabilă } v \\ c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 && \text{pentru orice formulă } \varphi \\ c(\varphi \to \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 && \text{pentru orice formule } \varphi, \psi. \end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \to A$, $G_0(v) = 0$,
$G_\neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $G_\neg(n) = n + 1$,
$G_\to : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $G_\to(m, n) = m + n + 1$.

Formule

Conectorii derivați $\vee$ (se citește sau), $\wedge$ (se citește și), $\leftrightarrow$ (se citește dacă și numai dacă) sunt introduși prin abrevierile:

$$\begin{aligned} (\varphi \vee \psi) &:= ((\neg\varphi) \to \psi) \\ (\varphi \wedge \psi) &:= (\neg(\varphi \to (\neg\psi))) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)). \end{aligned}$$

Convenții
- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, dar scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $(((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \to \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Pag 38: Urm. SEMANTICA PROPOZIȚIONALĂ:

Tabele de adevăr

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr: 1 pentru adevărat și 0 pentru fals. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.
Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind tabelele de adevăr.

$\neg : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$,

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$\to : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}$,

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \to q = 1 \iff p \leq q$.

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0, 1\}$, $p \vee q = \neg p \to q$, $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Evaluări

Definiția 2.10

O evaluare (sau interpretare) este o funcție $e : V \to \{0, 1\}$.

Teorema 2.11

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : Form \to \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:
- *$e^+(v) = e(v)$ pentru orice $v \in V$.*
- *$e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in Form$,*
- *$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in Form$.*

Dem.: Aplicăm Principiul recursiei pe formule (Propoziția 2.9) cu $A = \{0, 1\}$, $G_0 = e$, $G_\neg : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$, $G_\neg(p) = \neg p$ și $G_\to : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}$, $G_\to(p, q) = p \to q$. □

Propoziția 2.12

Dacă $e : V \to \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ,

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \vee \psi) &= e^+(\varphi) \vee e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

Propoziția 2.13

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$,

(*) $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi)$.

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ ddacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:
- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.
- $\varphi = \neg\psi$ și ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\varphi) = Var(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că $$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$ deci φ satisface $\boldsymbol{P}$.
- $\varphi = \psi \to \chi$ și ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\psi) \subseteq Var(\varphi)$ și $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$ și pentru orice $v \in Var(\chi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ și χ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că $$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \to e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \to e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$ deci φ satisface $\boldsymbol{P}$. □

Fie φ o formulă arbitrară și $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \ldots, e(x_k)$, conform Propoziției 2.13.
Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \ldots, x_k\} \to \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Fie φ o formulă.

Definiția 2.14

- *O evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notație: $e \vDash \varphi$.*
- *φ este satisfiabilă dacă admite un model.*
- *Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este nesatisfiabilă sau contradictorie.*
- *φ este tautologie dacă orice evaluare este model al lui φ. Notație: $\vDash \varphi$.*

Notație: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 2.15

(i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

φ este tautologie ddacă $e_i'^{+}(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$.

Definiția 2.16

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- *φ este consecință semantică a lui ψ dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\psi \vDash \varphi$.*
- *φ și ψ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$. Notație: $\varphi \sim \psi$.* *(i) $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\vDash \psi \to \varphi$.*

Propoziția 2.18

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

terțul exclus	$\vDash \varphi \vee \neg\varphi$	(1)
modus ponens	$\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \psi$	(2)
afirmarea concluziei	$\psi \vDash \varphi \to \psi$	(3)
contradicția	$\vDash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	(4)
dubla negație	$\varphi \sim \neg\neg\varphi$	(5)
contrapoziția	$\varphi \to \psi \sim \neg\psi \to \neg\varphi$	(6)
negarea premizei	$\neg\varphi \vDash \varphi \to \psi$	(7)
modus tollens	$\neg\psi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \neg\varphi$	(8)
tranzitivitatea implicației	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$	(9)
legile lui de Morgan	$\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	(10)
	$\varphi \wedge \psi \sim \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(11)
exportarea și importarea	$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \varphi \wedge \psi \to \chi$	(12)
idempotența	$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$	(13)
slăbirea	$\vDash \varphi \wedge \psi \to \varphi$ $\quad \vDash \varphi \to \varphi \vee \psi$	(14)
comutativitatea	$\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi$ $\quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$	(15)
asociativitatea	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	(16)
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$	(17)
absorbția	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$	(18)
	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$	(19)
distributivitatea	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	(20)
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	(21)
	$\varphi \to \psi \wedge \chi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)$	(22)
	$\varphi \to \psi \vee \chi \sim (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi)$	(23)
	$\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$	(24)
	$\varphi \vee \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)$	(25)
	$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \psi \to (\varphi \to \chi) \sim (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	(26)
	$\neg\varphi \sim \varphi \to \neg\varphi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)$	(27)
	$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	(28)
	$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \to \psi) \to \psi$	(29)
	$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi$	(30)
	$\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\neg\varphi \to \psi)$	(31)
	$\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi)$	(32)
	$\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$	(33)
	$\vDash (\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \chi) \to \psi) \to \psi)$	(34)

Notații

Notăm $v_0 \to v_0$ cu $\top$ și o numim adevărul. Notăm $\neg(v_0 \to v_0)$ cu $\bot$ și o numim falsul.

- φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \bot$.

Definiția 2.19

Pentru orice formule φ, χ, χ', definim

$$\varphi_\chi(\chi') \quad := \quad \text{expresia obținută din } \varphi \text{ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui } \chi \text{ cu } \chi'.$$

$\varphi_\chi(\chi')$ se numește substituția lui χ cu χ' în φ. Spunem și că $\varphi_\chi(\chi')$ este o instanță de substituție a lui φ.

Propoziția 2.21

Pentru orice formule φ, ψ, χ și orice variabilă $v \in V$,

- *$\varphi \sim \psi$ implică $\varphi_v(\chi) \sim \psi_v(\chi)$.*
- *Dacă φ este tautologie atunci și $\varphi_v(\chi)$ este tautologie.*
- *Dacă φ este nesatisfiabilă, atunci și $\varphi_v(\chi)$ este nesatisfiabilă.*

Propoziția 2.20

Pentru orice formule φ, χ, χ',

$$\chi \sim \chi' \quad \text{implică} \quad \varphi \sim \varphi_\chi(\chi').$$

Propoziția 2.22

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$,

- *$e^+(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Definiția 2.24

Un literal este o

- *variabilă (în care caz spunem că este literal pozitiv) sau*
- *negația unei variabile (în care caz spunem că este literal negativ).*

Notație: Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Definiția 2.25

O formulă φ este în formă normală disjunctivă (FND) dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$

Propoziția 2.23

$$\neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n$$
$$\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$$

Propoziția 2.27

(i) Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.

(ii) Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Fie $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} : Var(\varphi) \to \{0,1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(v_{i_k}) = \varepsilon_k \quad \text{pentru orice } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definim $e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \in \{0,1\}$ astfel:

$$e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) := e^+(\varphi),$$

Definiția 2.28

Funcția asociată lui φ este $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \text{ pentru orice } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n.$$

Așadar, F_φ este funcția definită de tabela de adevăr pentru φ.

Propoziția 2.29

(i) Fie φ o formulă. Atunci

(a) $\vDash \varphi$ ddacă F_φ este funcția constantă 1.

(b) φ este nesatisfiabilă ddacă F_φ este funcția constantă 0.

(ii) Fie φ, ψ două formule astfel încât $Var(\varphi) = Var(\psi)$. Atunci

(a) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $F_\varphi \leq F_\psi$.

etc.

Teorema 2.31

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă φ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

Teorema 2.32

Fie $n \geq 1$ și $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă ψ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Teorema 2.33

Orice formulă φ este echivalentă cu o formulă φ^{FND} în FND și cu o formulă φ^{FNC} în FNC.

Exemplu: Fie $H : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ descrisă prin tabelul:

ε_1	ε_2	ε_3	$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	
0	0	0	0	$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$
0	0	1	0	$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$
0	1	0	1	$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
0	1	1	0	$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$
1	0	0	1	$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
1	0	1	1	$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
1	1	0	1	$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
1	1	1	1	$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

$\varphi = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5$ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

$\psi = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

Pasul 1. Se înlocuiesc implicațiile și echivalențele, folosind:

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \quad \text{și} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi).$$

Pasul 2. Se înlocuiesc dublele negații, folosind $\neg\neg\psi \sim \psi$, și se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \text{și} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Pasul 3. Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui $\vee$ fața de $\wedge$, pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui $\wedge$ fața de $\vee$, pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) = (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d)$$

Clauze

Definiția 2.34

O clauză este o mulțime finită de literali:

$$C = \{L_1, \ldots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \ldots, L_n \text{ sunt literali.}$$

Dacă $n = 0$, obținem clauza vidă $\square := \emptyset$.

