

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ  
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

---

И. Г. АРАМАНОВИЧ и В. И. ЛЕВИН

УРАВНЕНИЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,  
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1969

**517.2**

**А 79**

**УДК 517.944 (075.8)**

**2-2-8**  
**25—69**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	1
Введение . . . . .	9
1. Дифференциальные уравнения с частными производными . . . . .	9
2 Однородные линейные дифференциальные уравнения с частными производными и свойства их решений . . . . .	14
3. Оператор Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических координатах . . . . .	20

## ГЛАВА I УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

§ 1. Уравнение колебаний струны . . . . .	24
4 Вывод уравнения колебаний струны . . . . .	24
5 Постановка начальных и краевых условий . . . . .	30
§ 2. Колебания бесконечной и полубесконечной струны. Метод Даламбера . . . . .	33
6 Бесконечная струна Формула Даламбера . . . . .	33
7. Распространение волн отклонения . . . . .	37
8. Распространение волн импульса . . . . .	46
9. Полубесконечная струна . . . . .	51
§ 3. Метод Фурье . . . . .	55
10. Метод Фурье . . . . .	55
11. Стоячие волны . . . . .	62
12 Примеры . . . . .	64
§ 4. Вынужденные колебания и колебания струны в среде с сопротивлением . . . . .	72
13. Вынужденные колебания струны . . . . .	72
14. Колебания струны в среде с сопротивлением . . . . .	77

<b>§ 5. Продольные колебания стержня . . . . .</b>	<b>80</b>
15. Постановка задачи и метод решения . . . . .	80
16. Примеры . . . . .	87
<b>§ 6. Крутильные колебания вала . . . . .</b>	<b>91</b>
17. Уравнения крутильных колебаний . . . . .	91
18. Крутильные колебания вала с диском на одном конце	94
<b>§ 7. Электрические колебания в длинных однородных линиях . . . . .</b>	<b>99</b>
19. Телеграфное уравнение . . . . .	99
20. Линия без потерь . . . . .	103
21. Линия без искажения . . . . .	105
22. Линии конечной длины . . . . .	107
<b>§ 8. Уравнение колебаний мембранны . . . . .</b>	<b>114</b>
23. Вывод уравнения колебаний мембранны . . . . .	114
24. Начальные и краевые условия . . . . .	119
<b>§ 9. Колебания прямоугольной мембранны . . . . .</b>	<b>120</b>
25. Собственные функции . . . . .	120
26. Стоячие волны прямоугольной мембранны . . . . .	123
27. Вторая часть метода Фурье Двойные ряды Фурье . . .	126
28. Стоячие волны с одинаковой частотой . . . . .	128
<b>§ 10. Уравнение и функции Бесселя . . . . .</b>	<b>130</b>
29. Уравнение Бесселя . . . . .	130
30. Условие ортогональности функций Бесселя нулевого порядка . . . . .	134
31. Функции Бесселя первого порядка . . . . .	136
<b>§ 11. Колебания круглой мембранны . . . . .</b>	<b>139</b>
32 Круглая мембрана . . . . .	139
33 Стоячие волны круглой мембранны . . . . .	143

## ГЛАВА II

## УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ

<b>§ 12. Уравнение линейной теплопроводности . . . . .</b>	<b>145</b>
34. Вывод уравнения линейной теплопроводности . . . . .	145

85. Начальное и краевые условия . . . . .	148
36. Теплопроводность в стержне при наличии теплообмена через боковую поверхность . . . . .	151
<b>§ 13. Теплопроводность в бесконечном стержне . . . . .</b>	<b>153</b>
37. Метод Фурье для бесконечного стержня . . . . .	153
38. Преобразование решения уравнения теплопроводности	159
39. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и его физический смысл . . . . .	162
40. Примеры . . . . .	168
<b>§ 14. Теплопроводность в конечном стержне . . . . .</b>	<b>173</b>
41. Приведение к задаче с однородными краевыми усло- виями. Метод Фурье . . . . .	173
42. Распространение тепла в стержне в случаях постоянной температуры на концах или теплоизоляции концов	177
43. Общий случай краевых условий . . . . .	183
44. Примеры . . . . .	186
<b>§ 15. Теплопроводность в полубесконечном стержне . . . . .</b>	<b>196</b>
45. Распространение тепла при теплоизоляции или постоян- стве температуры конца стержня . . . . .	196
46. Примеры . . . . .	200
<b>§ 16. Некоторые пространственные задачи теплопровод- ности . . . . .</b>	<b>202</b>
47. Вывод уравнения теплопроводности в пространственном случае . . . . .	202
48. Начальное и краевые условия . . . . .	207
49. Распространение тепла в однородном цилиндре . . . . .	210
50. Распространение тепла в однородном шаре . . . . .	214
<b>§ 17. Задачи диффузии . . . . .</b>	<b>216</b>
51. Уравнение диффузии . . . . .	216
52. Уравнения теплопроводности и диффузии с краевым условием, зависящим от времени . . . . .	219
53. Примеры . . . . .	223

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### I ЛАВА III

#### УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

<b>§ 18. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Метод функции Грина . . . . .</b>	<b>226</b>
54. Постановка краевых задач . . . . .	226
55. Метод функции Грина для задачи Дирихле (трехмерный случай) . . . . .	230
56. Метод функции Грина для задачи Дирихле (двумерный случай) . . . . .	237
57. Задача Неймана . . . . .	240
<b>§ 19. Решение задачи Дирихле для шара и полупространства . . . . .</b>	<b>242</b>
58. Сопряженные точки . . . . .	242
59. Задача Дирихле для шара . . . . .	244
60. Задача Дирихле для внешности шара . . . . .	252
61. Задача Дирихле для полупространства . . . . .	253
<b>§ 20. Решение задачи Дирихле для круга и полуплоскости</b> . . . . .	<b>258</b>
62. Задача Дирихле для круга . . . . .	258
63. Задача Дирихле для внешности круга . . . . .	264
64. Задача Дирихле для полуплоскости . . . . .	264
<b>§ 21. Метод Фурье для уравнения Лапласа . . . . .</b>	<b>267</b>
65. Двумерное уравнение Лапласа и задача Дирихле для круга . . . . .	267
66. Разделение переменных в трехмерном уравнении Лапласа в сферических координатах. Многочлены Лежандра . . . . .	271
67. Решение задачи Дирихле для шара в осесимметричном случае разложением по многочленам Лежандра . . . . .	278
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>282</b>
68. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка . . . . .	282
69. Корректность постановки задач математической физики . . . . .	284
<b>Литература . . . . .</b>	<b>287</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Несмотря на наличие богатой литературы по математической физике, студенты и аспиранты высших технических учебных заведений, так же как и инженеры, работающие в промышленности, которым необходимы первоначальные сведения по уравнениям математической физики, испытывают серьезные затруднения в подборе руководства по этой важной отрасли прикладной математики. Это объясняется тем, что почти все книги, существующие в этой области, либо опираются на слишком большой объем математических знаний, либо написаны столь скжато и развивают математический аппарат столь далеко, что оказываются недоступными для указанного выше круга возможных читателей настоящей книги.

Авторы исходили из того, что читатель знаком только с обычным курсом высшей математики, изучаемым в наших вузах. Мы учиывали также, что читатель может интересоваться не обязательно всеми задачами математической физики, рассмотренными в книге, а только теми, которые имеют непосредственное отношение к его специальности (одних, например, могут интересовать только вопросы колебаний, других — задачи теплопроводности). В соответствии с этим книга построена так, что отдельные ее главы могут изучаться сравнительно независимо друг от друга. В частности, важнейший метод решения многих задач математической физики — метод Фурье — изложен с одинаковой степенью подробности как в первой, так и во второй главе.

Книге предпослано введение, в котором в помощь читателю собраны некоторые факты математического анализа (в основном, обычно излагаемые в общем курсе втуза, но также и некоторые дополнительные), которыми в дальнейшем приходится пользоваться.

Большое внимание уделено физической стороне дела. Выводы основных уравнений изложены достаточно подробно, а получаемые решения, как правило, исследуются с физической точки зрения. Всюду, где это возможно, указано на связь с теми дисциплинами, в которых читатель найдет применение рассматриваемых в книге задач.

Вместе с тем чисто математическая сторона дела (теоремы существования, единственности, законность предельных переходов и т. п.) почти не затрагивается. Читатель, интересующийся вопросами такого рода, должен обратиться к более полным руководствам (см. перечень литературы<sup>1</sup>). Однако даже при этом математический аппарат достаточно сложен и от читателя потребуются известные усилия для его усвоения. Пункты и примеры, которые являются более трудными, напечатаны мелким шрифтом; читатель, пропустивший эти места, не будет испытывать загруженний при чтении основного текста.

Чтобы, с одной стороны, избежать излишних повторений, а с другой стороны, облегчить пользование книгой, изложение сопровождается ссылками на книгу А. Ф. Берманта и И. Г. Арамановича «Краткий курс математического анализа для вузов» («Наука», М.).

Мы выражаем искреннюю благодарность Н. Я. Виленкину, чьи советы повлияли на окончательную структуру книги, а также Н. А. Угаровой и В. А. Угарову за их замечания по тексту рукописи и Т. С. Плетневой, внимательно прочитавшей рукопись.

*Авторы*

Во втором издании устраниены замеченные опечатки и неточности.

---

<sup>1</sup>) В тексте книги ссылки на литературу помещены в квадратные скобки.

---

## ВВЕДЕНИЕ

**1. Дифференциальные уравнения с частными производными.** В дальнейшем будем предполагать, что читатель уже знаком с основами теории обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. уравнений, связывающих неизвестную функцию одной независимой переменной, ее производные и саму независимую переменную. Мы приведем лишь самые основные сведения.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида  $y' = f(x, y)$  имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой, содержащей одну произвольную постоянную:  $y = \varphi(x, C)$ . Аналогично общее решение дифференциального уравнения второго порядка  $y'' = f(x, y, y')$  содержит две произвольные постоянные:  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ . Выделение частного решения может быть произведено путем задания начальных условий, которые для уравнения второго порядка обычно имеют вид  $y|_{x=x_0} = y_0$ ,  $y'|_{x=x_0} = y'_0$ . Подставляя эти значения  $x$ ,  $y$  и  $y'$  в общее решение и в его производную, получим два уравнения для отыскания произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Если правая часть уравнения — функция  $f(x, y, y')$  — непрерывна в некоторой окрестности значений  $x_0$ ,  $y_0$  и  $y'_0$  и имеет там непрерывные частные производные  $\frac{\partial f}{\partial y}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y'}$ , то существует единственное частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям (теорема существования и единственности решения).

В дальнейшем особенно часто будут встречаться линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Для однородного уравнения

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

общее решение есть линейная комбинация двух его частных

решений  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ , если только эти решения линейно независимы (т. е.  $y_2 \neq ky_1$ , где  $k$  — константа):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

В этой книге будут изучаться *дифференциальные уравнения с частными производными*, т. е. уравнения, содержащие неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные. Обычно приходится иметь дело с уравнениями для функций двух или трех независимых переменных. Вот примеры таких уравнений ( $x, y, z$  — независимые переменные,  $u$  — неизвестная функция):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, & y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= u. \end{aligned}$$

В первой строке написаны уравнения, содержащие частные производные только первого порядка. Такие уравнения называются *уравнениями первого порядка*. Соответственно уравнения, написанные во второй строчке, являются примерами *уравнений второго порядка*.

Мы вовсе не ставим перед собой задачу изучать вообще способы решений дифференциальных уравнений с частными производными. Мы будем рассматривать только те конкретные уравнения (да и то далеко не все), которые существенны для физики, механики и техники. Именно эти уравнения и называются *дифференциальными уравнениями математической физики*.

Предварительно без доказательств познакомимся с простейшими свойствами уравнений с частными производными; будем считать, что неизвестная функция  $u$  зависит от двух переменных  $x$  и  $y$ .

Возьмем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Ясно, что искомая функция  $u(x, y)$  не зависит от переменной  $x$ , но может быть любой функцией от  $y$ :

$$u(x, y) = \varphi(y). \quad (2)$$

Действительно, дифференцируя функцию  $\varphi(y)$  по  $x$ , мы получаем нуль, а это и значит, что равенство (1) соблюдается. Следовательно, решение (2) уравнения (1) содержит *одну произвольную функцию*  $\varphi(y)$ . В этом и заключается коренное отличие решения уравнения с частными производными первого порядка от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, которое содержит лишь *произвольную постоянную*. По аналогии решение (2), содержащее одну произвольную функцию, будем называть *общим решением уравнения* (1).

Рассмотрим более сложное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y), \quad (3)$$

где  $f(y)$  — заданная функция. Все функции  $u(x, y)$ , удовлетворяющие уравнению (3), имеют вид

$$u(x, y) = \int f(y) dy + \psi(x), \quad (4)$$

где  $\psi(x)$  — произвольная функция от  $x$ . Это можно проверить, дифференцируя обе части равенства (4) по  $y$ . Найденное решение уравнения (3) зависит от одной произвольной функции, т. е. является общим.

Легко проверить, что уравнение  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  имеет общее решение  $u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , где  $\varphi$  — произвольная дифференцируемая функция.

Напомним для этого правило дифференцирования сложной функции нескольких переменных (см. [1], п. 116). Если  $u = \varphi(v, \dots, w)$ , где  $v, \dots, w$  — функции переменных  $x, y, \dots, t$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \dots + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогичные формулы имеют место и для производных по  $y, \dots, t$ . При этом число промежуточных аргументов  $v, \dots, w$ , так же как и число независимых переменных  $x, y, \dots, t$ , может быть любым.

В нашем примере  $u = \varphi(v)$ , где  $v = \frac{y}{x}$ . Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(v) \left( -\frac{y}{x^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(v) \frac{1}{x}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение, получим тождество

$$x\varphi'(v) \left( -\frac{y}{x^2} \right) + y\varphi'(v) \frac{1}{x} = 0.$$

Точно так же можно проверить, что уравнение  $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  имеет общее решение  $u(x, y) = \varphi(x + y)$ , а уравнение  $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  имеет общее решение  $u = \varphi(x^2 + y^2)$ , где  $\varphi$  произвольная дифференцируемая функция.

Рассмотрим теперь уравнения второго порядка. Пусть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5)$$

Положим  $\frac{\partial u}{\partial y} = v$ . Тогда уравнение (5) примет вид  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . Общим решением уравнения  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  будет произвольная функция  $f(y)$ . Возвращаясь к функции  $u$ , получим опять уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y).$$

Согласно (4) его общим решением будет функция

$$u(x, y) = \int f(y) dy + \psi(x).$$

Так как  $f(y)$  — произвольная функция от  $y$ , то и интеграл от нее также является произвольной функцией, которую мы обозначим через  $\varphi(y)$ . В результате мы получили решение в виде

$$u(x, y) = \psi(x) + \varphi(y), \quad (6)$$

где  $\varphi(y)$  и  $\psi(x)$  — произвольные дифференцируемые функции. Легко проверить, что функция (6) действительно удовлетворяет уравнению (5).

Решение (6) уравнения (5) с частными производными второго порядка содержит уже две произвольные функции. В этом случае оно называется *общим решением*.

Проверим, что функция  $u(x, y) = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$  является общим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Пользуясь приведенным выше правилом дифференцирования сложной функции и обозначая  $x+y=v$ , последовательно получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi(v) + x\varphi'(v) + y\psi'(v), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x\varphi'(v) + \psi(v) + y\psi'(v), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2\varphi'(v) + x\varphi''(v) + y\psi''(v), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x\varphi''(v) + 2\psi'(v) + y\psi''(v), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \varphi'(v) + x\varphi''(v) + \psi'(v) + y\psi''(v).\end{aligned}$$

Подставляя выражения для производных в левую часть уравнения, убеждаемся, что она обращается в нуль.

Предлагаем читателю проверить, что функция  $u(x, y) = \varphi(x+ay) + \psi(x-ay)$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные дважды дифференцируемые функции, является общим решением уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ , а функция  $u(x, t) = \varphi(\sqrt{2x}-t) + \psi(\sqrt{2x}+t)$  — общим решением уравнения

$$2x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

До сих пор мы еще не ставили вопроса об отыскании *частных решений*. Позже будет выяснено, какие дополнительные условия нужно задать, чтобы с их помощью можно было выделить частное решение, т. е. функцию, удовлетворяющую как дифференциальному уравнению, так и дополнительным условиям.

Оказывается, что дифференциальные уравнения математической физики, которыми мы будем в дальнейшем заниматься,

имеют между собой довольно много общих черт: все они — второго порядка и линейны относительно неизвестной функции и ее частных производных. Чаще всего все коэффициенты перед функцией и ее производными — постоянные числа. Общий вид таких уравнений для функции  $u$ , зависящей от двух переменных  $x$  и  $y$ , таков:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y), \quad (7)$$

где  $A, B, C, D, E$  и  $F$  — постоянные числа, а правая часть — заданная функция переменных  $x$  и  $y$ .

Отметим, что характер и поведение решений этого уравнения существенно зависят от его коэффициентов. Об этом мы скажем в заключении, после того как познакомимся с простейшими уравнениями типа (7) и способами их решений<sup>1)</sup>.

**2. Однородные линейные дифференциальные уравнения с частными производными и свойства их решений.** Если в уравнении (7) правая часть равна нулю, то уравнение называется *однородным*. Оно имеет вид

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0. \quad (8)$$

Вообще в теории дифференциальных уравнений уравнение называется однородным, если функция, тождественно равная нулю ( $u \equiv 0$ ), является его решением. Решения линейных однородных уравнений вида (8) обладают следующим свойством:

*Если каждая из функций  $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_k(x, y)$  является решением уравнения (8), то и их линейная комбинация*

$$C_1 u_1(x, y) + C_2 u_2(x, y) + \dots + C_k u_k(x, y), \quad (9)$$

<sup>1)</sup> Отчасти порядок изложения материала в книге будет напоминать порядок изложения теории кривых второго порядка в курсе аналитической геометрии. Там тоже вначале пишут общее уравнение кривых второго порядка  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , а исследование его производят лишь после изучения свойств эллипса, параболы и гиперболы, т. е. кривых, уравнения которых представляют частные виды общего уравнения. Эта аналогия, как мы увидим в заключении, не случайна, она служит основанием для классификации уравнений типа (7).

где  $C_1, C_2, \dots, C_k$  — произвольные постоянные, — так же является решением этого уравнения.

Для доказательства достаточно заметить, что если  $u$  есть линейная комбинация частных решений:

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_k u_k$$

(для краткости аргументы функций не пишутся), то любая производная функции  $u$  будет такой же линейной комбинацией соответствующих производных функций  $u_1, u_2, \dots, u_k$ :

$$\frac{du}{dx} = C_1 \frac{du_1}{dx} + C_2 \frac{du_2}{dx} + \dots + C_k \frac{du_k}{dx},$$

$$\frac{du}{dy} = C_1 \frac{du_1}{dy} + C_2 \frac{du_2}{dy} + \dots + C_k \frac{du_k}{dy}.$$

Разумеется, так же будут выглядеть и производные второго порядка. Если подставить выражения для производных функций в левую часть уравнения (8) и перегруппировать слагаемые, то получим

$$C_1 \left( A \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dots + F u_1 \right) + \dots + C_k \left( A \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \dots + F u_k \right).$$

Поскольку по условию функции  $u_1, u_2, \dots, u_k$  являются решениями уравнения (8), то каждая из скобок обратится в нуль, а вместе с ними и вся левая часть уравнения; это и означает, что функция  $u$  является его решением.

Точно такое же свойство, как известно, имеет место и для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Однако надо иметь в виду, что обыкновенное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет в точности  $n$  линейно независимых частных решений, линейная комбинация которых и дает общее решение.

Уравнение же в частных производных может иметь, как мы убедимся в дальнейшем, бесконечное множество линейно независимых частных решений, т. е. такое множество решений, любое конечное число которых является функциями линейно независимыми. (Система функций  $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)$  называется линейно независимой, если ни одна из этих функций не является линейной комбинацией остальных.) В соответствии с этим нам придется иметь дело не только с линейными комбинациями конечного числа

решений, но и с рядами, членами которых служат произведения произвольных постоянных на частные решения:

$$C_1 u_1(x, y) + C_2 u_2(x, y) + \dots + C_n u_n(x, y) + \dots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x, y). \quad (10)$$

Мы дадим здесь необходимые определения и укажем некоторые свойства рядов, членами которых являются функции нескольких переменных. Этими свойствами мы будем пользоваться в дальнейшем.

Будем считать, что члены ряда — функции двух переменных; все определения легко переносятся на случай функций трех переменных.

Рассмотрим функциональный ряд

$$v_1(x, y) + v_2(x, y) + \dots + v_n(x, y) + \dots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y). \quad (11)$$

Этот ряд называется *сходящимся в точке*  $(x_0, y_0)$ , если числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_0, y_0)$  сходится. Совокупность всех точек, в которых ряд сходится, называется *областью сходимости ряда*. Все члены ряда считаются непрерывными и дифференцируемыми функциями переменных  $x$  и  $y$  во всей области сходимости ряда.

Мы будем в дальнейшем рассматривать только такие ряды, суммы которых есть непрерывные функции от  $x$  и  $y$ ,

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y). \quad (12)$$

Кроме того, будем предполагать, что все встречающиеся ряды можно дважды почленно дифференцировать, т. е. что

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \quad (13)$$

и т. д.

Очень часто нам придется интегрировать ряд (12) либо по некоторой области  $D$ , либо по одной из переменных. Последнее означает, что мы полагаем, например,  $y = y_0$  и интегрируем по  $x$  в некоторых пределах от  $x_0$  до  $x_1$ . Возможность почлененного интегрирования ряда заключается в том, что

$$\int_{x_0}^{x_1} v(x, y_0) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} v_n(x, y_0) dx. \quad (14)$$

(Разумеется, предполагается, что рассматриваемые значения  $x$  и  $y_0$  принадлежат области сходимости ряда.)

Обозначим сумму ряда (10) через  $u(x, y)$  и будем считать, что выполняются все введенные предположения. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\partial u_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \dots$$

Отсюда ясно, что функция  $u(x, y)$  — сумма ряда (10), так же как и члены ряда, является решением уравнения (8).

Можно указать сравнительно простые признаки, при соблюдении которых все высказанные предположения о рядах будут справедливы. Введем для этого следующее определение.

#### Функциональный ряд

$$v_1(x, y) + v_2(x, y) + \dots + v_n(x, y) + \dots$$

называется *правильно сходящимся в области  $D$ , принадлежащей области сходимости ряда*, если все члены его по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов некоторого сходящегося знакоположительного числового ряда, т. е.

$$|v_n(x, y)| \leq M_n,$$

причем неравенство соблюдается во всех точках области  $D$ , а  $M_n$  — член сходящегося числового ряда.

Для правильно сходящихся рядов имеют место следующие теоремы, которые мы приводим без доказательства.

1. Сумма правильно сходящегося ряда из непрерывных функций есть функция непрерывная.

2. Правильно сходящийся ряд можно почленно интегрировать.

3. Если ряды, составленные из производных сходящегося ряда, сходятся правильно, то ряд можно почленно дифференцировать.

Определение правильно сходящегося ряда без всяких изменений переносится как на функции одной переменной, так и на функции трех и большего числа переменных.

Напомним, что все три сформулированные свойства имели место для степенных рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  в интервале их сходимости.

Нетрудно показать, что степенной ряд является правильно сходящимся в любом интервале, целиком заключенном в интервале сходимости ряда (см. [1], п. 190) <sup>1)</sup>.

В дальнейшем нам встретятся и такие случаи, когда функция  $u(x, y, \lambda)$  при всех значениях параметра  $\lambda$ , заключенных в некотором интервале  $[\lambda_0, \lambda_1]$ , является решением уравнения (8). Тогда говорят, что *частные решения зависят от непрерывно изменяющегося параметра*. Обычно интервал изменения параметра  $\lambda$  составляет или всю числовую ось, или положительную полусось.

Мы будем в дальнейшем функцию  $u(x, y, \lambda)$  записывать в виде  $u_\lambda(x, y)$ . Этой формой записи подчеркивается аналогия между случаями, когда решения зависят от параметра, принимающего только целые значения ( $u_k(x, y)$ ), и когда решения зависят от параметра, принимающего любые значения ( $u_\lambda(x, y)$ ).

Покажем, что если мы умножим функцию  $u_\lambda(x, y)$  на произвольную функцию  $C(\lambda)$  и проинтегрируем в пределах изменения параметра  $\lambda$ :

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} C(\lambda) u_\lambda(x, y) d\lambda, \quad (15)$$

то вновь получим решение уравнения (8). Ясно, что интеграл (15) есть некоторая функция переменных  $x$  и  $y$ .

Предварительно познакомимся с некоторыми свойствами интегралов типа (15). Пусть дан интеграл

$$F(x, y) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} v(x, y, \lambda) d\lambda, \quad (16)$$

где  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  — конечные пределы. Имеет место следующая теорема, которую мы приводим без доказательства

<sup>1)</sup> Для читателей, знакомых с определением равномерной сходимости ряда, отметим, что если ряд сходится правильно, то он сходится и равномерно; однако не всякий равномерно сходящийся ряд сходится правильно.

Если подынтегральная функция  $v(x, y, \lambda)$ , а также ее частные производные по  $x$  и по  $y$  непрерывны при всех рассматриваемых значениях аргументов  $x$ ,  $y$  и  $\lambda$ , то и функция  $F(x, y)$  непрерывна вместе со своими частными производными, причем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{\partial v}{\partial x} d\lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{\partial v}{\partial y} d\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} d\lambda \quad (17)$$

и т. д.

В случае, когда хотя бы один из пределов интегрирования обращается в бесконечность, интеграл (16) становится *несобственным* и указанные свойства функции  $F(x, y)$  соблюдаются лишь при некоторых дополнительных условиях, о которых мы скажем ниже.

Возвращаясь к интегралу (15), обозначим его через  $U(x, y)$  и предположим, что для него справедливы формулы (17). При этом пределы интегрирования  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  могут быть как конечными, так и бесконечными. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} C(\lambda) \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} d\lambda, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} C(\lambda) \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} d\lambda, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} C(\lambda) \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} d\lambda \end{aligned}$$

и т. д.

Подставляя выражения для функции  $U(x, y)$  и ее производных в уравнение (8) и заменяя сумму интегралов интегралом от суммы функций, получим в левой части

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots + FU = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} C(\lambda) \left[ A \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} + \dots + Fu_\lambda \right] d\lambda.$$

Так как по предположению выражение в квадратных скобках при любом  $\lambda$  равно нулю (ведь функция  $u_\lambda(x, y)$  при любом  $\lambda$  является решением уравнения (8)), то и весь интеграл равен нулю. Следовательно, функция  $U(x, y)$  действительно является решением уравнения.

Сформулируем простой признак, аналогичный соответствующему признаку для рядов, при соблюдении которого выполняются все приведенные свойства для несобственных интегралов вида

$F(x, y) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} v(x, y, \lambda) d\lambda$ , где один или оба предела интегрирования обращаются в бесконечность.

Если можно указать такую положительную функцию  $\varphi(\lambda)$ , что для всех рассматриваемых значений  $x, y$  и  $\lambda$  соблюдается неравенство  $|v(x, y, \lambda)| \leq \varphi(\lambda)$  и несобственный интеграл от функции  $\varphi(\lambda)$  сходится, то функция  $F(x, y)$  непрерывна. Такую сходимость несобственного интеграла от функции  $v(x, y, \lambda)$  будем называть *правильной*.

Если аналогичное свойство имеет место и для интегралов от частных производных функции  $v(x, y, \lambda)$ , то функция  $F(x, y)$  дифференцируема и ее производные находятся по формулам (17).

Например, если  $\left| \frac{\partial v(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} \right| \leq \psi(\lambda)$  и интеграл от  $\psi(\lambda)$  сходится,

$$\text{то } \frac{\partial F}{\partial x} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{\partial v}{\partial x} d\lambda.$$

**3. Оператор Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических координатах**<sup>1)</sup>. В этом пункте мы рассмотрим вспомогательный вопрос о выражении оператора Лапласа в различных системах координат; эти выражения понадобятся нам в дальнейшем. Напомним, что *трехмерным оператором Лапласа*  $\Delta u$  называется выражение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (18)$$

где  $u(x, y, z)$  — функция трех переменных. Если функция  $u$  зависит только от двух переменных, то оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (19)$$

называется *двумерным*.

Начнем с двумерного оператора Лапласа и произведем замену декартовых координат  $x$  и  $y$  полярными  $r$  и  $\varphi$  по формулам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (20)$$

<sup>1)</sup> Этот пункт следует прочесть или перед изучением задач, в которых встретится необходимость преобразования оператора Лапласа (п. 32, п. 49—50), или перед чтением гл. III.

Если в функцию  $u(x, y)$  подставить вместо  $x$  и  $y$  их выражения, то получится функция  $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  переменных  $r$  и  $\varphi$ . Выразив вторые производные от функции  $u$  по  $x$  и  $y$  через производные по  $r$  и  $\varphi$  и подставив затем найденные выражения в формулу (19), мы и получим оператор Лапласа в полярных координатах.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (21)$$

Для отыскания частных производных  $r$  и  $\varphi$  по  $x$  и  $y$  выразим из формул (20)  $r$  и  $\varphi$ . Находим, что  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; отсюда

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi. \quad (22)$$

Поскольку  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ , то

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Заменяя  $x$  и  $y$  по формулам (20), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (23)$$

Подставив (22) и (23) в равенства (21), окончательно найдем выражения частных производных  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  через переменные  $r$  и  $\varphi$  и производные по этим переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (24)$$

Перейдем к отысканию вторых производных. Применим к производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  опять правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Из равенств (24)

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Умножим теперь первое равенство на  $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi$ , а второе на  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}$  и сложим. Приводя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Совершенно аналогично, воспользовавшись соотношением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Складывая (25) и (26), окончательно получим выражение оператора Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (27)$$

Последнее выражение очень часто бывает удобно записать в следующем виде:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (28)$$

Тождественность правых частей формул (28) и (27) легко проверяется дифференцированием.

Перейдем к трехмерному случаю и начнем с *цилиндрических координат*. Цилиндрические координаты  $r, \varphi$

и  $z$  связаны с декартовыми соотношениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Функция  $u(x, y, z)$  преобразуется в функцию  $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ . Здесь третья переменная  $z$  остается неизменной, и в выражении (27) двумерного оператора Лапласа в полярных координатах добавляется только вторая производная по  $z$ :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (29)$$

Для сферических координат  $r, \theta$  и  $\varphi$  имеем формулы:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

в которых  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — расстояние точки  $(x, y, z)$  от начала координат,  $\theta$  — угол между радиусом-вектором точки и осью  $Oz$ , а  $\varphi$  — угол между проекцией радиуса-вектора на плоскость  $Oxy$  и осью  $Ox$ . Здесь непосредственное преобразование производных функции  $u(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$  очень громоздко, и мы его проводить не будем, ограничившись тем, что выпишем окончательное выражение оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (30)$$

Эту формулу часто записывают в виде

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Предоставляем читателю проверить тождественность обеих формул.

# ГЛАВА I

## УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

### § 1. Уравнение колебаний струны

**4. Вывод уравнения колебаний струны.** Пусть конечные точки струны закреплены, а сама струна тую натянута. Если вывесить струну из положения равновесия (например, оттянуть ее или ударить по ней), то струна начнет колебаться. Будем предполагать, что все точки струны движутся перпендикулярно ее положению равновесия (поперечные колебания), причем в каждый момент времени струна лежит в одной и той же плоскости.

Возьмем в этой плоскости систему прямоугольных координат  $xOu$ . Тогда, если в начальный момент времени струна

располагалась вдоль оси  $Ox$ , то  $u$  будет означать отклонение струны от положения равновесия. В процессе колебания величина отклонения  $u$  будет зависеть от абсциссы точки струны  $x$  и от времени  $t$ . Таким образом, чтобы знать положение любой точки струны в произвольный момент

времени, нам надо найти зависимость  $u$  от  $x$  и  $t$ , т. е. найти функцию  $u(x, t)$ . При каждом фиксированном значении  $t$  график функции  $u(x, t)$  представляет форму колеблющейся струны в момент времени  $t$  (рис. 1), частная производная  $\frac{du}{dx} = u'_x(x, t)$  дает при этом угловой коэффициент каса-

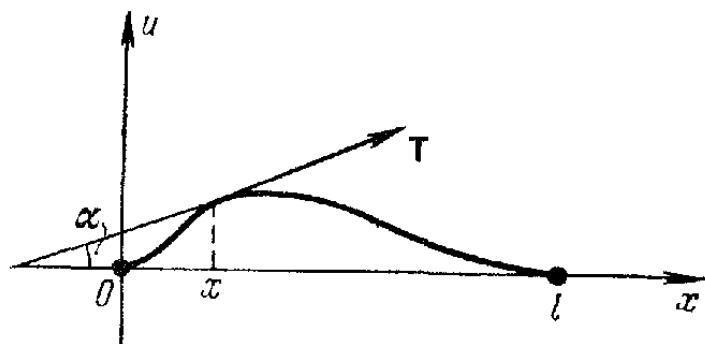


Рис. 1.

тельной в точке с абсциссой  $x$ . При изменении  $t$  форма струны, очевидно, изменяется, и, чтобы представить себе процесс колебаний, мы должны построить несколько графиков функции  $u(x, t)$  при различных значениях  $t$ , т. е. сделать несколько мгновенных снимков колеблющейся струны. При постоянном значении  $x$  функция  $u(x, t)$  дает закон движения точки с абсциссой  $x$  вдоль прямой, параллельной оси  $Ou$ , производная  $\frac{du}{dt} = u_t(x, t)$  — скорость этого движения, а вторая производная  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  — ускорение.

Наша задача состоит в том, чтобы составить уравнение, которому должна удовлетворять функция  $u(x, t)$ . Для этого ссылаем предварительно несколько упрощающих предположений. Будем считать струну *абсолютно гибкой*, т. е. не сопротивляющейся изгибу; это означает, что если удалить часть струны, лежащую по одну сторону от какой-либо ее точки, то сила натяжения  $T$ , заменяющая действие удаленной части, всегда будет направлена по касательной к струне (рис. 1). Струна предполагается *упругой* и подчиняющейся закону Гука; изменение величины силы натяжения при этом пропорционально изменению длины струны. Примем, что струна *однородна*; линейную плотность ее обозначим буквой  $p$  ( $p$  — масса единицы длины струны).

Предположим, далее, что на струну в плоскости колебания действуют силы, параллельные оси  $Ou$ , которые могут меняться вдоль струны и со временем. Силы эти будем считать непрерывно распределенными вдоль струны; величину силы, направленной вверх, условимся считать положительной, а вниз — отрицательной. Плотность распределения этих сил вдоль струны<sup>1)</sup> является функцией абсциссы  $x$  и времени  $t$ ; обозначим ее через  $g(x, t)$ . Если, в частности, единственной внешней силой является вес струны, то  $g(x, t) = -pg$ , где  $p$  — плотность струны, а  $g$  — ускорение силы тяжести.

Силами сопротивления среды, в которой колеблется струна, мы пока пренебрегаем.

<sup>1)</sup> Плотность распределения параллельных сил, изменяющихся вдоль линии, определяется как предел отношения величины равнодействующей этих сил, приложенных к малому участку, к длине участка при условии, что участок стягивается в точку. Это определение совершенно аналогично определению обычной плотности.

Мы будем изучать только малые колебания струны. Если обозначить через  $\alpha(x, t)$  острый угол между осью абсцисс и касательной к струне в точке с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$ , то условие малости колебаний заключается в том, что величиной  $\alpha^2(x, t)$  можно пренебречь:

$$\alpha^2 \approx 0. \quad (1.1)$$

Поскольку разложение функции  $\sin \alpha$  в ряд Маклорена имеет вид

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots,$$

то в силу условия (1.1) можно считать, что

$$\sin \alpha \approx \alpha. \quad (1.2)$$

Далее,  $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2}$  и, следовательно,

$$\cos \alpha \approx 1. \quad (1.3)$$

И наконец,  $\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha =$

$$= \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \alpha) \approx 0 \text{ и}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha. \quad (1.4)$$

Так как  $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$ , то в силу полученных условий заключаем, что<sup>1)</sup>

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \approx 0. \quad (1.5)$$

Отсюда сразу следует, что в процессе колебания мы можем пренебречь изменением длины любого участка струны. Действительно, длина участка  $M_1 M_2$  в момент времени  $t$  (рис. 2) равна

$$\overline{M_1 M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} dx. \quad (1.6)$$

<sup>1)</sup> Подобного рода предположения встречаются и в различных других задачах. Так, при изучении движения кругового маятника максимальный угол отклонения маятника считают настолько малым, что его можно принять равным синусу; при рассмотрении изгиба балки (в курсе сопротивления материалов) кривизну нейтральной линии считают равной второй производной от неизвестной функции (уравнения этой линии), пренебрегая квадратом первой производной и т. д.

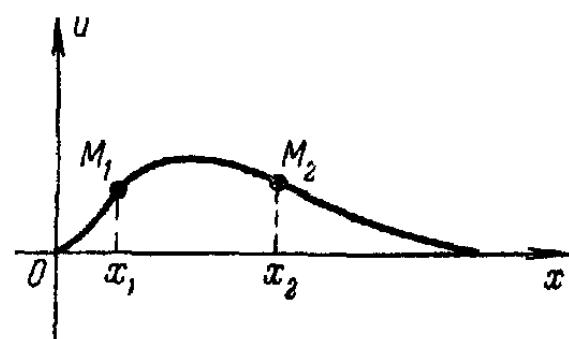


Рис. 2.

Согласно (1.5) заключаем, что

$$\overline{M_1 M_2} \approx x_2 - x_1. \quad (1.7)$$

Покажем теперь, что при наших предположениях величину силы натяжения  $T$  можно считать постоянной, не зависящей ни от точки ее приложения, ни от времени  $t$ . Возьмем для этого какой-либо участок струны  $M_1 M_2$ ,

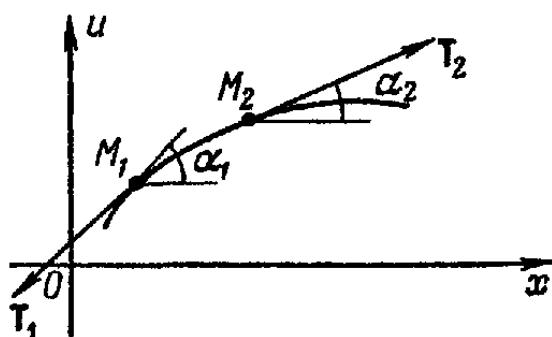


Рис. 3.

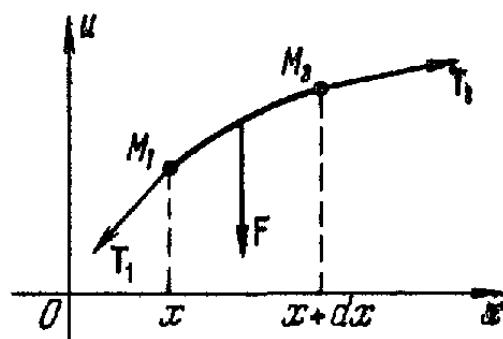


Рис. 4.

(рис. 3) в момент времени  $t$  и заменим действие отброшенных участков силами натяжений  $T_1$  и  $T_2$ . Так как по условию все точки струны движутся параллельно оси  $Ou$  и внешние силы также параллельны этой оси, то сумма проекций сил натяжения на ось  $Ox$  должна равняться нулю:

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0. \quad (1.8)$$

Огюда в силу (1.3) заключаем, что  $T_1 = T_2$ . Так как точки  $M_1$  и  $M_2$  выбраны произвольно, то это и доказывает, что в данный момент времени силы натяжения во всех точках равны между собой.

Поскольку мы пренебрегаем изменением длины любого участка струны, то в силу закона Гука неизменным остается и натяжение струны. Итак, мы показали, что в пределах выбранной точности  $T$  есть величина постоянная:

$$T = T_0. \quad (1.9)$$

Перейдем теперь к выводу уравнения колебаний струны. Выделим бесконечно малый участок струны  $M_1 M_2$ , проектирующийся в интервал  $[x, x+dx]$  оси абсцисс (рис. 4). На него действуют силы натяжения  $T_1$  и  $T_2$ , заменяющие влияние

отброшенных частей струны. Как уже отмечалось выше, силы  $T_1$  и  $T_2$  направлены по касательным к струне в точках  $M_1$  и  $M_2$ ; величина этих сил постоянно равна  $T_0$ . Согласно равенству (1.8) сумма проекций сил  $T_1$  и  $T_2$  на ось  $Ox$  равна нулю. Вычислим сумму проекций этих же сил на ось  $Oy$ :

$$-T_0 \sin \alpha_2 + T_0 \sin \alpha_1 = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

В силу (1.4) можно записать, что

$$\sin \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = u'_x(x + dx, t), \quad \sin \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = u'_x(x, t).$$

Следовательно,

$$T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) =$$

$$= T_0 [u'_x(x + dx, t) - u'_x(x, t)] = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (1.10)$$

Здесь мы заменили частное приращение производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  при переходе от аргументов  $(x, t)$  к аргументам  $(x + dx, t)$  ее частным дифференциалом, т. е.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$ .

