2025

Lmc seria 14 (2015-2016)

CURS 1

- e o bază teoretică - raționament formalizat.

~~Introducere Algebre Boole~~ $\boxed{\text{MULȚIMI}}$

Preliminarii:

· Mulțimi / teoria naivă: o colecție de obiecte bine determinate și distincte.
└> ce e un obiect? grupare? limbaj ambiguu
\ teoria axiomatică: noțiuni distincte prin denumire
- P(A) = proprietate └> mai importante proprietățile
- Paradoxul Russell: mulțimea tuturor mult. $M \in M$

Fie $X = \{A \in M \mid A \notin A\}$ dc. $X \in X \Rightarrow X \notin X$
$X \notin X \Rightarrow X \in X$ $\Rightarrow$ ↯

=> nu ∃ mult. a mult. => ∃ $\boxed{\text{clasa}}$ tuturor mult.

= ceva vag > mult. $\forall M \in C$. nu $\forall C \in M$. C_p = clase proprii a.î. nu e mult.

nu se poate „$C_p \in$". o clasă pr. $\notin C_{p1} \Rightarrow$ nu ∃ clasă a claselor

- cu sau fără clase, aceleași lucruri se pot dem.

∘ Teoria axiomatică

- axiomă = adevăr dat ∈ fundamentul unei teorii
-> elimină ambiguitățile - vrem rigoare matematică
-> baza
-> sisteme axiomatice cu alte axiome, dar pot fi echival.

dacă se deduc unul din celălalt

- studiem sist. von Neumann-Bernays-Gödel
-> din metalimbaj (vorbire uzuală) în formalizare.
-> mulțimi și clase. (denumire)

· variabilă = nume atribuit unui obiect nepreciza
· constantă = nume fix atribuit unui obiect.

-> convenție: alfabetul latin -> mulțime - atribut
└ litere grecești pt. variabile | Clasă - atribut (ex: mulțime)

- elementele sunt clase nepropii / mulțimi $\alpha \in \beta$

- conectori logici: $\neg$ (not), $\vee$ (sau), $\wedge$ (și), $\rightarrow$ (implică), $\leftrightarrow$ (echivalent)

- obs! $E \rightarrow F \equiv \neg E \vee F$

$\rightarrow, \leftrightarrow$ se pot defini ca: $E \leftrightarrow F \equiv (E \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow E)$

- $\neg$ (negația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția)

- $E \rightarrow F$ <
  - dacă E e adev. atunci și F trebuie să fie adev.
  - dacă E e fals atunci ~~și~~ nu știm nimic. F adev. sau fals.

- lucrăm doar cu propoziții ce sigur sunt ori adevărate ori false. Nu întrebări, nu paradox, nu subiectiv.

- cuantificatorii logici $\forall$ (oricare), $\exists$ (există)

pt. α variabilă, $\forall \alpha\, P(\alpha)$

- $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\, ((z \in x) \rightarrow (z \in y))$

- mulțimea vidă e unică și se not. „$\emptyset$"

A I Axioma extensionalității: $\left.\begin{array}{l} x \subseteq y \\ y \subseteq x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$

A II Axioma perechii: $\exists$ o mulțime ce conține doar elementele a și b, $\forall a \forall b$. not. $\{a, b\}$

- pereche ordonată $\Rightarrow \langle a, b \rangle = \{a, \{a, b\}\}$

- relație $\Leftrightarrow$ toate elem. clasei sunt perechi ordon.

- F: $\langle x, y \rangle \in F \Rightarrow x \in D(F)$ domeniul funcției

F — clasă (oarecare)

$y \in R(F)$ codomeniul
R — range

Lmc seria 14

CURS 1 - continuare

clasa F = funcție ⟺ relație a.î. ∀ x dintr-o pereche, are un singur y.
~~Fnc~~ Fnc(F)

A III Axioma reuniunii: ∀ mult. M, ∃ o mult. A cu membrii membrilor lui M. not: $A \cup B$

A IV Axioma mulțimii părților: ∀ mult. a admite existența mulțimii cu submulțimile lui a

A V Axioma submulțimilor P clasă ∩ a mult. = mult. (orice subclasă a unei mulțimi este o mulțime)

A VI Axioma infinității: $\forall \underset{\text{elem.}}{o}\ \exists \underset{\text{mult.}}{z}$ a.î. $\begin{cases} o \in z \text{ și} \\ \text{dc. } x \in z \\ \text{at. } (x \cup \{x\}) \in z \end{cases}$

- seamănă cu principiul ~~[illegible]~~ inducției.
- putem defini numerele naturale. notăm 0 constanta

$0 \in \mathbb{N}$ și $\begin{cases} 1 := 0 \cup \{0\} \\ 2 := 1 \cup \{1\} \\ \vdots \\ 1+n := n \cup \{n\} \\ \vdots \end{cases}$

A VII Axioma înlocuirii ⟺ ∃ Img(F) = (∀x) F(x).

A VIII Axioma alegerii globale ⟺ din ∀ mulțime nevidă poți alege un element nevid.

- permite Fie $x \in M$

A $\overline{\underline{IX}}$ Axioma fundării ~~⇔ clasele sunt finite recursive~~ ∃ membru minimal.

∀ clasă P ∃ a.î. ∃ $u \in P$ a.î. $\forall y \in u$, $y \notin A$.