O clauză nevidă este considerată implicit o disjuncție.

Definiția 2.35

Fie C o clauză și $e : V \to \{0,1\}$. Spunem că e este model al lui C sau că e satisface C și scriem $e \vDash C$ dacă există $L \in C$ a.î. $e \vDash L$.

Definiția 2.36

O clauză C se numește

(i) satisfiabilă dacă are un model.

(ii) validă dacă orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al lui C.

Definiția 2.37

O clauză C este trivială dacă există un literal L a.î. $L \in C$ și $L^c \in C$.

Propoziția 2.38

(i) Orice clauză nevidă este satisfiabilă.

(ii) Clauza vidă $\square$ este nesatisfiabilă.

(iii) O clauză este validă ddacă este trivială.

Dem.: Exercițiu.

Notăm $Var(C) := \{x \in V \mid x \in C \text{ sau } \neg x \in C\}$.

Daca $x \in Var(C)$, spunem ca x apare în C.

- $Var(C) = \emptyset$ ddacă $C = \square$.

Definiția 2.39 $\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ este o mulțime finită de clauze.

Fie $e : V \to \{0,1\}$. Spunem că e este model al lui $\mathcal{S}$ sau că e satisface $\mathcal{S}$ și scriem $e \vDash \mathcal{S}$ dacă $e \vDash C_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Dacă $m = 0$, obținem mulțimea vidă de clauze $\emptyset$. Dar clauză vidă => $\square$

Propoziția 2.41

- *Dacă $\mathcal{S}$ conține clauza vidă $\square$, atunci $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.*
- *$\emptyset$ este validă.*

$\square \longmapsto \varphi_\square := v_0 \wedge \neg v_0$.

Notăm $Var(\mathcal{S}) := \bigcup_{C \in \mathcal{S}} Var(C)$.

Daca $x \in Var(\mathcal{S})$, spunem ca x apare în $\mathcal{S}$.

- $Var(\mathcal{S}) = \emptyset$ ddacă ($\mathcal{S} = \emptyset$ sau $\mathcal{S} = \{\square\}$).

$\mathcal{S}_\varphi$ se mai numește și forma clauzală a lui φ.

Propoziția 2.42

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$, $e \vDash \varphi$ ddacă $e \vDash \mathcal{S}_\varphi$.

Definiția 2.44

Fie C_1, C_2 două clauze. O clauză R se numește rezolvent al clauzelor C_1, C_2 dacă există un literal L a.î. $L \in C_1$, $L^c \in C_2$ și

$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}).$$

$C_1 = \{v_7\}$, $C_2 = \{\neg v_7\}$. Atunci clauza vidă $\square$ este rezolvent

Definiția 2.45

O derivare prin rezoluție din $\mathcal{S}$ sau o $\mathcal{S}$-derivare prin rezoluție este o secvență $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de clauze a.î. pentru fiecare i =1,n
Ci aparține S sau Ci e rezolvent a 2 altor clauze anterioare.

O derivare prin rezoluție a unei clauze este o S- derivare care ajunge la acea clauză!

Notăm $Res(\mathcal{S}) := \bigcup_{C_1, C_2 \in \mathcal{S}} Res(C_1, C_2)$.

Propoziția 2.47

Pentru orice orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$,

$$e \vDash \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad e \vDash Res(\mathcal{S}).$$

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

Intrare: $\mathcal{S}$ mulțime finită nevidă de clauze netriviale.

$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

Pi.1 Fie x_i o variabilă care apare în $\mathcal{S}_i$. Definim

$$\mathcal{T}_i^1 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid x_i \in C\}, \quad \mathcal{T}_i^0 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pi.2 **if** $(\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset$ și $\mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset)$ **then**

$$\mathcal{U}_i := \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}.$$

else $\mathcal{U}_i := \emptyset$.

Pi.3 Definim

$$\mathcal{S}'_{i+1} := (\mathcal{S}_i \setminus (\mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1)) \cup \mathcal{U}_i;$$
$$\mathcal{S}_{i+1} := \mathcal{S}'_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}.$$

Pi.4 **if** $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$ **then** $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
else if $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$ **then** $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
else $\{i := i + 1;$ go to Pi.1$\}$.

Propoziția 2.49

Fie $n := |Var(\mathcal{S})|$. Atunci algoritmul DP se termină după cel mult n pași.

Dem.: Se observă imediat că pentru orice i,

$$Var(\mathcal{S}_{i+1}) \subseteq Var(\mathcal{S}_i) \setminus \{x_i\} \subsetneq Var(\mathcal{S}_i).$$

Prin urmare, $n = |Var(\mathcal{S}_1)| > |Var(\mathcal{S}_2)| > |Var(\mathcal{S}_3)| > \ldots \geq 0$. $\square$

Fie $N \leq n$ numărul de pași după care se termină DP. Atunci $\mathcal{S}_{N+1} = \emptyset$ sau $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$.

Explicație Davis Putnam (ale mele)

x_i variabilă aleasă pentru rezoluții

$\mathcal{T}_i^1$ toate clauzele cu var pozitive din $\mathcal{S}_i$

$\mathcal{T}_i^0$ toate clauzele cu var negative din $\mathcal{S}_i$

$\mathcal{U}_i$ rezolvenții dintre produs cartezian $\mathcal{T}_i$

$\mathcal{S}'_{i+1}$ clauzele nefolosite și cele din $\mathcal{U}_i$

$\mathcal{S}_{i+1}$ $\mathcal{S}'_{i+1}$ fără clauze triviale

Ne oprim la box (nesatisfiabil) sau mulț vidă (sat)

Propoziția 2.50

Pentru orice $i \leq N$,

$$\mathcal{S}_{i+1} \text{ este satisfiabilă} \iff \mathcal{S}_i \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Teorema 2.51

Algoritmul DP este corect și complet, adică,

$$\mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă ddacă } \square \in \mathcal{S}_{N+1}.$$

Dem.: Aplicăm Propoziția 2.50. Obținem că $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ este nesatisfiabilă ddacă $\mathcal{S}_{N+1}$ este nesatisfiabilă ddacă $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$. $\square$

Am ajuns la pag. 92:

(de la Pesca)

Sistemul deductiv

Folosim un sistem deductiv de tip Hilbert pentru *LP*.

Axiomele logice Mulțimea *Axm* a lui *LP* constă din toate formulele de forma: (A1), (A2), (A3), unde φ, ψ și χ sunt formule.

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

Regula de deducție (MP) $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$.

inducție după Γ-teoreme.

Versiunea 1

Fie ***P*** o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface ***P*** astfel:

(i) Demonstrăm că orice axiomă are proprietatea ***P***.

(ii) Demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea ***P***.

(iii) Demonstrăm că dacă φ și $\varphi \to \psi$ au proprietatea ***P***, atunci ψ are proprietatea ***P***.

Versiunea 2

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

(i) Demonstrăm că orice axiomă este în Σ.

(ii) Demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ.

(iii) Demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Propoziția 2.60

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{dacă există o submulțime finită } \Sigma \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Sigma \vdash \varphi.$$

Dem.: "⇐" Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 2.55.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.
"⇒" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 2.59, φ are o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$ este o Σ-demonstrație a lui φ, deci $\Sigma \vdash \varphi$. □

Definiția 2.52

Γ-teoremele sunt formulele lui LP definite astfel:

(T0) *Orice axiomă este Γ-teoremă.*

(T1) *Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.*

(T2) *Dacă φ și $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.*

(T3) *Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.*

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Propoziția 2.55

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

(i) *Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ,*
$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) *$Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,*
$$\vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iii) *Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,*
$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) *$Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,*
$$Thm(\Gamma) \vdash \varphi \text{ dacă } \Gamma \vdash \varphi.$$

Propoziția 2.67

Pentru orice formule φ, ψ,

$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash$	φ	(37)
	$\vdash$	$\neg\psi \to (\psi \to \varphi)$	(38)
	$\vdash$	$\psi \to (\neg\psi \to \varphi)$	(39)
	$\vdash$	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	(40)
	$\vdash$	$\varphi \to \neg\neg\varphi$	(41)
	$\vdash$	$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(42)
$\{\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash$	$\neg(\psi \to \varphi)$	(43)
	$\vdash$	$(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$	(44)
	$\vdash$	$(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	(45)

Notații

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ-teoremelor	Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ este Γ-teoremă	$\vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$:\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.			