**Примечание.** Если бы участок струны  $M_1M_2$  располагался, как на рис. 2, то сумма проекций сил  $T_1$  и  $T_2$  равнялась бы  $T_0 (-\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$ ; но теперь  $\sin \alpha_2 = -u'_x(x + dx, t)$ , и в результате мы снова получили бы формулу (1.10).

Равнодействующую внешних сил, приложенных к участку  $M_1M_2$  в момент времени  $t$ , обозначим через  $F$ . Согласно определению функции  $g(x, t)$  и приближенному равенству (1.7) можно считать, что

$$F \approx g(x, t) \overbrace{M_1 M_2} \approx g(x, t) dx. \quad (1.11)$$

Направление равнодействующей  $F$  определяется знаком функции  $g(x, t)$  (направление  $F$  на рис. 4 соответствует случаю  $g(x, t) < 0$ ).

После того как найдены все силы, действующие на участок  $M_1M_2$ , применим к нему второй закон Ньютона, согласно которому произведение массы на ускорение равно сумме всех действующих сил (в силу малости участка  $M_1M_2$  мы рассматриваем его просто как материальную точку).

Так как масса участка  $M_1M_2$  струны равна  $\rho \overline{M_1M_2} = \rho dx$ , то, используя формулы (1.10) и (1.11), получим

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + g(x, t) dx.$$

Сократив на  $dx$  и разделив все члены равенства на  $\rho$ , приведем полученное уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} g(x, t) \quad (1.12)$$

$(a^2 = \frac{T_0}{\rho}$  — положительная постоянная величина). В результате мы получили линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение (1.12) называется *уравнением колебаний струны* или *одномерным волновым уравнением*. Это одно из простейших и в то же время важнейших дифференциальных уравнений математической физики. Как мы позже увидим, к нему сводится не только рассматриваемая задача, но и многие другие.

Если  $g(x, t) \equiv 0$ , то уравнение (1.12) называется *однородным*; оно описывает свободные колебания струны без воздействия внешних усилий.

Если  $g(x, t)$  не тождественно равно нулю, то уравнение называется *неоднородным*, в этом случае рассматриваются вынужденные колебания струны. Когда на струну действуют только силы тяжести, а натяжение струны  $T_0$  велико, мы вправе пренебречь вторым слагаемым в правой части уравнения струны по сравнению с первым и рассматривать, таким образом, колебания струны как свободные.

Читатель, конечно, обратил внимание на то, что вывод уравнения колебаний струны (1.12) сопровождался целым рядом допущений как механического, так и геометрического порядков. Такое же положение, разумеется, имеет место и при выводе дифференциальных уравнений (как в частных производных, так и обыкновенных) других задач математической физики. Вопрос о том, насколько точно уравнение описывает физический процесс, может быть решен только сравнением результатов, полученных при решении уравнения и экспериментальным путем. В настоящей книге этим вопросом мы заниматься не будем, чтобы сосредоточить основное внимание на методах решения уравнений.

В связи со сказанным уместно сделать следующее замечание. Хорошо известна роль моделей при изучении различных вопросов техники. Например, гидротехники при проектировании плотины часто строят в значительно уменьшенном размере ее модель, чтобы, производя опыты над ней в лабораторных условиях, сделать некоторые заключения о характере усилий, действующих на реальную плотину. Такую же роль играют модели проектируемых мостов, крыльев и фюзеляжа самолетов и др. Разумеется, данные, полученные при исследовании моделей, нельзя просто переносить на реальные объекты. Ведь в лаборатории нельзя создать все условия, которые могут встретиться в действительности, да и, кроме того, явления, происходящие при исследовании модели, далеко не всегда в точности копируют соответствующие явления в природе<sup>1)</sup>. Однако наиболее существенные черты процесса все-таки часто удается уловить, и дальнейшая задача проектировщика в том и состоит, чтобы увязать наблюденные на модели факты с теми, которые встречаются в натуре.

Подобную же роль в физике играет и изучение дифференциальных уравнений математической физики. Учитывая основные закономерности физического процесса, мы создаем его математическую модель. Изучение этой модели и позволяет делать определенные суждения о характере процесса. Образно говоря, в настоящей книге мы знакомим читателя только с основными методами изучения математических моделей, оставаясь, так сказать, в «лабораторных условиях математики».

**5. Постановка начальных и краевых условий.** Как уже отмечалось во введении, дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка имеют бесчисленное множество решений, зависящих от двух произвольных функций. Чтобы определить эти произвольные функции, или, иначе говоря, выделить необходимое нам частное решение, нужно на исходную функцию  $u(x, t)$  наложить дополнительные условия. С аналогичным явлением читатель встречался уже при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, когда выделение частного решения из общего заключалось в про-

---

<sup>1)</sup> Вопросу о подобии явлений, протекающих в модели и в натуре, посвящена обширная литература.

цессе отыскания произвольных постоянных по заданным начальным условиям.

При рассмотрении задачи о колебаниях струны дополнительные условия могут быть двух видов: *начальные* и *краевые* (или *граничные*).

Начальные условия показывают, в каком состоянии находилась струна в момент начала колебания. Удобнее всего считать, что струна начала колебаться в момент времени  $t = 0$ . Начальное положение точек струны задается условием

$$u|_{t=0} = f(x), \quad (1.13)$$

а начальная скорость

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x), \quad (1.14)$$

где  $f(x)$  и  $F(x)$  — заданные функции.

Запись  $u|_{t=0}$  означает, что функция  $u(x, t)$  взята при произвольном значении  $x$  и при  $t = 0$ , т. е.  $u|_{t=0} = u(x, 0)$ ; аналогично  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_t(x, 0)$ . Такая форма записи постоянно применяется в дальнейшем; так, например,  $u|_{x=0} = u(0, t)$  и т. д.

Условия (1.13) и (1.14) аналогичны начальным условиям в простейшей задаче динамики материальной точки. Там для определения закона движения точки, помимо дифференциального уравнения, нужно знать начальное положение точки и ее начальную скорость.

Иной характер имеют краевые условия. Они показывают, что происходит на концах струны во все время колебаний. В простейшем случае, когда концы струны закреплены (начало струны — в начале координат, а конец — в точке  $(l, 0)$ ), функция  $u(x, t)$  будет подчиняться условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \quad (1.15)$$

С такими же точно условиями читатель встречался в курсе сопротивления материалов при изучении изгиба балки, лежащей на двух опорах, под действием статической нагрузки.

Физический смысл того факта, что задание начальных и краевых условий полностью определяет процесс, проще всего проследить для случая свободных колебаний струны.

Пусть, например, струну, закрепленную на концах, как-то оттянули, т. е. задали функцию  $f(x)$  — уравнение начальной формы струны, и отпустили без начальной скорости (это значит, что  $F(x) \equiv 0$ ). Ясно, что этим самым дальнейший характер колебаний будет полностью определен и мы найдем единственную функцию  $u(x, t)$ , решая однородное уравнение при соответствующих условиях. Можно заставить струну колебаться и иначе, а именно придав точкам струны некоторую начальную скорость. Физически ясно, что и в этом случае дальнейший процесс колебаний будет вполне определен. Придание точкам струны начальной скорости может быть осуществлено при помощи удара по струне (как это имеет место при игре на рояле); первый способ возбуждения струны применяется при игре на щипковых инструментах (например, гитаре).

Сформулируем теперь окончательно математическую задачу, к которой приводит изучение свободных колебаний струны, закрепленной на обоих концах.

*Требуется решить однородное линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.16)$$

*при начальных условиях*

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x) \quad (1.17)$$

*и краевых условиях*

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \quad (1.18)$$

Функции  $f(x)$  и  $F(x)$  определены на интервале  $[0, l]$  и, как это следует из первого условия (1.17) и условий (1.18),  $f(0) = f(l) = 0$ .

Можно доказать, не опираясь на физические представления, что при некоторых ограничениях, наложенных на функции  $f(x)$  и  $F(x)$ , эта задача имеет единственное решение.

**Примечание.** Решение поставленной математической задачи будет отражать реальный характер процесса колебаний лишь в том случае, когда начальное смещение и начальные скорости точек струны настолько малы, что соблюдаются все высказанные ранее предположения. Имея в виду в дальнейшем главным образом математическую сторону вопроса, мы при решении конкретных примеров обращать на это внимания не будем.

## § 2. Колебания бесконечной и полубесконечной струны. Метод Даламбера

**6. Бесконечная струна. Формула Даламбера.** Прежде чем решать задачу о колебаниях закрепленной струны, мы рассмотрим более простую задачу — о колебаниях бесконечной струны. Если представить себе очень длинную струну, то ясно, что на колебания, возникшие в ее средней части, концы струны не будут оказывать заметного влияния. Так, если взять длинную натянутую веревку и слегка качнуть ее в середине, то по веревке влево и вправо побегут волны. Картина начнет искажаться только тогда, когда волны дойдут до концов веревки и, отразившись, пойдут обратно. Следовательно, не учитывая влияния концов струны, мы тем самым не будем учитывать влияния отраженных волн.

Рассматривая свободные колебания, мы должны, таким образом, решить однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x), \quad (2.2)$$

где функции  $f(x)$  и  $F(x)$  заданы на всей числовой оси. Никакие краевые условия на искомую функцию  $u(x, t)$  не налагаются. Такая задача называется *задачей с начальными условиями* или *задачей Коши*. Метод решения ее, который мы сейчас изложим, называется *методом Даламбера* или *методом бегущих волн*.

Прежде всего покажем, что общее решение уравнения (2.1), т. е. решение, зависящее от двух произвольных функций (см. введение), имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \quad (2.3)$$

где функции  $\varphi$  и  $\psi$  предполагаются дважды дифференцируемыми.

Действительно, последовательно дифференцируя, находим:

$$\begin{aligned} u'_x &= \varphi'(x - at) + \psi'(x + at), \\ u''_{xx} &= \varphi''(x - at) + \psi''(x + at), \\ u'_t &= -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at), \\ u''_{tt} &= a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at). \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

т. е. что равенство (2.1) соблюдается.

Наша задача состоит теперь в том, чтобы, пользуясь начальными условиями (2.2), определить неизвестные функции  $\varphi$  и  $\psi$ . Полагая в (2.3)  $t = 0$  и подставляя выражение для  $u(x, 0)$  в первое из условий (2.2), получим

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x). \quad (2.4)$$

Полагая теперь  $t = 0$  в выражении для  $u'_t$  и пользуясь вторым условием (2.2), придем к уравнению

$$-a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x). \quad (2.5)$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до  $x$ , получим соотношение

$$-a[\varphi(x) - \varphi(0)] + a[\psi(x) - \psi(0)] = \int_0^x F(x) dx,$$

которое приведем к виду

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx + C, \quad (2.6)$$

где  $C = -\varphi(0) + \psi(0)$  — некоторая постоянная величина.

Из системы уравнений (2.4) и (2.6) находим искомые функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx - \frac{C}{2}, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx + \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Заменяя в формулах (2.7) аргумент  $x$  соответственно на  $x - at$  и  $x + at$  и подставляя полученные выражения в формулу (2.3), найдем функцию  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x - at} F(x) dx + \\ + \frac{1}{2} f(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x + at} F(x) dx.$$

Замечая, что

$$- \int_0^{x - at} F(x) dx + \int_0^{x + at} F(x) dx = \\ = \int_{x - at}^0 F(x) dx + \int_0^{x + at} F(x) dx = \int_{x - at}^{x + at} F(x) dx,$$

придадим решению  $u(x, t)$  следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x - at}^{x + at} F(x) dx. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) называется *решением Даламбера задачи Коши для уравнения колебаний струны*.

Предоставляем читателю самостоятельно проверить, что найденная функция  $u(x, t)$  действительно удовлетворяет как уравнению (2.1), так и условиям (2.2)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> При дифференцировании учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{x + at} F(x) dx = F(x + at), \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{x + at} F(x) dx = aF(x + at).$$

Оба равенства немедленно следуют из правила дифференцирования интеграла по переменному верхнему пределу; нужно только рассматривать интеграл как сложную функцию от  $x$  и  $t$ ,  $\int_0^z F(x) dx$ , где  $z = x + at$ .

Аналогичные формулы получаются при дифференцировании интеграла  $\int_0^{x - at} F(x) dx$ .

Для того чтобы выяснить физический смысл полученного решения, рассмотрим прежде всего в отдельности функции, входящие в общее выражение (2.3) для  $u(x, t)$ . Начнем с функции  $\phi(x - at)$  и построим графики этой функции при возрастающих значениях  $t$ :  $t = t_0$ ,  $t = t_1$ ,  $t = t_2$  и т. д. (на рис. 5 они расположены сверху вниз). Второй график будет

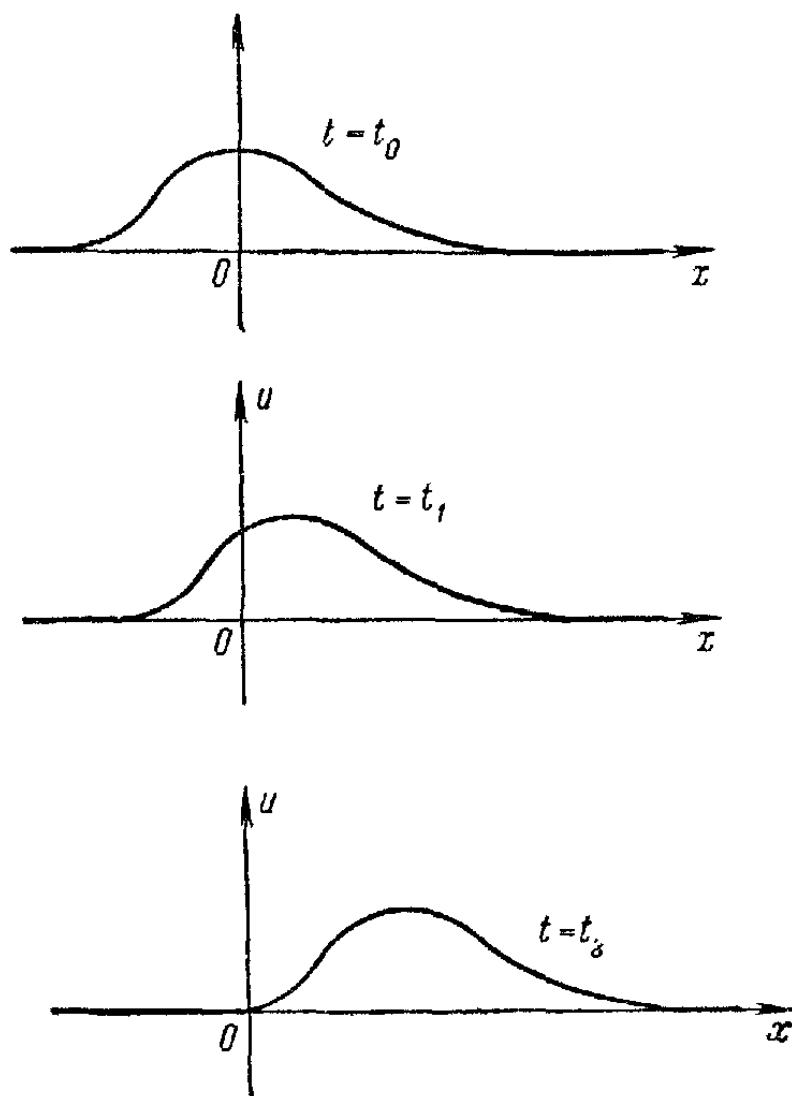


Рис. 5.

сдвинут относительно первого на величину  $at_1$ , третий — на величину  $at_3$  и т. д. Если по очереди проектировать эти рисунки на неподвижный экран, то зритель увидит, что график, изображенный на первом рисунке, «побежит» вправо. (Этот способ изображения движения положен, между прочим, в основу съемки мультипликационных фильмов.) При этом, если мысленно перемещаться вправо вдоль струны с постоянной скоростью  $a$ , то отклонение струны будет казаться все время постоянным. Действительно, начав движение, скажем,

в точке  $x_0$  и переместившись за время  $t$  в точку  $x$ , будем иметь

$$x = x_0 + at \quad \text{или} \quad x - at = x_0.$$

Но тогда

$$u(x, t) = \varphi(x - at) = \varphi(x_0).$$

Процесс передвижения отклонения по струне называется *волной*. При этом коэффициент  $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$  в уравнении колебаний струны является *скоростью распространения волны*.

С частным случаем распространения волн, именно с синусоидальными волнами, читатель должен быть уже знаком из курса физики. При этом, если скорость распространения такой волны равна  $a$  и точка, совпадающая с началом координат, колеблется по закону  $u = A \sin \omega t$ , то отклонение  $u(x, t)$  равно

$$u(x, t) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{a} \right).$$

Записав последнее выражение в виде  $A \sin \frac{\omega}{a} (at - x)$ , сразу замечаем, что это функция аргумента  $at - x$  (или, что тоже самое, аргумента  $x - at$ ).

Второе слагаемое формулы (2.3), функция  $\Phi(x - at)$ , будет представлять такой же процесс, но только волна будет распространяться со скоростью  $a$  влево (рис. 5 будет показывать моментальные снимки такой волны, если на него смотреть снизу вверх, т. е. считать  $t_2 < t_1 < t_0$ ).

Теперь мы перейдем к исследованию решения, даваемого формулой Даламбера (2.8), и рассмотрим два наиболее интересных случая: когда отсутствуют начальные скорости ( $F(x) \equiv 0$ ) и когда отсутствуют начальные отклонения ( $f(x) \equiv 0$ ). Общий случай будет являться результатом наложения (суперпозиции) обоих случаев.

**7. Распространение волн отклонения.** Пусть начальные скорости точек струны равны нулю и струна колеблется в результате начального отклонения. В этом случае в формуле (2.8) надо положить  $F(x) = 0$ , и мы получим

$$u(x, t) = \frac{f(x - at)}{2} + \frac{f(x + at)}{2}. \quad (2.9)$$

Так как функция  $f(x)$  известна, то мы можем вычислить значение  $u(x, t)$  для любых  $x$  и  $t$ . Согласно сказанному выше колебание  $u(x, t)$  слагается из двух волн: первая волна  $\frac{1}{2}f(x - at)$  распространяется со скоростью  $a$  вправо (*прямая волна*), а вторая волна  $\frac{1}{2}f(x + at)$  распространяется с той же скоростью влево (*обратная волна*).

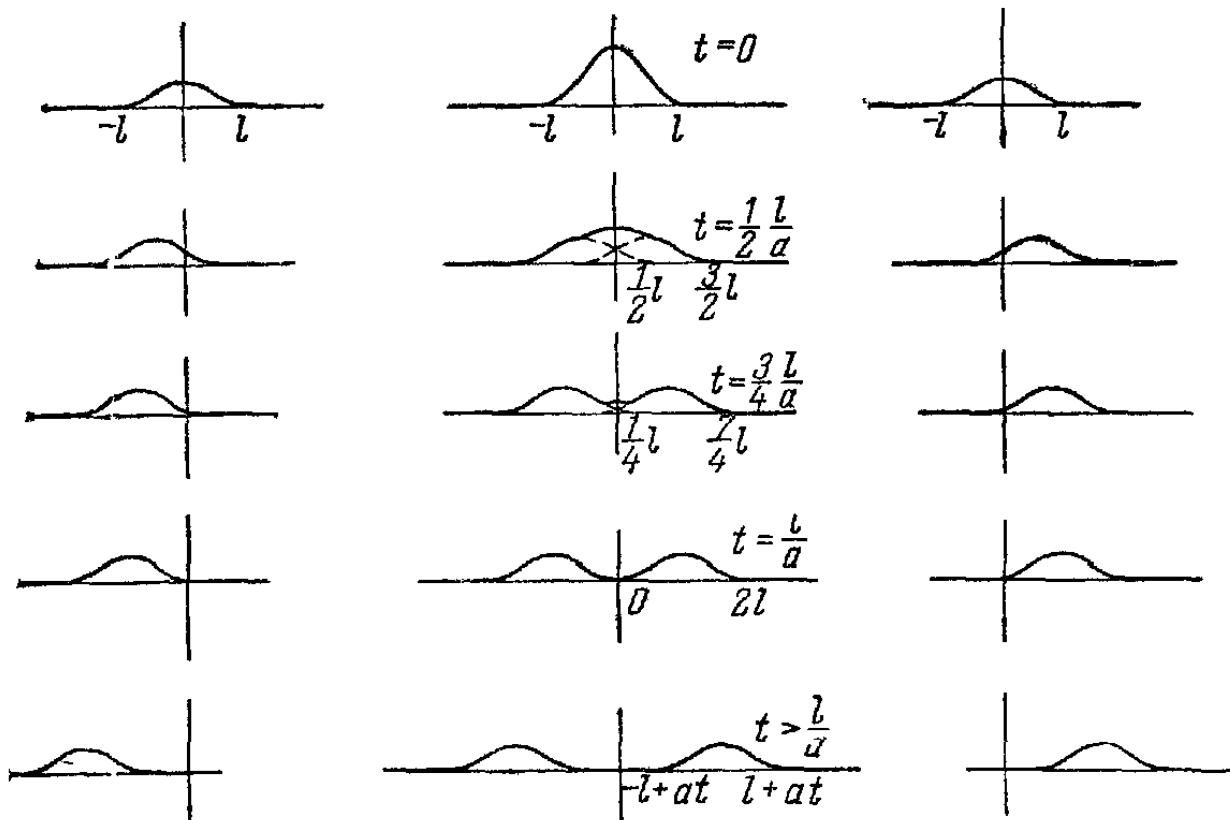


Рис. 6.

В начальный момент времени  $t = 0$  профили обеих волн совпадают.

Предположим, что в начальный момент функция  $f(x)$  отлична от нуля только на некотором интервале  $(-l, l)$ . Для простоты изложения считаем функцию  $f(x)$  четной. Тогда  $f(x) = 0$  при  $x < -l$  и при  $x > l$ . Легко чисто геометрически проследить за изменением формы струны в любой момент времени. На рис. 6 в левом столбце изображена в различные моменты времени волна  $\frac{1}{2}f(x + at)$ , бегущая влево, а в правом столбце — в те же моменты времени волна  $\frac{1}{2}f(x - at)$ , бегущая вправо. В среднем столбце

показана сумма этих волн, т. е. результирующее отклонение точек струны. До тех пор, пока  $t < \frac{l}{a}$ , есть участок, где обе волны накладываются друг на друга; начиная с момента  $t = \frac{l}{a}$  эти волны уже не накладываются и расходятся в разные стороны.

Из сказанного можно сделать заключение о характере колебания точки струны с фиксированной абсциссой  $x$ . Если  $x > l$ , то в начальный момент точка струны лежит на оси абсцисс, она не участвует в начальном отклонении. Волна, бегущая вправо, дойдет до этой точки в момент времени  $t_1 = \frac{x-l}{a}$ , и с этого момента точка струны начнет колебаться. Как только волна пройдет через рассматриваемую точку, т. е. начиная с момента  $t_2 = \frac{x+l}{a}$ , эта точка снова будет находиться в покое. В момент времени  $t_1$  до точки  $x$  доходит передний фронт волны, а в момент  $t_2$  — задний фронт. Таким образом, рассматриваемая точка струны участвует в колебательном процессе при  $\frac{x-l}{a} < t < \frac{x+l}{a}$ .

Это неравенство удобнее записать так:  $-l < x - at < l$ .

Если  $0 < x < l$ , то через точку проходяг уже как прямая, так и обратная волны. Передний фронт обеих волн расно-лагается впереди точки; задний фронт обратной волны пройдет через точку в момент  $t_1 = \frac{l-x}{a}$ , а задний фронт прямой

волны — в момент  $t_2 = \frac{l+x}{a}$ . При  $t > t_2$  точка струны будет находиться в покое, т. е. лежать на оси  $Ox$ . Аналогично, если  $x < -l$ , то точка участвует в колебательном процессе при  $-l < x + at < l$ ; если же  $0 > x > -l$ , то колебания закончатся, когда через точку пройдет задний фронт обратной волны, т. е. при  $t = \frac{l-x}{a}$ .

Очень наглядное изображение описанного процесса можно получить, введя *фазовую плоскость*  $xOt$  (рис. 7). Каждая точка  $M(x, t)$  фазовой плоскости (при  $t \geq 0$ ) соответствует точке струны с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$ . В частности, точки оси абсцисс ( $t = 0$ ) соответствуют точкам струны в начальный момент времени. Точкам, лежащим на прямой

$t = t_0$ , соответствует положение точек струны в фиксированный момент времени  $t_0$ , а точкам, лежащим на прямой  $x = x_0$ , — положение фиксированной точки  $x_0$  в различные моменты времени. Как мы уже видели, через точку  $x$  в момент времени  $t$  проходит прямая волна, если  $-l < x - at < l$ , и обратная волна, если  $-l < x + at < l$ . Построим на фазовой плоскости прямые  $x - at = \pm l$  и  $x + at = \pm l$  (на рис. 7)

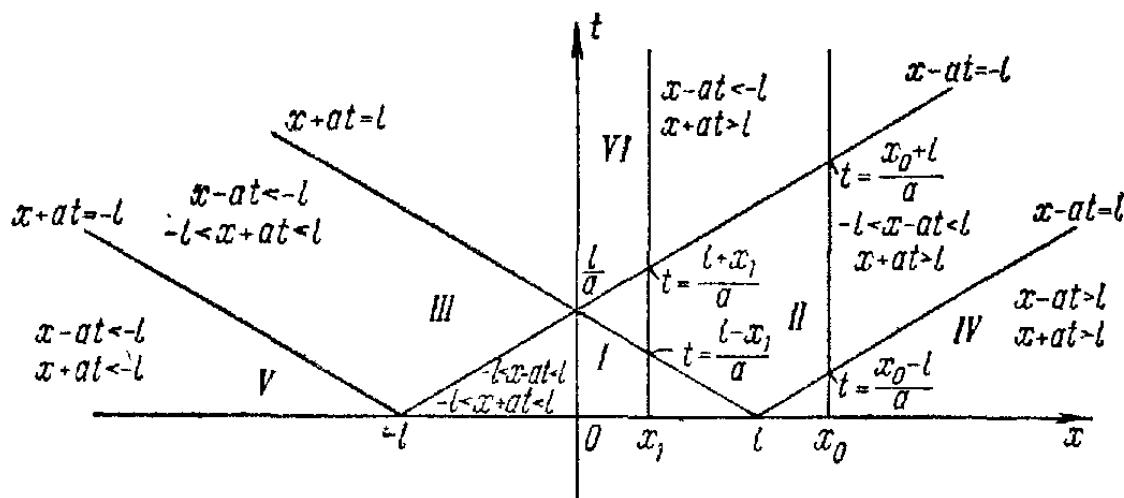


Рис. 7.

изображены части этих прямых, лежащие в верхней полуплоскости). Эти прямые называются *характеристиками*.

При этом полуплоскость  $t \geq 0$  разбивается на шесть частей. Колебание происходит только в тех точках и в те моменты времени, которые соответствуют точкам зон I, II и III. В зоне II действует только прямая волна, в зоне III — только обратная, а в зоне I — и та и другая. Точкам построенных прямых соответствуют положения переднего и заднего фронтов обеих волн. В точках, соответствующих зонам IV и V, колебания еще нет, так как до них не дошел передний фронт прямой (зона IV) и обратной (зона V) волн, а в точках, соответствующих зоне VI, колебания уже нет, так как через них задние фронты обеих волн уже прошли (оба задних фронта проходят только через точки фазовой плоскости, для которых  $-l \leq x \leq l$ ; через точки, для которых  $x > l$  или  $x < -l$ , проходит задний фронт только одной из волн). Зафиксировав какую-либо точку  $x_0$  струны и поднимаясь вверх по прямой  $x = x_0$ , легко написать выражения для функции  $u(x_0, t)$  в любой момент времени  $t$ .

Пусть  $x_0 > l$ . Тогда при  $0 < t < \frac{x_0 - l}{a}$  точка фазовой плоскости находится в зоне  $IV$  и  $u(x_0, t) = 0$ . Если  $\frac{x_0 - l}{a} < t < \frac{x_0 + l}{a}$ , то точка попадает в зону  $II$  — зону действия прямой волны — и  $u(x_0, t) = \frac{1}{2} f(x_0 - at)$ . Второе слагаемое  $\frac{1}{2} f(x_0 + at)$  равно нулю, так как аргумент  $x_0 + at > l$ , а  $f(x) = 0$  при  $x > l$ . Наконец, при  $t > \frac{x_0 + l}{a}$  точка попадает в зону  $VI$  и снова  $u(x_0, t) = 0$ .

Читатель легко проверит, что в точке  $x_1$ , где  $0 < x_1 < l$ , функция  $u(x, t)$  будет принимать следующие значения:

$$u(x_1, t) = \begin{cases} \frac{f(x_1 - at) + f(x_1 + at)}{2} & \text{при } 0 < t < \frac{l - x_1}{a}, \\ \frac{1}{2} f(x_1 - at) & \text{при } \frac{l - x_1}{a} < t < \frac{l + x_1}{a}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{l + x_1}{a}. \end{cases}$$

Ясно, что при переходе от одного интервала изменения  $t$  к другому функция  $u(x, t)$  остается непрерывной.

Точно так же можно получить выражения для функции  $u(x, t)$  при фиксированных значениях  $t$ . При  $t < \frac{l}{a}$  точка фазовой плоскости при движении слева направо пересечет последовательно зоны  $V, III, I, II$  и  $IV$ , а при  $t > \frac{l}{a}$  вместо первой зоны она пройдет шестую. В первом случае ( $t_0 < \frac{l}{a}$ ), получим

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < -at_0 - l, \\ \frac{1}{2} f(x + at_0) & \text{при } -l - at_0 < x < at_0 - l, \\ \frac{f(x + at_0) + f(x - at_0)}{2} & \text{при } at_0 - l < x < l - at_0, \\ \frac{1}{2} f(x - at_0) & \text{при } l - at_0 < x < l + at_0, \\ 0 & \text{при } l + at_0 < x < \infty. \end{cases}$$

Рекомендуем читателю самостоятельно написать выражения для  $u(x, t_1)$  при  $t_1 > \frac{l}{a}$ .

Описанный процесс представляет распространение одиночной волны отклонения; после прохождения такой волны *точки струны возвращаются в свое исходное положение на оси абсцисс.*

Как мы уже отмечали, такой процесс может наблюдаться в очень длинной струне до тех пор, пока волны, бегущие по струне, не дойдут до ее концов.

Перед тем как перейти к конкретному примеру, необходимо сделать одно важное замечание. Мы рассматриваем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x).$$

Поэтому функция  $u(x, t)$ , определяемая формулой (2.8):

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x - at}^{x + at} F(x) dx,$$

только тогда будет решением уравнения, когда у нее существуют вторые производные по  $x$  и по  $t$ . Для этого, как легко проверить, пользуясь сноской на стр. 35, функция  $f(x)$  должна иметь вторую производную, а функция  $F(x)$  — первую. Между тем часто приходится рассматривать задачи, в которых функции  $f(x)$  и  $F(x)$  не удовлетворяют указанным условиям. Уже в следующем примере начальная форма струны будем иметь угловые точки (см. пример 1, рис. 8), в которых функция  $f(x)$  не имеет производной (см. [1], п. 52). В последующем нам встретятся примеры, в которых функция  $F(x)$ , определяющая начальные скорости, имеет точки разрыва.

Во всех таких случаях функцию  $u(x, t)$ , определяемую формулой (2.8), мы все равно считаем решением задачи, несмогя на то, что при некоторых значениях  $x$  и  $t$  она может и не иметь соответствующих производных. Это

объясняется тем, что всегда можно, чуть-чуть изменив начальные условия, добиться того, чтобы функции  $f(x)$  и  $F(x)$  стали достаточно гладкими, т. е. имели нужные производные.

Заметим, что реальные начальные условия всегда имеют именно такой сглаженный характер, так что приданье им формы, изображенной на рис. 8, является дополнительной идеализацией процесса.

В то же время можно доказать, что малые изменения начальных условий влекут за собой малые же изменения решения. Поэтому решения, полученные при помощи сглаживания начальных условий, будут сколь угодно мало отличаться от тех, которые мы получаем по формуле (2.8), когда функции  $f(x)$  и  $F(x)$  имеют точки разрыва или не везде дифференцируемы.

Вообще, если решение задачи единственно и непрерывно зависит от начальных условий, т. е. малые изменения последних влекут за собой малое изменение решения, то говорят, что решение задачи *устойчиво* или что задача *поставлена корректно*.

Учитывая это замечание, мы в дальнейшем при рассмотрении примеров никогда не будем требовать, чтобы начальные условия обязательно удовлетворяли условиям непрерывности и дифференцируемости.

Пример 1. Начальные отклонения точек струны имеют форму треугольника, изображенного на рис. 8, а начальные скорости равны нулю. Составим выражения для функции  $u(x, t)$  в разные моменты времени и при различных значениях  $x$ .

Функция  $f(x)$  имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -l, \\ h \left(1 + \frac{x}{l}\right) & \text{при } -l < x < 0, \\ h \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{при } 0 < x < l, \\ 0 & \text{при } x > l. \end{cases}$$

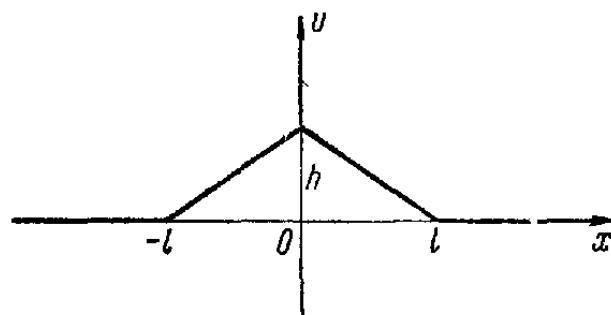


Рис. 8.

В точках  $x = -l$ ,  $x = 0$ ,  $x = l$  функция  $f(x)$  непрерывна, но не имеет производной.

Как мы уже видели, выражения для отклонения  $u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2}$  удобнее всего писать, рассматривая движение точки  $(x, t)$  в фазовой плоскости. Здесь задача осложняется только тем, что при переходе аргументов  $x + at$  и  $x - at$  через нуль функции меняют свое выражение. Поэтому

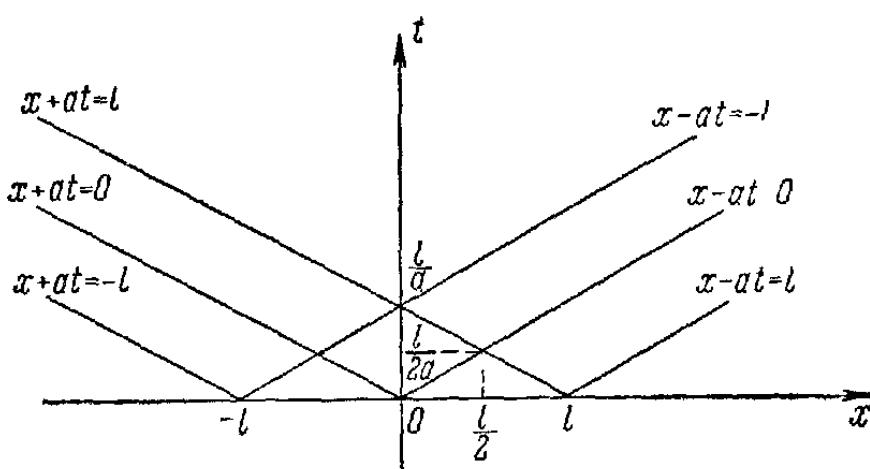


Рис. 9.

на фазовой плоскости мы дополнительно проводим прямые  $x \pm at = 0$ , в точках которых и происходит указанное изменение. Из рис. 9 видно, что точки струны, лежащие в интервалах  $(0, \frac{l}{2})$ ,  $(\frac{l}{2}, l)$ ,  $(l, \infty)$ , по-разному переходят из зоны в зону (в силу четности функции  $f(x)$  мы рассматриваем только положительные значения  $x$ ). Проведя необходимые выкладки (рекомендуем читателю проделать их самостоятельно), получим выражения для функции  $u(x, t)$ :

$$\text{a) } 0 < x < \frac{l}{2}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{x}{l}\right), & 0 \leq t < \frac{x}{a}, \\ h \left(1 - \frac{at}{l}\right), & \frac{x}{a} < t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x-at}{l}\right), & \frac{l-x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0, & t > \frac{l+x}{a}; \end{cases}$$

6)  $\frac{l}{2} < x < l$

$$u(x, t) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{x}{t}\right), & 0 \leq t < \frac{l-x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{t}\right), & \frac{l-x}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{t}\right), & \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0, & t > \frac{l+x}{a}; \end{cases}$$

в)  $x > l$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{x-l}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{t}\right), & \frac{x-l}{a} < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 + \frac{x-at}{t}\right), & \frac{x}{a} < t < \frac{l+x}{a}, \\ 0, & t > \frac{l+x}{a}. \end{cases}$$

Если мы хотим получить форму волны в фиксированный момент времени, то должны выписать значения функции  $u(x, t)$  для трех интервалов времени:  $(0, \frac{l}{2a})$ ,  $(\frac{l}{2a}, \frac{l}{a})$ ,  $(\frac{l}{a}, \infty)$ . (Опять-таки, ограничиваемся значениями  $x \geq 0$ .)

а)  $0 < t < \frac{l}{2a}$

$$u(x, t) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{at}{l}\right), & 0 \leq x < at, \\ h\left(1 - \frac{x}{l}\right), & at < x < l - at, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x-at}{l}\right), & l - at < x < l + at, \\ 0, & x > l + at; \end{cases}$$

$$6) \frac{l}{2a} < t < \frac{l}{a}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{at}{l}\right), & 0 \leq x < l - at, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x - at}{l}\right), & l - at < x < at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x - at}{l}\right), & at < x < l + at, \\ 0, & x > l + at; \end{cases}$$

$$b) t > \frac{l}{a}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < at - l, \\ \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x - at}{l}\right), & at - l < x < at, \\ \frac{h}{2} \left(1 - \frac{x - at}{l}\right), & at < x < l + at, \\ 0, & x > l + at. \end{cases}$$

Во всех случаях функция  $u(x, t)$  непрерывна.

Советуем читателю построить формы струны в различные моменты времени по найденным формулам и чисто геометрически и сравнить полученные графики.

**8. Распространение волн импульса.** Пусть теперь равны нулю начальные отклонения точек струны и струна колеблется в результате того, что в начальный момент ее точки получили некоторые начальные скорости. В этом случае говорят, что по струне распространяются *волны импульса*.

Полагая в формуле (2.8) функцию  $f(x) = 0$ , получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x - at}^{x + at} F(x) dx = \Phi(x + at) - \Phi(x - at), \quad (2.10)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx. \quad (2.11)$$

И здесь, как и в п. 7, решение  $u(x, t)$  слагается из двух волн: прямой волны  $u_1 = -\Phi(x - at)$  и обратной волны  $u_2 = \Phi(x + at)$ . Форма первой из них в начальный момент

$t = 0$  имеет уравнение  $u_1 = -\Phi(x)$ , а второй — уравнение  $u_2 = \Phi(x)$ . В результате, как и следовало ожидать, получим  $u(x, 0) = 0$ .

Чтобы наглядно представить себе картину процесса, будем для простоты считать, что функция  $F(x)$  равна нулю всюду вне интервала  $(-l, l)$ , а в точках этого интервала принимает постоянное значение:  $F(x) = v_0$ . Иными словами, точкам струны, лежащим в интервале  $(-l, l)$ , придана постоянная начальная скорость  $v_0$ , направленная вверх. При этом функция  $F(x)$  в точках  $x = \pm l$  имеет разрывы.

Функция  $\Phi(x)$  будет принимать следующие значения:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x v_0 \, dx = \frac{v_0 x}{2a}, \quad \text{если } -l \leq x \leq l,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^l v_0 \, dx = \frac{v_0 l}{2a} = \frac{h}{2}, \quad \text{если } x > l,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^{-l} v_0 \, dx = -\frac{v_0 l}{2a} = -\frac{h}{2}, \quad \text{если } x < -l,$$

где  $h = \frac{v_0 l}{a}$ . Функция  $\Phi(x)$  непрерывная и нечетная (рис. 10).