A $\overline{\underline{X}}$ Axioma extensionalității claselor ⇒ dc. $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ atunci $A = B$ (clase)

A $\overline{\underline{XI}}$ Axioma comprehensiunii predicative

- avem voie $A = \{x \in y \mid P(x)\}$ clasă de mulțimi.

· propoziții = proprietăți fără variabilă (ex: 2 par)

Lmc seria 14

CURS 2

- $\exists!$ nu e cuantificator, este o prescurtare

pt. $(\exists x)(p(x))$ și $(\forall y)(\forall z)((p(y)$ și $p(z)) \rightarrow y = z)$

- negare cuantificatorilor:

$\neg \forall x \forall y \exists z \forall t \ p(x,y,z,t) \equiv$

$\exists x \neg (\forall y \exists z \forall t \ p(x,y,z,t)) \equiv$

$\exists x \exists y \neg (\ldots) \equiv$

$\exists x \exists y \forall z \neg (\ldots)$

- cuantificatorii de același fel comută. ceilalți nu

ex: $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Z})(x + y = 0)$ „A"

dif. $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{N})(x + y = 0)$ „F"

- $\forall x (p(x)$ sau $q(x)) \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} \forall x \ p(x)$ sau $\forall x \ q(x)$

- $\exists x (p(x)$ și $q(x)) \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \exists x \ p(x)$ și $\exists x \ q(x)$

- $(q \wedge r) \rightarrow p \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} ((q \rightarrow p)$ și $(r \rightarrow p))$

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
- $(p$ și $(q$ sau $r)) \Leftrightarrow (p$ și $q)$ sau $(p$ și $r))$
- $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Operații mulțimi - proprietăți

obs! $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$A \subsetneq B$; A submulț. proprie

$\mathcal{P}(T) := \{X \mid X \subseteq T\}$ mulț. părților

- idempotența: $A \cup A (= A \cap A) = A$, $\bar{\bar{A}} = A$
- comutativitate $A \Delta B = B \Delta A$
- asociat. $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$
- tranzitivitate $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
- Regile lui De Morgan $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \Leftrightarrow \neg(p \text{ sau } q) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \neg p$ și $\neg q$. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

...

- Produsul a 2 mulț. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ → pereche ordonată
  - $A \times \emptyset = \emptyset$
  - $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

• Reuniunea disjunctă $A \amalg B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$ → $\simeq D(A)$

reține din ce parte a venit elementul.

• funcții (A, G, B), unde $G \subseteq A \times B$, $\forall a \in A\ \exists! b \in B, (a,b) \in G$

G → graficul fct.

$f_1 = f_2 \Leftrightarrow G_1 = G_2$
$D_1 = D_2, R_1 = R_2$

- not. $B^A := \{f \mid f : A \to B\}$
- $\exists! f : \emptyset \to B$ anume $(\emptyset, \emptyset, B)$
- $\neg\exists f : A \to \emptyset$. $G = A \times \emptyset = \emptyset$. $(\forall a \in A)(\exists! b \in \emptyset)((a,b) \in \emptyset)$ → $\exists b \in \emptyset$ „F"

Lmc seria 14

CURS 2 - continuare

- $Im(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$ $\quad f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$
- injectiv, surj. ($f(A) = B$), bij.
- $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$. = dc. inj.
  $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$. = dc. f surj.
- fct. identitate $id: A \to A$, $id(a) = a$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- f inv. $\Leftrightarrow \exists g: B \to A$ a.î. $g \circ f = id_B$
- $A \cong B \Leftrightarrow \exists$ bij $(A \to B)$
- $|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists j$ inj. $j: A \to B$
- teorema Cantor: $\forall X$, $|X| \leq |P(X)|$
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ „alef 0"
- mult. <u>numărabilă</u> $\Leftrightarrow |X| = \aleph_0$ ($X \cong \mathbb{N}$)
- mult. infin. $\Leftrightarrow$ V1: $\exists S \subsetneq X$ a.î. $S \cong X$; V2: ?
- mult. <u>cel puțin numărabilă</u> $\Leftrightarrow$ finită sau numărabilă.
- dfb $\mathbb{Z}$ numărabilă. $\mathbb{Q}$ numărabil
- $\mathbb{R}$ nenum. va diferi la o ~~planta~~ zecimală. sau $\mathbb{R} \cong P(\mathbb{N})$
- $|\mathbb{R}| := c$ puterea continuumului $\aleph_0 \leq c$

prima problemă a lui Hilbert (ipoteza continuumului)

- nu $\exists\, k$ a.î. $|\mathbb{N}| \leq k < |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

i.e. $|\mathbb{R}|$ e primul card. infinit nenumărabil

- nu poate fi dem. sau infirmată

- $c = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$

- ipoteza generaliz. a continuumului

Afirmă că $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

- cardinalele sunt bine ordonate $0 < 1 < 2 < \dots < n < \aleph_0 < \aleph_1 < \dots$

- $T = \bigcup_{A \in S} A$ e mult. $\forall A \in S$, $A \subseteq T \Rightarrow |A| \leq |T|$

(dacă T e mulțimea mulțimilor de toate cardinalele)

dar $|T| < \mathcal{P}(T) \Rightarrow \forall A \in S, |A| < |\mathcal{P}(T)| \Rightarrow \mathcal{P}(T) \notin T \Rightarrow$ impos.

- cardinalele sunt clase proprii (exceptând 0)

- $k \geq \aleph_0$, $\lambda \in (0, \aleph_0) \Rightarrow k^{\lambda} = k$

$\aleph_0 \leq \mu \leq k$ at. $k^{\mu} = 2^{k}$