Definiția 2.53

O formulă φ se numește teoremă a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația $\vdash$, obținem

Propoziția 2.54

(i) *dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(ii) *dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(iii) *dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.*

Definiția 2.56

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) *θ_i este axiomă;* (ii) *$\theta_i \in \Gamma$;*

(iii) *există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$.*

O ∅-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Lema 2.57

Dacă $\theta_1, \ldots, \theta_n$ este o Γ-demonstrație, atunci $\Gamma \vdash \theta_i$

Definiția 2.58 *n se numește lungimea Γ-demonstrației.*

Propoziția 2.59 *$\Gamma \vdash \varphi$ dacă există o Γ-demonstrație a lui φ.*

Propoziția 2.61 *Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.*

Teorema 2.62 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \subseteq Form$ și $\varphi, \psi \in Form$. Atunci $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ dacă $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Propoziția 2.63 *Pentru orice formule φ, ψ, χ,*
$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$.

Propoziția 2.65 $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$

Propoziția 2.68

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \ \text{ și } \ \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi.$$

Corectitudine

Teorema 2.70 (Teorema de corectitudine (Soundness Theorem))

Orice teoremă este tautologie:

$$\vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \models \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$.

Dem.: Fie $\Sigma :=$ mulțimea tuturor tautologiilor lui *LP*.

Trebuie să demonstrăm că $Thm \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exercițiu).

Propoziția 2.71

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ,

(i) *Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.*

(ii) *Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.*

Dem.: Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$.
  Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.
  Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.
- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.
  Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.
  Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$.
  Deoarece $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ ((41) din Propoziția 2.67), putem aplica (MP) pentru a obține $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.

SINTAXA SI SEMANTICA LP

- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\models \varphi$ și $\models \varphi \to \psi$, deci $\models \varphi \wedge (\varphi \to \psi)$. Aplicăm (2) pentru a obține că $\models \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$. □

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare și $v \in V$ o variabilă.

Definim
$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $e^+(v^e) = 1$.
Pentru orice mulțime $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de variabile, notăm
$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \ldots, x_k^e\}.$$

Pentru orice $a \in \{0, 1\}$, definim evaluarea $e_{v \mapsto a} : V \to \{0, 1\}$ prin

$$e_{v \mapsto a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

- $\varphi = \psi \to \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$	$Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 2.55.(i)
$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \to \chi)$	(43) din Propoziția 2.67
$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziția 2.55.(iv).

Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$ sau $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	(38) din P. 2.67 și P. 2.55.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 2.55.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \to (\psi \to \chi)$	(A1) și Propoziția 2.54.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P. 2.55.(i). □

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție efectivă a unei demonstrații a lui φ sau $\neg\varphi$ din premizele $Var(\varphi)^e$.

Teorema de completitudine

Teorema 2.72 (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{dacă} \quad \models \varphi.$$

Dem.: "⇒" Se aplică Teorema de corectitudine 2.70.
"⇐" Fie φ o tautologie și $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducție după k următoarea proprietate:

(*) pentru orice $k \le n$, pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$,
$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi$.

Pentru $k = n$, (*) ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziția 2.71, obținem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \ldots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

Teorema de completitudine

$k \Rightarrow k + 1$. Presupunem că (*) este adevărată pentru k și fie $e : V \to \{0, 1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$.
Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \mapsto \neg e(x_{n-k})}$. Așadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n-k-1\}$ și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (*) pentru e și e', obținem

$$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 2.68 cu $\Gamma := \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\}$ și $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclude că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. □

Propoziția 2.73

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Observăm că

$$\begin{aligned} \varphi \sim \psi \quad &\iff \quad \models \varphi \to \psi \text{ și } \models \psi \to \varphi \\ &\quad\quad \text{Propoziția 2.17} \\ &\iff \quad \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \vdash \psi \to \varphi \\ &\quad\quad \text{Teorema de completitudine.} \end{aligned}$$

"⇒" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \to \psi$, rezultă din Propoziția 2.55.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obține că $\Gamma \vdash \psi$.
"⇐" Similar. □

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 2.74

- *O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).*
  Notație: $e \models \Gamma$.
- *Γ este satisfiabilă dacă are un model.*
- *Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este nesatisfiabilă sau contradictorie.*

Notații: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.

- $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$.

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 2.75

O formulă φ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\Gamma \models \varphi$.
Dacă φ nu este consecință semantică a lui Γ, scriem $\Gamma \not\models \varphi$.

Notăm cu $Cn(\Gamma)$ mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ. Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Definiția 2.76

- *Δ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$.*
  Notație: $\Gamma \models \Delta$.
- *Γ și Δ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$.*
  Notație: $\Gamma \sim \Delta$.

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

Observație

- $\psi \models \varphi$ dacă $\{\psi\} \models \varphi$ dacă $\{\psi\} \models \{\varphi\}$.
- $\psi \sim \varphi$ dacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 2.77

- *$Mod(\emptyset) = Fun(V, \{0, 1\})$, adică orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.*
- *$Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie dacă $\emptyset \models \varphi$.*

Propoziția 2.78

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Γ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă φ.

(iii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ.

(iv) $\Gamma \models \perp$.

Definiția 2.79

Fie Γ o mulțime de formule.

- Γ este **consistentă** dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \nvdash \varphi$.
- Γ este **inconsistentă** dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci și Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci și Δ este inconsistentă.

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

Notații

$\Gamma \nvdash \varphi$:⇔ φ nu este Γ-teoremă
$\nvdash \varphi$:⇔ φ nu este teoremă
$\Gamma \not\models \varphi$:⇔ φ nu este consecință semantică a lui Γ
$\not\models \varphi$:⇔ φ nu este tautologie.

Propoziția 2.80

(i) ∅ este consistentă.

(ii) Mulțimea teoremelor este consistentă.

Dem.:

(i) Dacă $\vdash \perp$, atunci, conform Teoremei de corectitudine 2.70, ar rezulta că $\models \perp$, o contradicție. Așadar $\nvdash \perp$, deci ∅ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziția 2.55.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obținem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \text{ ddacă } Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că Thm este consistentă. □

Teorema 2.82 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule Γ,

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Teorema 2.83 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi.$$

Observație Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente.

Propoziția 2.81

Pentru o mulțime de formule Γ sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iv) $\Gamma \vdash \perp$.

Dem.: Exercițiu.

Limbaje de ordinul întâi

Definiția 3.1

*Un **limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul întâi** este format din:*

- *o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;*
- *conectorii ¬ și →;*
- *parantezele (,);*
- *simbolul de egalitate =;*
- *cuantificatorul universal ∀;*
- *o mulțime $\mathcal{R}$ de **simboluri de relații**;*
- *o mulțime $\mathcal{F}$ de **simboluri de funcții**;*
- *o mulțime $\mathcal{C}$ de **simboluri de constante**;*
- *o funcție **aritate** $ari : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \to \mathbb{N}^*$.*

- $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, ari)$.
- τ se numește **signatura** lui $\mathcal{L}$ sau **tipul de similaritate** al lui $\mathcal{L}$

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

- Mulțimea $Sim_{\mathcal{L}}$ a **simbolurilor** lui $\mathcal{L}$ este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \to, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc **simboluri non-logice**.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \to, (,), =, \forall\}$ se numesc **simboluri logice**.

- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \ldots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R \ldots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \ldots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \ldots$.

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m$:= mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m;
$\mathcal{R}_m$:= mulțimea simbolurilor de relații de aritate m.

Definiția 3.2

*Mulțimea $Expr_{\mathcal{L}}$ a **expresiilor** lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.*

Expresia vidă se notează λ. O expresie nevidă este de forma $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$, unde $k \geq 1$ și $\theta_i \in Sim_{\mathcal{L}}$ pentru orice $i = 0, \ldots, k-1$.

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ și $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \ldots \sigma_{l-1}$ două expresii ale lui $\mathcal{L}$.

$$\theta = \sigma \text{ ddacă } k = l \text{ și } \theta_i = \sigma_i \text{ pentru orice } i = 0, \ldots, k-1.$$

Definiția 3.3

*Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$. Spunem că o expresie σ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. $\sigma = \theta_i \ldots \theta_j$. Notăm cu $Var(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ.*

Termeni

Definiția 3.4

***Termenii** lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:*

(T0) Orice variabilă este termen.

(T1) Orice simbol de constantă este termen.