Перейдем теперь к геометрическому построению решения  $u(x, t)$ . В левом столбце рис. 11 построим графики обратной волны  $u_2 = \Phi(x + at)$  в различные моменты времени, а в правом столбце — графики прямой волны  $u_1 = -\Phi(x - at)$  в те же моменты времени (благодаря знаку минус графики прямой волны окажутся по отношению к графику функции  $\Phi(x)$  перевернутыми). В среднем столбце показано результирующее отклонение точек струны. Мы сразу замечаем, что характер колебаний существенно отличается от распространения волн отклонения. Начнем для определенности с точки струны, находящейся в момент  $t = 0$  в начале

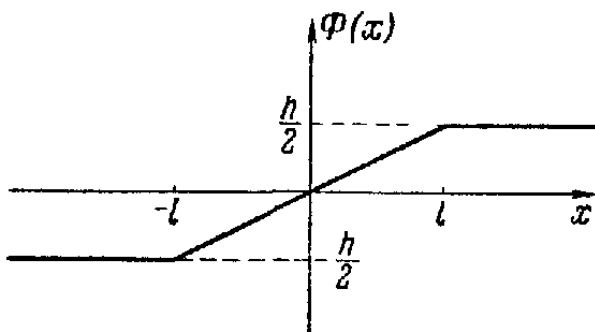


Рис. 10.

координат. По мере увеличения  $t$  эта точка будет подниматься вверх; это ясно видно и из формулы (2.10), так как интервал интегрирования  $(-at, at)$  расширяется. При  $t = \frac{l}{a}$  мы получим

$$u\left(0, \frac{l}{a}\right) = \frac{1}{2a} \int_{-l}^l v_0 dx = \frac{v_0 l}{a} = h.$$

Если теперь брать  $t > \frac{l}{a}$ , то все равно будет  $u(0, t) = h$ , так как вне интервала  $(-l, l)$  функция  $F(x)$  равна нулю. Поэтому на рисунках, соответствующих значениям  $t > \frac{l}{a}$ , отклонение  $u(0, t)$  остается постоянным. Рассмотрим еще, к примеру, поведение точки  $x_1 = \frac{l}{2}$ . Вначале, пока  $t < \frac{l}{2a}$ , она будет подниматься вверх под действием обеих волн: прямой и обратной. При  $t > \frac{l}{2a}$  отклонение обратной волны в этой точке примет постоянное значение  $\frac{h}{2}$  и точка будет продолжать подниматься уже только под действием прямой волны. Наконец, при  $t > \frac{3l}{2a}$  отклонения обеих волн достигнут величины  $\frac{h}{2}$  и смещение  $u\left(\frac{l}{2}, t\right)$  станет равным  $h$ .

Если взять точку  $x_2 > l$ , то отклонение обратной волны в этой точке постоянно равно  $\frac{h}{2}$ ; отклонение прямой волны вначале равно  $-\frac{h}{2}$ , и точка начнет подниматься вверх только тогда, когда до нее дойдет наклонный участок прямой волны, т. е. при  $t = \frac{x-l}{a}$ . Точка поднимется на максимальную высоту  $h$ , когда через нее начнет снова проходить горизонтальный участок прямой волны, т. е. при  $t > \frac{x+l}{a}$  (рекомендуем читателю вычислить аналитически по формуле (2.10) отклонения  $u\left(\frac{l}{2}, t\right)$  и  $u(x_2, t)$  в рассмотренные моменты времени).

Таким образом, окончательно графики функции  $u(x, t)$  при различных значениях  $t$  будут выглядеть так: при  $t = 0$

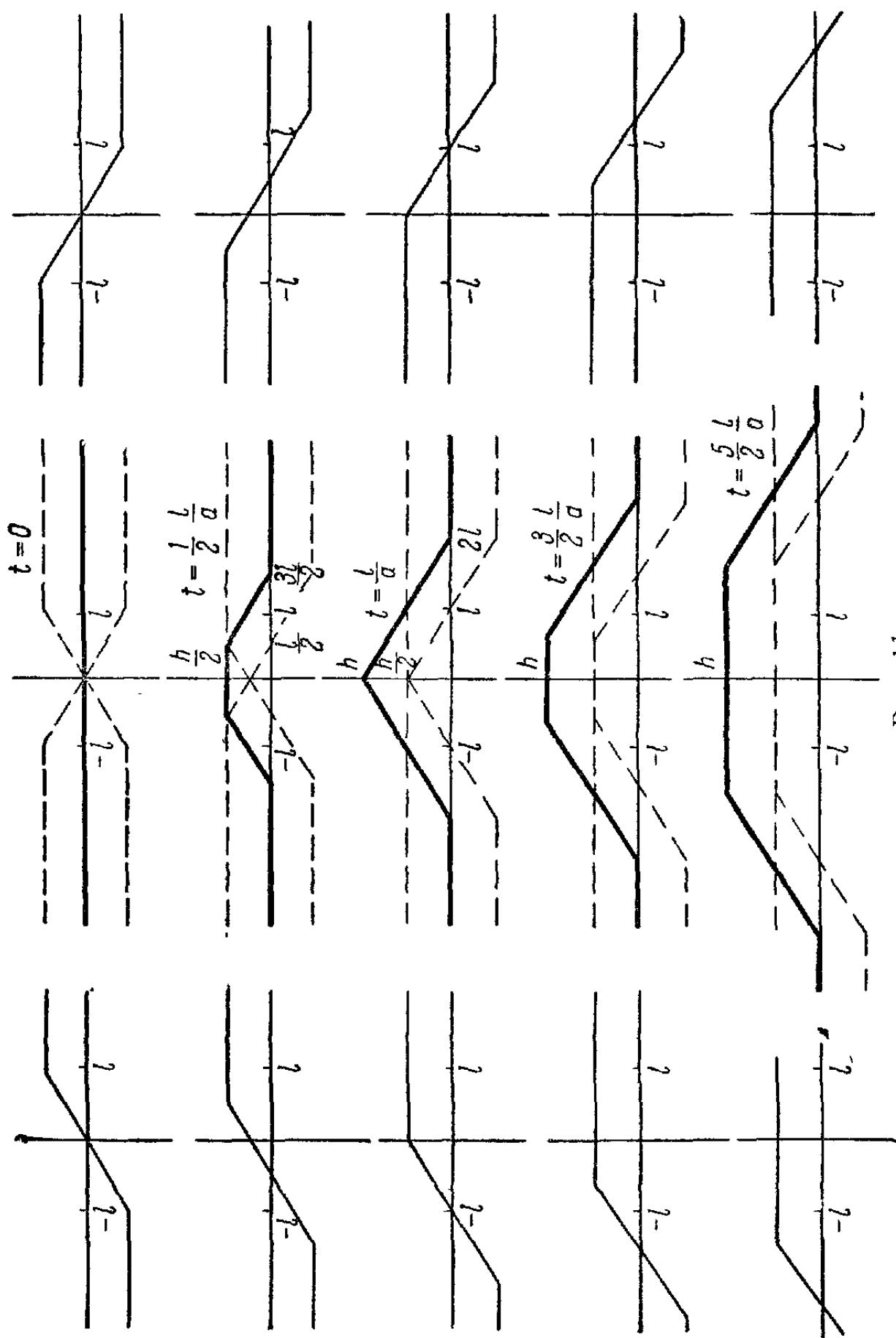


Рис. 11.

прямая  $u=0$ ; при  $0 < t < \frac{l}{a}$  — профили в форме трапеций, у которых верхнее основание поднимается и уменьшается в размерах; при  $t = \frac{l}{a}$  — треугольный профиль и при  $t > \frac{l}{a}$  расширяющиеся профили, имеющие вид трапеций (рис. 11). С течением времени каждая точка струны под влиянием начальных скоростей, сообщенных участку струны  $(-l, l)$ ,

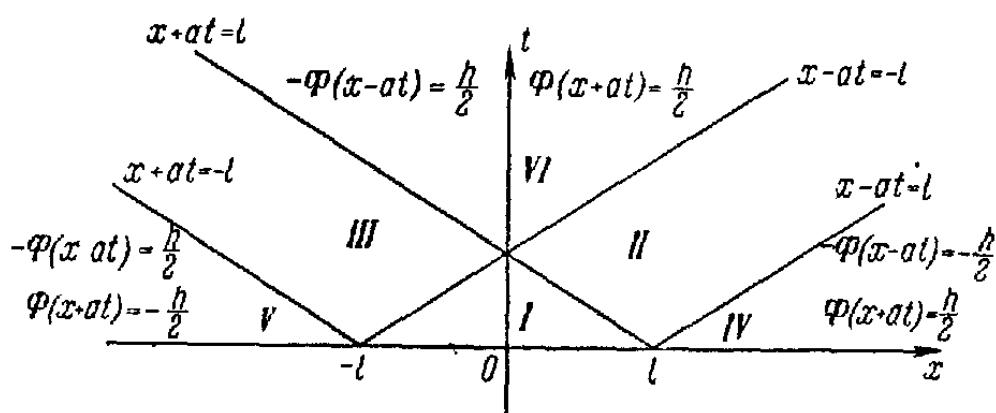


Рис. 12.

поднимется на высоту  $h$  и дальше будет все время оставаться на этой высоте (*остаточное смещение*).

И в этом случае ход колебаний наглядно представляется при помощи фазовой плоскости (рис. 12).

Пользуясь выражениями для функции  $\Phi(x)$ , легко получим, что в зонах  $II$ ,  $IV$  и  $VI$  отклонение обратной волны  $\Phi(x+at)$  постоянно равно  $\frac{h}{2}$ , а в точках зон  $III$ ,  $V$  и  $VI$  такое же отклонение имеет прямая волна  $-\Phi(x-at)$ . Поэтому зона  $VI$  представляет зону остаточного смещения; в точках, ей соответствующих, функция  $u(x, t) = \Phi(x+at) - -\Phi(x-at) = h$ . В зоне  $IV$  прямая волна имеет отклонение  $-\frac{h}{2}$ ; такое же отклонение в зоне  $V$  имеет обратная волна. Поэтому обе эти зоны являются зонами покоя точек струны. Когда точка фазовой плоскости переходит из зоны  $IV$  в зону  $VI$ , то по мере прохождения ею второй зоны отклонение прямой волны изменяется от  $-\frac{h}{2}$  до  $\frac{h}{2}$ . Пользуясь

этими соображениями, напишем, например, выражения для функции  $u(x_0, t)$ , где  $x_0 > l$ :

$$u(x_0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{x_0 - l}{a}, \\ \frac{h}{2} \left( 1 - \frac{x_0 - at}{l} \right), & \frac{x_0 - l}{a} \leq t < \frac{x_0 + l}{a}, \\ h, & t > \frac{x_0 + l}{a}. \end{cases}$$

Рекомендуем читателю самостоятельно написать выражения для  $u(x_1, t)$ , где  $x_1 < l$ , а также выражения для  $u(x, t)$ , рассмотрев случаи  $t < \frac{l}{a}$  и  $t > \frac{l}{a}$ .

Разумеется, описанный процесс носит еще более идеализированный характер, чем в первом случае. Явление остаточного смещения трудно себе представить еще и потому, что если даже пренебречь влиянием концов струны, то неизбежно будет сказываться влияние силы тяжести, т. е. колебания нельзя будет рассматривать как свободные.

**9. Полубесконечная струна.** Метод решения задачи для бесконечной струны, рассмотренный в п. 7, легко применить и к случаю полубесконечной струны. Мы предположим теперь, что струна в состоянии покоя располагается на положительной полуоси  $Ox$  и ее конец, находящийся в начале координат, неподвижно закреплен. Тогда к уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

и начальным условиям, заданным при  $x \geq 0$ ,

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = F(x) \quad (2.13)$$

необходимо добавить еще одно краевое условие:

$$u|_{x=0} = 0. \quad (2.14)$$

Из условий (2.13) и (2.14) следует, что  $f(0) = 0$ .

При исследовании этой задачи мы особое внимание уделим колебаниям струны вблизи закрепленного конца и рассмотрим важный вопрос об отражении волн.

Решение уравнения (2.12) при условиях (2.13) и (2.14) может быть получено из формулы Даламбера (2.8) следующим

образом. Допустим, что функции  $f(x)$  и  $F(x)$ , определенные сначала только при  $x \geq 0$ , доопределены нами произвольным образом и при  $x < 0$ . Напишем выражение для  $u(0, t)$ :

$$u(0, t) = \frac{f(-at) + f(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} F(x) dx. \quad (2.15)$$

Чтобы  $u(0, t)$  было равно нулю при всех значениях  $t$ , нужно значения функций  $f(x)$  и  $F(x)$  при  $x < 0$  выбрать так:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{и} \quad F(-x) = -F(x),$$

т. е., как говорят, функции  $f(x)$  и  $F(x)$  продолжить нечетным образом на всю числовую ось<sup>1)</sup>. Первое слагаемое формулы (2.15) при этом, очевидно, равно нулю; второе слагаемое также обращается в нуль, потому что мы интегрируем нечетную функцию в интервале, симметричном относительно начала координат. Продолжив таким образом функции  $f(x)$  и  $F(x)$  на всю числовую ось, напишем формулу Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x - at}^{x + at} F(x) dx. \quad (2.16)$$

Теперь это выражение определено для всех  $x$  и  $t$  и при  $x \geq 0$  дает решение поставленной задачи. Действительно, функция (2.16) удовлетворяет уравнению (2.12), условиям (2.13) и, в силу доказанного, краевому условию (2.14).

Так же, как и раньше, укажем геометрический способ построения решения  $u(x, t)$  в двух случаях: когда  $F(x) = 0$  (*волна отклонения*) и когда  $f(x) = 0$  (*волна импульса*).

Рассмотрим сначала волну отклонения. Пусть функция  $f(x)$  отлична от нуля на некотором интервале  $(\alpha, \beta)$ , где  $0 < \alpha < \beta$ . Продолжая  $f(x)$  нечетным образом, определим ее на всей числовой оси (рис. 13). Начало процесса будет полностью

<sup>1)</sup> С подобным продолжением читатель уже встречался, когда функцию, заданную на половине периода, приходилось разлагать в ряд Фурье или когда функцию, заданную в интервале  $(0, \infty)$ , приходилось представлять интегралом Фурье. (См. [1], п. 201).

соответствовать случаю бесконечной струны (см. п. 7); заданное отклонение следует разбить на две полуволны — одна из них будет распространяться вправо, а другая влево. Как только полуволна, бегущая влево, дойдет до начала координат, туда же подойдет и полуволна, бегущая вправо по отрицательной полуоси. В последующие моменты времени эти полуволны начнут накладываться друг на друга, что и соответствует процессу отражения. Весь процесс отражения показан на рис. 14. Сначала отражающаяся волна укорачивается, потом исчезает и наконец переворачивается. (Если начальная форма волны не симметричная, то полного исчезновения отклонений может и не быть.)

Таким образом, после того как волна полностью отразилась, отклонения точек меняют свой знак: как говорят, *фаза волны изменила знак*. После этого по струне побегут вправо с одинаковой скоростью две волны, находящиеся в противоположных фазах. (На рис. 14 изображена только отраженная волна; волна, с самого начала уходившая вправо, не показана.)

Если мы захотим составить аналитическое выражение для функции  $u(x, t)$ , то опять-таки удобно воспользоваться фазовой плоскостью (рис. 15). Рекомендуем читателю составить выражения для функции  $u(x, t)$  при различных значениях  $x$  и  $t$ . При этом необходимо учитывать, что в заштрихованных треугольниках действуют одновременно две волны.

Перейдем к рассмотрению волны импульса и снова будем считать, что только точки участка  $(\alpha, \beta)$  струны получили

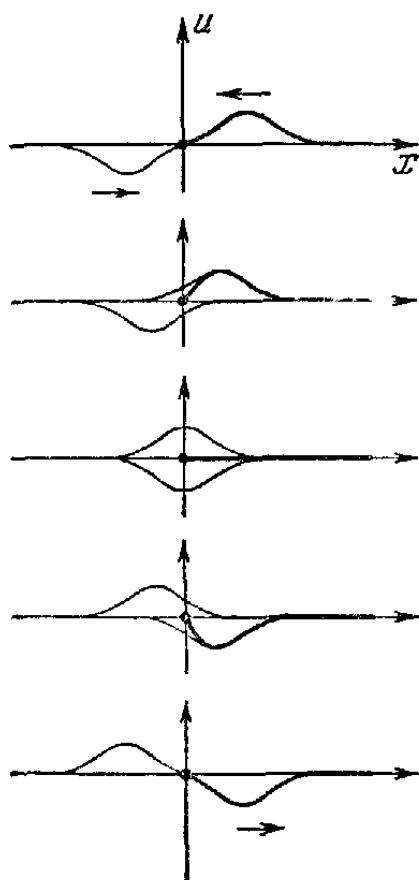


Рис. 14.

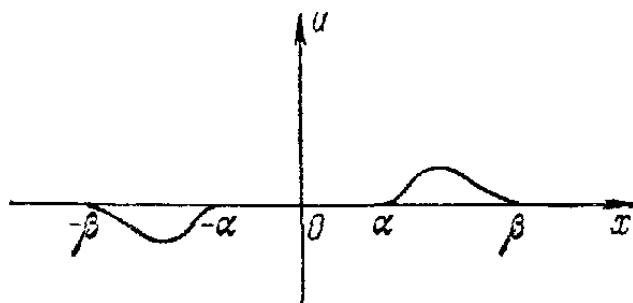


Рис. 13.

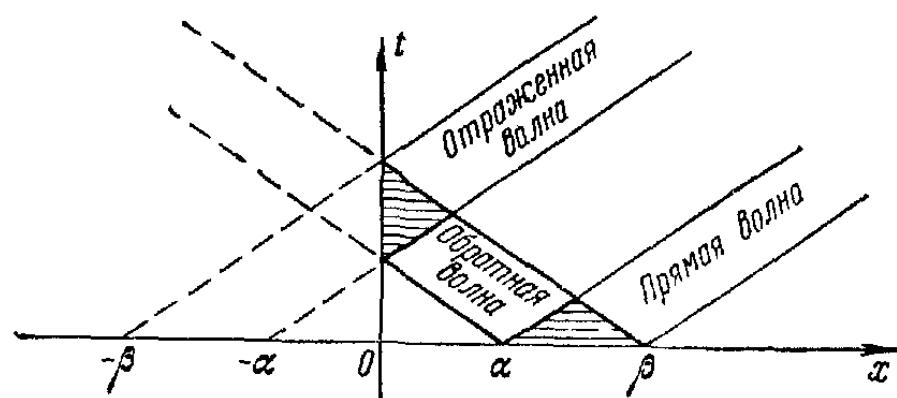


Рис. 15

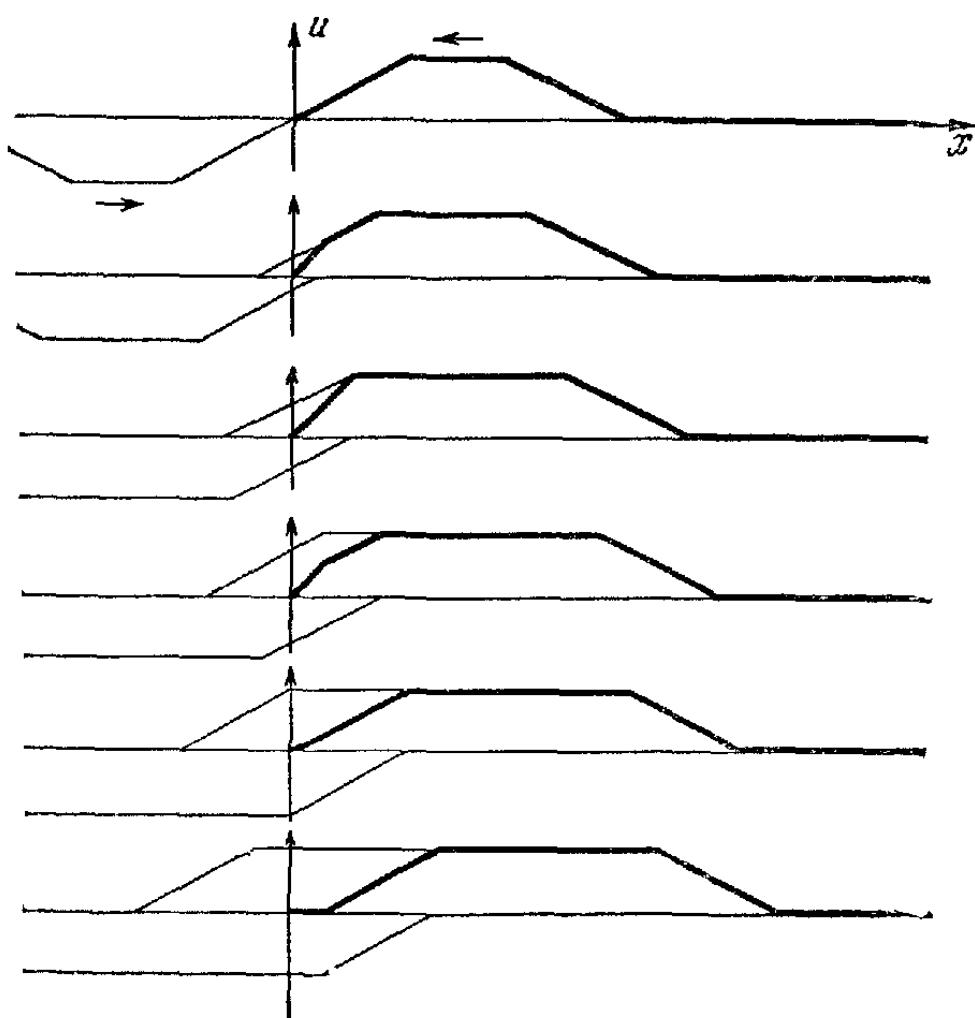


Рис. 16

постоянные начальные скорости  $v_0$ . Начало процесса распространения волны полностью соответствует бесконечной струне, но как только левый конец волны подойдет к началу координат, туда же подойдет и правый конец аналогичной волны, распространяющейся от симметричного участка  $(-\beta, -\alpha)$  и находящейся в противоположной фазе. Процесс наложения этих волн и образования результирующей отраженной волны изображен на рис. 16. После отражения по струне побежит вправо с постоянной скоростью волна в форме трапеции (Процесс построения лишь чуть-чуть усложнится, если левый конец распространяющейся волны достигнет начала координат раньше, чем в середине интервала  $(\alpha, \beta)$  отклонение достигнет наибольшего значения.)

В случае конечной струны для получения решения можно было бы применить метод Даламбера, воспользовавшись отражением от обоих концов струны (см. стр. 66). Однако для конечной струны этот метод значительно менее нагляден. Мы будем решать эту задачу методом Фурье, о котором сейчас и перейдем.

### § 3. Метод Фурье

**10. Метод Фурье.** Мы рассмотрим в этом параграфе задачу о свободных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах. Как указано в § 1, задача сводится к решению однородного уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (31)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \quad (32)$$

и краевых условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (33)$$

*Метод Фурье* (или, как его еще называют, *метод разделения переменных*) принадлежит к числу важнейших методов решения уравнений математической физики. Мы с ним будем в дальнейшем неоднократно встречаться.

Первая часть метода Фурье состоит в том, что мы отыскиваем частные решения уравнения (31),

удовлетворяющие краевым условиям (3.3), вида

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (3.4)$$

Каждое из искомых частных решений, таким образом, представляется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $x$ , а другая — только от  $t$ .

Дифференцируя дважды выражение (3.4) по  $x$  и по  $t$ , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' T, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X T''.$$

(Для сокращения записи мы не пишем аргументов функций  $X(x)$  и  $T(t)$ .)

Подставляя выражения для производных в уравнение (3.1), получим

$$X T'' = a^2 X'' T$$

или, деля обе части равенства на произведение  $a^2 X T$ ,

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.5)$$

Чтобы функция  $u(x, t) = X(x) T(t)$  была решением уравнения (3.1), равенство (3.5) должно соблюдаться при всех значениях  $x$  и  $t$ . Левая часть этого равенства зависит только от переменной  $t$  и не может изменяться при изменении  $x$ . Поэтому, если зафиксировать  $t$  и менять  $x$ , левая часть, а следовательно и правая, будет сохранять постоянное значение. Рассуждая аналогично, установим, что правая часть, а следовательно и левая, не может изменяться и при изменении  $t$ . Это будет справедливо только в том случае, когда обе части равенства (3.5) вообще не зависят ни от  $x$ , ни от  $t$ , т. е. когда оба отношения  $\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T}$  и  $\frac{X''}{X}$  являются величинами постоянными:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = \text{const.} \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что функции  $T$  и  $X$  должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$X''(x) - cX(x) = 0 \quad \text{и} \quad T''(t) - ca^2 T(t) = 0. \quad (3.7)$$

Поскольку мы ищем частные решения, удовлетворяющие краевым условиям (3.3), то при любом значении  $t$  должны соблюдаться равенства

$$u|_{x=0} = X(0) T(t) = 0, \quad u|_{x=l} = X(l) T(t) = 0.$$

Если бы обращался в нуль второй множитель, то решение  $u(x, t)$  равнялось бы нулю при всех значениях  $x$  и  $t$ . Поэтому, чтобы отыскать решения, не тождественно равные нулю (а только такие нас и интересуют), мы должны считать, что

$$X(0) = 0 \quad \text{и} \quad X(l) = 0.$$

В результате для отыскания функции  $X(x)$  мы пришли к следующей задаче<sup>1)</sup>: *найти решения линейного дифференциального уравнения второго порядка*

$$X''(x) - cX(x) = 0 \tag{3.8}$$

*при условиях*

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{3.9}$$

Разумеется, эта задача при любом  $c$  имеет решение, тождественно равное нулю:  $X(x) \equiv 0$ . Оказывается, однако, что при некоторых значениях постоянной  $c$  эта задача имеет и другие решения.

Заметим, что в этом состоит существенное отличие решения рассматриваемой задачи от решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, когда для определения частного решения задаются значения функции и ее производной в некоторой начальной точке. Как известно (см. введение), последняя задача имеет единственное решение.

Полагая  $X(x) = e^{rx}$ , составим для уравнения (3.8) характеристическое уравнение

$$r^2 - c = 0$$

и рассмотрим различные случаи.

<sup>1)</sup> Эта задача является частным случаем общей задачи Штурма—Лиувилля, заключающейся в отыскании решений линейного дифференциального уравнения второго порядка вида  $[p(x)y']' + r(x)y - cy = 0$ , удовлетворяющих некоторым краевым условиям, т. е. условиям, налагаемым на искомую функцию или ее производную в точках  $x = a$  и  $x = b$  (концах интервала).

1) Пусть  $c = \lambda^2 > 0$ . Тогда корни характеристического уравнения действительны,  $r = \pm \lambda$ , и общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Чтобы соблюдались условия (3.9), мы должны положить

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} &= 0. \end{aligned}$$

Так как определитель этой однородной системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}$$

не равен нулю, то система имеет единственное решение

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Таким образом, в этом случае решений, отличных от тождественного нуля, не существует.

2) Пусть  $c = 0$ . Тогда оба корня характеристического уравнения равны нулю и

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Подставляя в условия (3.9), получим

$$C_1 = 0, \quad C_1 + C_2 l = 0,$$

т. е. опять-таки  $C_1 = C_2 = 0$ .

3) Пусть, наконец,  $c = -\lambda^2 < 0$ . Корни характеристического уравнения чисто мнимые,  $r = \pm i\lambda$ , и решение будет содержать тригонометрические функции

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

При  $x = 0$  должно быть

$$X(0) = C_1 = 0,$$

а при  $x = l$

$$X(l) = C_2 \sin \lambda l = 0.$$

Последнее равенство возможно, когда  $C_2 \neq 0$ , именно оно будет удовлетворяться при

$$\sin \lambda l = 0,$$

т. е. при

$$\lambda = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

( $k$  не равно нулю, так как по условию  $\lambda \neq 0$ ).

Итак, если  $\lambda = \frac{k\pi}{l}$ , т. е.  $c = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ , то существуют решения уравнения (3.8), не равные тождественно нулю.

Решение, отвечающее некоторому фиксированному  $k$ , обозначим через  $X_k(x)$ . Оно имеет вид

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (3.10)$$

где  $A_k$  — произвольная постоянная. Мы вправе в дальнейшем придавать  $k$  только положительные значения:  $k = 1, 2, \dots$ , поскольку при отрицательных  $k$  будут получаться решения того же вида (ведь  $A_k$  — произвольные постоянные, которые могут иметь любые знаки).

Как мы видим, каждому значению  $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$  соответствует бесчисленное множество решений (3.10), отличающихся друг от друга постоянным множителем.

Величины  $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$  называют *собственными числами*, а функции  $\sin \frac{k\pi x}{l}$  — *собственными функциями* дифференциального уравнения (3.8) с краевыми условиями (3.9).

Напомним читателю, что система функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  называется *ортогональной* в интервале  $[a, b]$ , если интеграл от произведения любых двух различных функций системы равен нулю:  $\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0$ , если  $n \neq m$  (см. [1], п. 205). Легко установить, что найденные собственные функции *ортогональны* на интервале  $[0, l]$ . Действительно, при  $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} dx &= \\ &= \frac{l}{2\pi} \left[ \frac{\sin \frac{\pi(m-n)x}{l}}{m-n} - \frac{\sin \frac{\pi(m+n)x}{l}}{m+n} \right] \Big|_0^l = 0. \end{aligned}$$

Теперь обратимся к отысканию функций  $T(t)$ . Каждому собственному числу  $\lambda_k$  будет соответствовать своя функция  $T_k(t)$ , определяемая вторым из уравнений (3.7) (напоминаем, что  $c = -\lambda^2$ ):

$$T'_k(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$T_k(t) = B_k \cos \frac{k\pi at}{l} + D_k \sin \frac{k\pi at}{l}, \quad (3.11)$$

где  $B_k$  и  $D_k$  — произвольные постоянные.

Подставляя выражения (3.10) и (3.11) в формулу (3.4), найдем частные решения уравнения (3.1), удовлетворяющие краевым условиям (3.3). При этом каждому значению  $k = 1, 2, \dots$  будет отвечать решение

$$u_k(x, t) = \left( B_k \cos \frac{k\pi at}{l} + D_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) A_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Внося множитель  $A_k$  в скобку и вводя обозначения  $A_k B_k = a_k$  и  $A_k D_k = b_k$ , запишем  $u_k(x, t)$  в виде

$$u_k(x, t) = \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (3.12)$$

Решения  $u_k(x, t)$  называются *собственными функциями* задачи; соответствующие им колебания струны называются *собственными колебаниями*.

Физический смысл решений (3.12) мы рассмотрим несколько позже, а сейчас перейдем ко второй части метода Фурье и при помощи собственных функций построим решение, удовлетворяющее начальным условиям (3.2). Для этого возьмем сумму решений (3.12), которая в силу линейности и однородности уравнения (3.1) также будет являться его решением:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (3.13)$$

Поскольку мы составили бесконечный ряд, то, разумеется, нужно, чтобы он был сходящимся. Мы предположим также, что его можно дважды почленно дифференцировать (см. введение). Ясно, что функция  $u(x, t)$  удовлетворяет краевым условиям (3.3), так как им удовлетворяет каждая из функций  $u_k(x, t)$ .

Будем теперь подбирать произвольные постоянные  $a_k$  и  $b_k$  так, чтобы функция (3.13) удовлетворяла начальным условиям. Подставляя значение  $t = 0$ , получим

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x). \quad (3.14)$$

Дифференцируя ряд (3.13) по  $t$ :

$$\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left( -a_k \sin \frac{k\pi at}{l} + b_k \cos \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

и подставляя  $t = 0$ , удовлетворим второму начальному условию:

$$\frac{du}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = F(x). \quad (3.15)$$

Формулы (3.14) и (3.15) показывают, что величины  $a_k$  и  $\frac{k\pi a}{l} b_k$  являются коэффициентами разложения функций  $f(x)$  и  $F(x)$  в ряд Фурье по синусам в интервале  $(0, l)$  (см. [1], п. 201). Вспоминая формулы для коэффициентов этого разложения, найдем  $a_k$ :

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (3.16)$$

Так как  $\frac{k\pi a}{l} b_k = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$ , то

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (3.17)$$

Подставляя выражения для коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  в ряд (3.13), мы окончательно найдем решение поставленной задачи.

Мы не останавливаемся на условиях, которые надо наложить на функции  $f(x)$  и  $F(x)$ , чтобы было оправдано сделанное допущение о возможности почлененного дифференцирования

ряда (3.13). Обычно в физических задачах эти условия соблюдаются.

Формула (3.13) показывает, что в моменты времени  $t = \frac{2l}{a}, t = \frac{4l}{a}, \dots$  струна возвращается в свое первоначальное состояние; это означает, что колебания струны не затухающие и периодически повторяющиеся, с периодом  $T = \frac{2l}{a}$ . Так происходит потому, что мы пренебрегли силами трения. При учете их получились бы затухающие колебания, аналогично тому как это имеет место в случае обыкновенных гармонических колебаний точки. Решение задачи в этом случае приведено в п. 14.

**11. Стоящие волны.** Прежде чем перейти к примерам, выясним физический смысл собственных функций  $u_k(x, t)$ , определенных формулой (3.12). Перепишем ее в виде

$$u_k(x, t) = F_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left( \frac{k\pi a t}{l} + \varphi_k \right), \quad (3.18)$$

где

$$F_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}.$$

Из формулы (3.18) видно, что все точки струны совершают гармонические колебания с одной и той же ча-

стотой  $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$  и фазой  $\varphi_k$ . Амплитуда колебания зависит от абсциссы  $x$  точки струны и равна  $F_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ .

При таком колебании все точки струны одновременно достигают своего максимального отклонения в ту или иную сторону и одновременно проходят положение равновесия. Такие колебания струны называются *стоящими волнами*.

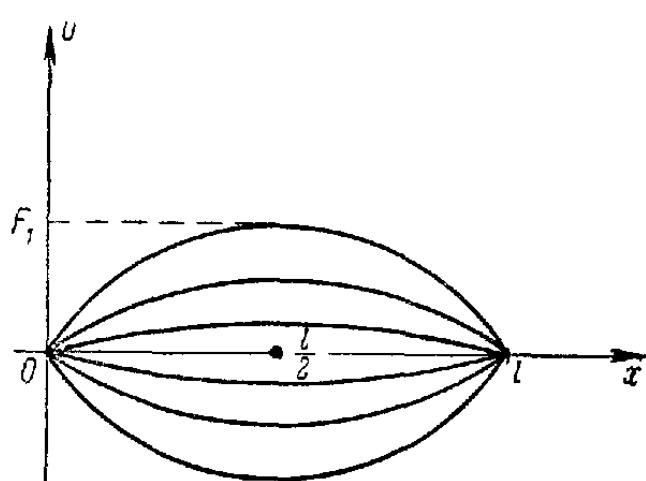


Рис. 17.

Из формулы (3.18) видно, что все точки струны совершают гармонические колебания с одной и той же ча-

На рис. 17 показана форма струны в различные моменты времени для случая  $k = 1$ ; при этом неподвижными остаются только концы струны, а наибольшего отклонения  $F_1$  достигает только точка  $x = \frac{l}{2}$ . При  $k = 2$  неподвижных точек

будет уже три: концы и середина струны ( $\sin \frac{2\pi}{l} \frac{l}{2} = \sin \pi = 0$ ),

а точек, в которых отклонения будут достигать наибольшего значения, — две:  $x = \frac{l}{4}$  и  $x = \frac{3l}{4}$  (рис. 18).

Вообще стоячая волна  $u_k(x, t)$  будет иметь столько неподвижных точек, сколько корней имеет уравнение  $\sin \frac{k\pi x}{l} = 0$  в интервале  $[0, l]$ . Таких точек будет  $k + 1$ , их абсциссы:  $0, \frac{l}{k}, \frac{2l}{k}, \dots, \frac{(k-1)l}{k}, l$ .

Неподвижные точки называются *узлами стоячей волны*. Посередине между узлами располагаются точки, в которых отклонения достигают максимума; такие точки называются *пучностями*. Каждая струна может иметь собственные колебания лишь строго определенных частот  $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ . Эти частоты называются *собственными частотами струны*. Наименьшей собственной частотой будет

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad (3.19)$$

где  $T_0$  — натяжение, а  $\rho$  — плотность струны.

Когда струна колеблется, она издает звук, высота которого возрастает вместе с частотой колебаний. Если струна совершает собственные колебания, то самый низкий тон будет, когда частота равна  $\omega_1$ . Из формулы (3.19) видно, что при этом звук тем выше, чем больше натяжение  $T_0$  и чем короче

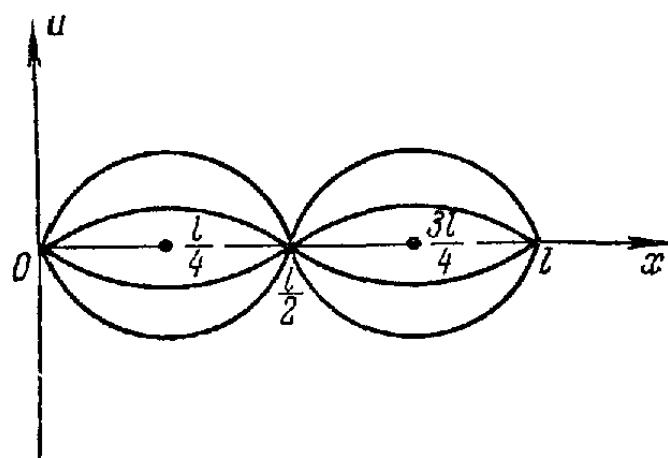


Рис. 18.

и легче струна<sup>1)</sup> (т. е. чем меньше  $l$  и  $\rho$ ). Остальные тона, соответствующие частотам  $\omega_k$ , называются *обертонами* или *гармониками*. Если струна совершает свободные колебания, определяемые начальными условиями, то функция  $u(x, t)$  представляется, как это видно из формулы (3.13), в виде суммы отдельных гармоник. При этом характер звучания струны (тон, сила звука, тембр) будет зависеть от соотношения между амплитудами отдельных гармоник.

Основное назначение решения (3.13) как раз и заключается в том, что оно позволяет произвести сравнение этих амплитуд.

**12. Примеры.** Пример 1. Найти колебания струны с закрепленными концами  $x=0$  и  $x=l$ , если начальные скорости точек

струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму треугольника с вершиной в точке  $(c, h)$  (рис. 19). (Натяжение

струны  $T_0$ , плотность  $\rho$ , величина  $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ .)

Функция  $f(x) = u|_{t=0}$  задается формулами

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & \text{если } 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & \text{если } c \leq x \leq l. \end{cases}$$

Функция  $F(x) = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ , согласно условию, равна нулю. Поэтому в общем выражении (3.13) для решения  $u(x, t)$  все коэффициенты  $b_k = 0$ .

<sup>1)</sup> Читателю, имевшему дело со струнными инструментами, например с балалайкой, хорошо известно, что, чем туже натянута струна, тем более высокий звук она издает; точно так же можно увеличить высоту звука, зажав струну в какой-либо ее точке, т. е. укоротив ее.

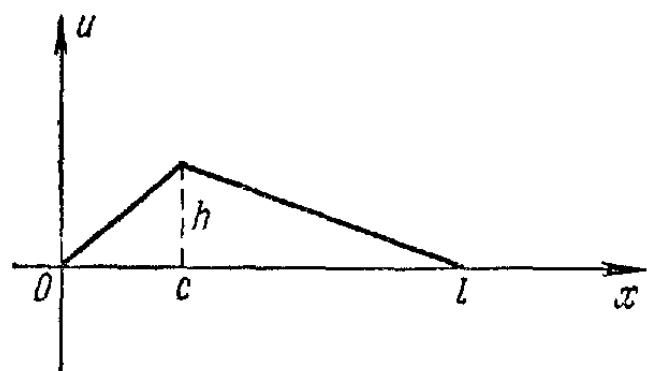


Рис. 19.

Коэффициенты  $a_k$  находим по формуле (3.16):

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \left[ \frac{h}{c} \int_0^c x \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \frac{h}{l-c} \int_c^l (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right]. \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^c x \sin \frac{k\pi x}{l} dx &= -\frac{lx}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^c + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^c = \\ &= -\frac{lc}{k\pi} \cos \frac{k\pi c}{l} + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\int_c^l (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l(l-c)}{k\pi} \cos \frac{k\pi c}{l} + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi c}{l}.$$

Следовательно,

$$a_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2c(l-c)} \sin \frac{k\pi c}{l}.$$

Подставляя выражение для  $a_k$  в формулу (3.13), получаем искомое решение

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi at}{l}. \quad (3.20)$$

Если число  $k$  таково, что  $\sin \frac{k\pi c}{l} = 0$ , т. е. точка  $c$  является узлом  $k$ -й гармоники, то  $a_k = 0$  и в найденное решение, соответствующая гармоника не входит (если  $k_0$  — наименьшее из таких чисел, то все остальные будут ему кратны).

Пусть, например, струна оттянута в середине, т. е.  $c = \frac{l}{2}$ .

Тогда  $\frac{k\pi c}{l} = \frac{k\pi}{2}$  и при всех четных значениях  $k$  точка  $\frac{l}{2}$  является узлом; поэтому в решение будут входить только нечетные гармоники. Читатель легко проверит, что в этом случае ( $c = \frac{l}{2}$ ) решение будет иметь вид

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l}. \quad (3.21)$$

Выражение (3.20) для решения  $u(x, t)$  показывает, что амплитуда  $k$ -й гармоники пропорциональна величине  $\frac{1}{k^3}$ , т. е. довольно быстро убывает с возрастанием номера  $k$ .

Это значит, что гармоники достаточно высоких порядков на результирующее колебание практически никакого влияния оказывать не будут.

Для построения формы струны в любой момент времени не обязательно производить вычисления по формуле (3.20). Можно воспользоваться уже хорошо изученным явлением отражения волн от закрепленного конца струны (см. п. 9); теперь только нужно отразить волну от обоих концов. Чтобы произвести построение, продолжим первоначальный график струны на интервале  $(0, l)$  «нечетным» образом влево и вправо и разобьем его на прямую и обратную волны. (На верхнем из рисунков 20, соответствующем моменту времени

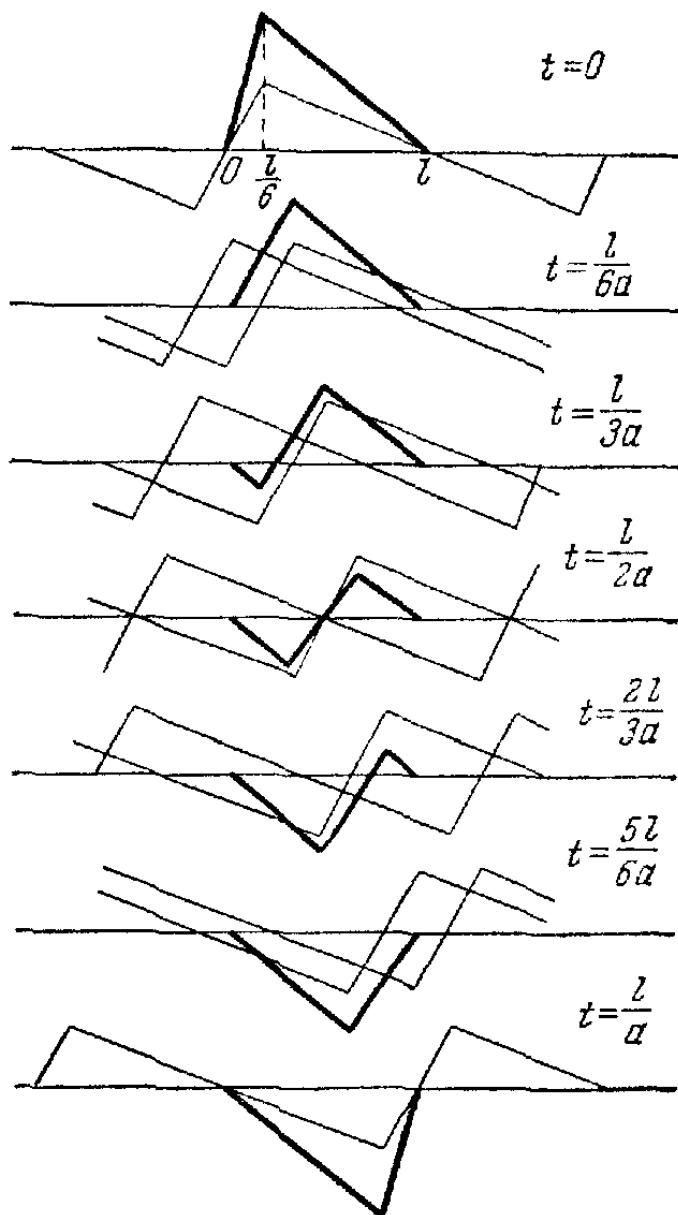


Рис. 20.

$t = 0$ , графики обеих волн сливаются.) Затем обычным образом строим графики прямой и обратной волн в разные моменты времени и складываем их в интервале  $(0, l)$ . Весь этот процесс в промежутке времени  $(0, \frac{l}{a})$  изображен на

рис. 20 ( $c = \frac{l}{6}$ ) и рис. 21 ( $c = \frac{l}{2}$ ). В следующий полу-период  $(\frac{l}{a}, \frac{2l}{a})$  струна, пройдя в обратном порядке все

отмеченные положения, вернется в первоначальное состояние (при  $t = 0$ ), после чего процесс будет периодически повторяться (с периодом  $T = \frac{2l}{a}$ ). Рис. 20 и 21 показывают существенное отличие характера полученного колебания от свойств стоячей волны. Так, например, если  $c \neq \frac{l}{2}$ , то точки струны проходят положение равновесия в разные моменты времени; кроме того, струна не будет занимать положения, симметричного с первоначальным, относительно оси  $Ox$ .

Предоставляем читателю доказать, что функция  $u(x, t)$ , определенная формулой (3.20), удовлетворяет условию

$$u(l-x, \frac{l}{a}-t) = -u(x, t),$$

и объяснить геометрический смысл этого условия.

**Пример 2.** Пусть в условиях предыдущего примера начальная форма струны задается функцией  $f(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$ , где  $n$  — целое число, а начальные скорости равны нулю.

В этом случае начальное положение струны совпадает с графиком одной из собственных функций и решение особенно просто. Помимо всех коэффициентов  $b_k$ , обращаются в нуль и все  $a_k$  при  $k \neq n$ , так как собственные функции ортогональны (см. стр. 59).

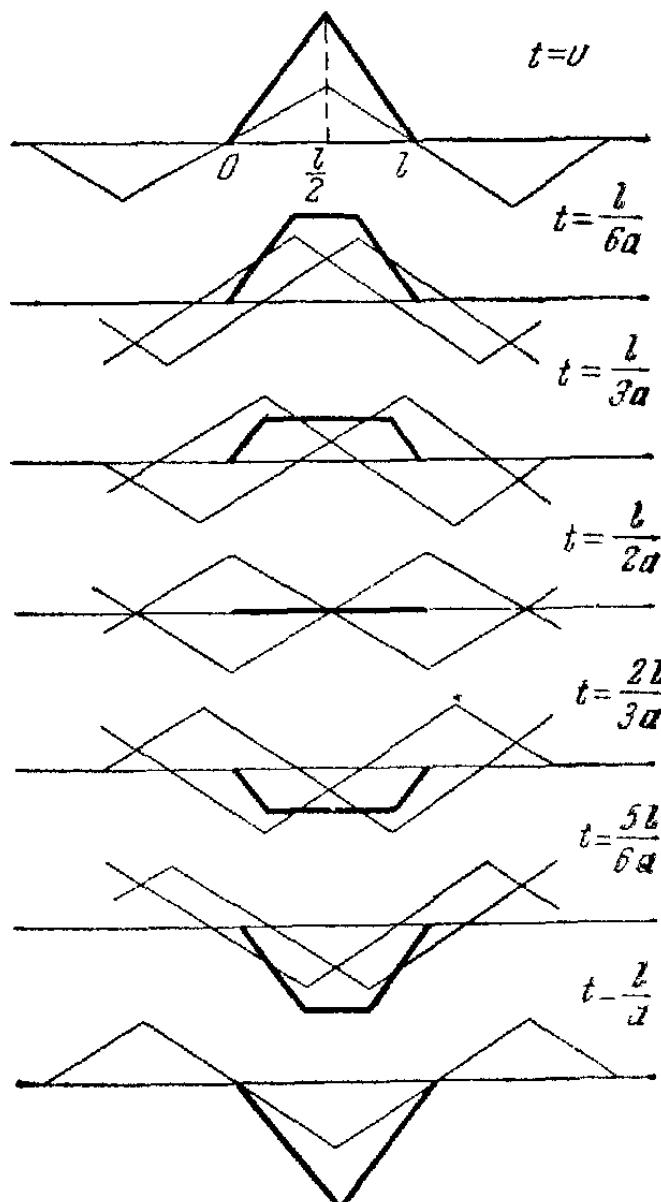


Рис. 21.

Найдем коэффициент  $a_n$ :

$$a_n = A \frac{2}{l} \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = A,$$

и, следовательно,

$$u(x, t) = A \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l}.$$

Таким образом, струна совершает стоячее колебание.

Пример 3. Пусть в условиях примера 1 начальная форма струны — парабола, симметричная относительно середины струны, и максимальное отклонение равно  $h$  (рис. 22). Найдем колебания струны.

Составляя уравнение параболы, получим

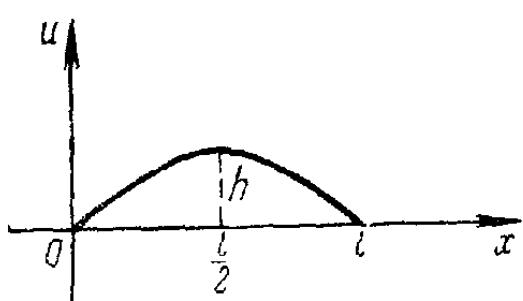


Рис. 22.

По-прежнему все  $b_k = 0$ , а  $a_k$  вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{8h}{l^3} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Дважды интегрируя по частям, получим (необходимые выкладки читатель проведет самостоятельно)

$$a_k = \frac{16h}{k^3 \pi^3} (1 - \cos k\pi).$$

Отсюда следует, что если  $k$  четно, то  $a_k = 0$ . Если же  $k$  нечетно и равно  $2n+1$ , то

$$a_{2n+1} = \frac{32h}{(2n+1)^3 \pi^3} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Окончательно получаем решение в виде

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l}. \quad (3.22)$$

Здесь амплитуды последовательных гармоник (нечетных) убывают еще быстрее, чем в первом примере. В подобных

случаях высшие гармоники оказывают влияние только на тембр звука, издаваемого струной, в то время как тон определяется основной наименьшей частотой  $\omega_1$  (см. формулу (3.19)).

**Пример 4.** Пусть в начальном положении струна находится в покое и точкам ее на участке  $(\alpha, \beta)$  придана постоянная начальная скорость  $v_0$  (этого можно добиться, ударяя по струне на этом участке плоским жестким молоточком). Найдем колебания струны.

Сохраняя предыдущие обозначения, будем иметь

$$f(x) = 0,$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < \alpha, \\ v_0, & \text{если } \alpha < x < \beta, \\ 0, & \text{если } \beta < x \leq l \end{cases}$$

(мы уже отмечали тот факт, что функция  $F(x)$  может быть разрывна). Коэффициенты  $a_k$  общей формулы (3.13) равны нулю, а коэффициенты  $b_k$  находятся по формулам (3.17):

$$b_k = \frac{2v_0}{k\pi a} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2lv_0}{k^2\pi^2 a} \left( \cos \frac{k\pi\alpha}{l} - \cos \frac{k\pi\beta}{l} \right).$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{2lv_0}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi\alpha}{l} - \cos \frac{k\pi\beta}{l}}{k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l}. \quad (3.23)$$

В частном случае, если начальные скорости  $v_0$  получаются во всех точках струны ( $\alpha = 0, \beta = l$ ), то

$$u(x, t) = \frac{4lv_0}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{l}$$

(для четных  $k$  разность  $1 - \cos k\pi$  равна нулю, а для нечетных — двум). Нетрудно найти в этом случае наибольшее отклонение струны от положения равновесия. Физически ясно, что больше всего отклонится от положения равновесия середина струны, т. е. точка  $x = \frac{l}{2}$ . Выбирая еще момент

времени  $t = \frac{l}{2a}$ , получим

$$u\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2a}\right) = \frac{4lv_0}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin^2 \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Так как  $\sin^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} = 1$ , то это значение  $u$  и будет наибольшим. Учитывая формулу <sup>1)</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

найдем, что  $u_{\max} = \frac{lv_0}{2a}$ .

Пример 5. Пусть в условиях примера 4 струна возбуждается ударом очень острого молоточка, передающего струне импульс  $I$  в точке  $c$ . Начальное отклонение точек струны равно нулю.

В этой задаче мы имеем дело с так называемым *сосредоточенным импульсом*. Будем понимать это следующим образом: сначала положим, что импульс равномерно распределен по некоторому малому участку струны ( $c - \delta, c + \delta$ ), окружающему точку  $c$ . Тогда, в силу закона сохранения

<sup>1)</sup> Указанная формула следует из решения примера 1. Подставляя в формулу (3.21) значения  $x = \frac{l}{2}$  и  $t = 0$  и учитывая, что  $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = (-1)^n$ , а начальное отклонение в точке  $\frac{l}{2}$  равно  $h$ , получим:

$$u\left(\frac{l}{2}, 0\right) = h = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

количества движения, будет соблюдаться равенство

$$2\delta\rho v_0 = I,$$

где  $\rho$  — линейная плотность струны, а  $v_0$  — приобретаемая ею на участке  $(c - \delta, c + \delta)$  начальная скорость. Найдя решение этой задачи и перейдя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , мы получим искомое решение.

Положим в формуле (3.23)  $\alpha = c - \delta$ ,  $\beta = c + \delta$  и  $v_0 = \frac{I}{2\delta\rho}$ :

$$u(x, t) = \frac{Il}{\pi^2 a \rho \delta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi(c-\delta)}{l} - \cos \frac{k\pi(c+\delta)}{l}}{k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l}.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{k\pi(c-\delta)}{l} - \cos \frac{k\pi(c+\delta)}{l}}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{k\pi}{l} \left[ \sin \frac{k\pi(c-\delta)}{l} + \sin \frac{k\pi(c+\delta)}{l} \right] = \frac{2k\pi}{l} \sin \frac{k\pi c}{l}.$$

Считая возможным почленный переход к пределу под знаком суммы, получим решение задачи о колебаниях струны под действием сосредоточенного импульса

$$u(x, t) = \frac{2I}{\pi a \rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l}.$$

Пример 6. Пусть в условиях примера 4 начальное распределение скоростей задается функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ v_0 \cos \frac{\pi(x-x_0)}{2\delta}, & \text{если } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0, & \text{если } x_0 + \delta < x \leq l. \end{cases}$$

Показать, что колебания струны описываются функцией

$$u(x, t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n \delta}{l} \sin \frac{\pi n x_0}{l}}{n \left| 1 - \frac{(2\delta_n)^2}{l^2} \right|} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n a t}{l}.$$

## § 4. Вынужденные колебания и колебания струны в среде с сопротивлением

**13. Вынужденные колебания струны.** Методы, развитые в § 3, позволяют решать и задачу о вынужденных колебаниях струны. Эта задача приводит к неоднородному уравнению колебаний (см. § 1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t) \quad (4.1)$$

(мы обозначили через  $G(x, t)$  функцию  $\frac{1}{\rho} g(x, t)$ , где  $\rho$  — плотность струны, а  $g(x, t)$  — плотность распределения внешних сил). Начальные и краевые условия примем такими же, как и для случая свободных колебаний:

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0.$$

Так же как и при решении обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений будем искать решение уравнения (4.1) в виде суммы двух функций:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t). \quad (4.2)$$

Функцию  $v(x, t)$  выберем так, чтобы она удовлетворяла однородному уравнению  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  и условиям

$$v|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x), \quad v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0.$$

Тогда функция  $w(x, t)$  должна удовлетворять неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G(x, t) \quad (4.3)$$

и нулевым начальным и краевым условиям

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0.$$

Легко проверить, что при таком выборе функций  $v$  и  $w$  их сумма (4.2) будет являться искомым решением.

Функция  $v(x, t)$  описывает свободные колебания струны, происходящие только вследствие придания точкам струны

начальных отклонений и скоростей. Функция  $w(x, t)$  описывает вынужденные колебания, которые совершаются под действием внешних сил при отсутствии начальных возмущений.

Поскольку функцию  $v(x, t)$  мы уже умеем отыскивать (см. § 3), то займемся теперь только отысканием решения неоднородного уравнения — функции  $w(x, t)$ .

Будем искать функцию  $w(x, t)$  в виде ряда по собственным функциям  $\sin \frac{k\pi x}{l}$  однородной задачи:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (4.4)$$

где  $\gamma_k(t)$  — не определенные пока функции от  $t$ . Прежде всего заметим, что функция  $w(x, t)$  действительно удовлетворяет краевым условиям  $w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0$ , так как все собственные функции обращаются в нуль при  $x=0$  и  $x=l$ . Чтобы функция  $w(x, t)$  удовлетворяла и нулевым начальным условиям, достаточно считать, что  $\gamma_k(0) = 0$  и  $\gamma'_k(0) = 0$ . Запишем уравнение (4.3) в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = G(x, t)$$

и заменим функцию  $w(x, t)$  рядом (4.4). Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \gamma''_k(t) + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} \gamma_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = G(x, t). \quad (4.5)$$

Разложим теперь функцию  $G(x, t)$  в интервале  $(0, l)$  в ряд по синусам по аргументу  $x$  (это производится точно так же, как и разложение в ряд Фурье функции одной переменной, но только коэффициенты разложения будут являться функциями переменной  $t$ ):

$$G(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (4.6)$$

где

$$g_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (4.7)$$

(При интегрировании  $t$  считается постоянным.)

Если, в частности, плотность распределения внешних сил не зависит от времени, то функция  $G(x, t)$  не зависит от  $t$ , т. е.  $G(x, t) = G(x)$  и формула (4.6) представляет собой обычное разложение в ряд Фурье по синусам. В этом случае функции  $g_k(t)$  постоянны.

Если же функция  $G(x, t)$  не зависит от  $x$ , а зависит только от времени  $t$ , т. е.  $G(x, t) = G(t)$ , то функции  $g_k(t)$  будут равны

$$g_k(t) = \frac{2G(t)}{\pi} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} G(t), & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } k \text{ четное.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Приравнивая в разложениях (4.5) и (4.6) коэффициенты при собственных функциях, составим дифференциальные уравнения для отыскания неизвестных функций  $\gamma_k(t)$ :

$$\gamma_k''(t) + \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2} \gamma_k(t) = g_k(t). \quad (4.9)$$

К полученному неоднородному уравнению второго порядка следует присоединить установленные выше начальные условия

$$\gamma_k(0) = 0, \quad \gamma_k'(0) = 0. \quad (4.10)$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (4.9), имеет вид

$$A_k \cos \frac{k\pi at}{l} + B_k \sin \frac{k\pi at}{l}.$$

Решение неоднородного уравнения (4.9) в случае, когда функция  $g_k(t)$  имеет специальный вид (в частности, постоянна), может быть найдено методом неопределенных коэффициентов; при произвольной правой части решение следует искать методом вариации произвольных постоянных (см. [1], чл. 171 и 172).

Пользуясь этим методом, можно показать, что при любой правой части  $g_k(t)$  решение уравнения (4.9) с начальными условиями (4.10) дается формулой

$$\gamma_k(t) = \frac{l}{k\pi a} \int_0^t g_k(\tau) \sin \frac{k\pi a(t-\tau)}{l} d\tau. \quad (4.11)$$

Выводить эту формулу мы не будем, и рекомендуем читателю сделать это самостоятельно.

После того как все функции  $\gamma_k(t)$  найдены, остается подставить их в формулу (4.4), и мы получим искомую функцию  $w(x, t)$ .

**Пример 1.** Найдем вынужденные колебания струны, на которую в момент времени  $t=0$  начинает действовать постоянная сила, равная силе тяжести.

В этом случае функция  $G(x, t) = -g$  и задача сильно упрощается, поскольку все коэффициенты  $g_k(t)$  разложения (4.6) постоянны. По формуле (4.8)

$$g_k = -\frac{2g}{l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{2g}{k\pi} (1 - \cos k\pi),$$

откуда

$$g_{2n} = 0 \quad \text{и} \quad g_{2n+1} = -\frac{4g}{(2n+1)\pi}.$$

Функции  $\gamma_{2n}(t)$  тождественно равны нулю, так как они удовлетворяют однородному уравнению

$$\gamma''_{2n} + \frac{(2n)^2 \pi^2 a^2}{l^2} \gamma_{2n} = 0$$

с нулевыми начальными условиями  $\gamma_{2n}|_{t=0} = 0$  и  $\gamma'_{2n}|_{t=0} = 0$ .

Для функций с нечетными индексами  $\gamma_{2n+1}(t)$  уравнение (4.9) принимает вид

$$\gamma''_{2n+1} + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} \gamma_{2n+1} = -\frac{4g}{(2n+1)\pi}. \quad (4.12)$$

Частное решение неоднородного уравнения находится сразу; это есть постоянная величина, равная  $-\frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2}$ . Следовательно, общим решением уравнения (4.12) будет функция

$$A_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} + B_{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{l} - \frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2}.$$

Подставляя начальные условия, находим произвольные постоянные  $A_{2n+1}$  и  $B_{2n+1}$ :

$$A_{2n+1} = \frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2}, \quad B_{2n+1} = 0.$$

Итак, функции  $\gamma_{2n+1}(t)$  найдены:

$$\gamma_{2n+1}(t) = -\frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2} \left[ 1 - \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \right]. \quad (4.13)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (4.4), получим решение  $w(x, t)$ , описывающее вынужденные колебания струны, совершающиеся под действием силы тяжести:

$$w(x, t) = -\frac{4gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left[ 1 - \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

(Знак минус указывает на то, что в начале колебания точки струны отклоняются вниз.) Каждая точка струны совершает сложное периодическое колебание с периодом  $\frac{2l}{a}$ . В моменты времени  $t = \frac{2l}{a} k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) все точки струны проходят положение равновесия. Легко заметить, что наибольшие отклонения от положения равновесия будут наблюдаться для середины струны ( $x = \frac{l}{2}$ ) в моменты времени  $t = \frac{l}{a}$ ,  $\frac{3l}{a}$  и т. д. (Это можно установить и аналитически: при  $x = \frac{l}{2}$  и  $t = \frac{l}{a} + \frac{2nl}{a}$  обе частные производные  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial t}$  обращаются в нуль.) Поскольку

$$\sin \frac{(2n+1)\pi}{l} \frac{l}{2} = (-1)^n, \quad \text{а} \quad \cos \frac{(2n+1)\pi a}{l} \frac{l}{a} = -1,$$

то

$$|w|_{\max} = \left| w \left( \frac{l}{2}, \frac{l}{a} \right) \right| = \frac{8gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Известно, что<sup>1)</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

<sup>1)</sup> Указанная формула следует из решения примера 3 п. 12. Полагая в (3.22)  $x = \frac{l}{2}$  и  $t = 0$ , получим:  $u\left(\frac{l}{2}, 0\right) = h = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ , откуда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$ .

следовательно,

$$|\psi|_{\max} = \frac{gl^2}{4a^3}.$$

**Пример 2.** Найдем вынужденные колебания струны с ее начальных смещений и скоростей, если на струну действует равномерно распределенная сила с плотностью  $g(x, t) = A\rho \sin \omega t$ , зависящей от времени ( $\rho$  — линейная плотность струны).

В этом случае функция  $G(x, t) = \frac{g(x, t)}{\rho} = A \sin \omega t$  не зависит от  $x$  и по формуле (4.8) мы получим:

$$g_{2n}(t) = 0, \quad g_{2n+1}(t) = \frac{4A}{(2n+1)\pi} \sin \omega t.$$

Как и в предыдущем примере, замечаем, что  $\gamma_{2n}(t) = 0$ . Функции же  $\gamma_{2n+1}(t)$  находим по общей формуле (4.11):

$$\gamma_{2n+1}(t) = \frac{4lA}{(2n+1)^2 \pi^2 a} \int_0^t \sin \omega t \sin \frac{(2n+1)\pi a(t-\tau)}{l} d\tau.$$

Вводя обозначение  $\omega_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi a}{l}$  и производя все необходимые вычисления, получим, что

$$\gamma_{2n+1}(t) = \frac{4lA}{(2n+1)^2 \pi^2 a} \frac{\omega_{2n+1} \sin \omega t - \omega \sin \omega_{2n+1} t}{\omega_{2n+1}^2 - \omega^2}.$$

Найденное выражение имеет смысл для любого  $n$  только в случае, если частота  $\omega$  вынуждающей силы не совпадает ни с одной из нечетных собственных частот струны (отсутствует резонанс).

Подставляя выражения для  $\gamma_{2n+1}(t)$  в общую формулу (4.4), завершаем решение задачи:

$$\psi(x, t) = \frac{4lA}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\omega_{2n+1} \sin \omega t - \omega \sin \omega_{2n+1} t}{\omega_{2n+1}^2 - \omega^2} \sin \frac{k_n x}{l}.$$

Рекомендуем читателю самостоятельно установить, что если для какого-нибудь  $k$  имеет место равенство  $\omega_{2k+1} = \omega$ , то соответствующее слагаемое в выражении  $\psi(x, t)$  надо заменить на

$$\begin{aligned} & -\frac{2lA}{\pi^2 a (2k+1)^2} \frac{\omega_{2k+1} t \cos \omega_{2k+1} t - \sin \omega_{2k+1} t}{\omega_{2k+1}} = \\ & = \frac{2l^2 A}{\pi^2 a^2 (2k+1)^2} (\sin \omega_{2k+1} t - \omega_{2k+1} t \cos \omega_{2k+1} t). \end{aligned}$$

**14. Колебания струны в среде с сопротивлением.** До сих пор мы все время рассматривали колебания струны, не учитывая

сопротивления окружающей среды. Естественно, что при этом получались не затухающие колебания. Рассмотрим теперь случай, когда колебания струны происходят при наличии сопротивления среды. Силу сопротивления, возникающую при этом, прием пропорциональной скорости движения (такой же закон для силы сопротивления принимается и при изучении гармонических колебаний точки). Тогда на бесконечно малый участок струны  $M_1M_2$  (см. § 1, рис. 4) действует сила

$$F_{\text{сопр}} = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} dx, \quad (4.14)$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности. Рассуждая так же, как при выводе уравнения (1.12), и учитывая, что сила сопротивления всегда направлена против движения, придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2m \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} g(x, t), \quad (4.15)$$

где введено обозначение  $\frac{a}{\rho} = 2m$  (все остальные обозначения такие же, как в § 1). Ограничеваясь случаем свободных колебаний, запишем уравнение (4.15) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.16)$$

Начальные и краевые условия имеют прежний вид, т. е.

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (4.17)$$

Решение уравнения (4.16) с условиями (4.17) опять будем производить методом Фурье.

Полагая  $u(x, t) = X(x) T(t)$  и поступая, как в § 3, получим

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{T'' + 2mT'}{T} \right) = \frac{X''}{X}. \quad (4.18)$$

Поскольку краевые условия для функций  $X(x)$  остались такими же, как и для случая колебаний без сопротивления, то равенство (4.18) будет возможно, если обе его части равны  $-\lambda_k^2$ , где  $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$  — собственные числа ( $k = 1, 2, \dots$ ); при этом собственные функции  $X_k(x)$  определяются по формуле (3.10) (мы опускаем числовые коэффициенты):

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Для определения функций  $T_k(t)$  получим дифференциальное уравнение

$$T_k'' + 2mT_k' + \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k = 0. \quad (4.19)$$

Его характеристическое уравнение

$$r^2 + 2mr + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 = 0$$

имеет корни

$$r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}.$$

Мы будем предполагать, что коэффициент трения  $m$  настолько мал, что подкоренное выражение отрицательно для любых значений  $k$ . Ясно, что это будет тогда, когда  $m < \frac{\pi a}{l}$ . Вводя обозначение  $\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 - m^2 = q_k^2$ , получим

$$r_{1,2} = -m \pm iq_k.$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.19) таково <sup>1)</sup>:

$$T_k(t) = e^{-mt} (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t).$$

По функциям  $X_k(x)$  и  $T_k(t)$  составим выражения для частных решений  $u_k(x, t)$ :

$$u_k(x, t) = e^{-mt} (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Каждая из полученных стоячих волн благодаря множителю  $e^{-mt}$  является затухающей.

Переходя ко второй части метода Фурье, составим ряд

$$u(x, t) = e^{-mt} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

и подберем его коэффициенты так, чтобы удовлетворялись начальные условия. При  $t = 0$

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x)$$

и величины  $a_k$  определяются уже известной формулой (3.16):

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

<sup>1)</sup> Если выражение  $m^2 - \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2$  при небольших значениях  $k$  положительно, то общее решение уравнения (4.19) для этих  $k$  будет иметь другой вид, содержащий показательные функции. Дальнейшее решение в этом случае несколько усложняется.

Находя производную  $\frac{du}{dt}$  и полагая  $t=0$ , получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-ma_k + b_k q_k) \sin \frac{k\pi x}{l} = F(x),$$

откуда

$$-ma_k + b_k q_k = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

и

$$b_k = \frac{2}{l q_k} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \frac{m}{q_k} a_k.$$

**Пример.** Пусть в примере 1 п. 12 дополнительно предположено, что струна колеблется в среде с сопротивлением, причем  $m = \frac{a}{\rho} < \frac{\pi a}{l}$ . По условию начальные скорости  $F(x) = 0$ , и поэтому

$$b_k = \frac{m}{q_k} a_k.$$

Предоставляем читателю установить, что решение будет иметь вид

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} e^{-mt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \left( \cos q_k t + \frac{m}{q_k} \sin q_k t \right),$$

где

$$q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 - m^2}.$$

## § 5. Продольные колебания стержня

**15. Подстановка задачи и метод решения.** В этом параграфе нами будет рассмотрена задача о продольных колебаниях однородного стержня. Стержень — это тело цилиндрической (в частности, призматической) формы, для растяжения или сжатия которого надо приложить известное усилие. Мы будем считать, что все силы действуют вдоль оси стержня и каждое из поперечных сечений стержня  $pqrst$  (рис. 23) перемещается поступательно только вдоль оси стержня,

Обычно это предположение оправдывается, если поперечные размеры стержня малы по сравнению с его длиной, а силы, действующие вдоль оси стержня, сравнительно невелики<sup>1)</sup>. На практике продольные колебания возникают чаще всего тогда, когда стержень предварительно немного растягивается или, наоборот, сжимается, а затем предоставлен他自己 самому себе. В этом случае в нем возникают свободные продольные колебания. Выведем уравнения этих колебаний.

Направим ось абсцисс по оси стержня (рис. 23); в состоянии покоя концы стержня имеют соответственно абсциссы  $x=0$  и  $x=l$ . Рассмотрим сечение  $pqrs$ ;  $x$  — его

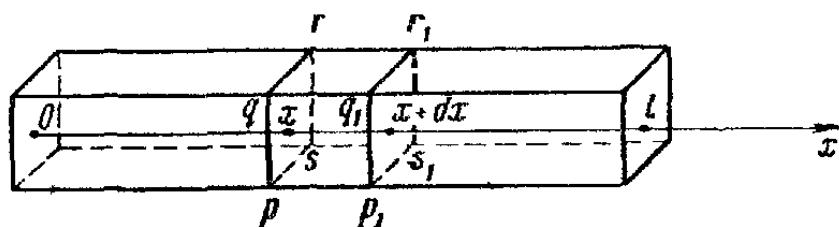


Рис. 23.

абсцисса в состоянии покоя. Смещение этого сечения в любой момент времени  $t$  будет характеризоваться функцией  $u(x, t)$ , для отыскания которой мы и должны составить дифференциальное уравнение. Найдем прежде всего относительное удлинение участка стержня, ограниченного сечениями  $pqrs$  и  $p_1q_1r_1s_1$ . Если абсцисса сечения  $p_1q_1r_1s_1$  в состоянии покоя  $x+dx$ , то смещение этого сечения в момент времени  $t$  с точностью до бесконечно малых высшего порядка равно

$$u(x+dx, t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Поэтому относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$  равно

$$\frac{u(x+dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u'_x(x, t). \quad (5.1)$$

<sup>1)</sup> Если эти силы велики, то стержень может начать изгибаться. В курсе сопротивления материалов устанавливается, что наименьшая нагрузка  $P$ , при которой стержень может принять устойчивое изогнутое положение (критическая нагрузка), определяется по формуле Эйлера  $P = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$ , где  $E$  — модуль Юнга,  $J$  — момент инерции поперечного сечения относительно его центра тяжести,  $l$  — длина стержня.

Считая, что силы, вызывающие это удлинение, подчиняются закону Гука, найдем величину силы натяжения  $T$ , действующей на сечение  $pqrs$ :

$$T = ESu'_x(x, t), \quad (5.2)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения стержня, а  $E$  — модуль упругости (модуль Юнга) материала стержня. Формула (5.2) должна быть хорошо известна читателю из курса сопротивления материалов.

Соответственно сила  $T_1$ , действующая на сечение  $p_1q_1r_1s_1$ , равна

$$T_1 = ESu'_x(x + dx, t).$$

Поскольку силы  $T$  и  $T_1$  заменяют действие отброшенных частей стержня, то их результирующая равна разности

$$T_1 - T = ES[u'_x(x + dx, t) - u_x(x, t)] = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Считая выделенный участок стержня материальной точкой с массой  $\rho S dx$ , где  $\rho$  — объемная плотность стержня, и применяя к нему второй закон Ньютона, составим уравнение

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (5.3)$$

Сокращая на  $S dx$  и вводя обозначение  $\frac{E}{\rho} = a^2$ , получим *дифференциальное уравнение свободных продольных колебаний стержня*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.4)$$

Если дополнительно предположить, что к стержню приложена внешняя сила  $g(x, t)$ , рассчитанная на единицу объема и действующая вдоль оси стержня, то к правой части соотношения (5.3) добавится слагаемое  $g(x, t) S dx$  и уравнение (5.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} g(x, t), \quad (5.5)$$

что в точности совпадает с уравнением вынужденных колебаний струны.

Перейдем теперь к установлению начальных и краевых условий задачи и рассмотрим практически наиболее интерес-

ный случай, когда один конец стержня закреплен, а другой — свободен.

Если считать неподвижным конец стержня, совпадающий с началом координат, то  $u|_{x=0}=0$ .

На свободном конце краевое условие будет иметь иной вид. Так как на этом конце внешние силы отсутствуют, то должна быть равна нулю и сила  $T$ , действующая в сечении  $x=l$ , т. е.

$$ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.$$

Колебания происходят оттого, что в начальный момент стержень был деформирован (растянут или сжат) и точкам стержня были приданы некоторые начальные скорости. Следовательно, мы должны знать смещение поперечных сечений стержня в момент  $t=0$

$$u|_{t=0} = f(x),$$

а также начальные скорости точек стержня

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x).$$

Итак, задача о свободных продольных колебаниях стержня, закрепленного на одном конце, возникающих благодаря начальному сжатию или растяжению, привела нас к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{где} \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5.6)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x) \quad (5.7)$$

и краевыми условиями

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (5.8)$$

Именно последнее условие и отличает с математической точки зрения рассматриваемую задачу от задачи о колебаниях струны, закрепленной на обоих концах.

Будем решать поставленную задачу методом Фурье, т. е. отыскивать частные решения уравнения, удовлетворяющие краевым условиям (5.8), в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (5.9)$$

причем  $X(0) = 0$  и  $X'(l) = 0$ .

Так как дальнейший ход решения аналогичен уже изложенному в § 3, ограничимся только краткими указаниями. Дифференцируя функцию  $u(x, t)$ , подставляя полученные выражения в (5.6) и разделяя переменные, получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

(Предоставляем читателю самостоятельно установить, что в силу краевых условий постоянная в правой части не может быть числом положительным или нулем.) Общее решение уравнения  $X'' + \lambda^2 X = 0$  имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

В силу условий, наложенных на функцию  $X(x)$ , будем иметь

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X'(l) = C_2 \lambda \cos \lambda l = 0.$$

Решения, не тождественно равные нулю, будут получаться только при соблюдении условия  $\cos \lambda l = 0$ , т. е. при  $\lambda l = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , где  $k$  может принимать значения  $0, 1, 2, \dots$

Итак, *собственными числами* задачи служат числа

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.10)$$

Каждому  $\lambda_k$  соответствует *собственная функция*

$$X_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (5.11)$$

Как мы уже знаем, умножая любую из собственных функций на произвольную постоянную, будем получать решение уравнения  $X'' + \lambda^2 X = 0$  с поставленными краевыми условиями. Легко проверить, что, придавая числу  $k$  огрицательные значения, мы не получим новых собственных функций (например, при  $k = -3$  будет получаться функция, отличающаяся от собственной функции  $X_k(x)$  только знаком),

Докажем прежде всего, что собственные функции (5.11) ортогональны в интервале  $(0, l)$ . Действительно, при  $m \neq n$

$$\int_0^l \sin \frac{(2m+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \\ = \frac{l}{2\pi} \left[ \frac{\sin \frac{(m-n)\pi x}{l}}{m-n} - \frac{\sin \frac{(m+n+1)\pi x}{l}}{m+n+1} \right] \Big|_0^l = 0.$$

Если же  $m = n$ , то

$$\int_0^l \sin^2 \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ 1 - \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l} \right] dx = \frac{l}{2}.$$

Доказать ортогональность собственных функций  $X_k(x)$  можно и иначе, не опираясь на их явные выражения, а пользуясь только дифференциальным уравнением и краевыми условиями. Пусть  $\lambda_m$  и  $\lambda_n$  — два различных собственных числа,  $X_m$  и  $X_n$  — соответствующие им собственные функции. По определению эти функции удовлетворяют уравнениям

$$X_m'' + \lambda_m^2 X_m = 0, \quad X_n'' + \lambda_n^2 X_n = 0$$

и краевым условиям. Умножим первое из уравнений на  $X_n$ , второе на  $X_m$  и вычтем одно из другого:

$$X_m'' X_n - X_n'' X_m + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) X_m X_n = 0.$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до  $l$  и замечая, что  $(X_m'' X_n - X_n'' X_m)' = (X_m' X_n - X_n' X_m)'$ , получим, что

$$(X_m' X_n - X_n' X_m)' \Big|_0^l + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_m X_n dx = 0.$$

Первое слагаемое обращается в нуль при любой из следующих комбинаций начальных условий: 1)  $X(0) = 0, X(l) = 0$  (задача о колебаниях струны), 2)  $X(0) = 0, X'(l) = 0$  (колебания стержня со свободным концом), 3)  $X'(0) = 0, X'(l) = 0$  (колебания стержня, у которого оба конца свободны). Следовательно, во всех случаях

$$\int_0^l X_m X_n dx = 0.$$

так как по условию  $\lambda_m \neq \lambda_n$ . Приведенное здесь рассуждение будет неоднократно встречаться в дальнейшем.

При  $\lambda = \lambda_k$  общее решение уравнения  $T'' + a^2 \lambda_k^2 T = 0$  имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l}. \quad (5.12)$$

Поэтому частным решением  $u_k(x, t)$ , соответствующим собственному числу  $\lambda_k$ , будет функция

$$u_k(x, t) =$$

$$= \left[ a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (5.13)$$

Для окончательного решения задачи составляем ряд

$$u(x, t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (5.14)$$

В силу начальных условий (5.8)

$$u|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)\pi a}{2l} b_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = F(x).$$

Чтобы найти коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ , заметим, что написанные равенства представляют разложения функций  $f(x)$  и  $F(x)$  в ряды по ортогональной системе функций  $\sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$  (см. [1], п. 205). Предполагая такое разложение возможным, легко находим коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$ , умножая обе части разложения на  $\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$  и интегрируя в пределах от 0 до  $l$ . Так как интеграл от квадрата

любой собственной функции равен  $\frac{l}{2}$ , то

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx, \quad (5.15)$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx.$$

Подставляя в ряд (5.14) найденные значения  $a_n$  и  $b_n$ , получим искомое решение.

**16. Примеры. Пример 1.** Пусть однородный стержень плотности  $\rho$  и длины  $l$ , закрепленный в точке  $x=0$ , растянут силой  $P$ , приложенной к другому его концу. В момент времени  $t=0$  действие силы мгновенно прекращается, после чего стержень предоставлен самому себе. Найдем возникающие продольные колебания стержня.

Будем считать, что сила  $P$ , действующая на стержень в начальный момент, такова, что применим закон Гука, и найдем начальное смещение точек стержня  $u|_{t=0} = f(x)$ . Так как в каждом сечении сила натяжения  $T$  постоянна и равна  $P$ , то по формуле (5.2)

$$f'(x) = \frac{P}{ES},$$

где  $E$  — модуль упругости,  $S$  — площадь поперечного сечения. Интегрируя и учитывая, что  $f(0)=0$  (стержень при  $x=0$  закреплен), получим

$$f(x) = \frac{P}{ES} x,$$

т. е. смещение любого сечения в начальный момент пропорционально его абсциссе. (Заметим, что если бы стержень сжался силой  $P$ , то в выражении для  $f(x)$  изменился бы только знак.) Так как начальные скорости равны нулю, то  $F(x)=0$  и все  $b_k$  обращаются в нуль. Найдем теперь по формуле (5.15) коэффициенты  $a_k$ :

$$a_k = \frac{2P}{lES} \int_0^l x \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx = \frac{8Pl}{\pi^2 ES} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$

Подставляя выражения для  $a_k$  в формулу (5.14), получим функцию  $u(x, t)$ , описывающую продольные колебания стержня:

$$u(x, t) = \frac{8Pl}{\pi^2 E S} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

где  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

Так как при  $x=l$

$$\sin \frac{(2k+1)\pi l}{2l} = (-1)^k,$$

то на свободном конце стержня все гармоники имеют пучность (см. стр. 63). Ясно, что в закрепленном конце всегда будет узел. Первая гармоника имеет частоту  $\frac{\pi a}{2l} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ; это есть основная частота колебаний стержня. Частоты остальных гармоник будут получаться при умножении основной частоты на последовательные нечетные числа.