(T2) Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci $ft_1 \ldots t_m$ este termen.

(T3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt termeni.

Notații:

- Mulțimea termenilor se notează $Term_{\mathcal{L}}$.
- Termenii se notează $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \ldots$.

Definiția 3.5

*Un termen t se numește **închis** dacă $Var(t) = \emptyset$.*

Propoziția 3.6 (Inducția pe termeni)

Fie Γ o mulțime de expresii care are următoarele proprietăți:

- *Γ conține variabilele și simbolurile de constante.*
- *Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \ldots t_m \in \Gamma$.*

Atunci $Term_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor expresiilor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $Term_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Propoziția 3.7 (Citire unică (Unique readability))

*Dacă t este un termen, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:*

- *$t = x$, unde $x \in V$;*
- *$t = c$, unde $c \in \mathcal{C}$;*
- *$t = ft_1 \ldots t_m$, unde $f \in \mathcal{F}_m$ $(m \geq 1)$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni.*

Mai mult, scrierea lui t sub una din aceste forme este unică.

Formule

Definiția 3.8

***Formulele atomice** ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:*

- *$(s = t)$, unde s, t sunt termeni;*
- *$(Rt_1 \ldots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ $(m \geq 1)$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni.*

Definiția 3.9

***Formulele** lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:*

(F0) Orice formulă atomică este formulă.

(F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.

(F2) Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.

(F3) Dacă φ este formulă, atunci $(\forall x\varphi)$ este formulă pentru orice variabilă x.

(F4) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.

Notații

- Mulțimea formulelor se notează $Form_{\mathcal{L}}$.
- Formulele se notează $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

Propoziția 3.10 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de expresii care are următoarele proprietăți:

- *Γ conține toate formulele atomice.*
- *Γ este închisă la ¬, → și ∀x (pentru orice variabilă x), adică: dacă $\varphi, \psi \in \Gamma$, atunci $(\neg\varphi), (\varphi \to \psi), (\forall x\varphi) \in \Gamma$.*

Atunci $Form_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $Form_{\mathcal{L}} \subseteq \Gamma$.

Conectori derivați

Conectorii ∨, ∧, ↔ și **cuantificatorul existențial** ∃ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &:= (\neg\varphi) \to \psi \\ \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \to (\neg\psi)) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \\ \exists x\varphi &:= \neg\forall x\neg\varphi. \end{aligned}$$

Propoziția 3.11 (Citire unică (Unique readability))

*Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:*

- *$\varphi = (s = t)$, unde s, t sunt termeni;*
- *$\varphi = (Rt_1 \ldots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ $(m \geq 1)$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni;*
- *$\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;*
- *$\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule;*
- *$\varphi = (\forall x\psi)$, unde x este variabilă și ψ este formulă.*

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $s = t$, $Rt_1 \ldots t_m$, $\forall x\varphi$, $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$. Pe de altă parte, scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.

Pentru a reduce din folosirea parantezelor, presupunem următoarele:

- Cuantificatorii ∀, ∃ au precedență mai mare decât ceilalți conectori. Așadar, $\forall x\varphi \to \psi$ este $(\forall x\varphi) \to \psi$ și nu $\forall x(\varphi \to \psi)$.
- ¬ are precedență mai mare decât →, ∧, ∨, ↔.
- ∧, ∨ au precedență mai mare decât →, ↔.

Definiția 3.12

*O **$\mathcal{L}$-structură** este un cvadruplu*

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- *A este o mulțime nevidă;*
- *$\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea m, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \to A$;*
- *$\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea m, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;*
- *$\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.*
- *A se numește **universul** structurii $\mathcal{A}$. Notație: $A = |\mathcal{A}|$*
- *$f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește **denotația** sau **interpretarea** lui f (respectiv R, c) în $\mathcal{A}$.*

Exemple comune de limbaje

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde ▶ $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$

Limbaj aritmeticii $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$

$\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$

$\mathcal{L}_R$ limbaj relație binară. $(A, <)$ $(A, \in)$ (V, E) $\mathcal{L}_{Graf}$

$\mathcal{L}_{Gr}$ limbajul grupurilor

- $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{}^{-1}\}$;
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

$\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x\forall y(x = y \to y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x\exists y\exists z(\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

Interpretare (evaluare)

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură.

Definiția 3.13

O interpretare sau evaluare a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \to A$.

În continuare, $e : V \to A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

Definiția 3.14 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește interpretarea $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e:

- *dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;*
- *dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;*
- *dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.*

Prin inducție pe formule se definește interpretarea

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0,1\}$$

a formulei φ sub evaluarea e.

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretare $e_{x \mapsto a} : V \to A$ prin

$$e_{x \mapsto a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

Negația și implicația

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1)$.

Relația de satisfacere

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 3.15

Fie φ o formulă. Spunem că:

- *e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.*
- *e nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notație: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.*

Corolar 3.16

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x,

(i) $\mathcal{A} \vDash (\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *implică* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ *pentru orice* $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

$$(\forall x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 3.17

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} (\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \mapsto a}) = 1. \end{aligned}$$

Corolar 3.18

(i) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *și* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *ddacă* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iv) $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ *există* $a \in A$ *a.î.* $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}]$.

Definiția 3.19 Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Spunem că φ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui φ.

Atenție! Este posibil ca atât φ cât și $\neg\varphi$ să fie satisfiabile.

Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.20

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.

Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiția 3.21

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\vDash \varphi$

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.22

φ și ψ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash\!\!\!\dashv \psi$

Definiția 3.23

ψ este consecință semantică a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \vDash\!\!\!\dashv \psi$ ddacă $(\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi)$ ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y,

$$\begin{aligned} \neg\exists x\varphi &\vDash\!\!\!\dashv \forall x\neg\varphi && (51) \\ \neg\forall x\varphi &\vDash\!\!\!\dashv \exists x\neg\varphi && (52) \\ \forall x(\varphi \wedge \psi) &\vDash\!\!\!\dashv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi && (53) \\ \forall x\varphi \vee \forall x\psi &\vDash \forall x(\varphi \vee \psi) && (54) \\ \exists x(\varphi \wedge \psi) &\vDash \exists x\varphi \wedge \exists x\psi && (55) \\ \exists x(\varphi \vee \psi) &\vDash\!\!\!\dashv \exists x\varphi \vee \exists x\psi && (56) \\ \forall x(\varphi \to \psi) &\vDash \forall x\varphi \to \forall x\psi && (57) \\ \forall x(\varphi \to \psi) &\vDash \exists x\varphi \to \exists x\psi && (58) \\ \forall x\varphi &\vDash \exists x\varphi && (59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\vDash \exists x\varphi && (60) \\ \forall x\varphi &\vDash \varphi && (61) \\ \forall x\forall y\varphi &\vDash\!\!\!\dashv \forall y\forall x\varphi && (62) \\ \exists x\exists y\varphi &\vDash\!\!\!\dashv \exists y\exists x\varphi && (63) \\ \exists y\forall x\varphi &\vDash \forall x\exists y\varphi. && (64) \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 3.24

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \to t = s$;

(iii) $\vDash s = t \wedge t = u \to s = u$.

Dem.: *Exercițiu ușor.*

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\}$ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.25

Spunem că Γ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma[e] \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui Γ.

Notație: $\mathcal{A} \vDash \Gamma[e]$

Definiția 3.26

Spunem că φ este consecință semantică a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma[e] \implies \mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$

Propoziția 3.28

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.

Variabile legate și libere

Definiția 3.27

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui $\mathcal{L}$ și x o variabilă.

- *Spunem că variabila x apare legată pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$ și există $0 \leq i \leq k \leq j \leq n-1$ a.î. $\varphi_i \dots \varphi_j$ este de forma $\forall x\psi$ cu ψ formulă.*
- *Spunem că x apare liberă pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ.*
- *x este variabilă legată (bounded variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ.*
- *x este variabilă liberă (free variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ.*

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \to x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$\begin{aligned} FV(\varphi) &= Var(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\ FV(\neg\varphi) &= FV(\varphi); \\ FV(\varphi \to \psi) &= FV(\varphi) \cup FV(\psi); \\ FV(\forall x\varphi) &= FV(\varphi) \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

Notație: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Propoziția 3.29

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci
$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$.

Atunci $Var(t_1) \subseteq FV(\varphi)$, $Var(t_2) \subseteq FV(\varphi)$, deci putem aplica Propoziția 3.28 pentru a obține că

$$t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2) \quad \text{și} \quad t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2) \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = Rt_1 \dots t_m$.

Atunci $Var(t_i) \subseteq FV(\varphi)$ pentru orice $i = 1, \dots, m$ și aplicăm din nou Propoziția 3.28 pentru a obține că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \dots, m.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) \\ &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$.

Deoarece $FV(\psi) = FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_2].$$

Rezultă că

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

- $\varphi = \forall x\psi$ și

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}.$$

Rezultă că pentru orice $a \in A$,

$$e_{1x \mapsto a}(v) = e_{2x \mapsto a}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările $e_{1x \mapsto a}, e_{2x \mapsto a}$ pentru a obține că

$$\text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x \mapsto a}] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x \mapsto a}].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x \mapsto a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x \mapsto a}] \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \to \chi$.

Deoarece $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a obține că

$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \chi[e_2].$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1] \\ &\iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_2] \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

Propoziția 3.30

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\begin{array}{rcll}
\varphi & \boxminus & \exists x \varphi & (65)\\
\varphi & \boxminus & \forall x \varphi & (66)\\
\forall x(\varphi \wedge \psi) & \boxminus & \varphi \wedge \forall x \psi & (67)\\
\forall x(\varphi \vee \psi) & \boxminus & \varphi \vee \forall x \psi & (68)\\
\exists x(\varphi \wedge \psi) & \boxminus & \varphi \wedge \exists x \psi & (69)\\
\exists x(\varphi \vee \psi) & \boxminus & \varphi \vee \exists x \psi & (70)\\
\forall x(\varphi \to \psi) & \boxminus & \varphi \to \forall x \psi & (71)\\
\exists x(\varphi \to \psi) & \boxminus & \varphi \to \exists x \psi & (72)\\
\forall x(\psi \to \varphi) & \boxminus & \exists x \psi \to \varphi & (73)\\
\exists x(\psi \to \varphi) & \boxminus & \forall x \psi \to \varphi & (74)
\end{array}$$

Definiția 3.31

O formulă φ se numește enunț (sentence) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.
Notație: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 3.32

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 3.29 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Definiția 3.33

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ este un model al unui enunț φ dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \to A$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Fie φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ și Γ o mulțime de enunțuri.

Γ este satisfiabilă ddacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ este un model al lui Γ. Notație: $\mathcal{A} \vDash \Gamma$

φ este consecință semantică a lui Γ ddacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \implies \mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$

Notație: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, notăm

$$Mod(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

Lema 3.34

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ,
- *(i) $\Gamma \vDash \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.*
- *(ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.*
- *(iii) Γ este satisfiabilă $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.*

Dem.: Exercițiu ușor.

Tautologii

Noțiunile de tautologie și consecință semantică din logica propozițională se pot aplica și unui limbaj de ordinul întâi. Intuitiv: o tautologie este o formulă "adevărată" numai pe baza interpretărilor conectorilor $\neg, \to$.

Definiția 3.35

O $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr este o funcție $F : Form_{\mathcal{L}} \to \{0, 1\}$ cu următoarele proprietăți: pentru orice formule φ, ψ,
- *$F(\neg\varphi) = \neg F(\varphi)$;*
- *$F(\varphi \to \psi) = F(\varphi) \to F(\psi)$.*

Propoziția 3.36

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$, funcția

$$V_{e,\mathcal{A}} : Form_{\mathcal{L}} \to \{0, 1\}, \quad V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = \varphi^{\mathcal{A}}(e)$$

este o $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr.

Definiția 3.37

φ este tautologie dacă $F(\varphi) = 1$ pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F.

Exemple de tautologii: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$, $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$

Propoziția 3.38

Orice tautologie este validă.

Dem.: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o evaluare. Deoarece φ este tautologie și $V_{e,\mathcal{A}}$ este $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr, rezultă că $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = V_{e,\mathcal{A}}(\varphi) = 1$, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. □

Exemplu

$x = x$ este validă, dar nu este tautologie.

Definiția 3.39

Două formule φ și ψ sunt tautologic echivalente dacă $F(\varphi) = F(\psi)$ pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F.

Exemplul 3.40

$\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)$ și $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_3$ sunt tautologic echivalente.

Definiția 3.41

O formulă φ este consecință tautologică a unei mulțimi de formule Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-evaluare de adevăr F,

$$F(\gamma) = 1 \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad F(\varphi) = 1.$$

Propoziția 3.42

Dacă φ este consecință tautologică a lui Γ, atunci $\Gamma \vDash \varphi$.

Substituția

Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ și u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.43

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim
$t_x(u)$:= expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u.

Propoziția 3.44

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.

- Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \vDash \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$.
Avem
- Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$, avem $\mathcal{A} \vDash \forall x\varphi$.
- $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 3.45

Spunem că x este liberă pentru u în φ sau că u este substituibil pentru x în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u, nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conține apariții libere ale lui x.

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:
- u nu conține variabile;
- φ nu conține variabile care apar în u;
- nici o variabilă din u nu apare legată în φ;
- x nu apare în φ;
- φ nu conține apariții libere ale lui x.

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ.

Definiția 3.46

$\varphi_x(u)$:= expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.
Spunem că $\varphi_x(u)$ este o substituție liberă.

Propoziția 3.47

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Propoziția 3.48

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x,
- *(i) pentru orice termen t,*
$$\vDash u_1 = u_2 \to t_x(u_1) = t_x(u_2).$$
- *(ii) pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ,*
$$\vDash u_1 = u_2 \to (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziția 3.49

Fie φ o formulă și x o variabilă.
- *(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,*
$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(u), \qquad \vDash \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$
- *(ii) $\vDash \forall x\varphi \to \varphi$, $\qquad \vDash \varphi \to \exists x\varphi$.*
- *(iii) Pentru orice simbol de constantă c,*
$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(c), \qquad \vDash \varphi_x(c) \to \exists x\varphi.$$

În general, dacă x si y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ și $e : V \to \mathbb{N}$ a.î. $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash (x \dot{<} z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \not\vDash (x \dot{<} z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 3.50

Pentru orice formulă φ, variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x\varphi \boxminus \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \boxminus \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 3.50 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.

Definiția 3.51

Pentru orice formulă φ și orice variabile $y_1, \ldots, y_k$, varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă φ' a lui φ este definită recursiv astfel:
- *dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ;*
- *dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;*
- *dacă $\varphi = \psi \to \chi$, atunci φ' este $\psi' \to \chi'$;*
- *dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci*
$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w \psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \ldots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$
unde w este prima variabilă din șirul $v_0, v_1, \ldots$, care nu apare în ψ' și nu este printre $y_1, \ldots, y_k$.

Definiția 3.52

φ' este variantă a lui φ dacă este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ pentru anumite variabile $y_1, \ldots, y_k$.

Propoziția 3.53

- *(i) Pentru orice formulă φ, dacă φ' este o variantă a lui φ, atunci $\varphi \boxminus \varphi'$;*
- *(ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t, dacă variabilele lui t se află printre $y_1, \ldots, y_k$ și φ' este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ, atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.*

Forma normală prenex

Definiția 3.54

O formulă care nu conține cuantificatori se numește liberă de cuantificatori ("quantifier-free").

Definiția 3.55

O formulă φ este în formă normală prenex dacă

$$\varphi = Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește matricea lui φ și $Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_n$ este prefixul lui φ.

Exemple de formule în formă normală prenex:
- Formulele universale: $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori
- Formulele existențiale: $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori

Teorema 3.56 (Teorema de formă normală prenex)
Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \boxminus \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Forma normală Skolem

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite simboluri de funcții/constante Skolem.

Observație

Orice formulă liberă de cuantificatori este universală.

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Forma normală Skolem

Asociem lui φ un enunț universal φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$:
Dacă φ este universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$.
Altfel, φ are una din formele:
- $\varphi = \exists x\,\psi$. Introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi_x(c)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x\,\psi$ $(k \geq 1)$. Introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\varphi^1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k\,\psi_x(fx_1 \ldots x_k)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$.

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ.
Dacă φ^1 este enunț universal, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este enunț universal, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \ldots$, până ajungem la un enunț universal și acesta este φ^{Sk}.

φ^{Sk} este o formă normală Skolem a lui φ.