**Пример 2.** Пусть стержень примера 1 выводится из состояния равновесия ударом по его свободному концу в продольном направлении. Найдем возникающие колебания стержня, если импульс, сообщенный стержню при ударе, равен  $\mathcal{P}$ .

В этом примере наибольшую трудность представляет формулировка начальных условий. Сообщение стержню ударного импульса приводит к тому, что точки его свободного конца получают начальные скорости. Удар предполагается мгновенным, поэтому начальные скорости, строго говоря, должны получать только те точки стержня, которые лежат в сечении  $x=l$ . Однако физически этого нереально. Ведь по второму закону Ньютона сообщенный импульс должен быть равен изменению количества движения, т. е. произведению массы на скорость, а масса сечения стержня  $x=l$ , очевидно, равна нулю.

Поэтому мы выделяем малый участок стержня  $l-\varepsilon \leq x \leq l$  и считаем, что все его точки получили в результате удара одну и ту же скорость  $v_0$ . Масса выделенного участка равна  $\rho S \varepsilon$ , где  $\rho$  — плотность стержня и  $S$  — площадь поперечного сечения. Приравнивая изменение количества движения импульсу силы, получим

$$\rho S \varepsilon v_0 = \mathcal{P},$$

откуда

$$v_0 = \frac{\mathcal{P}}{\rho S \epsilon}.$$

Функции  $f(x)$  и  $F(x)$ , определяющие начальное состояние стержня, будут равны:

$$f(x) = 0,$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < l - \epsilon, \\ -\frac{\mathcal{P}}{\rho S \epsilon} & \text{при } l - \epsilon \leq x \leq l \end{cases}$$

(знак минус берется потому, что скорость  $v_0$  направлена в отрицательную сторону оси  $Ox$ ). Коэффициенты, входящие в общую формулу (5.14), находим по формулам (5.15):  $a_k^{(\epsilon)} = 0$ ,

$$b_k^{(\epsilon)} = -\frac{4\mathcal{P}}{(2k+1)\pi a \rho S \epsilon} \int_{l-\epsilon}^l \frac{\sin(2k+1)\pi x}{2l} dx =$$

$$= -\frac{8\mathcal{P}l}{(2k+1)^2 \pi^2 a \rho S \epsilon} \cos \frac{(2k+1)\pi(l-\epsilon)}{2l}.$$

Так как

$$\cos \frac{(2k+1)\pi(l-\epsilon)}{2l} = \cos \left[ \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{(2k+1)\pi\epsilon}{2l} \right] =$$

$$= (-1)^k \sin \frac{(2k+1)\pi\epsilon}{2l},$$

то

$$b_k^{(\epsilon)} = -\frac{(-1)^k 8\mathcal{P}l}{(2k+1)^2 \pi^2 a \rho S \epsilon} \sin \frac{(2k+1)\pi\epsilon}{2l}.$$

В полученных выражениях для  $b_k^{(\epsilon)}$  легко перейти к пределу при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Поскольку

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi\epsilon}{2l}}{\epsilon} = \frac{(2k+1)\pi}{2l},$$

то, обозначая  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} b_k^{(\epsilon)} = b_k$ , получим

$$b_k = -\frac{(-1)^k \cdot 4\mathcal{P}}{(2k+1)\pi a \rho S}.$$

Подставляя выражения для  $b_k$  в формулу (5.14), окончательно получим

$$u(x, t) = -\frac{4\mathcal{P}}{\pi a \rho S} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Если нас интересуют колебания конца стержня, то мы должны положить  $x = l$ ; тогда

$$u(l, t) = -\frac{4\mathcal{P}}{\pi a \rho S} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l}}{2l+1}.$$

Период колебания  $T = \frac{4l}{a}$ . Смещение  $u(l, t)$  равно нулю при  $t = 0, \frac{2l}{a}, \frac{4l}{a}, \dots$ . Наибольшее смещение конца стержня от положения равновесия будет при  $t = \frac{l}{a}$ :

$$|u|_{\max} = \frac{4\mathcal{P}}{\pi a \rho S} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Сумма написанного ряда, как известно, равна  $\frac{\pi}{4}$  (этот числовой ряд получается, если в разложении  $\operatorname{arctg} x$  в ряд Маклорена принять  $x = 1$ ; см. [1], п. 194). Поэтому

$$|u|_{\max} = \frac{\mathcal{P}}{a \rho S} = \frac{\mathcal{P}}{S \sqrt{E \rho}},$$

где  $E$  — модуль упругости.

**Пример 3.** Пусть стержень длины  $l$ , конец которого  $x = 0$  закреплен, находится в состоянии покоя. В момент  $t = 0$  к его свободному концу приложена сила  $Q$ , действующая вдоль стержня. Показать, что задача сводится к решению уравнения свободных колебаний стержня (5.6) с условиями  $u|_{t=0} = 0$ ,  $\frac{du}{dt}|_{t=0} = 0$ ,  $u|_{x=0} = 0$ ,  $\frac{du}{dt}|_{x=l} = \frac{Q}{ES}$  и что колебания стержня описываются функцией

$$u(x, t) = \frac{Q}{ES} x - \frac{8Ql}{\pi^2 ES} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

## § 6. Крутильные колебания вала

**17. Уравнение крутильных колебаний.** Для того чтобы вывести дифференциальное уравнение кругильных колебаний вала (круглого цилиндрического стержня), напомним основные положения, лежащие в основе теории кручения круглых стержней, изучаемой в курсах сопротивления материалов. Согласно этой теории поперечные круговые сечения стержня при кручении остаются плоскими и сохраняют между собой первоначальные расстояния, радиусы, проведенные в этих

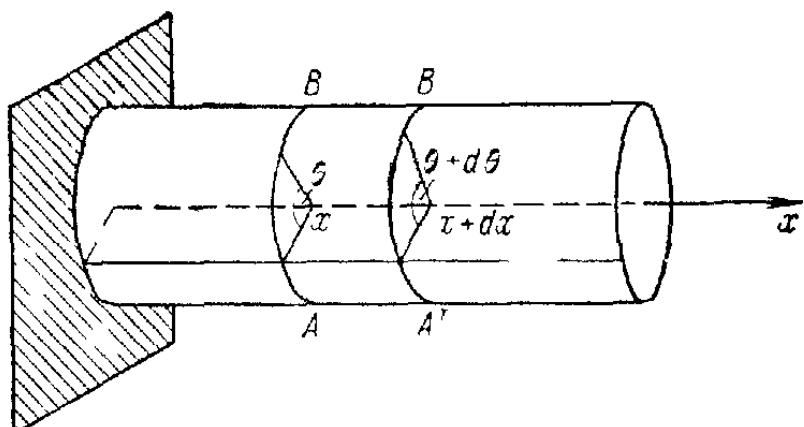


Рис. 24.

сечениях, не искривляются<sup>1)</sup>). Таким образом, кручение круглого вала можно представить как результат сдвигов, вызванных поворотом поперечных сечений друг относительно друга, причем все повороты совершаются вокруг оси вала. Вследствие этого в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения, действующие в плоскости сечения, а нормальные напряжения равны нулю. Так как касательные напряжения симметричны относительно центра поперечного сечения, то они приводятся к паре сил, момент которой называется *крутящим моментом*.

Поскольку нас интересуют только относительные повороты сечений, то любое из них можно принять за неподвижное. Будем считать, что неподвижен левый конец вала (как говорят, левый конец *заделан*). Поместим начало координат в центр неподвижного сечения и направим ось абсцисс по оси стержня (рис. 24). В результате закручивания вала поперечное сечение

<sup>1)</sup> Если стержень не круглый, то эти положения не могут соблюдаться. Решение задач кручения некруглых стержней значительно сложнее; оно рассматривается в курсах теории упругости.

$AB$ , взятое на расстоянии  $x$  от заделки, повернется относительно неподвижного сечения на некоторый угол  $\theta$ , зависящий от  $x$ ; сечение  $A'B'$ , огстоящее от сечения  $AB$  на расстояние  $dx$ , повернется при этом на угол  $\theta + d\theta$ . Таким образом, поворот сечения  $A'B'$  относительно сечения  $AB$  будет равен  $d\theta$ .

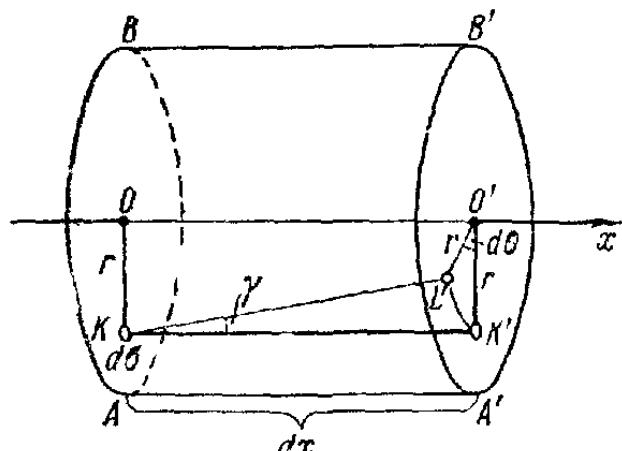


Рис. 25.

Вычислим сначала крутящий момент  $M_x$ , приложенный к сечению  $AB$ . Выделим для этого отдельно участок вала, ограниченный сечениями  $AB$  и  $A'B'$  (рис. 25), сдвинутыми друг относительно друга на угол  $K'O'L' = d\theta$ . Возьмем произвольный элемент площади  $d\sigma$ , расположенный на расстоянии  $r$  от центра сечения, и определим величину напряжения  $\tau$ , вызванного сдвигом элементарного волокна  $KK'$  в положение  $KL'$ . Считая, что мы находимся в пределах применимости закона Гука, получим

$$\tau = G\gamma,$$

где  $\gamma$  — угол сдвига волокна, а  $G$  — постоянная для данного материала величина, называемая *модулем сдвига*. В силу малости угла  $\gamma$  дугу  $K'L'$  можно принять за хорду, и тогда

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{K'L'}{dx},$$

С другой стороны, дуга  $K'L'$  равна

$$K'L' = r d\theta$$

и, следовательно,

$$\gamma = r \frac{d\theta}{dx}. \quad (6.1)$$

Таким образом, напряжение  $\tau$  прямо пропорционально расстоянию  $r$  рассматриваемого волокна  $KK'$  от центра сечения. Усилие, приходящееся на площадку  $d\sigma$ , выразится произведением

$$\tau d\sigma = Gr \frac{d\theta}{dx} d\sigma$$

и будет направлено перпендикулярно радиусу. Обозначая через  $dM_x$  элементарный закручивающий момент, приложенный к элементу  $d\sigma$ , получим

$$dM_x = r \tau d\sigma = Gr^2 \frac{d\theta}{dx} d\sigma. \quad (6.2)$$

Величину искомого момента  $M_x$  найдем, интегрируя выражение (6.2) по площади сечения  $AB$ :

$$M_x = \int \int Gr^2 \frac{d\theta}{dx} d\sigma.$$

Так как для всех точек поперечного сечения величина  $G \frac{d\theta}{dx}$  одна и та же, то ее можно вынести за знак интеграла; тогда

$$M_x = GJ_0 \frac{d\theta}{dx}, \quad (6.3)$$

где  $J_0 = \iint r^2 d\sigma$  — полярный момент инерции поперечного сечения  $AB$  относительно его центра.

Перейдем к выводу дифференциального уравнения крутильных колебаний вала, рассматривая по-прежнему элементарную часть его, заключенную между сечениями  $AB$  и  $A'B'$ . По второму закону Ньютона, примененному к вращательному движению тела вокруг оси, произведение момента инерции тела относительно оси на угловое ускорение равно моменту внешних сил относительно оси вращения.

Угол  $\theta$  поворота сечения зависит теперь уже как от абсциссы  $x$ , так и от времени  $t$ , т. е.  $\theta = \theta(x, t)$ . Угловое ускорение элементарного участка вала будет равно  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ . Если через  $K$  обозначить величину момента инерции вала относительно оси вращения, приходящуюся на единицу его длины, то момент инерции рассматриваемого участка будет равен  $K dx$ . Момент внешних сил найдем как разность крутящих моментов, приложенных к сечениям  $A'B'$  и  $AB$ . Согласно формуле (6.3), в которой  $\frac{d\theta}{dx}$  заменено на  $\theta_v$ ,

$$M_{x+dx} - M_x = GJ_0 [\theta'_x(x + dx, t) - \theta'_x(x, t)] = GJ_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx.$$

Таким образом, мы выразили все величины, входящие в закон Ньютона. Применяя его, получим

$$K dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G J_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx,$$

или

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (6.4)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{G J_0}{K}}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение крутильных колебаний вала, так же как и продольных колебаний стержня, *полностью совпадает с уравнением колебаний струны*. Однако обычно встречающиеся конкретные задачи приводят к иным краевым условиям, нежели те, которые были рассмотрены в §§ 3 и 5.

Так как вал однородный, то, обозначая его плотность через  $\rho$  и учитывая, что  $K$  — момент инерции единицы длины вала, найдем

$$K = \rho \int_0^l dx \int \int r^2 d\sigma = \rho J_0.$$

Отсюда

$$a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (6.5)$$

**Примечание.** В то время как уравнение продольных колебаний выведено для любых призматических стержней, уравнение крутильных колебаний применимо только для круглых стержней (валов). Для некруглых стержней, как мы уже отмечали, задача становится значительно более сложной.

**18. Крутильные колебания вала с диском на одном конце.** Пусть один конец вала длины  $l$  закреплен, а на другой его конец наложен массивный диск, момент инерции которого относительно оси вала равен  $J_1$ . В начальный момент диск закручивается на малый угол  $\alpha$  и отпускается без начальной скорости. Изучим характер возникающих при этом крутильных колебаний вала.

Сохранив введенные выше обозначения, составим прежде всего начальные и краевые условия, которым должна удовлетворять функция, являющаяся решением задачи.

Чтобы найти  $\theta|_{t=0}$ , рассмотрим рис. 26. Так как угол  $\alpha$  мал, то, рассуждая так же, как при выводе формулы (6.1), получим соотношения ( $R$  — радиус вала)

$$I\gamma = R\alpha \quad \text{и} \quad x\gamma = R\theta|_{t=0},$$

откуда

$$\theta|_{t=0} = \alpha \frac{x}{l}. \quad (6.6)$$

Далее, согласно условию

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (6.7)$$

Поскольку конец вала  $x=0$  неподвижен, то

$$\theta|_{x=0} = 0. \quad (6.8)$$

Если бы диска на правом конце вала не было, то крутящий момент  $M_l = GJ_0 \frac{\partial \theta}{\partial x}|_{x=l}$  был бы просто равен нулю, так как внешние силы отсутствуют. Это привело бы к условию  $\frac{\partial \theta}{\partial x}|_{x=l} = 0$ , и решение в точности совпало бы с решением примера 1 п. 16 (см. стр. 87).

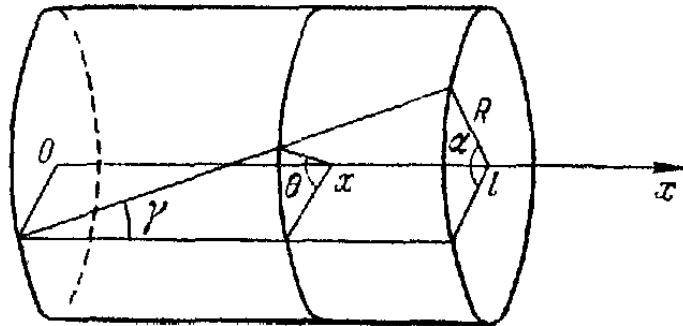


Рис. 26.

В нашем же случае надо приравнять нулю сумму крутящего момента  $M_l$  и произведения момента инерции диска  $J_1$  на его угловое ускорение  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}|_{x=l}$  (момент силы инерции диска):

$$GJ_0 \frac{\partial \theta}{\partial x}|_{x=l} + J_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}|_{x=l} = 0.$$

Полученное условие удобно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}|_{x=l} = -c^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}|_{x=l}, \quad (6.9)$$

где

$$c = \sqrt{G \frac{J_0}{J_1}}.$$

Итак, будем искать решение уравнения (6.4), удовлетворяющее условиям (6.6) — (6.9).

Запишем искомую функцию в виде  $\theta(x, t) = T(t)X(x)$ , подставим в уравнение (6.4) и разделим переменные:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

(Предоставляем читателю доказать, что и здесь в силу условий, которые налагаются на функцию  $X(x)$ , постоянная в правой части равенства обязательно отрицательна.)

Функции  $T(t)$  и  $X(x)$  являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0, \quad (6.10)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (6.11)$$

причем из (6.8) следует, что функция  $X(x)$  должна удовлетворять условию  $X(0) = 0$ . Далее, из краевого условия (6.9) получим

$$T'' X(l) = -c^2 T X'(l)$$

и, заменяя, согласно уравнению (6.10),  $T''$  на  $-a^2\lambda^2 T$ , придем ко второму условию, налагаемому на функцию  $X(x)$ :

$$c^2 X'(l) - a^2 \lambda^2 X(l) = 0. \quad (6.12)$$

Заметим, что в рассматриваемой задаче постоянная  $\lambda$  входит не только в дифференциальные уравнения, определяющие функции  $T(t)$  и  $X(x)$ , как это было во всех предыдущих случаях, но и в краевое условие, которому должна удовлетворять функция  $X(x)$ . Это приведет, как мы увидим в дальнейшем, к некоторому усложнению решения.

Решение уравнения (6.11) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Из условия  $X(0) = 0$  следует, что  $C_1 = 0$ . Второе условие для функции  $X(x)$  приводит к уравнению

$$\lambda (c^2 \cos \lambda l - a^2 \lambda \sin \lambda l) C_2 = 0.$$

Так как  $C_2 \neq 0$  и  $\lambda \neq 0$  (иначе мы получаем тривиальное решение  $X(x) = 0$ ), то для определения собственных чисел мы приходим к трансцендентному уравнению

$$c^2 \cos \lambda l - a^2 \lambda \sin \lambda l = 0$$

или

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{a^2}{c^2} \lambda. \quad (6.13)$$

Из формул, определяющих  $a$  и  $c$ , следует, что  $\frac{a^2}{c^2} = \frac{J_1}{K}$ ; напомним, что  $J_1$  — момент инерции диска, а  $K$  — момент инерции единицы длины вала. Полагая  $\lambda l = \mu$  и обозначая  $\frac{J_1}{Kl} = m$ , перепишем уравнение (6.13) в виде

$$\operatorname{ctg} \mu = m \mu. \quad (6.14)$$

Как мы сейчас покажем, это уравнение имеет бесконечное множество корней; будем обозначать их  $\mu_k$ . Каждому корню  $\mu_k$  соответствуют *собственное число*  $\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}$  и *собственная функция*

$$X_k(x) = \sin \lambda_k x = \sin \frac{\mu_k}{l} x. \quad (6.15)$$

Так как обе части уравнения (6.14) — нечетные функции относительно  $\mu$ , то каждому положительному корню  $\mu_k$  соответствует равный ему по абсолютной величине отрицательный. Поскольку изменение знака  $\mu_k$  приводит к изменению знака  $\lambda_k$ , что не влечет

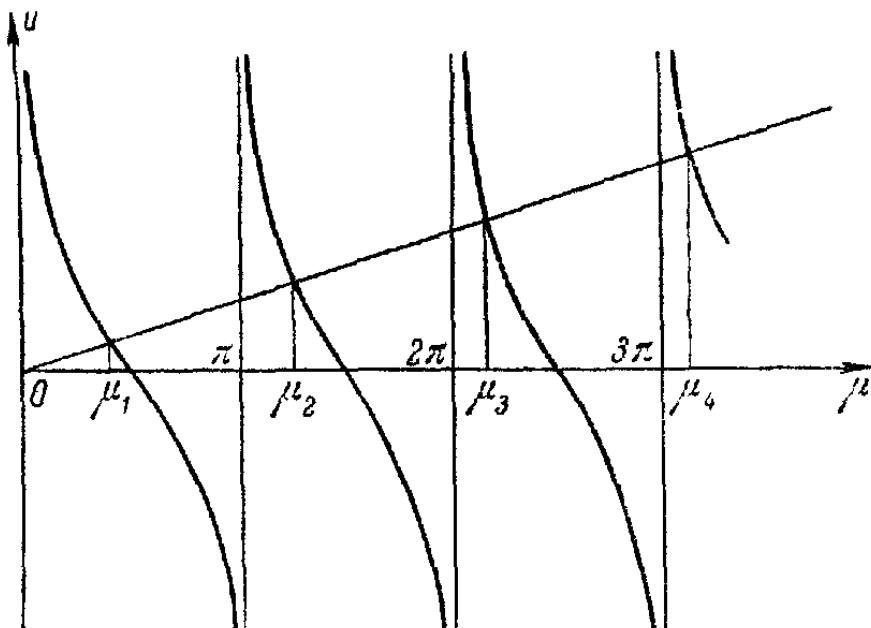


Рис. 27.

за собой образования новых собственных функций (они только изменят знак, что несущественно), будем отыскивать только положительные корни уравнения (6.14). Для этого построим графики функций  $u = \sin \mu$  и  $u = m\mu$  (рис. 27). Ясно видно, что эти графики имеют бесконечное множество точек пересечения, т. е. что уравнение имеет бесконечное множество корней  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Пользуясь каким-нибудь способом приближенного решения уравнений, можно вычислить значения корней (при заданном  $m$ ) с любой степенью точности. Из рис. 27 видно также, что при больших значениях  $k$  корни приблизительно равны  $\mu_k \approx (k - 1)\pi$ .

После того как собственные числа найдены, пишем соответствующие им решения уравнения (6.10):

$$T_k(t) = a_k \cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t. \quad (6.16)$$

Перемножая функции  $X_k(\lambda)$  и  $T_k(t)$ , найдем решения уравнения колебаний (6.4), удовлетворяющие краевым условиям:

$$\theta_k(\lambda, t) = (a_k \cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t) \sin \lambda_k x.$$

Как обычно, решение, удовлетворяющее начальным условиям (6.6) и (6.7), ищем в виде суммы:

$$\theta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t) \sin \lambda_k x. \quad (6.17)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  получаем два условия:

$$\theta|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \lambda_k x = \alpha \frac{x}{l}, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}|_{t=0} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_k \sin \lambda_k x = 0.$$

Из второго условия заключаем, что все  $b_k = 0$ .

Заметим, что собственные функции  $\sin \lambda_k x$  не ортогональны в интервале  $[0, l]$ . Поэтому мы не можем отыскивать  $a_k$ , пользуясь формулами Фурье для коэффициентов разложения в ряд по ортогональным функциям. В этом и заключается та сложность задачи, о которой говорилось выше. Оказывается, что это затруднение легко обойти, поскольку производные от собственных функций (т. е. функции  $\cos \lambda_k x$ ) уже образуют ортогональную систему. Действительно, при  $n \neq k$  имеем

$$\begin{aligned} \int_0^l \cos \lambda_k x \cos \lambda_n x dx &= \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\lambda_k + \lambda_n)x}{\lambda_k + \lambda_n} + \frac{\sin(\lambda_k - \lambda_n)x}{\lambda_k - \lambda_n} \right] \Big|_0^l = \\ &= \frac{\lambda_k \sin \lambda_k l \cos \lambda_n l - \lambda_n \sin \lambda_n l \cos \lambda_k l}{\lambda_k^2 - \lambda_n^2} = \\ &= \frac{\sin \lambda_k l \sin \lambda_n l}{\lambda_k^2 - \lambda_n^2} (\lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_n l - \lambda_n \operatorname{ctg} \lambda_k l). \end{aligned}$$

Воспользовавшись уравнением (6.13), корнями которого являются числа  $\lambda_k$  и  $\lambda_n$ , найдем, что

$$\lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_n l - \lambda_n \operatorname{ctg} \lambda_k l = \frac{\alpha^2}{c^2} (\lambda_k \lambda_n - \lambda_n \lambda_k) = 0.$$

Следовательно, при  $k \neq n$

$$\int_0^l \cos \lambda_k x \cos \lambda_n x dx = 0. \quad (6.19)$$

Если же  $k = n$ , то

$$\int_0^l \cos^2 \lambda_n x dx = \left( \frac{x}{2} + \frac{\sin 2\lambda_n x}{4\lambda_n} \right) \Big|_0^l = \frac{l}{2} + \frac{\sin 2\lambda_n l}{4\lambda_n}. \quad (6.20)$$

Дифференцируя первое из условий (6.18), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k \cos \lambda_k x = \frac{x}{l}.$$

Умножим обе части равенства на  $\cos \lambda_n x$  и проинтегрируем по интервалу  $[0, l]$ . Так как  $\frac{a}{l} \int_0^l \cos \lambda_n x dx = \frac{a}{\lambda_n l} \sin \lambda_n l$ , то, воспользовавшись равенствами (6.19) и (6.20), найдем, что

$$a_n \lambda_n \left( \frac{l}{2} + \frac{\sin 2\lambda_n l}{4\lambda_n} \right) = \frac{a}{\lambda_n l} \sin \lambda_n l,$$

откуда

$$a_n = \frac{a \sin \lambda_n l}{\lambda_n^2 l \left( \frac{l}{2} + \frac{\sin 2\lambda_n l}{4\lambda_n} \right)}.$$

Заменим  $\lambda_n l$  через  $\mu_n$  и придадим выражению для  $a_n$  более удобный вид:

$$a_n = \frac{4a \sin \mu_n}{\mu_n (2\mu_n + \sin 2\mu_n)}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (6.17), окончательно получим решение задачи:

$$\theta(x, t) = 4a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k}{\mu_k (2\mu_k + \sin 2\mu_k)} \cos \frac{a\mu_k t}{l} \sin \frac{\mu_k x}{l}.$$

Для того чтобы произвести числовые расчеты, нужно знать корни  $\mu_k$  уравнения (6.14). Отметим, что значения этих корней при различных значениях  $t$  можно найти в специальных таблицах.

## § 7. Электрические колебания в длинных однородных линиях

**19. Телеграфное уравнение.** Знакомясь с теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, читатель, наверное, сталкивался с применениями этой теории к расчету электрических цепей переменного тока, содержащих сосредоточенные параметры.

Важнейшим примером такой цепи является колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных сопротивления, емкости и индуктивности. При этом считается, что все сопротивление контура сосредоточено только в реостате, т. е. что ни индуктивная катушка, ни соединяющие провода при прохождении электрического тока не выделяют тепла. Точно так же переменный магнитный поток индуцирует электродвижущую силу только в индуктивной катушке, а токи электрического смещения возникают только между обкладками конденсатора. В курсах электротехники подробно изучается возможность таких предположений; в частности, при периодических процессах они считаются допустимыми, если линейные размеры всех элементов цепи малы по сравнению с длиной электромагнитной волны в окружающем цепь диэлектрике.

Если протяженность цепи сравнима с длиной электромагнитной волны (например, телеграфные линии или линии передачи энергии при практически используемых частотах), то такую цепь уже нельзя характеризовать сосредоточенными параметрами. В этом случае можно говорить о *линиях с распределенными параметрами*<sup>1)</sup>.

При изучении таких линий учитывают активное сопротивление проводов, индуктивность линии, утечку тока вследствие несовершенства изоляции проводов, а также взаимную емкость между проводами (или между проводом и землей). Мы будем считать линию однородной; это значит, что ее параметры — сопротивление, индуктивность, проводимость изоляции и емкость — распределены вдоль провода равномерно.

Рассмотрим двухпроводную линию (рис. 28); напряжение между проводами и ток в некоторой точке линии зависят

<sup>1)</sup> Если длина электромагнитной волны настолько мала, что она сравнима с расстоянием между проводами или с поперечными размерами проводника, то выводимые в дальнейшем уравнения становятся неприменимыми. В этом случае необходимо прибегать к решению уравнений электромагнитного поля, излагаемому в более подробных курсах.

Отметим, что решение задачи о длинных линиях методами операционного исчисления здесь не рассматривается (см., например, книгу И. Г. Арамановича, Г. Л. Лунца и Л. Э. Эльсгольца «Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости», «Наука», 1968).

от расстояния  $x$  этой точки до начала линии и времени  $t$ . Обозначим эти функции соответственно через  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$ ; они-то и являются искомыми. (В случае однопроводной линии функция  $u(x, t)$  есть потенциал точек линии относительно земли.)

Пусть  $R$  — активное сопротивление,  $L$  — индуктивность,  $C$  — емкость и  $G$  — активная проводимость между проводами, рассчитанные на единицу длины провода. Напомним, что индуктивность  $L$  есть коэффициент пропорциональности, связывающий индуктивное падение напряжения со скоростью изменения тока, емкость  $C$  есть коэффициент пропорциональности между током смещения и скоростью изменения напряжения, активная проводимость  $G$  есть коэффициент пропорциональности между током утечки и напряжением.

Для составления дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$ , выделим участок линии от точки с абсциссой  $x$  до точки с абсциссой  $x + dx$ . Если обозначить для краткости через  $u$  и  $i$  напряжение и ток в точке  $x$  в момент времени  $t$ , то в точке  $x + dx$  в тот же момент времени значения этих величин (с точностью до бесконечно малых величин высших порядков, чем  $dx$ ) будут равны  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$  и  $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ .

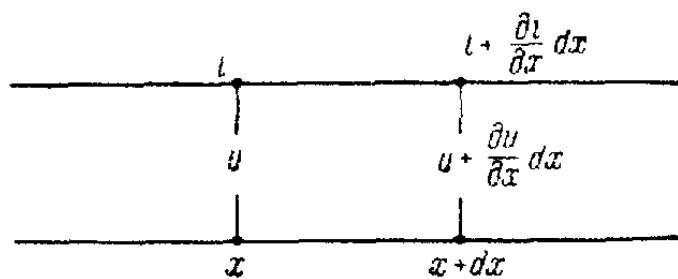


Рис. 28.

Разность напряжений в начале и в конце рассматриваемого участка линии равна сумме падения напряжения на активном сопротивлении, равном  $R dx i$ , и индуктивного падения напряжения, равного  $L dx \frac{di}{dt}$  ( множитель  $dx$  возникает потому, что характеристики линии рассчитаны на единицу ее длины). Поэтому

$$u - \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = R dx i + L dx \frac{di}{dt},$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Ri + L \frac{di}{dt} = 0. \quad (7.1)$$

Далее, изменение тока на этом же участке обусловлено током утечки и током смещения. Следовательно,

$$I - \left( i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) = G dx u + C dx \frac{\partial u}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial i}{\partial x} + Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (7.2)$$

Полученные уравнения (7.1) и (7.2) представляют систему двух уравнений с частными производными первого порядка. Из них легко исключить любую из неизвестных функций, например ток. Дифференцируем для этого уравнение (7.1) по  $x$ , а уравнение (7.2) по  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R \frac{\partial i}{\partial x} + L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + G \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Из второго равенства находим  $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -G \frac{\partial u}{\partial t} - C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

Выражая еще  $\frac{\partial i}{\partial x}$  из уравнения (7.2):  $\frac{\partial i}{\partial x} = -Gu - C \frac{\partial u}{\partial t}$ , и подставляя все в первое из равенств (7.3), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - R \left( Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \right) - L \left( G \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0,$$

или окончательно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC} u - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (7.4)$$

Полученное уравнение называется *телеграфным уравнением*. Рекомендуем читателю проверить самостоятельно, что, исключая функцию  $u$ , мы приедем к точно такому же уравнению и для функции  $i$ :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{RG}{LC} i - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0. \quad (7.5)$$

Полное исследование уравнения (7.4) (или (7.5)) требует применения специальных методов и выходит за рамки книги. Мы ограничимся рассмотрением частных случаев, вирочем играющих значительную роль в электротехнике. При этом сначала отвлечемся от краевых условий, т. е. будем считать

линию бесконечно просырающейся в обе стороны. Предполагается, что в начальный момент, т. е. при  $t=0$ , вдоль линии задано распределение напряжения и тока

$$u|_{t=0} = f(x), \quad i|_{t=0} = \varphi(x). \quad (7.6)$$

Пользуясь уравнениями (7.2) и (7.1), легко найти  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$  и  $\frac{\partial i}{\partial t}|_{t=0}$ . Из (7.2) следует

$$\frac{\partial i}{\partial x}|_{t=0} + Gu|_{t=0} + C \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Поскольку  $\frac{\partial i}{\partial x}|_{t=0} = \varphi'(x)$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{G}{C}f(x) - \frac{1}{C}\varphi'(x). \quad (7.7)$$

Аналогично

$$\frac{\partial i}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{R}{L}\varphi(x) - \frac{1}{L}f'(x). \quad (7.8)$$

**20. Линия без потерь.** Если сопротивление провода очень мало и он хорошо изолирован, то приближенно можно положить

$$R = G = 0.$$

Уравнение (7.4) обращается при этом в обычное уравнение колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.9)$$

Как мы уже знаем из § 2, общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(x, t) = \psi(x - at) + \chi(x + at)$$

и представляет результат наложения двух волн, распространяющихся вправо и влево со скоростью  $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Произведенные измерения величин  $L$  и  $C$  для воздушных линий показали, что скорость распространения волн в этих линиях практически совпадает со скоростью света в воздухе. Это явилось в свое время убедительным доказательством электромагнитной природы света.

Начальные условия для функции  $u(x, t)$ , согласно (7.6) и (7.7), таковы (напомним, что  $G = 0$ ):

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{1}{C}\varphi'(x).$$

Воспользовавшись общей формулой Даламбера (см. ср. 35), сразу получим выражение для напряжения:

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} - \frac{1}{2aC} \int_{x - at}^{x + at} \varphi'(x) dx.$$

Вычисляя интеграл и учитывая, что  $aC = \frac{C}{VLC} = \sqrt{\frac{C}{L}}$ , запишем

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\varphi(x - at) - \varphi(x + at)}{2}. \quad (7.10)$$

Для функции  $i(x, t)$ , как мы уже отмечали, уравнение (7.9) сохраняет свой вид; начальными условиями будут

$$i|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial i}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{1}{L}f'(x).$$

Опять-таки по формуле Даламбера получим

$$i(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{f(x - at) - f(x + at)}{2}. \quad (7.11)$$

Формулы (7.10) и (7.11) дают решение поставленной задачи. Как легко заметить, в любой точке линии отношение напряжения к току для прямой волны равно  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ , а для обратной  $-\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Величина  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  называется *волновым сопротивлением линии*.

Возникновение волн в линии очень часто бывает связано с атмосферными разрядами. Если в линии на некотором ее прохождении внезапно возникает индуцированный заряд, то вдоль линии начинают распространяться волны напряжения и тока с одинаковой скоростью. Так как начальный ток равен нулю, то  $\varphi(x) = 0$ , функция  $f(x)$  будет отлична от

нуля на некотором участке, именно на том, где возник индуцированный заряд. Процесс графического построения таких волн был подробно рассмотрен в § 2.

**21. Линия без искажения.** Линией без искажения называется линия, параметры которой связаны соотношением

$$RC = LG. \quad (7.12)$$

Покажем, что в такой линии волны напряжения и тока распространяются таким же образом, как и в линии без потерь, но с той разницей, что амплитуда волны при ее продвижении по линии все время уменьшается, т. е. *происходит затухание волн*.

Рассмотрим снова уравнение (7.4) и введем вспомогательную неизвестную функцию  $v(x, t)$ , связанную с  $u(x, t)$  соотношением

$$u(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t} v(x, t). \quad (7.13)$$

Дифференцируя ее дважды по  $x$  и  $t$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-\frac{R}{L}t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = e^{-\frac{R}{L}t} \left( -\frac{R}{L} v + \frac{\partial v}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= e^{-\frac{R}{L}t} \left( \frac{R^2}{L^2} v - \frac{2R}{L} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Подставим выражения для производных в (7.4), сократим  $e^{-\frac{R}{L}t}$  и сгруппируем члены:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \left( -\frac{2R}{L} + \frac{RC + LG}{LC} \right) + \\ + v \left( \frac{R^2}{L^2} - \frac{R}{L} \frac{RC + LG}{LC} + \frac{RG}{LC} \right) - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

В последнем уравнении коэффициенты при  $v$  и  $\frac{\partial v}{\partial t}$  равны нулю (первый — тождественно, а второй — в силу условия (7.12)); поэтому для функции  $v(x, t)$  мы получили опять-таки уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

где по-прежнему  $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Считая, как и раньше, заданными начальное напряжение и ток, составим начальные условия для функции  $v(x, t)$ . Из (7.13) и (7.6) следует, что

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} = f(x).$$

Далее,  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} u + e^{\frac{R}{L}t} \frac{\partial u}{\partial t}$ ; учитывая условия (7.7) и (7.12), получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{R}{L} f(x) - \frac{G}{C} f(x) - \frac{1}{C} \varphi'(x) = -\frac{1}{C} \varphi'(x).$$

Сразу замечаем, что *уравнение и начальные условия для функции  $v(x, t)$  точно такие, какими они были в п. 40 при отыскании напряжения в линии без потерь.* Следовательно, функция  $v(x, t)$  определяется по формуле (7.10) и функция  $u(x, t)$  будет равна

$$u(x, t) =$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t} \left[ \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\varphi(x-at) - \varphi(x+at)}{2} \right].$$

Проделав аналогичные преобразования для уравнения (7.5) (настоятельно рекомендуем читателю выполнить их самостоятельно), установим, что

$$i(x, t) =$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t} \left[ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{f(x-at) - f(x+at)}{2} \right].$$

Таким образом, в линии без искажений, так же как и в линии без потерь, между напряжением и током в прямой и обратной волнах сохраняется постоянное отноше-

ние  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  (волновое сопротивление). Волны напряжения и тока распространяются опять-таки, как в линии без потерь,

но с той существенной разницей, что благодаря множи-

телю  $e^{-\frac{R}{L}t}$  обе волны *со временем по показательному закону затухают*. Ясно, что причиной затухания волн является рассеяние энергии, вызванное выделением тепла в проводах, а также утечкой тока.

Если соотношение  $RC = LG$  не выполняется, то связь между напряжением и током становится значительно более

сложной. В этом случае волновое сопротивление уже не является величиной постоянной, а существенно зависит от характера возбуждения линии.

В курсах электротехники и связи подробно рассматривается вопрос о распространении по длиной линии переменного синусоидального тока с частотой  $\omega$ . Нарушение соотношения  $RC = LG$  приводит здесь к тому, что и скорость распространения тока, и его затухание зависят от частоты  $\omega$ . Если по линии распространяется сложный импульс, являющийся наложением простых синусоидальных токов, то каждый такой ток будет иметь свою скорость распространения и свой коэффициент затухания. Это и приводит к искажению сигналов при передаче по такой линии.

**22. Линии конечной длины.** Рассмотрим наиболее часто встречающиеся краевые условия в линиях конечной длины  $L$ . Если в начале линии ( $x = 0$ ) включен источник питания с постоянной электродвижущей силой  $E$ , то

$$u|_{x=0} = E.$$

Если к началу линии подключено синусоидальное напряжение, то

$$u|_{x=0} = E \sin \omega t$$

Если на конце ( $x = L$ ) линия коротко замкнута (при однопроводной линии ее конец в этом случае заземлен), то

$$u|_{x=L} = 0;$$

если же конец линии изолирован, то

$$t|_{x=L} = 0.$$

Из уравнения (7.1) отсюда следует, что  $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0$

Если считать линию полубесконечной, то поставленные краевые условия при  $x = 0$  приводят к явлению ограждения волн напряжения и тока. С математической точки зрения эти задачи аналогичны тем, какие были рассмотрены в § 2 при изучении полубесконечных струн.

Часто встречается случай, когда двухпроводная линия на конце имеет приемник энергии с сопротивлением  $R_t$

и индуктивностью  $L_t$  (рис. 29). Тогда, рассуждая так же, как при выводе уравнения (7.1), получим

$$u|_{x=0} = R_t i|_{x=0} + L_t \frac{di}{dt}|_{v=0}.$$

Рекомендуем читателю написать краевое условие, если приемник энергии содержит еще и конденсатор.

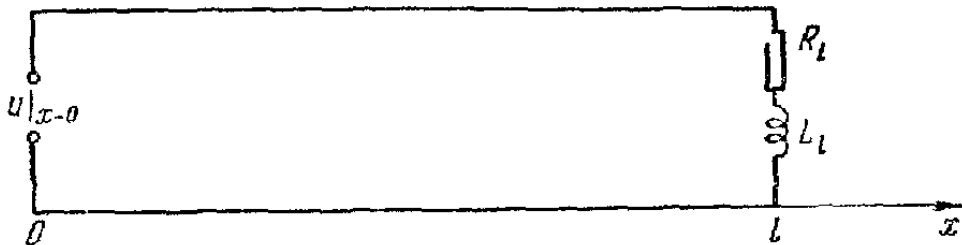


Рис. 29.

Разумеется, можно рассматривать любую комбинацию условий при  $x=0$  и  $x=l$ .

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

**Пример 1.** Пусть однопроводная линия длины  $l$ , свободная от искажений ( $RC = LG$ ), заряжена до потенциала  $E$  (по отношению к земле). Один конец линии ( $x=l$ ) изолирован, а другой ( $x=0$ ) в начальный момент заземляется. Найдем распределение потенциала вдоль линии.