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj care conține un simbol de relație binară R și un simbol de funcție unară f. Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v\, (R(y,z) \wedge f(u) = v).$$

$$\begin{aligned}
\varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v\, (R(y,z) \wedge f(u) = v)_z(g(y)) \\
&= \forall y \forall u \exists v\, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = v), \\
&\quad \text{unde } g \text{ este un nou simbol de funcție unară} \\
\varphi^2 &= \forall y \forall u\, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y,u)) \\
&= \forall y \forall u\, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = h(y,u)), \\
&\quad \text{unde } h \text{ este un nou simbol de funcție binară.}
\end{aligned}$$

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că
$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u\, (R(y,g(y)) \wedge f(u) = h(y,u))$.

Teorema 3.57 (Teorema de formă normală Skolem)

Fie φ un enunț în formă normală prenex și φ^{Sk} o formă normală Skolem a sa.

(i) $\models \varphi^{Sk} \to \varphi$, deci $\varphi^{Sk} \models \varphi$ în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

(ii) φ este satisfiabilă ddacă φ^{Sk} este satisfiabilă.

Observație

În general, φ și φ^{sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

URMEAZA SINTAXA:

Sintaxa

Definiția 3.58

Mulțimea $Axm_{\mathcal{L}} \subseteq Form_{\mathcal{L}}$ a axiomelor (logice) ale lui $\mathcal{L}$ constă din:

(i) toate tautologiile.

(ii) formulele de forma
$$t = t, \quad s = t \to t = s, \quad s = t \wedge t = u \to s = u,$$
pentru orice termeni s, t, u.

(iii) formulele de forma
$$t_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t_m = u_m \;\to\; ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m,$$
$$t_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t_m = u_m \;\to\; (Rt_1 \ldots t_m \leftrightarrow Ru_1 \ldots u_m),$$
pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni t_i, u_i ($i = 1, \ldots, m$).

(iv) formulele de forma
$$\varphi_x(t) \to \exists x \varphi,$$
unde $\varphi_x(t)$ este o substituție liberă ($\exists$-axiomele).

Definiția 3.59

Regulile de deducție (sau inferență) sunt următoarele: pentru orice formule φ, ψ,

(i) din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):
$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

(ii) dacă $x \notin FV(\psi)$, atunci din $\varphi \to \psi$ se inferă $\exists x \varphi \to \psi$ ($\exists$-introducerea):
$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi} \quad \text{dacă } x \notin FV(\psi).$$

Fie Γ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 3.60

Γ-teoremele lui $\mathcal{L}$ sunt formulele definite astfel:

(Γ0) Orice axiomă logică este Γ-teoremă.

(Γ1) Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.

(Γ2) Dacă φ și $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.

(Γ3) Dacă $\varphi \to \psi$ este Γ-teoremă și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\exists x \varphi \to \psi$ este Γ-teoremă.

(Γ4) Numai formulele obținute aplicând regulile (Γ0), (Γ1), (Γ2) și (Γ3) sunt Γ-teoreme.

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Notații

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \varphi$ este Γ-teoremă $\qquad \vdash_{\mathcal{L}} \varphi := \emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$

Definiția 3.61

O formulă φ se numește teoremă (logică) a lui $\mathcal{L}$ dacă $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Reformulând condițiile din definiția Γ-teoremelor folosind notația $\vdash$, obținem

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, au loc următoarele:

(i) Dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;

(ii) Dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$;

(iii) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ și $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

(iv) Dacă $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$ și $x \notin FV(\psi)$, atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \exists x \varphi \to \psi$.

Definiția 3.62

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) a lui $\mathcal{L}$ este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ astfel încât pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) θ_i este axiomă;

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) există $k, j < i$ astfel încât $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$;

(iv) există $j < i$ astfel încât
$$\theta_j = \varphi \to \psi \text{ și } \theta_i = \exists x \varphi \to \psi, \text{ unde } x \notin FV(\psi).$$

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Definiția 3.63

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ astfel încât $\theta_n = \varphi$.

Propoziția 3.64

Fie Γ o mulțime de formule. Pentru orice formulă φ,
$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \quad \text{ddacă există o } \Gamma\text{-demonstrație a lui } \varphi.$$

Sintaxa

Fie Γ o mulțime de formule.

Teorema 3.65 (Teorema Tautologiei (Post))

Fie $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel încât

(i) ψ este consecință tautologică a mulțimii $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

(ii) $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_1$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_2$, ..., $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_n$.

Atunci $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.

Teorema 3.66 (Teorema Deducției)

Fie ψ o formulă și φ un enunț. Atunci
$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi \quad \text{ddacă} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi.$$

Propoziția 3.67

Pentru orice formulă φ și orice variabilă x,
$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \forall x \varphi.$$

Sintaxa

Definiția 3.68

Fie φ o formula cu $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Închiderea universală a lui φ este enunțul
$$\overline{\forall}\varphi := \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi.$$

Notații 3.69

$\overline{\forall}\Gamma := \{\overline{\forall}\psi \mid \psi \in \Gamma\}$.

Propoziția 3.70

Pentru orice formulă φ,
$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \overline{\forall}\varphi \iff \overline{\forall}\Gamma \vdash \varphi \iff \overline{\forall}\Gamma \vdash \overline{\forall}\varphi.$$

Mulțimi consistente

Definiția 3.71

Fie Γ o mulțime de formule. Spunem că

(i) Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

(ii) Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ pentru orice formulă φ.

Propoziția 3.72

Pentru orice mulțime de formule Γ, următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) Există o formulă ψ astfel încât $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

Teorema de completitudine

Teorema de completitudine - prima versiune

Fie Γ o mulțime de enunțuri.
$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Teorema de completitudine - a doua versiune

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ și orice enunț φ,
$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \iff \Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi.$$

- Teorema de completitudine a fost demonstrată de Gödel în 1929 în teza sa de doctorat.
- Henkin a dat în teza sa de doctorat din 1947 o demonstrație simplificată.

Definiția 3.73

O $\mathcal{L}$-teorie este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:
$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 3.74

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, teoria generată de Γ este mulțimea
$$\begin{aligned}
Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \models \varphi\} \\
&= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}.
\end{aligned}$$

Propoziția 3.75

Fie Γ o mulțime de enunțuri.

(i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) $Th(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.: Exercițiu.

- O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește teorie axiomatică sau teorie prezentată axiomatic. Γ se numește mulțime de axiome pentru $Th(\Gamma)$.
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

Definiția 3.76

O teorie T este finit axiomatizabilă dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ.

Definiția 3.77

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ. Spunem și că Γ axiomatizează $\mathcal{K}$.

Definiția 3.78

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este finit axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime finită de enunțuri Γ.

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:
$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \ldots \wedge \neg(x_{n-1} = x_n)),$$
pe care îl scriem mai compact astfel:
$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j)\right).$$

Propoziția 3.79

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 2$,
$$\mathcal{A} \models \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x (x = x)$.

Notații

Fie $n \geq 1$.

- $\exists^{\leq n} := \neg\exists^{\geq n+1}$
- $\exists^{=n} := \exists^{\leq n} \wedge \exists^{\geq n}$

Propoziția 3.80

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,
$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \exists^{\leq n} &\iff A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\
\mathcal{A} \models \exists^{=n} &\iff A \text{ are exact } n \text{ elemente.}
\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 3.81

Fie $\Gamma := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,
$$\mathcal{A} \models \Gamma \iff A \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Exemple - Teoria grafurilor

Un graf este o pereche $G = (V, E)$ de mulțimi a.î. E este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui V. Elementele lui V se numesc vârfuri, iar elementele lui E se numesc muchii.

- $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- $\mathcal{L}_{Graf}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$\begin{aligned}(IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x,x)\\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x,y) \rightarrow \dot{E}(y,x)).\end{aligned}$$

Definiție

Teoria grafurilor este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt grafurile.
- Γ axiomatizează clasa grafurilor. Prin urmare, clasa grafurilor este finit axiomatizabilă.

213

Exemple - Teoria ordinii parțiale

- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (ANTISIM), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned}(REFL) &:= \forall x (x \dot{\leq} x)\\ (ANTISIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y)\\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z)\end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor parțial ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor parțial ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii totale

Fie $\Gamma := \{(ANTISIM), (TRANZ), (TOTAL)\}$, unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \vee y \dot{\leq} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile total ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor total ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor total ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii stricte

- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned}(IREFL) &:= \forall x \neg (x \dot{<} x)\\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z)\end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor strict ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor strict ordonate este finit axiomatizabilă.

216

Exemple - Teoria ordinii dense

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)\}$, unde

$$\begin{aligned}(TOTAL) &:= \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x)\\ (DENS) &:= \forall x \forall y (x \dot{<} y \rightarrow \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y)).\end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii dense este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor dens ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor dens ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}} = (\dot{\equiv}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\equiv})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\equiv}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (SIM), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned}(REFL) &:= \forall x (x \dot{\equiv} x)\\ (SIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\equiv} y \rightarrow y \dot{\equiv} x)\\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\equiv} y \wedge y \dot{\equiv} z \rightarrow x \dot{\equiv} z)\end{aligned}$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A. Avem că $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$, așadar Γ axiomatizează $\mathcal{K}$. Prin urmare, $\mathcal{K}$ este finit axiomatizabilă.

218

Teorema de compactitate

Teorema 3.82 (Teorema de compactitate)

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

Teorema de compactitate - aplicații

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 3.83

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

(*) pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq Sen_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compactitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură finită a.î. $|A| \geq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$ și $\mathcal{A} \vDash \Gamma$ deoarece $\mathcal{A}$ este finită.

222

Teorema de compactitate - aplicații

Prin urmare, $\mathcal{A} \vDash \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \vDash \Delta_0$. Așadar, Δ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compactitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model $\mathcal{B}$.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \Gamma$, $\mathcal{B}$ este finită.
Deoarece $\mathcal{B} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că $\mathcal{B}$ este infinită.
Am obținut o contradicție. □

Corolar 3.84

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Teorema de compactitate - aplicații

Propoziția 3.85

Clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu $\mathcal{K}_{Inf}$ clasa $\mathcal{L}$-structurilor infinite.
Conform Propoziției 3.81, pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{Inf} \iff A \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \vDash \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.

Teorema de compactitate - aplicații

Presupunem că $\mathcal{K}_{Inf}$ este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = Mod(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = Mod(\varphi)$.
Rezultă că pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$A \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi \iff \mathcal{A} \vDash \neg\varphi.$$

Așadar, clasa $\mathcal{L}$-structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 3.83. □.

Corolar 3.86

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_=$.

Teorema de compactitate - aplicații

Propoziția 3.87

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compactitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci
$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \ldots, \exists^{\geq n_k}\}$ pentru un $k \in \mathbb{N}$.
Fie $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit $\mathcal{A}$ a.î. $|A| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \ldots, k$, deci $\mathcal{A} \vDash \Delta_0$.
Aplicând Teorema de compactitate, rezultă că Δ are un model $\mathcal{B}$.
Prin urmare, $\mathcal{B}$ este un model infinit al lui Γ. □

Teorema de compactitate - aplicații

Propoziția 3.88

Dacă un enunț φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice $\mathcal{L}$-structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$. Aplicând Propoziția 3.87, rezultă că Γ are un model infinit $\mathcal{A}$. Prin urmare, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. □

Teorema de compactitate - aplicații

Propoziția 3.89

Fie Γ o mulțime de enunțuri cu proprietatea că

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci

(i) Γ are un model infinit.
(ii) Clasa modelelor finite ale lui Γ nu este axiomatizabilă.
(iii) Clasa modelelor infinite ale lui Γ este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Exercițiu.

Modele non-standard ale aritmeticii

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simbolurii de operații binare, $\dot{S}$ este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție $\mathcal{L}$-termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 3.90

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ se numește non-standard dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește element non-standard.

Modele nonstandard ale aritmeticii

Teoria lui $\mathcal{N}$ se definește astfel:

$$Th(\mathcal{N}) := \{\varphi \in Sen_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{N} \vDash \varphi\}.$$

Se poate demonstra ușor că $Th(\mathcal{N})$ este o teorie.

Teorema 3.91

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \ldots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

Modele nonstandard ale aritmeticii

Fie $n_0 > \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Considerăm extensia $\mathcal{N}^+$ a lui $\mathcal{N}$ la $\mathcal{L}^+$ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \vDash \Gamma_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \times^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}).$$

Rezultă că $a := c^{\mathcal{A}}$ este element non-standard al lui $\mathcal{A}$. □

Aplicație a Teoremei de compacitate - mulțimi bine ordonate

Definiția 3.92

Fie A o mulțime nevidă. O relație de bună ordonare pe A este o relație de ordine totală $<$ pe A cu proprietatea că orice submulțime nevidă a lui A are minim.
Spunem că $(A, <)$ este mulțime bine ordonată.

Exemple

$(\mathbb{N}, <)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, <)$ nu este bine ordonată.

Aplicație a Teoremei de compacitate - mulțimi bine ordonate

Propoziția 3.93

Clasa mulțimilor bine ordonate nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{\dot<}$.

Dem.: Fie $\mathcal{K}$ clasa $\mathcal{L}_{\dot<}$-structurilor $\mathcal{A} = (A, <)$ a.î. $(A, <)$ este bine ordonată. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathcal{K}$ este axiomatizabilă, deci că există Γ o mulțime de enunțuri ale lui $\mathcal{L}_{\dot<}$ a.î. $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$.
Fie $\mathcal{L}$ extensia lui $\mathcal{L}_{\dot<}$ obținută prin adăugarea simbolurilor de constantă c_n, $n \in \mathbb{N}$. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot< c_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Sen_{\mathcal{L}}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ. Atunci

$$\begin{aligned}\Delta_0 &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot< c_n \mid n \in I\}, \text{ unde } I \subseteq \mathbb{N} \text{ este finită}\\ &\subseteq \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot< c_n \mid n = 0, \ldots, M\} \text{ pentru un } M \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Aplicație a Teoremei de compacitate - mulțimi bine ordonate

Fie $(A, <)$ o mulțime infinită bine ordonată. Definim
$a_{M+1} := \min A$, $a_M := \min A \setminus \{a_{M+1}\}$, ...,
$a_0 := \min A \setminus \{a_{M+1}, a_M, \ldots, a_1\}$. Atunci $a_{M+1} < a_M < \ldots < a_0$.
Fie $\mathcal{A}^+$ extensia lui $\mathcal{A} = (A, <)$ la $\mathcal{L}$ obținută astfel:

$$c_0^{\mathcal{A}^+} = a_0, \ldots, c_{M+1}^{\mathcal{A}^+} = a_{M+1}, \quad c_n^{\mathcal{A}^+} \text{ arbitrar pentru } n > M+1.$$

Atunci $\mathcal{A}^+ \vDash \Delta_0$.
Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{c_{n+1} \dot< c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

are un model $\mathcal{B}^+ = (B, <, b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ (deci $c_n^{\mathcal{B}^+} = b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$).
Deoarece $\mathcal{B}^+ \vDash \Gamma$, rezultă că $(B, <)$ este bine ordonată.
Deoarece $\mathcal{B}^+ \vDash \{c_{n+1} \dot< c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ rezultă că $b_{n+1} < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, submulțimea nevidă

$$S := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{nu are minim.}$$

Am obținut o contradicție. □

APLICAȚIE A TEOREMEI DE COMPACITATE LA TEORIA RAMSEY

Teoria Ramsey

Teoria Ramsey este o ramură a combinatoricii, a cărei temă principală este:

"Complete disorder is impossible." (T.S. Motzkin)

O structură mare, oricât de haotică ar fi, conține substructuri cu regularități.

Problemă tipică

O anumită structură este partiționată într-un număr finit de clase. Ce tip de substructură rămâne intactă în cel puțin una din clase?

- Rezultatele din teoria Ramsey sunt foarte puternice, deoarece ele sunt generale, se obțin presupunând ipoteze foarte slabe.
- Graham, Rothschild, Sperner, Ramsey Theory, 1990.

Teoria Ramsey

X mulțime, $\mathcal{G}$ colecție de submulțimi bune ale lui X, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definiția 3.94

O r-colorare a lui X este o funcție $c : X \to \{1, 2, \ldots, r\}$. Pentru $x \in X$, $c(x)$ este culoarea lui x. O submulțime $A \subseteq X$ se numește monocromatică dacă toate elementele din A au aceeași culoare.

Definiția 3.95

O familie de mulțimi $C_1, \ldots, C_r$ se numește partiție a lui X dacă $X = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ și $C_i \cap C_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- Pentru orice partiție $X = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ a lui X, există $i \in \{1, \ldots, r\}$ și $G \in \mathcal{G}$ a.î. $G \subseteq C_i$.
- Pentru orice r-colorare a lui X există o mulțime $G \in \mathcal{G}$ monocromatică.