Если потенциал обозначить через  $u(x, t)$ , то в результате

введения новой функции (см. (7.13))  $v(x, t) = e^{\frac{R}{L}t} u(x, t)$  уравнение (7.4), согласно результатам п. 21, обращается в уравнение колебаний струны  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , где  $a = \sqrt{VLC}$ .

Так как  $u|_{t=0} = E$ , а  $i|_{t=0} = 0$ , то согласно (7.7) найдем, что  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{G}{C}E$ .

Перейдем к составлению начальных условий для функции  $v(x, t)$ . Первое остается без изменения:  $v|_{t=0} = E$ . Так как

$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{R}{L} e^{\frac{R}{L}t} u + e^{\frac{R}{L}t} \frac{du}{dt}$ , то

$$\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \frac{R}{L} E + \frac{G}{C} E = 0.$$

Краевые условия таковы:  $u|_{x=0}=0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=0$ . Для функции  $v$  эти условия имеют тот же вид:

$$v|_{x=0}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}|_{x=l}=0.$$

Окончательно задача формулируется так. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

с начальными условиями

$$v|_{t=0}=E, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=0$$

и краевыми условиями

$$v|_{x=0}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}|_{x=l}=0.$$

Заметим, что на первый взгляд условия  $v|_{t=0}=E$  и  $v|_{x=0}=0$  противоречат друг другу, так как из первого следует, что  $v(0, 0)=E$ , а из второго  $v(0, 0)=0$ . Дело в том, что при заземлении потенциал на конце  $x=0$  исчезает не мгновенно, а за некоторый малый промежуток времени, в течение которого и происходит непрерывное убывание потенциала. Пренебрегая этим, мы и приходим к нашим условиям.

Уравнение, к которому свелась задача, мы уже решали в § 5, рассматривая продольные колебания стержня. (Рекомендуем читателю самостоятельно восстановить это решение.) Согласно (5.14) решение ищется в виде ряда по собственным функциям

$$v(x, t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ a_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right] \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  отыскиваются по формулам (5.15), где  $f(x)=v|_{t=0}=E$ ,  $F(x)=\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}=0$ . Имеем

$$a_k = \frac{2E}{l} \int_0^l \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx = \frac{4F}{\pi(2k+1)}; \quad b_k = 0.$$

Переходя к функции  $u(x, t)$ , окончательно получим

$$u(x, t) = \frac{4E}{\pi} e^{-\frac{R}{L}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{2k+1}.$$

**Пример 2.** Пусть у однопроводной линии длины  $l$ , для которой соблюдается условие  $RC = LG$ , оба конца изолированы. Найдем распределение потенциала вдоль линии, если в начальный момент потенциал распределен по линейному закону, т. е.  $u|_{t=0} = Ax$ .

Рассуждая так же, как и в примере 1, получим для функции  $v(x, t) = e^{\frac{R}{L}t} u(x, t)$  уравнение  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , начальные условия  $v|_{t=0} = Ax$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0$  и краевые условия  $\frac{\partial v}{\partial x}|_{x=0} = 0$  и  $\frac{\partial v}{\partial x}|_{x=l} = 0$ . Если положить, как обычно,  $v(x, t) = X(x) T(t)$ , то для отыскания собственных функций  $X(x)$  придем к уравнению  $X'' + \lambda^2 X = 0$  с краевыми условиями  $X'(0) = 0$ ,  $X'(l) = 0$ . В отличие от предыдущих случаев  $\lambda_0 = 0$  является собственным числом. Действительно, при этом общее решение  $X = C_1 x + C_2$  удовлетворяет обоим краевым условиям при  $C_1 = 0$ . Мы положим  $X_0 = 1$ ; функция  $T_0(t)$  найдется из уравнения  $T_0'' = 0$ , т. е.  $T_0 = a_0 + b_0 t$ . Если  $\lambda \neq 0$ , то  $X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ . Краевые условия приводят к уравнениям

$$\lambda C_2 = 0 \quad \text{и} \quad -\lambda C_1 \sin \lambda l = 0.$$

Собственные числа суть корни уравнения  $\sin \lambda l = 0$ , откуда  $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ . Собственные функции  $X_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l}$  (здесь  $k$  может равняться нулю). Ортогональность собственных функций доказана на с. 85; впрочем, ее легко установить и непосредственным интегрированием. Функцию  $v(x, t)$  запишем в виде ряда

$$v(x, t) = a_0 + b_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t) \cos \frac{k\pi x}{l},$$

где член  $a_0 + b_0 t$  отвечает собственному числу  $\lambda_0 = 0$ .

Рекомендуем читателю дальнейшие выкладки проделать самостоятельно и получить следующий ответ:

$$u(x, t) =$$

$$= Ale^{-\frac{R}{L}t} \left[ \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l} \right].$$

Любопытно отметить, что если бы в этом примере начальное распределение потенциала было постоянным:  $u|_{t=0} = E$ , то мы получили бы, что  $v(x, t) = E$  и  $u(x, t) = Ee^{-\frac{R}{L}t}$ . Физическая картина в этом случае ясна: в любой момент времени все точки линии имеют одинаковый потенциал, который уменьшается вследствие тока утечки.

Пример 3. Задача о включении линии. Пусть линия длины  $l$  без потерь ( $R = G = 0$ ) подключается одним концом ( $x = 0$ ) к источнику переменного тока, электродвижущая сила которого равна  $E \sin \omega t$ . Найдем напряжение  $u(x, t)$  линии при условии, что на другом конце ( $x = l$ ) она накоротко замкнута и в момент включения напряжение и ток в линии равны нулю.

Функция  $u(x, t)$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{1}{C} \frac{\partial i}{\partial x}|_{t=0} = 0$$

и краевых условиях

$$u|_{x=0} = E \sin \omega t, \quad u|_{x=l} = 0$$

Краевые условия последнего типа нам раньше не встречались; они называются *неоднородными условиями*.

Метод Фурье здесь непосредственно неприменим, поскольку сумма частных решений, каждое из которых удовлетворяет краевым условиям, уже не удовлетворяет краевому условию при  $x = 0$ . Поэтому будем отыскивать решение нашей задачи в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t).$$

каждая из которых является решением уравнения колебаний. Первую функцию  $v(x, t)$  выберем так, чтобы она удовлетворяла только краевым условиям

$$v|_{x=0} = E \sin \omega t, \quad v|_{x=l} = 0.$$

Для этого положим

$$v(x, t) = X(x) \sin \omega t,$$

где  $X(x)$  — неизвестная пока функция. Дифференцируя функцию  $v(x, t)$  и подставляя в уравнение колебаний, придем (после сокращения на  $\sin \omega t$ ) к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции  $X(x)$ :

$$X''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} X(x) = 0$$

при условиях  $X(0) = E$ ,  $X(l) = 0$ .

Произвольные постоянные в общем решении

$$X(x) = C_1 \cos \frac{\omega x}{a} + C_2 \sin \frac{\omega x}{a}$$

определяются из системы

$$C_1 = E, \quad C_1 \cos \frac{\omega l}{a} + C_2 \sin \frac{\omega l}{a} = 0,$$

откуда  $C_1 = E$ ,  $C_2 = -E \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{a}$ . Отметим, что при этом  $\frac{\omega l}{a} \neq k\pi$ , т. е.  $\omega \neq \frac{k\pi a}{l}$ . Последнее условие означает, как мы сейчас увидим, что частота внешнего напряжения не совпадает ни с одной из частот собственных колебаний (т. е. нет резонанса).

Следовательно, функция  $v(x, t)$  найдена:

$$v(x, t) = \left( E \cos \frac{\omega x}{a} - E \operatorname{ctg} \frac{\omega l}{a} \sin \frac{\omega x}{a} \right) \sin \omega t.$$

Последнее выражение легко преобразовать к более простому виду:

$$v(x, t) = \frac{E \sin \frac{\omega (l-x)}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}} \sin \omega t.$$

(Если бы линия была подключена к источнику с постоянным напряжением  $u|_{x=0} = E$ , то, как легко проверить,  $v(x, t) = \frac{E(l-x)}{l}$ .)

Перейдем теперь к отысканию функции  $w(x, t)$ . Она также удовлетворяет уравнению колебаний, но уже с однородными (нулевыми) краевыми условиями

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0.$$

(Ясно, что при этом  $u = v + w$  удовлетворяется требуемым краевым условиям.)

Начальные же условия для функции  $w(x, t)$  уже будут иные. Так как

$$v|_{t=0} + w|_{t=0} = 0 \text{ и } \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0,$$

то, находя  $v|_{t=0}$  и  $\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0}$  из выражения для функции  $v(x, t)$ , получим:

$$w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{E\omega \sin \frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}}.$$

Как мы видим, для отыскания функции  $w(x, t)$  мы пришли к задаче, подробно разобранной в § 3. По формуле (3.13)

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Так как  $w|_{t=0} = 0$ , то все  $a_k = 0$ . Коэффициенты  $b_k$  находим по формуле (3.17):

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \left( -\frac{E\omega \sin \frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Заменяя

$$\begin{aligned} \sin \frac{\omega(l-x)}{a} \sin \frac{k\pi x}{l} &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left[ \frac{k\pi x}{l} + \frac{\omega(l-x)}{a} \right] - \cos \left[ \frac{k\pi x}{l} - \frac{\omega(l-x)}{a} \right] \right\} \end{aligned}$$

и интегрируя, получим

$$b_k = \frac{2E\omega a}{l \left[ \left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 - \omega^2 \right]}.$$

Как уже отмечалось выше, знаменатель ни при каком значении  $k$  не обращается в нуль. Числа  $\frac{k\pi a}{l}$  как раз представляют *частоты собственных колебаний*.

Беря сумму функций  $v(x, t)$  и  $w(x, t)$ , окончательно получаем

$$u(x, t) = \frac{E \sin \frac{\omega(l-x)}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}} \sin \omega t + \frac{2E\omega a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}}{\left( \frac{k\pi a}{l} \right)^2 - \omega^2}.$$

Отметим, что задача о включении линии без искажения решается точно так же, но приводит к значительно более громоздким выкладкам, даже в случае подключения постоянной электродвижущей силы.

### § 8. Уравнение колебаний мембранны

**23. Вывод уравнения колебаний мембранны.** В предыдущих параграфах рассматривались задачи, приводящие к одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Сейчас мы перейдем к изучению *двумерного волнового уравнения*, т. е. уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (8.1)$$

Покажем, что к этому уравнению сводится задача о *свободных колебаниях однородной мембранны*. Говоря о мемbrane, мы подразумеваем упругую свободно изгибающуюся натянутую пленку. Пусть в состоянии покоя мембра занимает некоторую область  $D$  в плоскости  $xOy$ , а затем, будучи каким-то образом выведена из этого состояния, начинает колебаться так, что все ее точки движутся перпендикулярно плоскости  $xOy$  (*поперечные колебания мембранны*).

Отклонения точек мембраны от плоскости  $xOy$  будем обозначать через  $u$ . Величина  $u$  зависит от координаты точки  $(x, y)$  мембраны и от времени  $t$ . Функция  $u(x, y, t)$  является искомой. При фиксированных  $x$  и  $y$  эта функция дает закон колебания точки  $(x, y)$  мембраны; при этом частные производные  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  определяют соответственно скорость и ускорение движущейся точки. Если зафиксировать  $t$ , то поверхность  $u = u(x, y, t)$  представляет форму колеблющейся мембраны в момент времени  $t$ ; с изменением  $t$  эта форма, очевидно, будет изменяться. Как известно (см. [1], п. 119), нормаль  $N$  к рассматриваемой поверхности имеет проекции  $\left\{ -\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, 1 \right\}$ ; знаки проекций выбраны так, чтобы нормаль образовывала острый угол с осью  $Ou$ . Направляющие косинусы нормали находятся по формулам:

$$\cos \alpha = -\frac{u'_x}{\sqrt{u'^2_x + u'^2_y + 1}}, \quad \cos \beta = -\frac{u'_y}{\sqrt{u'^2_x + u'^2_y + 1}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{u'^2_x + u'^2_y + 1}}.$$

Мы будем изучать малые колебания мембраны, т. е. считать угол  $\gamma$  отклонения нормали от оси  $Ou$  настолько малым, что

$$\cos \gamma \approx 1.$$

Из формулы для  $\cos \gamma$  следует, что при этом мы пренебрегаем квадратами частных производных  $u'_x$  и  $u'_y$ :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \approx 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \approx 0; \quad (8.2)$$

можно также принять, что и  $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \approx 0$ .

Условия (8.2) совершенно аналогичны условию (1.5), введенному при изучении малых колебаний струны. Приняв условия (8.2), получим:

$$\cos \alpha = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos \beta = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \cos \gamma = 1. \quad (8.3)$$

Следовательно, вектор  $\mathbf{N}$  является единичным вектором:

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1.$$

Вычислим еще площадь поверхности мембраны в произвольный момент времени  $t$ . Она выражается интегралом (см. [1], п. 148)  $\iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy$ .

В силу условий (8.2) заключаем, что изменением площади поверхности мембраны в процессе колебания можно пренебречь. Это, разумеется, относится как ко всей мемbrane, так и к любой ее части.

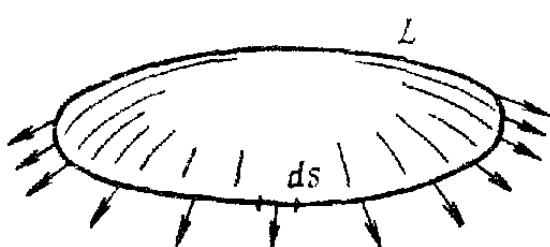


Рис. 30

силами, распределенными вдоль контура  $L$  выделенного участка. Поскольку мембрана свободно изгибается, то эти силы будут действовать в касательных плоскостях к мемbrane по направлению нормалей к контуру  $L$  (рис. 30). Будем считать, что мембрана находится под действием равномерного нагружения.

Это значит, что величина силы, приложенной к любому элементу  $ds$  линии разреза, равна  $T ds$ , т. е. пропорциональна длине элемента  $ds$ . Площадь вырезанной части мембраны во все время колебаний считается неизменной, и поэтому величину  $T$  также можно считать постоянной.

Прежде всего найдем равнодействующую сил на тяжения, приложенных к контуру  $L$ . Выберем направление обхода этого контура, как на рис. 31 и обозначим через  $ds$  вектор, направленный по касательной к контуру и по модулю

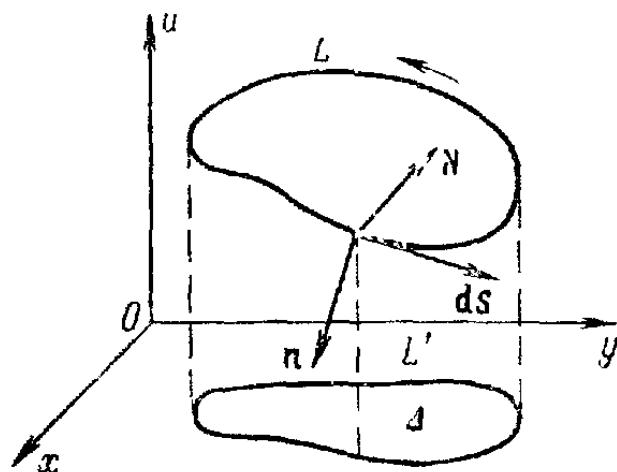


Рис. 31.

равный дифференциальному длины дуги  $ds$ . (Направление касательной считается совпадающим с выбранным направлением на контуре.) Если  $x, y, u$  — координаты точек контура, то

$$ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + du\mathbf{k}.$$

Поскольку точки контура лежат на поверхности мембраны, то аппликата  $u$  определяется из уравнения  $u = u(x, y, t)$  при фиксированном  $t$ . Поэтому  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ .

Вектор  $\mathbf{n}$ , вдоль которого направлена сила натяжения, перпендикулярен вектору  $ds$  и нормали  $\mathbf{N}$  ( $\mathbf{N}$  — нормаль к поверхности мембраны). Следовательно, он имеет направление векторного произведения векторов  $ds \times \mathbf{N}$ ; из рис. 31 видно, что вектор  $\mathbf{n}$  направлен как раз в сторону отброшенной части мембраны. Вычисляя векторное произведение, получим

$$\mathbf{n} = ds \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & du \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 1 \end{vmatrix}.$$

Так как  $|\mathbf{N}| = 1$ , то  $|\mathbf{n}| = ds \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = ds$ . Это значит, что сила натяжения, действующая на элемент  $ds$ , равна  $T\mathbf{n}$ ; направление ее совпадает с направлением вектора  $\mathbf{n}$ , а величина равна  $T|\mathbf{n}| = Tds$ . Проекция этой силы на ось  $Oy$  равна

$$T(\text{про}_{Oy}\mathbf{n}) = T \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Чтобы найти проекцию равнодействующей всех сил натяжения, надо полученное выражение проинтегрировать по контуру  $L$ , т. е. вычислить интеграл

$$T \int_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Подынтегральное выражение зависит только от  $x$  и  $y$ , поэтому криволинейный интеграл по контуру  $L$  можно заменить интегралом по контуру  $L'$  ( $L'$  — проекция  $L$  на

плоскость  $xOy$ ). Преобразуя последний интеграл по формуле Грина (см. [1], п. 140), получим

$$T \int_{L'} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = T \iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (8.4)$$

(направление обхода контура  $L'$  положительно, как это и требуется в формуле Грина).

Воспользовавшись условиями малости частных производных  $u'_x$  и  $u'_y$ , легко проверить, что проекции равнодействующей сил натяжения на оси  $Ox$  и  $Oy$  равны нулю. Действительно,

$$T(\text{up}_{Ox}\mathbf{n}) = T \left( dy + \frac{\partial u}{\partial y} du \right).$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial y} du = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \approx 0,$$

а  $\int_{L'} T dy$ , очевидно, равен нулю, как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала. Аналогично доказывается и вторая часть утверждения.

Чтобы вывести дифференциальное уравнение колебаний мембранны, выделим бесконечно малый участок  $d\sigma$  области  $D$ , окружающей точку  $(x, y)$ . В любой момент времени масса части мембранны, проектирующейся в этот участок, равна  $\rho d\sigma$ , где  $\rho$  — поверхносная плотность, считающаяся постоянной (мембрана предполагается однородной). Ускорение точек выбранного элементарного участка равно  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . При свободных колебаниях мембранны единственной действующей силой будет проекция на ось  $Oy$  силы натяжения, определяемая по формуле (8.4). Применяя к двойному интегралу, взятому по области  $d\sigma$ , теорему о среднем, запишем выражение для этой проекции в виде  $T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\sigma$ . Рассматривая выделенный участок как материальную точку и применяя закон Ньютона, составим уравнение

$$\rho d\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) d\sigma.$$

Сокращая на  $d\sigma$  и вводя обозначение  $\frac{I}{\rho} = a^2$ , окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Поскольку выражение в скобках есть двумерный оператор Лапласа  $\Delta u$ , запишем полученное уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u. \quad (8.5)$$

Отметим, что имеется много задач, приводящих к *трехмерному волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = a^2 \Delta u,$$

где  $\Delta u$  — трехмерный оператор Лапласа.

К этому уравнению сводятся задачи колебания газа, находящегося в некотором объеме, задачи теории распространения звуковых волн (акустические волны) и ряд других. Решение трехмерных задач еще более сложно, чем двумерных, и мы их касаться не будем, отсылая читателя к более подробным курсам.

**24. Начальные и краевые условия.** Сформулируем начальные и краевые условия задачи о колебаниях мембраны. Если в состоянии покоя мембра на занимала в плоскости  $xOy$  область  $D$ , ограниченную контуром  $\Gamma$ , то, чтобы мембра на начала колебаться, нужно ее точкам придать либо начальные отклонения, либо начальные скорости, либо и то и другое. Это значит, что заданы функции

$$u|_{t=0} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x, y), \quad (8.6)$$

определенные в области  $D$ .

Будем считать, что край мембраны закреплен. Тогда

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (8.7)$$

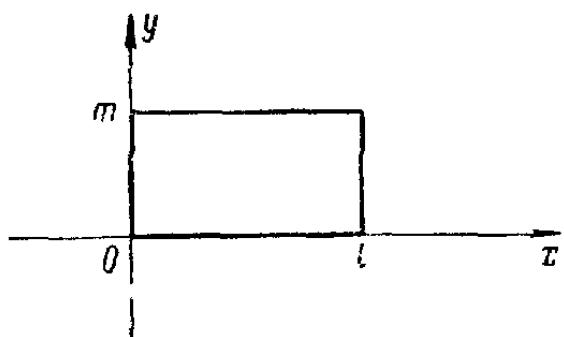
где символ  $u|_{\Gamma}$  дает значения функции  $u(x, y, t)$  в точках контура  $\Gamma$  в любой момент времени  $t$ .

Трудность решения двумерного уравнения колебаний существенно зависит от геометрической формы мембраны. Как мы увидим дальше, даже для сравнительно простых случаев

прямоугольной и круглой мембран способы решения будут различны. В случае же мембран другого вида уже требуются специальные приемы, которые мы в настоящем курсе изучать не будем.

### § 9. Колебания прямоугольной мембранны

**25. Собственные функции.** Пусть мембрана в состоянии покоя имеет форму прямоугольника, ограниченного прямыми  $x=0$ ,  $x=l$ ,  $y=0$  и  $y=m$  (рис. 32). Согласно результатам § 8 задача о колебаниях мембранны сводится к решению уравнения



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9.1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= F(x, y) \end{aligned} \quad (9.2)$$

Рис. 32.

и краевыми условиями, заданными на границе прямоугольника,

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=m} = 0. \quad (9.3)$$

Поставленную задачу будем решать *методом Фурье*. Ищем решения уравнения (9.1), удовлетворяющие краевым условиям (9.3), в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента:

$$u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t). \quad (9.4)$$

Из первого условия (9.3) следует, что  $X(0) Y(0) T(t) = 0$ . Так как нас интересуют решения, не тождественно равные нулю, то  $X(0) = 0$ . Аналогично составим и остальные условия, налагаемые на функции  $X(x)$  и  $Y(y)$ . Выписав их все вместе, получим:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(m) = 0. \quad (9.5)$$

Дифференцируем дважды функцию (9.4) по каждому из аргументов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' Y T, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X Y'' T, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X Y T''$$

(как и раньше, аргументы у функций для сокращения записи опущены).

Подставляя выражения для производных в уравнение (9.1) и разделяя переменные, придадим ему вид

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

Левая часть равенства не зависит от переменных  $x$  и  $y$ , а правая часть — от переменной  $t$ . Поэтому оно может соблюдаться только при условии, что ни левая, ни правая части не зависят ни от одной из переменных, т. е.

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \text{const.}$$

Далее, так как отношение  $\frac{X''}{X}$  зависит только от  $x$ , а  $\frac{Y''}{Y}$  — только от  $y$ , то сумма  $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$  может быть постоянной лишь при условии, что каждое из этих слагаемых есть в свою очередь величина постоянная, т. е.

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2.$$

Обе последние постоянные выбраны отрицательными, так как в противном случае функции  $X(x)$  и  $Y(y)$  не могли бы удовлетворять краевым условиям (9.5). Доказательство этого было приведено в § 3 (стр. 58).

В результате для отыскания функций  $X(x)$ ,  $Y(y)$  и  $T(t)$  получены уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (9.6)$$

$$Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(m) = 0, \quad (9.7)$$

$$T''(t) + a^2(\lambda^2 + \mu^2) T(t) = 0. \quad (9.8)$$

Решения уравнений (9.6) и (9.7) имеют вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

$$Y(y) = D_1 \cos \mu y + D_2 \sin \mu y.$$

Краевые условия  $X(0) = X(l) = 0$  приводят к соотношениям  $C_1 = 0$  и  $\lambda l = k\pi$ , где  $k$  — целое число. Только при соблюдении последнего требования уравнение (9.6) имеет нулевое решение. Аналогично из условий  $Y(0) = Y(m) = 0$  следует,

что  $D_1 = 0$  и  $\mu m = n\pi$  ( $n$  — целое число). Собственные числа  $\lambda_k$  и  $\mu_n$  определяются формулами

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{m}, \quad (9.9)$$

где  $k$  и  $n$  — любые целые положительные числа. Каждой паре собственных чисел соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (9.10)$$

Из (9.10) ясно, что если брать числа  $k$  и  $n$  отрицательными, то новых собственных функций не получится. (Напомним, что, умножая любую из собственных функций на произвольную постоянную, мы будем снова получать решение уравнения (9.6) или (9.7) с нулевыми краевыми условиями.)

Перейдем к уравнению (9.8). Для каждой пары собственных чисел  $\frac{k\pi}{l}$  и  $\frac{n\pi}{m}$  оно примет вид

$$T''(t) + \pi^2 a^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right) T(t) = 0.$$

Решение этого уравнения обозначим функцией  $T_{k,n}(t)$  с двумя индексами; произвольные постоянные, входящие в его общее решение, придется также обозначить буквами с двумя индексами:  $a_{k,n}$  и  $b_{k,n}$ . Имеем

$$T_{k,n}(t) = a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t + b_{k,n} \sin \omega_{k,n} t, \quad (9.11)$$

где  $\omega_{k,n} = \pi a \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}$  — собственные частоты колебаний мембранны.

Составив произведение функций (9.10) и (9.11), образуем функции  $u_{k,n}(x, y, t)$ , удовлетворяющие уравнению (9.1) и краевым условиям (9.3). Каждой паре положительных чисел  $k$  и  $n$  соответствует функция

$$u_{k,n}(x, y, t) = (a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t + b_{k,n} \sin \omega_{k,n} t) \sin \lambda_k x \sin \mu_n y. \quad (9.12)$$

Прежде чем переходить ко второй части метода Фурье — отысканию решения, удовлетворяющего начальным условиям, — выясним свойства функций (9.12).

**26. Стоячие волны прямоугольной мембраны.** Функции  $u_{k,n}(x, y, t)$  описывают собственные колебания мембраны. Каждая из них представляет стоячую волну для прямоугольной мембраны. Запишем формулу (9.12) в виде

$$u_{k,n}(x, y, t) = F_{k,n} \sin(\omega_{k,n} t + \varphi_{k,n}) \sin \lambda_k x \sin \mu_n y,$$

где

$$F_{k,n} = \sqrt{a_{k,n}^2 + b_{k,n}^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{k,n} = \frac{a_{k,n}}{b_{k,n}}.$$

Ясно видно, что каждая точка  $(x, y)$  мембраны совершает простое гармоническое колебание с частотой  $\omega_{k,n}$  и амплитудой  $F_{k,n} \sin \lambda_k x \sin \mu_n y$ .

Все точки проходя положение равновесия в одни и те же моменты времени, определяемые равенствами  $\omega_{k,n} t + \varphi_{k,n} = r\pi$ , где  $r$  принимает значения 0, 1, 2, 3, ... Точно так же одновременно точки достигают максимального отклонения (в ту или другую сторону). Для большей наглядности рассмотрим сначала самое простое колебание, соответствующее случаю  $k=n=1$ :

$$u_{1,1}(x, y, t) = F_{1,1} \sin(\omega_{1,1} t + \varphi_{1,1}) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{m}.$$

Его частота  $\omega_{1,1} = \pi a \sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2}}$  является *наименьшей собственной частотой* и характеризует *основной тон* мембраны. Особенно просто выражение для частоты основного тона в случае квадратной пластиинки ( $m=l$ ). Здесь  $\omega_{1,1} = \frac{\pi a \sqrt{2}}{l} = \frac{\pi \sqrt{2}}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , где  $T$  — натяжение, а  $\rho$  — плотность.

При колебании мембраны контур ее остается неподвижным. Так как внутри прямоугольника  $0 < x < l$  и  $0 < y < m$ , то функции  $\sin \frac{\pi x}{l}$  и  $\sin \frac{\pi y}{m}$  положительны и все точки мембраны одновременно находятся то по одну сторону плоскости  $xOy$ , то по другую (в зависимости от знака  $\sin(\omega_{1,1} t + \varphi_{1,1})$ ).

Наибольшую амплитуду колебаний будет иметь точка, для которой  $\sin \frac{\pi x}{l} = 1$  и  $\sin \frac{\pi y}{m} = 1$ , т. е. точка с координатами  $\left(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}\right)$  — центр мембраны. Так же как и для струны,

такие точки называются *пучностями*. Линии, точки которых не колеблются, называются *узловыми линиями* (для рассматриваемого простейшего случая узловые линии совпадают с конуrom мембранны). На рис. 33 изображена мембрана в тот момент, когда все ее точки достигают наибольшего отклонения вверх. Затем все отклонения уменьшаются, становятся равными нулю, после чего мембрана начинает прогибаться вниз. Так же просто проанализировать колебания мембранны, описываемые функцией

$$u_{2,1}(x, y, t) = F_{2,1} \sin(\omega_{2,1}t + \varphi_{2,1}) \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{m}.$$

Узловые линии определяются из уравнений  $\sin \frac{2\pi x}{l} = 0$  и  $\sin \frac{\pi y}{m} = 0$ . Помимо точек контура, это будет отрезок прямой

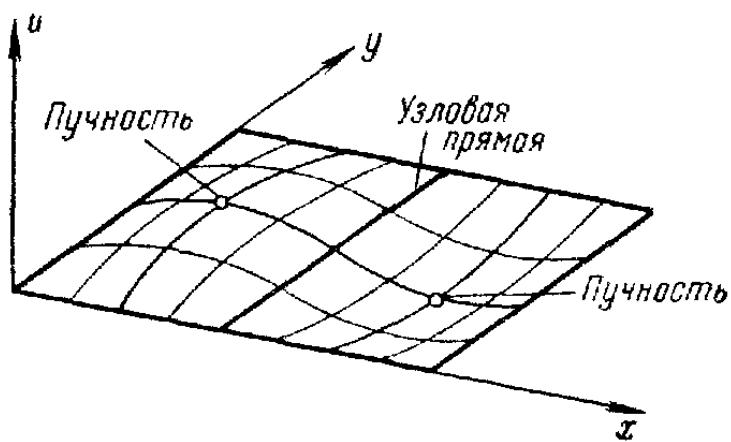


Рис. 33.

$x = \frac{l}{2}$ . При  $0 < x < \frac{l}{2}$  функция  $\sin \frac{2\pi x}{l}$  положительна, а при  $\frac{l}{2} < x < l$  — отрицательна; функция же  $\sin \frac{\pi y}{m}$  везде положительна. Поэтому левая и правая половины мембранны будут прогибаться в разные стороны (рис. 34). Соответственно

будет две пучности — точки пересечения прямой  $y = \frac{m}{2}$  с прямыми  $x = \frac{l}{4}$  и  $x = \frac{3l}{4}$ . (При этих значениях  $x$  и  $y$  функции  $\sin \frac{2\pi x}{l}$  и  $\sin \frac{\pi y}{m}$  принимают значения  $\pm 1$ .)

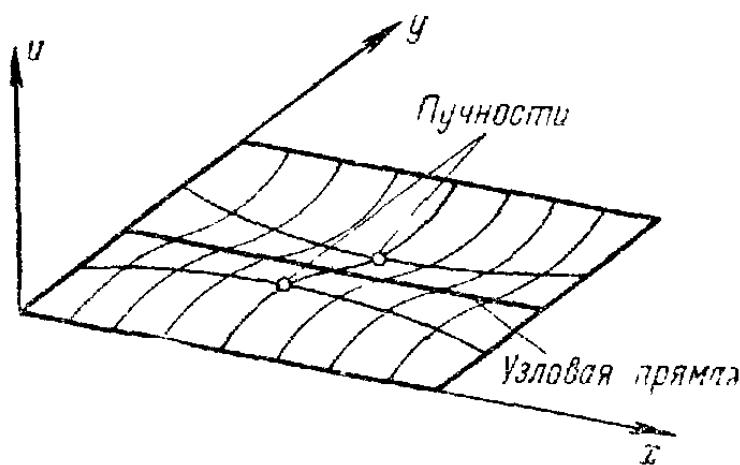


Рис. 35.

Рекомендуем читателю так же подробно рассмотреть колебания, соответствующие функциям  $u_{1,2}$  и  $u_{2,2}$  (рис. 35 и 36).

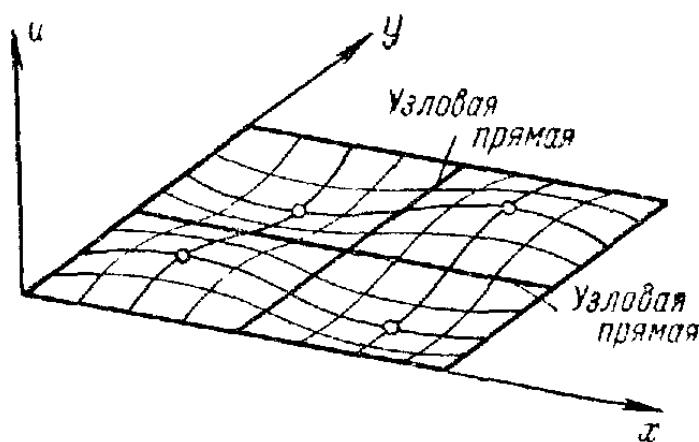


Рис. 36.

Другие стоячие волны имеют более сложный вид. При колебаниях

$$u_{k,n}(x, y, t) = F_{k,n} \sin(\omega_{k,n} t + \varphi_{k,n}) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m},$$

помимо линий контура, будет  $k-1$  узловая линия, параллельная оси  $Oy$ :  $x = \frac{l}{k}, x = \frac{2l}{k}, \dots, x = \frac{(k-1)l}{k}$ , и  $n-1$  линия, параллельная оси  $Ox$ :  $y = \frac{m}{n}, y = \frac{2m}{n}, \dots$

...,  $y = \frac{(n-1)m}{n}$  (при этих значениях  $x$  и  $y$  собственные функции обращаются в нуль). Эти линии разобьют мембрану на  $nk$  прямоугольников, причем в двух соседних (т. е. имеющих общую сторону) отклонения будут направлены в разные стороны. Центр каждого такого прямоугольника будет являться пучностью.

**27. Вторая часть метода Фурье. Двойные ряды Фурье.** Вернемся теперь к задаче о поискации решения, удовлетворяющего начальным условиям (9.2). Как обычно, будем искать его в виде ряда, составленного из частных решений (9.12). Каждое частное решение зависит от двух индексов:  $k$  и  $n$ , поэтому нам придется образовать двойную сумму

$$u(x, y, t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t + b_{k,n} \sin \omega_{k,n} t) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (9.13)$$

Заставляя индексы суммирования  $k$  и  $n$  пробегать все положительные числа независимо друг от друга, мы тем самым учтем все частные решения вида (9.12). Подставляя значение  $t = 0$  в функцию  $u(x, y, t)$  и в производную  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , получим:

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} = f(x, y), \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{k,n} b_{k,n} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} = F(x, y). \quad (9.15)$$

Формулы (9.14) и (9.15) представляют разложения функций двух переменных в *двойные ряды Фурье*. С подобным разложением мы сталкиваемся впервые и поэтому рассмотрим его подробнее. Возьмем систему функций  $\sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m}$  и покажем, что в области  $D(0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq m)$  она ортогональна. Это значит, что двойной интеграл, взятый по области  $D$  от произведения двух различных функций

системы, равен нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^m \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{n_1 \pi y}{m} \sin \frac{k_2 \pi x}{l} \sin \frac{n_2 \pi y}{m} dx dy = \\ = \left( \int_0^l \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{k_2 \pi x}{l} dx \right) \left( \int_0^m \sin \frac{n_1 \pi y}{m} \sin \frac{n_2 \pi y}{m} dy \right). \end{aligned}$$

Поскольку система функций  $\sin \frac{k \pi x}{l}$  ортогональна в интервале  $[0, l]$ , а система  $\sin \frac{n \pi y}{m}$  — в интервале  $[0, m]$  (см. стр. 59), то написанное выражение равно нулю, если соблюдается хотя бы одно из неравенств  $k_1 \neq k_2$  и  $n_1 \neq n_2$ . Если же  $k_2 = k_1 = k$  и  $n_2 = n_1 = n$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^m \sin^2 \frac{k \pi x}{l} \sin^2 \frac{n \pi y}{m} dx dy = \\ = \int_0^l \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx \int_0^m \sin^2 \frac{n \pi y}{m} dy = \frac{lm}{4}. \end{aligned}$$

Исходя из установленных соотношений, легко найти все коэффициенты разложений (9.14) и (9.15). Формулы для их отыскания совершенно аналогичны обычным формулам Фурье:

$$a_{k, n} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m f(x, y) \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{n \pi y}{m} dx dy, \quad (9.16)$$

$$b_{k, n} = \frac{4}{lm \omega_{k, n}} \int_0^l \int_0^m F(x, y) \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{n \pi y}{m} dx dy. \quad (9.17)$$

Мы не останавливаемся на тех условиях, которые надо наложить на функции  $f(x, y)$  и  $F(x, y)$ , чтобы они могли быть разложены в двойные ряды Фурье. В практически встречающихся задачах они всегда выполняются.

Подставив выражения для коэффициентов  $a_{k, n}$  и  $b_{k, n}$  в формулу (9.13), завершим решение задачи.

Пример. Найдем колебания квадратной мембранны ( $l = m = 1$ ), всем точкам которой приданы одинаковые

начальные скорости  $v_0$ . (Разумеется, это не касается неподвижно закрепленных точек контура мембраны<sup>1)</sup>.)

Начальные условия (9.2) имеют вид

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = v_0.$$

Следовательно, в решении (9.13) все коэффициенты  $a_{k, n} = 0$ . Коэффициенты  $b_{k, n}$  найдем по формуле (9.17), полагая в ней

$$F(x, y) = v_0, \quad l = m = 1, \quad \omega_{k, n} = \pi a \sqrt{k^2 + n^2},$$

$$b_{k, n} = \frac{4v_0}{\pi a \sqrt{k^2 + n^2}} \int_0^1 \int_0^1 \sin k\pi x \sin n\pi y \, dx \, dy.$$

Двойной интеграл разбивается на произведение двух обыкновенных интегралов, и мы получим

$$\begin{aligned} b_{k, n} &= \frac{4v_0}{\pi^3 a k n \sqrt{k^2 + n^2}} \cos k\pi x \Big|_0^1 \cos n\pi y \Big|_0^1 = \\ &= \frac{4v_0}{\pi^3 a k n \sqrt{k^2 + n^2}} (1 - \cos k\pi)(1 - \cos n\pi). \end{aligned}$$

Если хотя бы одно из чисел  $k$  или  $n$  четно, то  $b_{k, n} = 0$ , так как тогда по крайней мере одна из скобок равна нулю. Поэтому нужно считать, что  $k = 2r + 1$  и  $n = 2s + 1$  — нечетные числа. При этом

$$b_{2r+1, 2s+1} = \frac{16v_0}{\pi^3 a (2r+1) (2s+1) \sqrt{(2r+1)^2 + (2s+1)^2}}$$

и решение примет вид

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} b_{2r+1, 2s+1} \times \\ &\times \sin \pi a \sqrt{(2r+1)^2 + (2s+1)^2} t \cdot \sin (2r+1)\pi x \cdot \sin (2s+1)\pi y. \end{aligned}$$

Так как знаменатели у коэффициентов  $b_{2r+1, 2s+1}$  быстро возрастают, то ряд хорошо сходится и для вычисления значений функции  $u(x, y, t)$  придется брать очень небольшое число его членов.

**28. Стоячие волны с одинаковой частотой.** В заключение кратко остановимся на одной важной особенности колебаний мембранны. При колебаниях струны каждой собственной частоте соот-

<sup>1)</sup> При этом функция  $F(x, y)$  оказывается разрывной. Объяснение этого факта аналогично приведенному на стр. 42.

вествовала одна стоячая волна, вполне определяющая форму струны. При колебаниях мембраны *одной и той же собственной частоте* может соответствовать *несколько различных стоячих волн*. Проще всего это проследить на квадратной мембране. Примем для простоты, что стороны квадрата равны  $\pi$  ( $m = l = \pi$ ) и что начальные скорости точек мембраны равны нулю:  $F(x, y) = 0$ . Тогда из (9.17) следует, что все  $b_{k,n} = 0$ , и общее выражение для решения  $u(x, y, t)$  примет вид (см. формулу (9.13))

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t \sin kx \sin ny. \quad (9.18)$$

В разложении (9.18) содержится только одна стоячая волна, соответствующая наименьшей частоте  $\omega_{1,1} = a\sqrt{2}$ . Это будет волна  $a_{1,1} \cos a\sqrt{2}t \sin x \sin y$ . Следующие частоты,  $\omega_{2,1} = a\sqrt{2^2 + 1^2}$  и  $\omega_{1,2} = a\sqrt{1^2 + 2^2}$ , обе равны  $a\sqrt{5}$ . Поэтому частоте  $a\sqrt{5}$  соответствуют в рассматриваемом колебании две волны:

$$a_{2,1} \cos a\sqrt{5}t \sin 2x \sin y \quad \text{и} \quad a_{1,2} \cos a\sqrt{5}t \sin x \sin 2y.$$

Общее колебание квадратной пластинки с частотой  $a\sqrt{5}$  представляется суммой стоячих волн

$$2 \cos a\sqrt{5}t \sin x \sin y (a_{2,1} \cos x + a_{1,2} \cos y).$$

Узловые линии такого колебания, отличные от сторон мембраны, будут иметь уравнение

$$a_{2,1} \cos x + a_{1,2} \cos y = 0.$$

Если  $a_{2,1} = 0$ , то узловой линией служит отрезок прямой  $y = \frac{\pi}{2}$  (рис. 37), а если  $a_{1,2} = 0$ , то отрезок прямой  $x = \frac{\pi}{2}$  (рис. 38).

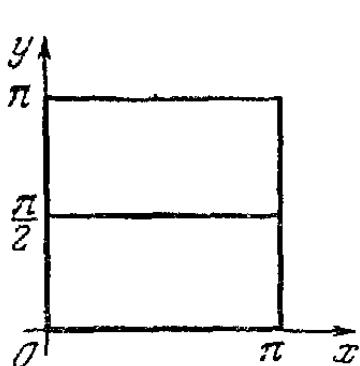


Рис. 37.

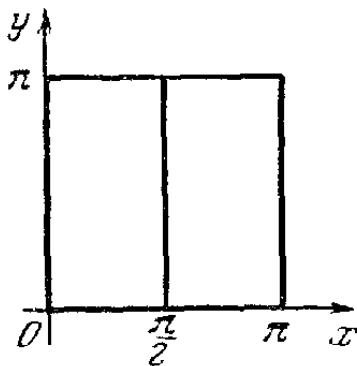


Рис. 38.

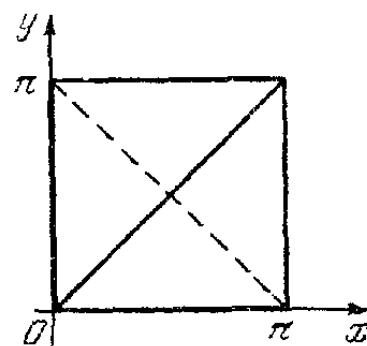


Рис. 39.

В случае, когда  $a_{2,1} = -a_{1,2}$ , из уравнения следует, что  $\cos y = \cos x$ , т. е. что  $y = x$ ; узловой линией будет диагональ квадрата (рис. 39). Если же  $a_{2,1} = a_{1,2}$ , то  $\cos y = -\cos x = \cos(\pi - x)$  и узловой линией будет другая диагональ:  $y = \pi - x$  (проведена пунктиром на рис. 39). При произвольных  $a_{2,1}$  и  $a_{1,2}$  узловая линия может

иметь очень сложную форму; отметим только, что она всегда проходит через центр квадрата (при  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = \frac{\pi}{2}$  левая часть уравнения обращается в нуль).

При рассмотрении более высоких частот могут встретиться самые разные случаи. Так, частоте  $\omega_{2,2} = a\sqrt{8}$  соответствует только одна стоячая волна; частоте  $a\sqrt{10}$  — две волны:  $u_{3,1}$  и  $u_{1,3}$ , а частоте  $a\sqrt{50}$  — три:  $u_{1,7}$ ,  $u_{5,5}$  и  $u_{7,1}$ . Ясно, что, чем больше различных волн соответствует данной частоте, тем сложнее картина распределения узловых линий.

Существует любопытный прием, при помощи которого можно практически получать узловые линии. Пластинку посыпают тонким слоем песка и заставляют колебаться, проводя по краю смычком. Тогда мембрана совершает колебания с одной из собственных частот и песок, скатываясь с пучностей, будет скапливаться вдоль узловых линий. Образующиеся при этом фигуры называются фигурами Хладни<sup>1)</sup>.

## § 10. Уравнение и функции Бесселя

**29. Уравнение Бесселя.** Для того чтобы перейти к решению задачи о колебаниях круглой мембранны, мы предварительно должны познакомиться с *функциями Бесселя*. Функции Бесселя являются решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (10.1)$$

Это уравнение называется *уравнением Бесселя*. И само уравнение, и его решения встречаются не только в задаче о колебаниях круглой мембранны, но и в очень большом числе других задач.

Параметр  $k$ , входящий в уравнение (10.1), может, вообще говоря, принимать любые положительные значения. Решения уравнений при заданном  $k$  называются *бесселевыми функциями порядка  $k$*  (иногда их называют *цилиндрическими функциями*). Мы рассмотрим детально лишь наиболее простые случаи, когда  $k=0$  и  $k=1$ , так как в дальнейшем изложении нам встретятся только бесселевые функции нулевого и первого порядков. Для общего изучения бесселе-

<sup>1)</sup> По имени немецкого физика Э. Хладни (1756—1827).

вых функций мы отсылаем читателя к специальным руководствам (см., например, [6], гл. V).

Уравнение Бесселя нулевого порядка имеет вид

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0. \quad (10.2)$$

При  $x=0$  коэффициент при первой производной терпит разрыв; как говорят, точка  $x=0$  для уравнения (10.2) является особой. В этом случае мы не можем заранее сказать, существуют ли решения уравнения, принимающие определенные значения при  $x=0$ ; теорема существования и единственности решения (см. введение) здесь неприменима.

Уравнение (10.2) не принадлежит ни к одному из типов уравнений второго порядка, допускающих решение простыми приемами; поэтому будем его решать при помощи степенных рядов. Предположим, что решение можно представить в виде ряда

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (10.3)$$

Продифференцируем этот ряд дважды:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots,$$

$$y'' = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + \dots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \dots,$$

и подставим в дифференциальное уравнение (10.2):

$$(2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + \dots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \dots) + \\ + \frac{1}{x}(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots) + \\ + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях  $x$ , мы и получим систему уравнений для отыскания неопределенных коэффициентов  $c_0, c_1, \dots$

Начнем с члена, содержащего  $\frac{1}{x}$ ; коэффициент при нем

$$c_1 = 0. \quad (10.4)$$

Условие (10.4) показывает, что решение в виде ряда (10.3) может существовать только тогда, когда  $c_1 = y'|_{x=0} = 0$ . Это и означает, что произвольно задавать значение первой производной  $y'$  при  $x=0$  нельзя.

Выпишем теперь коэффициенты при нечетных степенях  $x$ :  
 $x$ ,  $x^3$  и т. д.:

$$3 \cdot 2c_3 + 3c_3 + c_1 = 0,$$

$$5 \cdot 4c_5 + 5c_5 + c_3 = 0,$$

· · · · · · · · · ·

Поскольку  $c_1 = 0$ , то и все последующие коэффициенты с нечетными индексами равны нулю:

$$c_3 = c_5 = \dots = c_{2n+1} = \dots = 0. \quad (10.5)$$

Перейдем к отысканию коэффициентов с четными индексами. Последовательно выбирай слагаемые, содержащие свободный член,  $x^2$ ,  $x^4$  и т. д., составим систему уравнений

$$2c_2 + 2c_4 - c_0 = 0,$$

$$4 \cdot 3c_4 - 4c_4 - c_2 = 0,$$

· · · · · · · · · ·

Можно написать и общую рекуррентную формулу, связывающую любые два коэффициента, индексы которых отличаются друг от друга на две единицы. Собирая члены, содержащие  $x^n$ , получим

$$(n+2)(n+1)c_{n-2} + (n+2)c_{n+2} + c_n = 0,$$

или

$$(n+2)^2 c_{n-2} + c_n = 0. \quad (10.6)$$

Легко проверить, что все написанные выше уравнения представляют частные случаи равенства (10.6).

Оставляя коэффициент  $c_0$  произвольным, последовательно выразим через него все остальные чётные коэффициенты:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 4}, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6} = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6}$$

и вообще

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2} = (-1)^n \frac{c_0}{2^{2n} (n!)^2}. \quad (10.7)$$

Таким образом, найдено решение уравнения Бесселя при  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} y &= c_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} + \dots \right) = \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \quad (10.8) \end{aligned}$$

(0! считается равным 1).

Покажем, что ряд (10.8) сходится при всех значениях  $x$ . Применяя признак Даламбера, составим отношение абсолютных величин двух последовательных членов ряда:

$$\frac{x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)} |(n+1)!|^2} : \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{x^2}{2^2 (n+1)^2}.$$

Это отношение при любом значении  $x$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , что и доказывает абсолютную сходимость ряда.

Постоянная  $c_0 = y|_{x=0}$  может быть выбрана произвольно. Если ее положить равной единице, то получающаяся функция

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \quad (10.9)$$

и называется *функцией Бесселя первого рода порядка 0*. Она является решением уравнения (10.2) при начальных условиях

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$$

Как известно, общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка представляет линейную комбинацию двух его частных решений  $y_1$  и  $y_2$  при условии, что их отношение  $\frac{y_1}{y_2}$  не является постоянной величиной. Одним из таких решений является функция Бесселя  $J_0(x)$ . Второе частное решение уже не будет функцией, непрерывной при  $x = 0$ ; аналитическое выражение этого решения значительно более сложное, и мы его не приводим. Отметим только, что это второе решение называют *функцией Бесселя второго рода* (или еще *функцией Неймана*) и обычно обозначают через  $N_0(x)$ . Отличительная его черта состоит в том, что  $|N_0(x)| \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ .

Для функции Бесселя  $J_0(x)$  составлены подробные таблицы<sup>1)</sup>. График функции  $J_0(x)$  приведен на рис. 40; он похож на график затухающих колебаний. Эта функция четная, и поэтому на рисунке изображена только половина графика, соответствующая положительным значениям  $x$ . Функция  $J_0(x)$  имеет бесчисленное множество корней  $\mu_i$ , которые в дальнейшем исследовании будут играть важную роль. Приведем значения первых из них с двумя знаками после запятой:

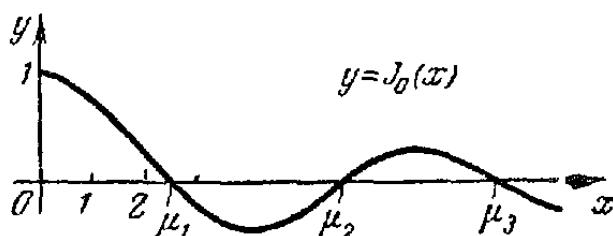


Рис. 40.

$\mu_1 = 2,40; \mu_2 = 5,52;$   
 $\mu_3 = 8,65; \mu_4 = 11,79$  и т. д.

Отметим, что для больших номеров  $n$  разность  $\mu_n - \mu_{n-1} \approx \pi$ .

**30. Условие ортогональности функций Бесселя нулевого порядка.** Рассмотрим теперь уравнение несколько более общего вида

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \lambda^2 y = 0 \quad (10.10)$$

и покажем, что оно сводится к уравнению Бесселя нулевого порядка. Введем для этого вместо  $x$  новую независимую переменную  $\xi = \lambda x$ . Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \lambda \frac{dy}{d\xi}, \quad y'' = \frac{d(y')}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \lambda^2 \frac{d^2y}{d\xi^2}.$$

После подстановки производных  $y'$  и  $y''$  в уравнение (10.10) множитель  $\lambda^2$  сократится, и мы придем к уравнению (10.2) с новой независимой переменной  $\xi$ :

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\xi} + y = 0.$$

Его частным решением является функция Бесселя  $J_0(\xi)$ ; следовательно, решением уравнения (10.10) будет функция  $J_0(\lambda x)$ .

Пусть теперь  $\lambda$  последовательно принимает значения  $\mu_1, \mu_2, \dots$  положительных корней функции Бесселя  $J_0(x)$ . Последовательность функций  $J_0(\mu_1 x), J_0(\mu_2 x), \dots, J_0(\mu_n x), \dots$

<sup>1)</sup> См., например, Люстерник Л. А., Акушский И. Я., Диткин В. А., Таблицы бесселевых функций, Гостехиздат, 1949 или Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, «Наука», 1968.

будет удовлетворять на интервале  $[0, 1]$  следующим условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) dx &= 0, \text{ если } k \neq n; \\ \int_0^1 x J_0^2(\mu_k x) dx &= \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_k). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Эти условия ортогональности отличаются от обычных только тем, что под интегралом содержится еще множитель  $x$  (в таких случаях часто говорят об «ортогональности с весом»).

Докажем условия (10.11). Функции  $J_0(px)$  и  $J_0(qx)$  удовлетворяют уравнению (10.10) при  $\lambda$ , соответственно равных  $p$  и  $q$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_0(px)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d J_0(px)}{dx} + p^2 J_0(px) &= 0, \\ \frac{d^2 J_0(qx)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d J_0(qx)}{dx} + q^2 J_0(qx) &= 0. \end{aligned}$$

Умножим первое из равенств на  $x J_0(qx)$ , второе на  $x J_0(px)$  и вычтем одно из другого:

$$\begin{aligned} x \left[ J_0(qx) \frac{d^2 J_0(px)}{dx^2} - J_0(px) \frac{d^2 J_0(qx)}{dx^2} \right] + \\ + \left[ J_0(qx) \frac{d J_0(px)}{dx} - J_0(px) \frac{d J_0(qx)}{dx} \right] + \\ + (p^2 - q^2) x J_0(px) J_0(qx) = 0. \end{aligned}$$

Полученному равенству можно придать вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ x \left[ J_0(qx) \frac{d J_0(px)}{dx} - J_0(px) \frac{d J_0(qx)}{dx} \right] \right\} + \\ + (p^2 - q^2) x J_0(px) J_0(qx) = 0 \end{aligned}$$

(рекомендуем читателю проверить это самостоятельно).

Интегрируя последнее равенство по  $x$  в пределах от 0 до 1, получим

$$\begin{aligned} \left\{ x \left[ J_0(qx) \frac{d J_0(px)}{dx} - J_0(px) \frac{d J_0(qx)}{dx} \right] \right\} \Big|_0^1 + \\ + (p^2 - q^2) \int_0^1 x J_0(px) J_0(qx) dx = 0. \quad (10.12) \end{aligned}$$

До сих пор мы не делали никаких предположений относительно чисел  $p$  и  $q$ . Пусть теперь  $p = \mu_k$ , а  $q = \mu_n$ , где  $\mu_k$  и  $\mu_n$  — два различных положительных корня уравнения  $J_0(x) = 0$ . Тогда в результате подстановки пределов выражение в фигурных скобках обратится в нуль, так как  $J_0(\mu_k) = J_0(\mu_n) = 0$ ; поскольку  $\mu_k^2 \neq \mu_n^2$ , окончательно заключаем, что

$$\int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) dx = 0.$$

Чтобы доказать второе из соотношений (10.11), положим в равенстве (10.12)  $p = \mu_k$  и перепишем его в виде

$$\int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(q x) dx = \frac{J_0(q) J'_0(\mu_k) \mu_k}{q^2 - \mu_k^2}. \quad (10.13)$$

(Мы учли, что  $\frac{d J_0(p x)}{dx} = \frac{d J_0(p x)}{d(p x)} p = J'_0(p x) p$ .) Будем считать  $q$  переменной величиной и заставим ее стремиться к  $\mu_k$ . Числитель и знаменатель в правой части равенства (10.13) стремятся при этом к нулю ( $J_0(\mu_k) = 0$ ), поэтому для отыскания предела мы воспользуемся правилом Лопитала

$$\lim_{q \rightarrow \mu_k} \frac{J_0(q) J'_0(\mu_k) \mu_k}{q^2 - \mu_k^2} = \frac{J'_0(\mu_k) J'_0(\mu_k) \mu_k}{2\mu_k} = \frac{1}{2} J'^2_0(\mu_k).$$

Левая часть равенства (10.13) при  $q = \mu_k$  обращается в интересующий нас интеграл  $\int_0^1 x J_0^2(\mu_k x) dx$ , так что и второе соотношение (10.11) доказано.

**31. Функции Бесселя первого порядка.** Найдем еще выражение для функции Бесселя первого порядка, т. е.  $J_1(x)$ . Подставляя ряд (10.3) и его производные в уравнение

$$y' + \frac{1}{x} y + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y'' = 0, \quad (10.14)$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \end{aligned}$$

Объединяя первую, вторую и четвертую суммы вместе и замечая, что слагаемые, содержащие  $\frac{1}{x}$  (во второй и четвертой суммах), уничтожаются, перепишем последнее равенство в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) c_n x^{n-2} - \frac{c_0}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Отсюда ясно, что  $c_0 = 0$ . Это значит, что решение в виде ряда существует только тогда, когда  $y|_{x=0} = c_0 = 0$ .

Рекуррентная формула, при помощи которой коэффициент  $c_n$  выражается через  $c_{n-2}$ , выглядит так:

$$(n^2 - 1) c_n + c_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2).$$

Поскольку  $c_0 = 0$ , то отсюда последовательно получаем, что все коэффициенты с четными индексами равны нулю:

$$c_2 = c_4 = \dots = c_{2n} = \dots = 0.$$

Коэффициенты с нечетными индексами выразим через  $c_1$ :

$$\begin{aligned} c_3 = -\frac{c_1}{(3^2 - 1)}, \quad c_5 = \frac{c_1}{(3^2 - 1)(5^2 - 1)}, \quad \dots \\ \dots, \quad c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(3^2 - 1)(5^2 - 1) \dots [(2n+1)^2 - 1]}. \end{aligned}$$

Знаменателю выражения для  $c_{2n+1}$  удобнее придать несколько иной вид:

$$\begin{aligned} (3^2 - 1)(5^2 - 1) \dots [(2n+1)^2 - 1] = \\ = (2 \cdot 4)(4 \cdot 6) \dots 2n(2n+2) = \\ = (2 \cdot 4 \dots 2n)(4 \cdot 6 \dots 2(n+1)) = 2^{2n} n! (n+1)! \end{aligned}$$

Подставляя коэффициенты  $c_n$  в разложение (10.3) и полагая  $c_1 = \frac{1}{2}$ , получим функцию Бесселя порядка 1 (первого рода)

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!}. \quad (10.15)$$

График функции  $J_1(x)$  показан на рис. 41; эта функция нечетная. Функция  $J_1(x)$ , так же как и функция  $J_0(x)$ ,



Рис. 41.

имеет бесчиселенное множество корней  $\nu_i$ . Приведем значения первых из них с двумя знаками после запятой:

$$\nu_1 = 3,83, \quad \nu_2 = 7,02, \quad \nu_3 = 10,17, \quad \nu_4 = 13,32.$$

Как и на стр. 134, отметим, что  $\nu_n - \nu_{n-1} \approx \pi$  для больших  $n$ . Относительно таблиц значений функции  $J_1(x)$  смотри сноска на стр. 134. Отметим часто встречающуюся формулу

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad (10.16)$$

которая получается почлененным дифференцированием ряда (10.9) для  $J_0(x)$ . Эта формула позволяет при помощи таблиц для  $J_1(x)$

вычислять значения  $J'_0(\nu_k)$ , входящие в формулу (10.11).

Согласно формуле (10.16) функция  $J_0(x)$  имеет экстремумы именно в тех точках, в которых функция  $J_1(x)$  обращается в нуль, т. е. в точках  $\nu_i$ . Из рис. 42 видно, что корни функций Бесселя нулевого и первого порядков *перемежаются*, т. е. между двумя любыми последовательными корнями функции  $J_0(x)$  лежит обязательно один корень функции  $J_1(x)$ , и наоборот.

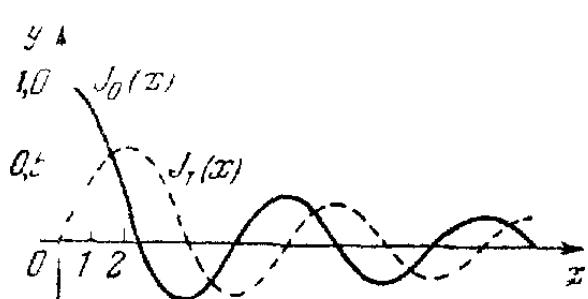


Рис. 42.

Рассуждая аналогично, можно найти выражения для функций Бесселя любого целого порядка  $k$ :

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+k}}{2^{2n+k} n! (n+k)!}. \quad (10.17)$$

Из общей формулы (10.17) при  $k=0$  и  $k=1$  получаются функции Бесселя  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$ . Во всех случаях мы каждый раз находим одно частное решение уравнения; формула для второго частного решения имеет более сложный вид. Соответствующая функция  $|N_k(x)|$  также стремится к  $\infty$  при  $x \rightarrow 0$ . Выражения для бесселевых функций не целого порядка мы не приводим.

## § 11. Колебания круглой мембранны

**32. Круглая мембрана.** В § 9 методом Фурье была решена задача о колебаниях прямоугольной мембранны. Сейчас мы покажем, как, пользуясь результатами предыдущего параграфа, можно тем же методом решить задачу о колебаниях круглой мембранны.

Пусть мембрана в состоянии покоя занимает круг радиуса  $R$  с центром в начале координат. Введем полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ . Уравнение границы круга будет при этом  $r=R$ . Отклонение точек мембранны  $u$  является теперь функцией полярных координат  $r$  и  $\varphi$  и времени  $t$ :

$$u=u(r, \varphi, t).$$

Воспользуемся результатами п. 3 введения, где было показано, что выражение для оператора Лапласа  $\Delta u$  в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Тогда уравнение колебаний мембранны  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$  перепишется следующим образом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \quad (11.1)$$

Краевое условие в полярных координатах записывается особенно просто:

$$u|_{r=R} = 0. \quad (11.2)$$

Начальные условия имеют вид

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(r, \varphi). \quad (11.3)$$

Мы будем рассматривать только *осесимметричные колебания* мембраны, т. е. предполагать, что начальные функции  $f(r, \varphi)$  и  $F(r, \varphi)$  не зависят от угла  $\varphi$ . Это значит, что величины начальных отклонений и скоростей зависят только от расстояния точки мембраны до ее центра. Иначе говоря, все точки окружности, концентрической с границей круга, в начальный момент имеют одни и те же скорости и отклонения. Тогда ясно, что и в любой момент времени величина отклонения не будет зависеть от полярного угла  $\varphi$  и будет являться функцией только  $r$  и  $t$ , т. е.  $u=u(r, t)$ . Это значит, что при любом фиксированном  $t$  форма колеблющейся мембраны будет *поверхностью вращения*.

При этом упрощающем предположении задача сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (11.4)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(r) \quad (11.5)$$

и краевым условием

$$u|_{r=R} = 0. \quad (11.6)$$

Как обычно в методе Фурье, полагаем

$$u(r, t) = U(r) T(t) \quad (11.7)$$

и отыскиваем частные решения, удовлетворяющие краевому условию (11.6). Подставляя (11.7) в краевое условие, найдем, что  $U(R) = 0$ .

Дифференцируя функцию (11.7), подставляя в уравнение (11.4) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{U''(r) + \frac{1}{r} U'(r)}{U(r)} = -\lambda^2. \quad (11.8)$$

Постоянная выбрана в виде  $-\lambda^2$  из тех же соображений, что и раньше. Доказательство того, что функция  $U(r)$  при ином выборе постоянной не может удовлетворять условию

$U(R) = 0$ , мы не приводим. Впрочем, физически ясно, что процесс носит колебательный характер, а уравнение для  $T(t)$  только тогда имеет решения в виде тригонометрических функций, когда в правой части (11.8) стоит отрицательная величина. Равенства (11.8) приводятся к двум уравнениям:

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad (11.9)$$

$$U''(r) + \frac{1}{r} U'(r) + \lambda^2 U(r) = 0. \quad (11.10)$$

Уравнение (11.10) совпадает с уравнением (10.10), изученным в § 10. Одним из его частных решений является функция  $J_0(\lambda r)$ . Второе частное решение — функцию  $N_0$  — мы брать не будем потому, что в центре мембраны (при  $r = 0$ ) оно обращается в бесконечность. В то же время ясно, что прогиб мембраны всегда есть величина конечная.

Поскольку произвольные постоянные войдут в общее решение уравнения (11.9), то решение уравнения (11.10) просто берем в виде

$$U(r) = J_0(\lambda r).$$

Подстановка краевого условия (11.6) приводит к уравнению, определяющему *собственные числа* задачи:

$$J_0(\lambda R) = 0.$$

Таким образом, собственными числами задачи являются величины

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad (11.11)$$

где  $\mu_k$  — корни функции Бесселя  $J_0(x)$ . После того как собственные числа найдены, решаем уравнение (11.9). Получим

$$T_k(t) = a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at.$$

*Собственные функции*  $u_k(r, t)$  таковы:

$$u_k(r, t) = (a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at) J_0(\lambda_k r). \quad (11.12)$$

Как видим, в выражение для собственных функций, в отличие от всех предыдущих задач, входят не только тригонометрические функции, но и функции Бесселя.

Составляем теперь сумму собственных функций

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at) J_0(\lambda_k r) \quad (11.13)$$

и подбираем коэффициенты так, чтобы выполнялись начальные условия

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right) = f(r),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \mu_k}{R} b_k J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right) = F(r).$$

(Мы заменили собственные числа  $\lambda_k$  их значениями.) Введем новую переменную, положив  $\frac{r}{R} = x$  (это равносильно тому, что мы выбрали масштаб, при котором радиус круга  $R$  равен единице;  $x$ , конечно, не является декартовой координатой точек мембранны). Тогда написанные ряды примут вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k x) = f(Rx), \quad (11.14)$$

$$\frac{a}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k b_k J_0(\mu_k x) = F(Rx). \quad (11.15)_*$$

Последние же равенства означают, что мы раскладываем функции  $f(Rx)$  и  $F(Rx)$  в ряды по функциям  $J_0(\mu_k x)$ , которые, как мы показали в § 10, удовлетворяют в интервале  $[0, 1]$  почти обычным условиям ортогональности. Предполагая, что разложения (11.14) и (11.15) имеют место и допускают почленное интегрирование, находим все неопределенные коэффициенты, воспользовавшись условиями ортогональности (10.11). Для этого умножим обе части каждого разложения на  $x J_0(\mu_n x)$  и интегрируем в пределах от 0 до 1; тогда слева останется только по одному слагаемому:

$$a_n \cdot \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_n) = \int_0^1 x J_0(\mu_n x) f(Rx) dx,$$

$$\frac{a \mu_n}{R} b_n \cdot \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_n) = \int_0^1 x J_0(\mu_n x) F(Rx) dx.$$

Воспользовавшись равенством  $J_0''(\mu_n) = J_1'(\mu_n)$  (см. формулу (10.16)), окончательно получим (индекс  $n$  мы заменили на  $k$ ):

$$a_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x J_0(\mu_k x) f(Rx) dx,$$

$$b_k = \frac{2R}{a\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x J_0(\mu_k x) F(Rx) dx.$$

Подставляя коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  в ряд (11.13), мы и завершаем решение задачи.

**33. Стоячие волны круглой мембраны.** Как и во всех предыдущих случаях, функции  $u_k(r, t)$ , определенные формулой (11.12), представляют *стоячие волны*. *Пучности* и *узлы* располагаются здесь по концентрическим окружностям. Узловые окружности получаются при тех значениях  $r$ , для которых

$$J_0(\lambda_k r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = 0.$$

Кроме очевидного значения  $r = R$  (края мембраны), это будут значения, определяемые из соотношений

$$\frac{\mu_k r}{R} = \mu_1, \quad \frac{\mu_k r}{R} = \mu_2, \dots, \quad \frac{\mu_k r}{R} = \mu_{k-1},$$

т. е.

$$r_1 = \frac{\mu_1}{\mu_k} R, \quad r_2 = \frac{\mu_2}{\mu_k} R, \dots, \quad r_{k-1} = \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k} R.$$

Ясно, что нет смысла приравнивать  $\frac{\mu_k r}{R}$  корням функции Бесселя  $J_0(x)$  с индексами большими, чем  $k$ , так как тогда  $r$  получилось бы больше  $R$ . Если, скажем,  $\frac{\mu_k r}{R} = \mu_{k+1}$ , то  $r = \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} R > R$ .

Следовательно, стоячая волна  $u_k(r, t)$  имеет  $k$  узловых окружностей (считая и край мембраны). Между ними располагаются окружности пучностей. Они соответствуют тем значениям  $r$ , при которых функция  $J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$  достигает максимума

или минимума. Это будут корни уравнения  $J'_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)=0$ , или, если воспользоваться связью между  $J'_0(x)$  и  $J_1(x)$ , корни уравнения  $J_1\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)=0$ . В частности, пучность будет всегда при  $r=0$ .

Решение конкретных примеров на колебания круглых мембран вызывает обычно значительные затруднения, так как в формулы для коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  входят функции Бесселя под знаком интеграла. Эти интегралы крайне редко выражаются через известные функции, и приходится прибегать к численному интегрированию; последнее, впрочем, весьма облегчено наличием подробных таблиц бесселевых функций.

## ГЛАВА II

# УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФУЗИИ

### § 12. Уравнение линейной теплопроводности

**34. Вывод уравнения линейной теплопроводности.** Рассмотрим металлический стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Теплоизолированность боковой поверхности стержня означает, что через поверхность не происходит теплообмена с окружающей средой<sup>1)</sup>. Если этот стержень в начальном состоянии неравномерно нагрет, то благодаря теплопроводности в нем будет происходить передача тепла от более нагретых частей к менее нагретым. В простейшем случае, когда притока тепла извне нет и концы стержня тоже теплоизолированы, температура точек стержня с течением времени будет, изменяясь, выравниваться и в конечном итоге станет постоянной во всем стержне. Если возможен теплообмен с окружающей средой через концы стержня



Рис. 43.

(торцевые сечения) или в некоторых участках стержня выделяется тепло, то распределение температуры будет соответственно усложняться.

В задаче линейной теплопроводности стержень предполагается настолько тонким, что в каждый момент времени температура всех точек данного поперечного сечения стержня (рис. 43)

<sup>1)</sup> Задача о теплопроводности стержня при условии теплообмена с внешней средой через боковую поверхность будет рассмотрена в п. 36.

будет одной и той же. Если принять ось стержня за ось абсцисс, то температура  $u$  будет являться функцией координаты  $x$  и времени  $t$ . При постоянном  $t$  функция  $u(x, t)$  представляет зависимость температуры точек стержня в данный момент времени от их расстояния до начала координат; частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x}$  выражает при этом скорость изменения температуры в направлении оси  $Ox$ . Если зафиксировать абсциссу  $x$ , то  $u(x, t)$  выражает закон изменения температуры в данном сечении стержня с течением времени.

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на следующих физических предпосылках:

1. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на  $\Delta u$ , равно

$$c\rho V \Delta u, \quad (12.1)$$

где  $V$  — объем тела,  $\rho$  — его плотность,  $c$  — удельная теплоемкость.

2. Количество тепла, протекающее через поперечное сечение стержня за момент времени  $\Delta t$  (*тепловой поток*), пропорционально площади сечения, скорости изменения температуры в направлении, перпендикулярном к сечению, и промежутку времени  $\Delta t$ , т. е. равно

$$-kS \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t, \quad (12.2)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения,  $k$  — *коэффициент теплопроводности*.

Знак минус в формуле (12.2) объясняется тем, что величину теплового потока мы будем считать положительной, когда тепло проходит в сторону возрастания  $x$ . Если  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ , то это значит, что с возрастанием  $x$  температура повышается, а так как тепло переходит от более нагретых участков к менее нагретым, то тепловой поток будет направлен в сторону уменьшения  $x$ , т. е. его величина будет отрицательной. Мы будем считать коэффициент теплопроводности постоянным; это предположение оправдывается, если стержень однородный и температура меняется в небольших пределах. Заметим еще, что способы экспери-

ментального определения коэффициентов теплопроводности различных материалов весьма сложны и во многом опираются на развивающую дальше математическую теорию теплопроводности.

Выделим участок стержня, ограниченный поперечными сечениями с абсциссами  $x$  и  $x + \Delta x$ , и составим для него уравнение *теплового баланса*. По формуле (12.2) количество тепла, входящее через поперечное сечение с абсциссой  $x$  за промежуток времени  $\Delta t$ , равно  $-kS \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t$ . Если отбросить бесконечно малые величины высших порядков, то значение частной производной по  $x$  в точке  $x + \Delta x$  будет равно  $\frac{\partial u}{\partial x} + d_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$  (см. [1], п. 109). Поэтому величина теплового потока, выходящего через сечение  $x + \Delta x$ , равна  $-kS \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \right) \Delta t$ . Взяв разность величин входящего и выходящего тепловых потоков, мы получим количество тепла  $\Delta Q$ , сообщенное выбранному участку стержня за время  $\Delta t$ :

$$\Delta Q = -kS \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t + kS \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \right) \Delta t = kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta t.$$

С другой стороны, за этот же промежуток времени температура изменилась на величину  $\frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$  (опять-таки с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Поэтому по формуле (12.1) сообщенное количество тепла равно

$$\Delta Q = c_p S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

(объем  $V$  равен  $S \Delta x$ ).

Приравнивая полученные выражения для  $\Delta Q$  и сокращая на общий множитель  $S \Delta x \Delta t$ , составим уравнение

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (12.3)$$

Введя обозначение  $\frac{k}{c_p} = a^2$ , окончательно получим *основное уравнение теплопроводности для однородного стержня без тепловых источников*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (12.4)$$

Постоянную  $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$  называют *коэффициентом температуропроводности*. Уравнение (12.4) является *однородным и линейным*.

Предположим теперь дополнительно, что в некоторых участках стержня может возникать или поглощаться тепло. Как говорят, внутри стержня имеются *тепловые источники*. Выделение (или поглощение) тепла очень удобно характеризовать с помощью *плотности тепловых источников*. Под плотностью тепловых источников понимают функцию  $F(x, t)$  такую, что на малом участке стержня  $(x, x + \Delta x)$  за малый промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$  выделяется количество тепла, равное (с точностью до бесконечно малых высшего порядка)

$$F(x, t) \Delta x \Delta t. \quad (12.5)$$

(Если  $F(x, t) < 0$ , то тепло не выделяется, а поглощается.)

Например, при пропускании через стержень постоянного электрического тока в нем будет выделяться тепло, причем в этом случае  $F(x, t) = \text{const} = I^2 R$ , где  $I$  — ток, а  $R$  — сопротивление единицы длины стержня.

При составлении уравнения теплового баланса (12.3) надо учесть тепло, возникающее в рассматриваемом участке стержня. Для этого прибавим к правой части уравнения (12.3) величину, определяемую формулой (12.5) и разделенную на  $S\Delta x \Delta t$ . Получим:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S} F(x, t).$$

Разделив обе части равенства на  $c\rho$  и введя обозначение  $\frac{1}{c\rho S} F(x, t) = g(x, t)$ , придем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t). \quad (12.6)$$

Уравнение (12.6), полученное в предложении, что внутри стержня имеются тепловые источники, в отличие от уравнения (12.4) является *неоднородным*.

Разумеется, полученные уравнения теплопроводности выведены при условии некоторой идеализации процесса.

**35. Начальное и краевые условия.** Перейдем теперь к начальному и краевым условиям. Начальное условие для уравнения теплопроводности состоит в задании темпе-

ратуры во всех точках стержня в некоторый момент, от которого ведется отсчет времени; обычно полагают, что в начальный момент  $t = 0$ ; тогда начальное условие имеет вид

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x), \quad (12.7)$$

где  $f(x)$  — данная функция.

Краевые условия должны выполняться там, где стержень может иметь теплообмен с окружающей средой, т. е. на торцевых сечениях стержня (напомним, что боковая поверхность тела по условию теплоизолирована). Пусть начало стержня совпадает с началом координат ( $x = 0$ ), а его конец имеет абсциссу  $x = l$ . Самый простой случай краевых условий тот, когда концы стержня поддерживаются при постоянной температуре. Это значит, что

$$u(0, t) = u|_{x=0} = \tilde{u}_0, \quad u|_{x=l} = \tilde{u}_l, \quad (12.8)$$

где  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{u}_l$  — заданные числа.

Возможны, однако, и более общие краевые условия, когда на торцевых сечениях стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Этот закон состоит в том, что *поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды*, т. е. равен

$$h(u - \tilde{u}), \quad (12.9)$$

где  $u$  — температура конца стержня,  $\tilde{u}$  — температура окружающей среды и  $h$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств стержня и среды. Коэффициент  $h$  называется *коэффициентом теплообмена* (или еще *коэффициентом внешней теплопроводности*); мы будем считать его для данного торцевого сечения стержня *постоянным*<sup>1</sup>). Условимся также, что  $h > 0$ , т. е. что поток тепла считается положительным, когда тепло уходит из стержня

<sup>1)</sup> Как показывают точные эксперименты, коэффициент  $h$  зависит также от температуры. Мы эту зависимость учитывать не будем. Отметим лишь, что в связи с этим обстоятельством в экспериментах по теплопроводности стараются по возможности уменьшить теплообмен.

в окружающую среду ( $u > \tilde{u}$ ), и отрицательным в противоположном случае. Количество тепла, передаваемое со всего торцевого сечения за момент  $\Delta t$ , будет равно  $h(u - \tilde{u})S\Delta t$ .

По закону сохранения энергии количество уходящего тепла должно быть в точности равно потоку тепла, проходящего через рассматриваемое горцевое сечение в силу теплопроводности стержня.

Согласно формуле (12.2) тепловой поток, проходящий через поперечное сечение стержня в направлении оси  $Ox$ , равен  $-kS \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t$ . На правом конце стержня направление потока, идущего во внешнюю среду, совпадает с направлением оси  $Ox$  и поток равен  $-kS \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}$ . На левом конце эти направления противоположны и поэтому поток равен  $kS \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}$ . Мы также будем считать, что внешние среды могут быть на концах стержня разными, так что могут быть различными  $h$  и  $\tilde{u}$ ; пусть на левом конце  $h = h_0$  и  $\tilde{u} = \tilde{u}_0$ , а на правом  $h = h_l$ ,  $\tilde{u} = \tilde{u}_l$ . Тогда краевые условия на торцевых сечениях запишутся в виде

$$\begin{aligned} k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= h_0 \{u\}_{x=0} - \tilde{u}_0, \\ -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} &= h_l \{u\}_{x=l} - \tilde{u}_l, \end{aligned} \quad (12.10)$$

где  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{u}_l$  — заданные температуры внешней среды, которые мы будем считать известными функциями времени, а в наиболее простом случае — постоянными величинами.

Если какой-либо конец стержня теплоизолирован, то соответствующий коэффициент теплообмена равен нулю и краевое условие на этом конце примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (12.11)$$

Условия (12.8) также можно рассматривать как частный случай общих условий (12.10) при очень больших значениях

коэффициентов теплообмена. Записав, например, первое условие (12.10) в виде

$$\frac{k}{h_0} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = u|_{x=0} - \tilde{u}_0$$

и перейдя к пределу при  $h_0 \rightarrow \infty$ , получим первое из условий (12.8). Разумеется, можно рассматривать любую комбинацию краевых условий на разных концах стержня.

Подводя итоги сказанному в двух последних пунктах, мы можем следующим образом сформулировать математическую задачу теплопроводности для однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью без тепловых источников.

Отыскивается температура  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющая уравнению (12.4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

начальному условию (12.7)

$$u|_{t=0} = f(x)$$

и краевым условиям (12.10)

$$\begin{aligned} k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= h_0 \{u|_{x=0} - \tilde{u}_0\}, \\ -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} &= h_l \{u|_{x=l} - \tilde{u}_l\} \end{aligned}$$

(или их частным случаям (12.8) и (12.11)).

В теории дифференциальных уравнений с частными производными доказывается, что эта задача всегда имеет единственное решение (при некоторых достаточно общих предположениях относительно заданных функций  $f(x)$ ,  $\tilde{u}_0(t)$  и  $\tilde{u}_l(t)$ ).