Teoria Ramsey

Teorema Schur (1916)

Fie $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ și $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $\mathbb{N}$. Atunci există $i \in \{1, \ldots, r\}$ a.î.

$$\{x, y, x+y\} \subseteq C_i \quad \text{pentru } x, y \in \mathbb{N}.$$

$$X = \mathbb{N}, \quad \mathcal{G} = \{\{x, y, x+y\} \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Versiunea cu colorări: Pentru orice r-colorare a lui $\mathbb{N}$ există $x, y \in \mathbb{N}$ a.î. mulțimea $\{x, y, x+y\}$ este monocromatică.

Teoria Ramsey

Teorema van der Waerden (1927)

Fie $r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ și $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $\mathbb{N}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $i \in \{1, \ldots, r\}$ a.î. C_i conține progresii aritmetice de lungime k.

- rezultat central în teoria Ramsey
- una din cele trei perle în teoria numerelor Khintchin (1948)
- demonstrație combinatorială prin inducție dublă după r și k.

$$X = \mathbb{N}, \quad \mathcal{G} = \text{ mulțimea progresiilor aritmetice de lungime } k.$$

Versiunea cu colorări: Orice colorare finită a lui $\mathbb{N}$ conține progresii aritmetice monocromatice de lungime finită arbitrară.

Teoria Ramsey

Y mulțime, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notăm cu $[Y]^k$ mulțimea submulțimilor lui Y cu k elemente: $[Y]^k = \{A \subseteq Y \mid |A| = k\}$.
Putem să ne gândim la $[Y]^2$ ca fiind mulțimea muchiilor grafului complet peste Y.

Teorema 3.96 (Teorema Ramsey)

Fie Y o mulțime infinită, $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ și $[Y]^k = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ o partiție a lui $[Y]^k$. Atunci există $i \in \{1, \ldots, r\}$ și o submulțime infinită B a lui Y a.î. $[B]^k \subseteq C_i$.

- rezultat structural general, nu depinde de proprietățile aritmetice ale lui $\mathbb{N}$;
- articolul lui Ramsey: On a problem of formal logic (1930);
- teorema lui Ramsey a fost popularizată de Erdös și Szekeres, care au redescoperit-o într-un articol clasic din 1935.

Teoria Ramsey

Teorema 3.97 (Teorema Ramsey - versiunea cu colorări)

Fie Y o mulțime infinită și $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice r-colorare a lui $[Y]^k$, există o submulțime infinită B a lui Y a.î. $[B]^k$ este monocromatică.

Versiune echivalentă

Teorema 3.98 (Teorema Ramsey - versiunea cu colorări)

Fie $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice r-colorare a lui $[\mathbb{N}]^k$, există o submulțime infinită B a lui $\mathbb{N}$ a.î. $[B]^k$ este monocromatică.

Consecință: Principiul cutiei - varianta infinită (Infinite Pigeonhole Principle)

Fie Y o mulțime infinită și $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice r-colorare a lui Y, există o submulțime infinită monocromatică B a lui Y.

Teoria Ramsey

Notăm $[n] := \{1, \ldots, n\}$ și $[n]^k = \{A \subseteq [n] \mid |A| = k\}$.

Teorema 3.99 (Teorema Ramsey finitară)

Fie $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice r-colorare a lui $[n]^k$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m cu proprietatea că $[D]^k$ este monocromatică.

Generalizare a Principiului cutiei (Pigeonhole Principle): Dacă avem r cutii și $r+1$ obiecte, atunci cel puțin într-o cutie vor fi două obiecte. $\Longleftrightarrow$ Dacă colorăm $r+1$ obiecte cu r culori, atunci există două obiecte care au aceeași culoare.

Pentru k, r, m date, notăm cel mai mic n cu proprietatea de mai sus cu $R(k, r, m)$. Atunci $R(1, r, 2) = r + 1$.

Teorema Ramsey finitară

Vom demonstra folosind Teorema de compacitate că Teorema Ramsey implică Teorema Ramsey finitară.
Pentru simplitate, considerăm $r = 2$, $k = 2$.

Teorema 3.100 (Teorema Ramsey finitară)

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că teorema nu are loc. Atunci există $M \in \mathbb{N}$ cu următoarea proprietate:

(*) pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există o 2-colorare a lui $[n]^2$ a.î. $[n]$ nu are submulțimi D de cardinal M cu proprietatea că $[D]^2$ este monocromatică.

În continuare, fixăm M ca mai sus.

Teorema Ramsey finitară

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare)

Pentru orice mulțime nevidă D,

- oricărei 2-colorări c a lui $[D]^2$, îi asociem relația binară R_c pe D definită astfel:

$$R_c = \{(a, b) \in D^2 \mid c(\{a, b\}) = 1\}.$$

- oricărei relații binare R pe D îi asociem 2-colorarea c_R a lui $[D]^2$ definită astfel: pentru orice $\{a, b\} \subseteq D$,

$$c_R(\{a, b\}) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (a, b) \in R.$$

Teorema Ramsey finitară

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Fie $\mathcal{L}$ limbajul de ordinul întâi care conține simbolurile de constantă $\{c_k \mid k \geq 1\}$ și un simbol U de relație binară. Pentru orice $n \geq M$, definim un enunț φ_n din $\mathcal{L}$ cu următoarea proprietate: pentru orice $\mathcal{A} = (A, \{c_k^{\mathcal{A}} \mid k \geq 1\}, U^{\mathcal{A}})$,

$\mathcal{A} \models \varphi_n \iff c_i^{\mathcal{A}} \neq c_j^{\mathcal{A}}$ pentru orice $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ și pentru orice $D \subseteq \{c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_n^{\mathcal{A}}\}$ de cardinal M, $[D]^2$ nu este monocromatică relativ la 2-colorarea $c_{U^{\mathcal{A}}}$.

$$\varphi_n = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(c_i = c_j) \wedge \bigwedge_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_M \leq n} \psi_{i_1,\ldots,i_M}, \text{ unde}$$

$$\psi_{i_1,\ldots,i_M} = \bigvee_{\substack{1 \leq j,k,p,q \leq M,\\ j \neq k, p \neq q, (j,k) \neq (p,q)}} U(c_{i_j}, c_{i_k}) \wedge \neg U(c_{i_p}, c_{i_q}).$$

245

Teorema Ramsey finitară

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Evident, pentru $m \geq p$, avem că $\varphi_m \models \varphi_p$. Fie

$$\Gamma := \{\varphi_n \mid n \geq M\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ,

$$\Gamma_0 = \{\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}\}, \quad \text{unde } n_1, \ldots, n_k \geq M.$$

Fie $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Atunci orice model al lui φ_{n_0} este model al lui Γ. Aplicând (*) pentru n_0, rezultă că există o 2-colorare c_{n_0} a lui $[n_0]^2$ a.î. $[D]^2$ nu este monocromatică pentru nicio submulțime $D \subseteq [n_0]$ de cardinal M.

246

Teorema Ramsey finitară

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Fie $\mathcal{L}$-structura $\mathcal{A}$ definită astfel:

- $|\mathcal{A}| = [n_0]$;
- pentru orice $i = 1, \ldots, n_0$, $c_i^{\mathcal{A}} = i$ și $c_k^{\mathcal{A}}$ arbitrar pentru $k > n_0$;
- $U^{\mathcal{A}} = R_{c_{n_0}}$.

Atunci $\mathcal{A} \models \varphi_{n_0}$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{B} = (B, \{c_n^{\mathcal{B}} \mid n \geq 1\}, U^{\mathcal{B}}).$$

247

Teorema Ramsey finitară

Teorema Ramsey finitară

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. pentru orice 2-colorare a lui $[n]^2$ există o submulțime $D \subseteq [n]$ de cardinal m a.î. $[D]^2$ este monocromatică.

Dem.: (continuare) Fie

$$C = \{c_n^{\mathcal{B}} \mid n \geq 1\} \subseteq B.$$

Deoarece $\mathcal{B} \models \Gamma$, avem că $c_n^{\mathcal{B}} \neq c_m^{\mathcal{B}}$ pentru $n \neq m$. Prin urmare, $|C| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Aplicând Teorema Ramsey 3.97 pentru mulțimea infinită C și 2-colorarea $c_{U^{\mathcal{B}}}$ a lui $[B]^2$ (deci și a lui $[C]^2$), rezultă că C are o submulțime infinită D a.î. $[D]^2$ este monocromatică. Deoarece D este infinită, există N a.î. mulțimea $D_N := D \cap \{c_1^{\mathcal{B}}, \ldots, c_N^{\mathcal{B}}\}$ are cardinal M. Cum $[D_N]^2 \subseteq [D]^2$ este monocromatică, am obținut o contradicție cu faptul că $\mathcal{B} \models \varphi_N$. □

248