**36. Теплопроводность в стержне при наличии теплообмена через боковую поверхность.** Сформулируем задачу теплопроводности в стержне *при условии теплообмена с внешней средой через боковую поверхность*. Правда, здесь предположение постоянства температуры по любому сечению в каждый момент времени является физически менее оправданным, поскольку в этом случае вблизи контура сечения температура должна меняться довольно

резко. В этой задаче дифференциальное уравнение имеет уже вид, отличный от (12.4). Для вывода этого уравнения обозначим через  $S$  площадь поперечного сечения стержня, через  $p$  — периметр поперечного сечения и рассмотрим произвольный отрезок стержня от сечения с абсциссой  $x$  до сечения с абсциссой  $x + \Delta x$ . Как было установлено в п. 34, количество тепла, сообщенное выбранному участку стержня за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$  в результате прохождения вдоль стержня теплового потока, равно  $kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta t$ . По закону Ньютона количество тепла, поступающего в отрезок стержня через боковую поверхность за этот же промежуток времени, равно

$$h [\tilde{u}(x, t) - u(x, t)] p \Delta x \Delta t,$$

где  $p \Delta x$  — площадь боковой поверхности,  $h$  — коэффициент теплообмена и  $\tilde{u}(x, t)$  — температура внешней среды. Составляя уравнение теплового баланса, получим

$$kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta t + h [\tilde{u} - u] p \Delta x \Delta t = c\rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

где правая часть представляет тепло, благодаря которому температура точек стержня изменилась на  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Разделив обе части равенства на  $c\rho S \Delta x \Delta t$ , приведем уравнение к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 (\tilde{u} - u), \quad (12.12)$$

где  $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$  — коэффициент температуропроводности, а  $b^2 = \frac{ph}{c\rho S}$ . Если  $h = 0$ , т. е. боковая поверхность стержня теплоизолирована, то  $b^2 = 0$  и мы вновь получаем уравнение (12.4). Начальные и граничные условия для уравнения (12.12) формулируются так же, как и для уравнения (12.4) (см. п. 35). Важно отметить, что в случае постоянной температуры внешней среды, т. е. в практически наиболее интересном случае, уравнение (12.12) с помощью замены неизвестной функции может быть сведено к уравнению (12.4). Действительно, пусть  $\tilde{u} = \text{const}$ . Можно считать, что  $\tilde{u} = 0$ , так как иначе нам достаточно было бы начать отсчет температуры от значения  $\tilde{u}$ , что равносильно введению новой функции  $u_1 = u - \tilde{u}$ . Легко проверить, что при такой замене уравнение (12.12) приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u. \quad (12.13)$$

Полагая  $u = e^{-b^2 t} v(x, t)$ , где  $v$  — новая искомая функция, найдем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b^2 e^{-b^2 t} v + e^{-b^2 t} \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-b^2 t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Подставляя в уравнение (12.13), получим

$$-b^2 e^{-b^2 t} v + e^{-b^2 t} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 e^{-b^2 t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2 e^{-b^2 t} v$$

или, после сокращения,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (12.14)$$

Начальное условие для функции  $v(x, t)$  сохраняется, так как

$$v|_{t=0} = u|_{t=0}.$$

Краевые условия изменятся и, например, для случая постоянства температуры на концах стержня (см. (12.8)) примут вид

$$v|_{x=0} = \tilde{u}_0 e^{b^2 t}, \quad v|_{x=L} = \tilde{u}_L e^{b^2 t}. \quad (12.15)$$

Здесь правые части являются уже не постоянными величинами, а известными функциями времени  $t$ . Метод решения таких задач будет указан в п. 52.

### § 13. Теплопроводность в бесконечном стержне

**37. Метод Фурье для бесконечного стержня.** Рассмотрим тонкий длинный теплопроводящий стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Согласно результатам § 12 температура  $u(x, t)$  точек этого стержня при отсутствии тепловых источников удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (13.1)$$

Если стержень очень длинный, то на процессы, протекающие в его средней части, главное влияние оказывает начальное распределение температуры; влияние температурных условий на концах стержня в течение довольно длительного времени почти не будет сказываться. В задачах такого типа стержень считают бесконечным. Краевые условия при этом

отпадают, и на исходную функцию  $u(x, t)$  накладывается только начальное условие

$$u|_{t=0} = f(x), \quad (13.2)$$

где функция  $f(x)$  определена на всей числовой оси ( $-\infty < x < \infty$ ). Задача решения уравнения (13.1) при условии (13.2) называется *задачей с начальным условием* или *задачей Коши*.

Прежде чем решать уравнение (13.1) при начальном условии (13.2), мы несколько упростим задачу, введя вместо времени  $t$  новую переменную

$$\tau = a^2 t. \quad (13.3)$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = a^2 \frac{\partial u}{\partial \tau},$$

и уравнение (13.1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (13.4)$$

не зависящий от физических свойств стержня. Так как при  $t = 0$  и  $\tau = 0$ , то в качестве начального условия мы будем иметь

$$u|_{\tau=0} = f(x). \quad (13.5)$$

Чтобы решить эту задачу, применим *метод разделения переменных и суперпозиции частных решений Фурье*. Этот метод состоит из двух частей. Сначала мы находим частные решения уравнения (13.4), имеющие вид  $X(x) T(\tau)$  произведения двух функций, каждая только от одной из независимых переменных. Подставляя это произведение вместо  $u$  в уравнение (13.4), получим:

$$X(x) T'(\tau) = X''(x) T(\tau),$$

или

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (13.6)$$

Обе части этого уравнения должны быть постоянными, поскольку его левая часть не зависит от  $x$ , а правая — от  $\tau$ , т. е. ни левая, ни правая части не могут зависеть ни от  $x$ , ни от  $\tau$ . В этом рассуждении — ключ к методу разделения переменных Фурье. Обозначим теперь постоянную, которой

должны быть равны и левая и правая части равенства (13.6), через  $c$ . Тогда уравнение (13.6) распадается на два уравнения:

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = c, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = c. \quad (13.7)$$

Первое из них имеет общее решение

$$T(\tau) = Ce^{c\tau}.$$

Поскольку ни в одном сечении стержня (т. е. ни при каком фиксированном  $x$ ) температура  $u = X(x) T(\tau)$  не может неограниченно возрастать по абсолютной величине при  $\tau \rightarrow \infty$  (т. е. при  $t \rightarrow \infty$ ),  $c$  должно быть отрицательно. Положим  $c = -\lambda^2$ , тогда

$$T(\tau) = Ce^{-\lambda^2\tau}.$$

Второе из уравнений (13.7) принимает вид

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

и имеет общее решение

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Таким образом, мы получим частное решение нашего уравнения (13.4):

$$u = (AC \cos \lambda x + BC \sin \lambda x) e^{-\lambda^2\tau},$$

или

$$u = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-\lambda^2\tau}, \quad (13.8)$$

где  $\alpha = AC$  и  $\beta = BC$ . Здесь  $C$ ,  $A$ ,  $B$ , а следовательно  $\alpha$  и  $\beta$ , — произвольные постоянные;  $\lambda$  также обозначает произвольное число.

Функция (13.8) является при любом фиксированном  $\lambda$  решением уравнения (13.4), и мы можем, конечно, для каждого значения  $\lambda$  выбирать разные постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ . Это означает, что  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть произвольными функциями от  $\lambda$ :  $\alpha = \alpha(\lambda)$ ,  $\beta = \beta(\lambda)$ , так что окончательно мы имеем семейство частных решений уравнения (13.4):

$$u_\lambda(x, \tau) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2\tau}, \quad (13.9)$$

зависящее от параметра  $\lambda$ , который может принимать все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тем самым первая часть метода Фурье завершена.

Вторая часть метода Фурье — суперпозиция полученных решений  $u_i(x, \tau)$  — состоит в следующем. Уравнение (13.4) линейное и однородное; оно имеет, как мы только что установили, бесчисленное множество частных решений, зависящих от непрерывно изменяющегося параметра  $\lambda$ . Согласно п. 2 введения, функция

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x, \tau) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \end{aligned} \quad (13.10)$$

также является решением уравнения (13.4).

Нам остается теперь только подобрать неизвестные функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  так, чтобы решение (13.10) удовлетворяло начальному условию (13.5), т. е. чтобы

$$u|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x). \quad (13.11)$$

Последнее равенство означает, что функцию  $f(x)$  надо разложить в *интеграл Фурье* (см. [1], гл. XII, § 3).

Напомним, что разложение функций  $f(x)$  в интеграл Фурье возможно, если функцию  $f(x)$  можно разложить в ряд Фурье в любом конечном интервале и если интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  сходится, т. е., как говорят, функция  $f(x)$  *абсолютно интегрируема на всей оси Ох*. Оба условия выполняются во всякой физической задаче (функция  $f(x)$  — начальное распределение температуры).

Второе условие, т. е. сходимость интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ ,

означает *конечность тепловой энергии стержня* (так как тепловая энергия пропорциональна абсолютной температуре).

Разложение функции  $f(x)$  в интеграл Фурье имеет вид<sup>1)</sup>

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi.$$

Так как  $\cos \lambda(\xi - x) = \cos \lambda\xi \cos \lambda x + \sin \lambda\xi \sin \lambda x$ , то интеграл Фурье можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f(x) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi d\xi \right) \cos \lambda x + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Сравнивая это разложение и формулу (13.11), заключаем, что неизвестные пока функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  должны определяться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi d\xi, \\ \beta(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

Отметим, что из второго условия, наложенного выше на функцию  $f(x)$ , вытекает, что  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  ограничены:

$$|\alpha(\lambda)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi, \quad |\beta(\lambda)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi.$$

<sup>1)</sup> Так как  $\cos \lambda(\xi - x)$  — четная функция относительно  $\lambda$ , то разложение можно написать и так:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi.$$

Найдя таким образом функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  по формулам (13.12) и подставив их в решение (13.10), мы получим функцию

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \{ \cos \lambda x \cos \lambda \xi + \\ &\quad + \sin \lambda x \sin \lambda \xi \} e^{-\lambda^2 \tau} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (x - \xi) e^{-\lambda^2 \tau} d\xi, \end{aligned} \quad (13.13)$$

которая одновременно удовлетворяет и уравнению (13.4) и начальному условию (13.5). Эта функция (13.13) решает, следовательно, поставленную в этом параграфе задачу о теплопроводности в бесконечном стержне.

Докажем, что интеграл (13.10), в котором функции  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  определены формулами (13.12), действительно является решением уравнения (13.4) для всех  $x$  и  $\tau \geq \tau_0 < 0$ . Как было отмечено выше, функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  ограничены:  $|\alpha(\lambda)| < K$  и  $|\beta(\lambda)| < K$  для всех  $\lambda$ , где  $K = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$ . В этих предположениях

$$|u_\lambda(x, \tau)| = |\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x| e^{-\lambda^2 \tau} \leq 2K e^{-\lambda^2 \tau_0}.$$

Далее,

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial \tau} = -[\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \lambda^2 e^{-\lambda^2 \tau}$$

и при соблюдении тех же условий

$$\left| \frac{\partial u_\lambda}{\partial \tau} \right| \leq 2K \lambda^2 e^{-\lambda^2 \tau_0}.$$

Совершенно аналогично получим, что

$$\left| \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} \right| \leq 2K \lambda^2 e^{-\lambda^2 \tau_0}.$$

В правых частях неравенств, полученных для функции  $u_\lambda(x, \tau)$  и ее производных, стоят функции, зависящие только от параметра  $\lambda$ , причем интегралы от этих функций сходятся. Для доказательства этого напомним предварительно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\pi}.$$

Этот интеграл называется *интегралом Пуассона* (об его вычислении см. [1], п. 131). Интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau_0} d\lambda$  вычисляется с помощью замены переменной. Полагая  $\lambda \sqrt{\tau_0} = \mu$ , находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau_0} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{\tau_0}}.$$

Далее, интегрируя по частям, полагая  $\lambda = u$  и  $\lambda e^{-\lambda^2 \tau_0} d\lambda = dv$ , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda^2 \tau_0} d\lambda = -\frac{\lambda e^{-\lambda^2 \tau_0}}{2\tau_0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau_0} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\tau_0 \sqrt{\tau_0}},$$

так как первое слагаемое стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow \pm \infty$ .

Таким образом, мы доказали, что сам интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} u_{\lambda}(x, \tau) d\lambda$ , так и интегралы от частных производных подынтегральной функции сходятся правильно. Согласно п. 2 введения (см. мелкий шрифт на стр. 20) в этом случае функция (13.10) действительно является решением уравнения (13.4). Это справедливо для всех значений  $x$  и для всех положительных значений  $\tau$ .

**38. Преобразование решения уравнения теплопроводности.** Для того чтобы решение (13.13) можно было физически истолковать, необходимо его преобразовать. Прежде всего заметим, что если в правой части формулы (13.13) изменить порядок интегрирования, то получится следующая формула для  $u(x, \tau)$ :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda \right\} d\xi, \quad (13.14)$$

где внутренний интеграл по  $\lambda$  в правой части уже не содержит заданной функции  $f(\xi)$ . Если мы произведем замену переменной  $\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}$  и введем обозначение  $\frac{x - \xi}{\sqrt{\tau}} = \omega$ , то

будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma \omega d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\tau}} I(\omega).$$

Интеграл

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma \omega d\sigma$$

может быть вычислен следующим специальным приемом. Во-первых, мы замечаем, что  $I(0)$  есть *интеграл Пуассона*

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}.$$

Образуем далее (см. формулу (17) введения) производную

$$I'(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma e^{-\sigma^2} \sin \sigma \omega d\sigma. \text{ Преобразуем } I'(\omega), \text{ интегрируя}$$

по частям:

$$\begin{aligned} I'(\omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \sigma \sin \sigma \omega d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} e^{-\sigma^2} \sin \sigma \omega \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma \omega d\sigma = - \frac{\omega}{2} I(\omega) \end{aligned}$$

зк как внеинтегральный член обращается в нуль при  $\sigma \rightarrow +\infty$  и  $\sigma \rightarrow -\infty$ ). Решая получившееся дифференциальное уравнение для функции  $I(\omega)$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{I'(\omega)}{I(\omega)} &= - \frac{\omega}{2}, \quad \ln I(\omega) = - \frac{\omega^2}{4} + \ln C, \\ I(\omega) &= C e^{-\frac{\omega^2}{4}}. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что  $I(0) = \sqrt{\pi}$ , находим произвольную постоянную:  $C = \sqrt{\pi}$ .

Итак,

$$I(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}},$$

а так как  $\omega = \frac{x-\xi}{\sqrt{\tau}}$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda (x - \xi) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\tau}} I(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}$$

Подставляя найденное выражение в формулу (13.14), окончательно найдем, что

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} d\xi. \quad (13.15)$$

После того как решение (13.13) преобразовано к виду (13.15), можно непосредственно проверить, что функция  $u(x, \tau)$  удовлетворяет уравнению (13.4) и начальному условию (13.5). Второе легче всего сделать, если вместо  $\xi$  ввести новую переменную интегрирования:

$$\omega = \frac{x-\xi}{2\sqrt{\tau}}, \quad \xi = x - 2\omega\sqrt{\tau}, \quad d\xi = -2\sqrt{\tau}d\omega,$$

и записать интеграл (13.15) в таком виде, чтобы  $\tau$  уже не стояло в знаменателе, т. е.

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2\omega\sqrt{\tau}) e^{-\omega^2} d\omega.$$

Тогда

$$u|_{\tau=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\omega^2} d\omega = f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = f(x),$$

т. е. условие (13.5) выполняется.

Чтобы проверить, удовлетворяет ли функция (13.15) уравнению (13.4), заметим, что функция

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} = \varphi_{\xi}(x, \tau) \quad (13.16)$$

является решением уравнения (13.4) при любом  $\xi$ . Действительно,

$$\frac{\partial \varphi_{\xi}}{\partial \tau} = \left\{ -\frac{1}{4\tau\sqrt{\pi\tau}} + \frac{(x-\xi)^2}{8\tau^2\sqrt{\pi\tau}} \right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}$$

и

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\xi}}{\partial x^2} = \left\{ -\frac{1}{4\tau\sqrt{\pi\tau}} + \frac{(x-\xi)^2}{8\tau^2\sqrt{\pi\tau}} \right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}.$$

Следовательно,  $\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_\xi}{\partial x^2}$ , т. е. уравнение (13.4) удовлетворяется. Поэтому функция  $u(x, t)$ , полученная интегрированием функции  $\varphi_\xi(x, t)$  по параметру  $\xi$ , также является решением уравнения (13.4) (см. п. 2 введения).

Чтобы от функции  $u(x, t)$ , являющейся решением уравнения (13.4) с начальным условием (13.5), перейти к решению  $u(x, t)$  исходного уравнения  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  с начальным условием  $u|_{t=0} = f(x)$ , мы должны вспомнить, что  $t = a^2 t$ , и тогда по формуле (13.15) получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (13.17)$$

**39. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и его физический смысл.** Перейдем теперь к выяснению физического смысла полученного решения (13.17). Как мы уже видели, функция  $\varphi_\xi(x, t)$ , определенная формулой (13.16), является решением уравнения (13.4). Подставляя  $t = a^2 t$ , мы получим функцию

$$\varphi_\xi(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \quad (13.18)$$

являющуюся решением исходного уравнения (13.1). Функция  $\varphi_\xi(x, t)$  зависит от  $x$  и  $t$ <sup>1)</sup> и, кроме того, от произвольного параметра  $\xi$ . Она называется *фундаментальным решением уравнения теплопроводности* и имеет важный физический смысл, связанный с понятием теплового импульса.

*Физическим тепловым импульсом* мы будем называть следующее начальное распределение температуры:

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} u_0, & \text{если } |x - x_0| < \epsilon, \\ 0, & \text{если } |x - x_0| > \epsilon \end{cases}$$

(см. рис. 44), где  $u_0$  — постоянная и  $\epsilon > 0$ . Такое начальное распределение температуры возникает, если в стержень, тем-

<sup>1)</sup> При  $t = 0$  функция  $\varphi_\xi(x, t)$  не определена. Исследование ее поведения при  $t \rightarrow 0$  будет проведено несколько позже.

пература которого в каждой точке первоначально равна нулю, в момент  $t=0$  на отрезке от  $x_0-\varepsilon$  до  $x_0+\varepsilon$  внезапно введено некоторое количество тепла (например, если к этому отрезку на мгновение поднесено высокотемпературное пламя, так что температура этого отрезка в момент  $t=0$  подскакивает до значения  $u_0$ ). Это количество тепла  $\theta_0$  пропорционально заштрихованной на рис. 44 площади  $2\varepsilon u_0$ , а именно, если  $S$  — площадь сечения стержня, т. е.  $2\varepsilon S$  — объем отрезка стержня,  $2\varepsilon Sp$  — его масса, то  $\theta_0 = 2\varepsilon Sp cu_0$ , где  $c$  — удельная теплоемкость.

Практически температура, конечно, не может представляться разрывной функцией  $f_\varepsilon(x)$ , но график температуры будет очень близок к графику  $f_\varepsilon(x)$  (он будет иметь примерно вид пунктирной линии на рис. 44) и будет тем меньше отличаться от графика  $f_\varepsilon(x)$ , чем резче и кратковременнее будет подогрев. Тот факт, что на графике функции  $f_\varepsilon(x)$  температура в точках  $x_0-\varepsilon$  и  $x_0+\varepsilon$  не определена, не имеет для нас никакого значения (если разрывную функцию  $f_\varepsilon(x)$  представить интегралом Фурье, то его значение в этих точках будет равно  $\frac{u_0}{2}$ , поэтому можно считать, что и температура равна  $\frac{u_0}{2}$ ).

При таком физическом тепловом импульсе в качестве начального распределения температуры решение (13.17) задачи теплопроводности будет иметь вид

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (13.19)$$

По теореме о среднем интегрального исчисления

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = 2\varepsilon e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4a^2t}},$$

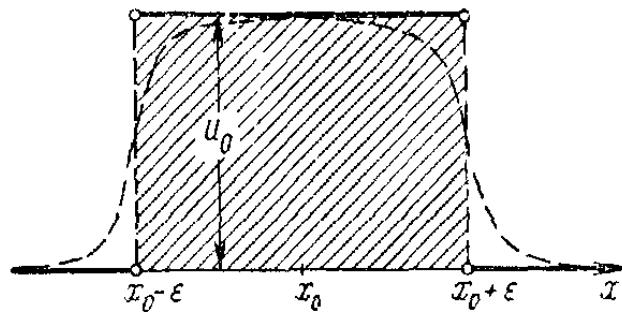


Рис. 44.

где  $\xi$  — некоторая точка, лежащая внутри интервала интегрирования:  $x_0 - \epsilon < \xi < x_0 + \epsilon$ . Таким образом, решение (13.19) может быть записано и так:

$$u(x, t) = \frac{2\epsilon n_0}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} = \frac{\theta_0}{Spc} \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

(так как  $2\epsilon n_0 = \frac{\theta_0}{Spc}$ ). Предположим конкретно, что подведенное количество тепла  $\theta_0 = Spc$  (чтобы исключить физические параметры стержня). Тогда мы получим решение в случае физического теплового импульса в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (13.20)$$

От физического теплового импульса перейдем теперь к *точечному (идеальному) тепловому импульсу*, устремляя  $\epsilon$  к нулю. Так как в наших предположениях  $2\epsilon n_0 = 1$ , то при  $\epsilon \rightarrow 0$  имеем  $n_0 \rightarrow +\infty$ . Кроме того, очевидно, что  $\xi \rightarrow x_0$ , так что решение (13.20) превратится теперь (для точечного теплового импульса) в функцию

$$u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} = \varphi_{x_0}(x, t), \quad (13.21)$$

т. е. в *фундаментальное решение* (13.18) при значении параметра  $\xi = x_0$ .

Точечный тепловой импульс является, конечно, еще в большей мере абстракцией, чем физический импульс на отрезке. Но он также может быть приближенно реализован, если пламя, о котором шла речь выше, будет очень узким.

Математически начальное распределение температуры при точечном импульсе представляется так называемой *импульсной функцией Дирака*  $\delta(x - x_0)$ , представляющей как бы предел физического импульса  $f_\epsilon(x)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ей приписываются следующие свойства:

$$(1) \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq x_0, \\ +\infty, & \text{если } x = x_0 \end{cases}$$

(последнее объясняется тем, что  $u_0 \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; это значит, что температура в точке  $x_0$  становится равной  $\infty$ ).

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1,$$

так как в наших предположениях  $2\varepsilon u_0 = 1$  при любом  $\varepsilon$  (в последнем интеграле нижний предел может быть заменен любым числом, меньшим  $x_0$ , а верхний — любым числом, большим  $x_0$ ).

Итак, фундаментальное решение  $\varphi_{x_0}(x, t)$  является решением задачи теплопроводности в бесконечном стержне (с теплоизолированной боковой поверхностью) при начальном распределении температуры  $f(x) = \delta(x - x_0)$ .

Рассмотрим теперь, как распространяется тепло в стержне после точечного импульса. Для этого надо исследовать графики фундаментального решения  $\varphi_{x_0}(x, t)$  [см. формулу (13.21)] для разных значений  $t > 0$ . Эти кривые называются кривыми Гаусса (сама функция  $\varphi$  и ее график играют важную роль в теории вероятностей).

Мы установим следующие свойства функции  $\varphi_{x_0}(x, t)$  и ее графика.

1. График функции  $\varphi_{x_0}(x, t)$  при любом значении  $t$  симметричен относительно прямой  $x = x_0$  (см. рис. 45). Максимум достигается при  $x = x_0$ , и он равен  $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$  (из

физических соображений также ясно, что в каждый

момент максимальная температура будет в той точке стержня, где был приложен импульс). Если мы рассмотрим фиксированный момент  $t > 0$ , то эта максимальная температура будет обратно пропорциональна коэффициенту теплопроводности

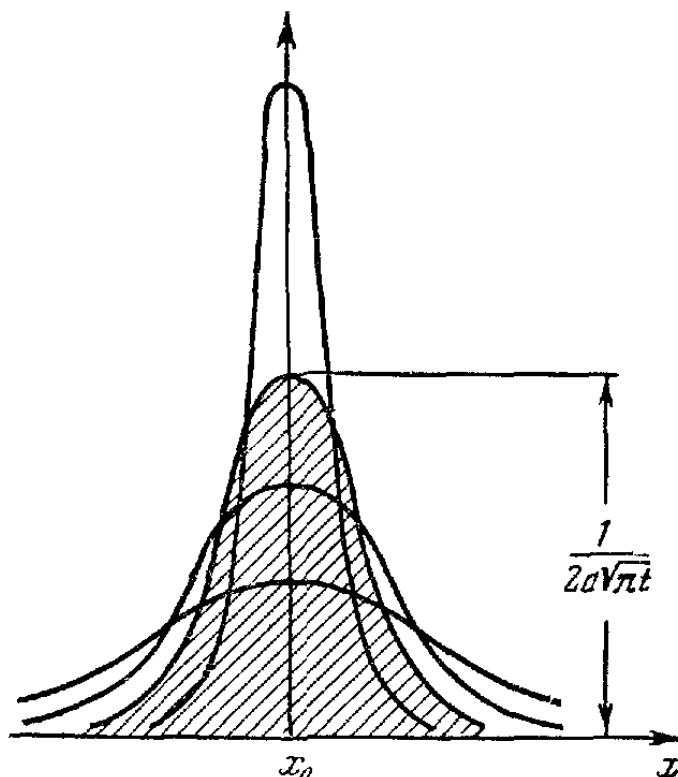


Рис. 45.

$a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$  (качественно это очевидно из физических соображений: в каждый момент времени максимальная температура по стержню будет тем меньше, чем больше коэффициент внутренней теплопроводности  $k$  и чем меньше удельная теплоемкость  $c$  и плотность  $\rho$  материала стержня).

2. Площадь под каждой кривой равна 1 (см., например, заштрихованную площадь на рис. 45). Чтобы это доказать, вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{x_0}(x, t) dx = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} dx.$$

В результате замены переменной:  $\frac{x-x_0}{2a \sqrt{t}} = \omega$ ,  $dx = 2a \sqrt{t} d\omega$ , он принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = 1.$$

Физически это означает, что количество тепловой энергии, сообщенной стержню в начальный момент  $t=0$  в результате импульса, остается

неизменным с течением времени.

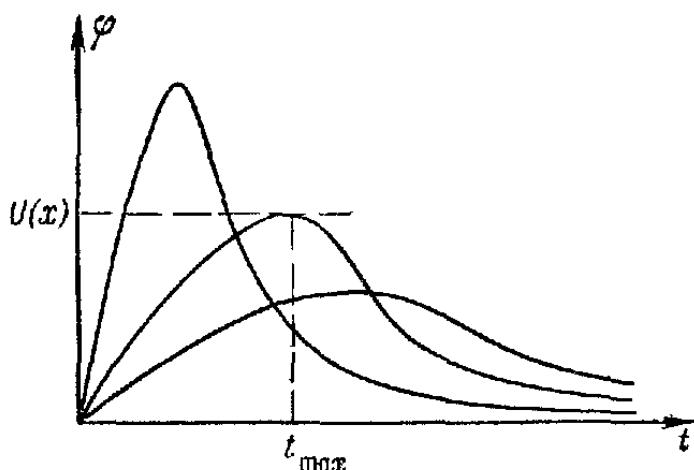


Рис. 46.

(см. рис. 46). При  $t=0$  функция  $\varphi_{x_0}(x, t)$  не определена, и мы имеем в виду ее предел при  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_{x_0}(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}.$$

3. В каждой фиксированной точке  $x \neq x_0$  функция  $\varphi_{x_0}(x, t)$ , как функция времени  $t$ , сначала возрастает от 0 (при  $t=0$ ) до некоторого максимального значения  $U(x)$  и затем монотонно убывает, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Записав последний предел в виде  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}}{e^{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}}$  и применив к нему правило Лопигаля, получим

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_{x_0}(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}}{e^{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \left( -\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t^2} \right)} = \\ &= \frac{a}{(x-x_0)^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t}}{e^{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}} = 0.\end{aligned}$$

Разумеется, этого заключения нельзя сделать при  $x = x_0$ .  
Также ясно, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{x_0}(x, t) = 0$ .

Чтобы найти максимальное значение  $U(x)$ , найдем производную функции  $\varphi_{x_0}(x, t)$  по  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{x_0}}{\partial t} &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left[ -\frac{1}{2t\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} + \frac{(x-x_0)^2}{4a^2t^2\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \right] = \\ &= \frac{1}{4at\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \left[ \frac{(x-x_0)^2}{2a^2t} - 1 \right].\end{aligned}$$

Приравняв выражение в квадратной скобке нулю, найдем то значение  $t = t_{\max}$ , при котором  $\dot{\varphi} = U$ :

$$t_{\max} = \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}.$$

(Читатель легко проверит, что при этом значении  $t$  функция действительно имеет максимум.)

Следовательно,

$$U(x) = \varphi_{x_0}(x, t_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e} |x-x_0|}. \quad (13.22)$$

Таким образом, температура в любой точке  $x \neq x_0$  сначала повышается до значения  $U(x)$ , а затем убывает и стремится к нулю. Максимально достигаемая температура в точке  $x \neq x_0$  стержня обратно пропорциональна при этом расстоянию этой точки от точки приложения импульса, а время,

необходимое для достижения этой максимальной температуры, прямо пропорционально квадрату указанного расстояния.

Нам остается только применить разъясненный выше физический смысл фундаментального решения (13.18) к физическому толкованию решения (13.17). Решение (13.17) задачи теплопроводности в бесконечном стержне при начальном условии (13.2) может рассматриваться как *результат суперпозиции (наложения) температур, возникающих в точке  $x$  в момент времени  $t$  вследствие непрерывно распределенных по стержню тепловых импульсов «интенсивности»  $f(\xi)$  в точке  $\xi$ , приложенных в момент  $t = 0$ <sup>1</sup>*). Такие импульсы можно приближенно реализовать в виде большого числа языков пламени разной температуры, поднесенных в момент  $t = 0$  на очень краткий промежуток времени к стержню так, что в каждой точке  $\xi$  стержня мгновенно возникает температура  $f(\xi)$  (конечно, это очень приближенная картина, однако она наглядно описывает характер происходящего процесса).

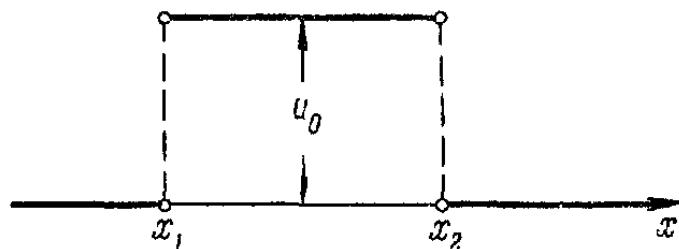


Рис. 47.

**40. Примеры. Пример 1.** Пусть начальное распределение температуры

$$f(x) = \begin{cases} u_0, & \text{если } x_1 < x < x_2, \\ 0, & \text{если либо } x < x_1, \text{ либо } x > x_2 \end{cases}$$

(см. рис. 47). Тогда в качестве решения по формуле (13.17)

<sup>1</sup>) Начальное распределение температуры  $f(x)$  можно представить себе «разложенным» на импульсы:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(\xi - x) d\xi$$

(это соотношение является следствием свойства (2) импульсной функции Дирака).

мы получим

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (13.23)$$

Эта функция выражается через одну важную специальную функцию, называемую *интегралом вероятностей*:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu. \quad (13.24)$$

Действительно, полагая в нашем решении  $\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = \mu$ ,  $d\xi = -2a\sqrt{t} d\mu$ , найдем, что

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu = \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu = \\ &= \frac{u_0}{2} \left[ \Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Остановимся на свойствах функции  $\Phi(z)$ . Эта функция нечетная:  $\Phi(-z) = -\Phi(z)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \Phi(-z) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-z} e^{-\mu^2} d\mu = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^0 e^{-\mu^2} d\mu = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что подынтегральная

функция четная. Далее, если  $z \rightarrow +\infty$ , то  $\Phi(z)$  стремится к интегралу  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu = 1$ . Следовательно,

$$\Phi(\infty) = 1 \quad \text{и} \quad \Phi(-\infty) = -1.$$

График функции  $\Phi(z)$  изображен на рис. 48; для этой функции имеются специальные таблицы<sup>1)</sup>.

Исходя из свойств функции  $\Phi(z)$ , нетрудно проверить, что функция (13.25) действительно удовлетворяет начальному условию. Если  $x < x_1$  или  $x > x_2$ , то оба аргумента  $\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}$  и  $\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}$  при  $t \rightarrow 0$  одновременно стремятся или к  $-\infty$

(при  $x < x_1$ ), или к  $+\infty$   
(при  $x > x_2$ ); в обоих случаях значения функций,

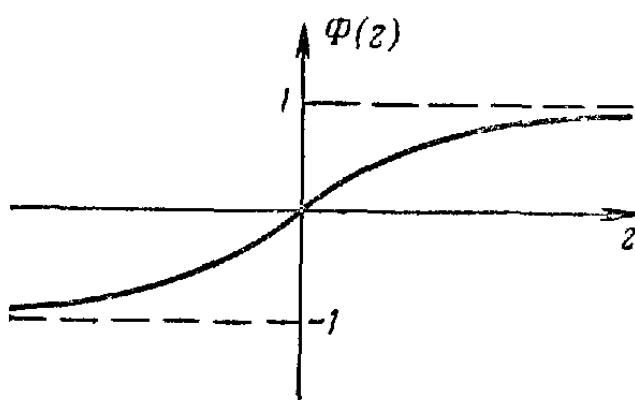


Рис. 48.

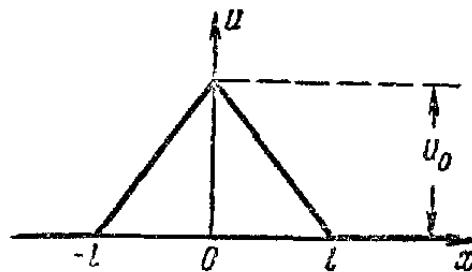


Рис. 49.

стоящих в квадратных скобках формулы (13.25), стремятся к одному и тому же пределу ( $-1$  или  $1$ ), а их разность — к нулю.

Если же  $x_1 < x < x_2$ , то первый аргумент стремится к  $+\infty$ , а второй к  $-\infty$ ; выражение в скобках при этом стремится к  $2$ , т. е.  $u(x, 0) = u_0$ .

Наконец, если  $x = x_1$  или  $x = x_2$  (точки разрыва начального распределения температур), то при  $t \rightarrow 0$  температура  $u \rightarrow \frac{u_0}{2}$ .

<sup>1)</sup> Дальнейшие сведения об интеграле вероятностей см. в книге [6].

Пример 2. Пусть начальное распределение температуры

$$f(x) = \begin{cases} u_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{для } 0 \leq x \leq l, \\ u_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) & \text{для } -l \leq x \leq 0, \\ 0 \text{ для } x \geq l \text{ и для } x \leq -l \end{cases}$$

(см. рис. 49). Тогда формула (13.17) дает

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-l}^0 \left(1 + \frac{\xi}{l}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi + \\ + \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^l \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Полагая вновь  $\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = \mu$ , преобразуем решение к виду

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left(1 + \frac{x}{l}\right) \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \int_{\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu - \right. \\ \left. - 2 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}} \mu e^{-\mu^2} d\mu + 2 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \int_{\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} \mu e^{-\mu^2} d\mu \right\} = \\ = \frac{u_0}{2} \left\{ \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left[ \Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right] + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[ \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right) \right] \right\} + \\ + u_0 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ e^{-\frac{(x+l)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2t}} \right\} = \\ = \frac{u_0}{2} \left\{ \left(1 + \frac{x}{l}\right) \Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - 2 \frac{x}{l} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \left(1 - \frac{x}{l}\right) \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right) \right\} + \\ + u_0 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ e^{-\frac{(x+l)^2}{4a^2t}} - 2e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2t}} \right\}.$$

Полученное решение имеет довольно громоздкий вид, но оно позволяет судить о поведении температуры в стержне. Легко проверить, что оно является четной функцией от  $x$ , что начальное условие выполняется и что  $u \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  в любой точке  $x$ . Установим, как понижается температура в точке  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= \frac{u_0}{2} \left\{ \Phi \left( \frac{l}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left( -\frac{l}{2a\sqrt{t}} \right) \right\} + \\ &\quad + 2u_0 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left( e^{-\frac{l^2}{4a^2 t}} - 1 \right) = \\ &= u_0 \left\{ \Phi \left( \frac{l}{2a\sqrt{t}} \right) - \frac{2a\sqrt{t}}{l\sqrt{\pi}} \left( 1 - e^{-\frac{l^2}{4a^2 t}} \right) \right\} = u_0 \left[ \Phi(z) - \frac{1 - e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}} \right], \end{aligned}$$

где  $z = \frac{l}{2a\sqrt{t}}$ . Покажем, что полученное выражение для  $u|_{x=0}$  может быть преобразовано следующим образом. Заметим, что производная выражения, стоящего в прямых скобках, равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[ \Phi(z) - \frac{1 - e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}} \right] &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - \frac{2z^2 e^{-z^2} - 1 + e^{-z^2}}{z^2 \sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2}; \end{aligned}$$

кроме того, само это выражение стремится к 0 при  $z \rightarrow 0$ , так как  $\Phi(0) = 0$  и  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}} = 0$ . Поэтому

$$u|_{x=0} = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{2a\sqrt{t}}} \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} dz.$$

Поскольку  $\frac{1 - e^{-z^2}}{z^2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots$ , то для больших  $t$ , т. е. малых значений верхнего предела  $\frac{l}{2a\sqrt{t}}$ ,

$$u|_{x=0} \approx \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{2a\sqrt{t}}} dz = \frac{u_0 l}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Пример 3. Показать, что если  $f(x) = u_0 e^{-\sigma|x|}$ ,  $u_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ , то

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + 4a^2\sigma^2t}} e^{-\frac{\sigma^2x^2}{1 + 4a^2\sigma^2t}},$$

показать, что в тех точках стержня, в которых кривая начального распределения температуры выпукла ( $|x| < \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ ), температура монотонно убывает к нулю с возрастанием  $t$ , а в тех точках, где эта кривая вогнута ( $|x| > \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ ), температура сначала повышается до  $\frac{u_0}{\sigma\sqrt{2e}|x|}$ , а затем уже монотонно убывает к нулю.

Пример 4. Показать, что если  $f(x) = u_0 e^{-\sigma^2|x|}$ , то

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} e^{a^2\sigma^4t} \left\{ e^{-\sigma^2x} \left[ 1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - a\sigma^2\sqrt{t}\right) \right] + e^{\sigma^2x} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + a\sigma^2\sqrt{t}\right) \right] \right\},$$

показать, что

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= u_0 e^{a^2\sigma^4t} \{ 1 - \Phi(a\sigma^2\sqrt{t}) \} = \\ &= \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-2a\sigma^2\sqrt{t}v - v^2} dv \approx \frac{u_0}{a\sigma^2\sqrt{\pi t}} \end{aligned}$$

для больших  $t$ .

## § 14. Теплопроводность в конечном стержне

**41. Приведение к задаче с однородными краевыми условиями. Метод Фурье.** Задача линейной теплопроводности в конечном стержне отличается от задачи для бесконечного стержня, рассмотренной в предыдущем параграфе, тем, что необходимо учитывать *краевые условия на торцевых сечениях* (концах) стержня. Как мы увидим, наличие краевых условий вносит весьма существенные изменения в метод Фурье по сравнению с задачей без краевых условий,

Предположим, что длина стержня равна  $l$ . Начало координат на оси  $x$  выберем в левом конце стержня; тогда его торцевые сечения будут  $x = 0$  и  $x = l$ . Температура  $u = u(x, t)$

должна удовлетворять (при условии теплоизоляции боковой поверхности) для  $0 < x < l$  уравнению (13.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Начальное условие имеет прежний вид (13.2):

$$u|_{t=0} = f(x),$$

но только теперь функция  $f(x)$  (начальное распределение температуры) должна быть задана лишь на интервале  $0 < x < l$ . Общие краевые условия на торцах стержня были установлены в п. 35 (формулы (12.10)). Если температурные условия на концах стержня различны, то

$$\begin{aligned} k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= h_0 \{u|_{x=0} - \tilde{u}_0\}, \\ -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} &= h_l \{u|_{x=l} - \tilde{u}_l\}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Напомним, что  $k$  — коэффициент теплопроводности стержня,  $h_0$  и  $h_l$  — коэффициенты теплообмена на торцах стержня,  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{u}_l$  — заданные температуры концов стержня.

Метод Фурье, с помощью которого мы предполагаем решить задачу, в случае краевых условий (14.1) непосредственно неприменим, так как они неоднородны, если  $\tilde{u}_0 \neq 0$  или  $\tilde{u}_l \neq 0$ : решение  $u \equiv 0$  им не удовлетворяет. Это значит, что сумма двух решений  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ , каждое из которых в отдельности удовлетворяет условиям (14.1), этим условиям уже не удовлетворяет; точно так же не удовлетворяет этим условиям произведение любого решения на постоянную величину (читатель легко убедится в этом самостоятельно). Поэтому, прежде чем применять метод Фурье, мы должны свести задачу к такой, в которой краевые условия однородны. Мы это сделаем в предположении, что *температуры внешних сред  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{u}_l$  постоянны*.

Для этого введем новую искомую функцию  $w = w(x, t)$ , связанную с  $u$  формулой

$$u(x, t) = w(x, t) + \gamma + \gamma_1 x, \quad (14.2)$$

где и  $\gamma$   $\gamma_1$  — некоторые постоянные коэффициенты, которые мы будем пытаться подобрать так, чтобы для функции  $w$

получились однородные краевые условия. Так как  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_1$ , то условия (14.1) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} k \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= h_0 w \Big|_{x=0} + h_0 \gamma - k \gamma_1 - h_0 \tilde{u}_0, \\ -k \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l} &= h_l w \Big|_{x=l} + h_l \gamma + (lh_l + k) \gamma_1 - h_l \tilde{u}_l. \end{aligned}$$

Требование однородности этих условий состоит в выполнении равенств

$$\begin{aligned} h_0 \gamma - k \gamma_1 &= h_0 \tilde{u}_0, \\ h_l \gamma + (lh_l + k) \gamma_1 &= h_l \tilde{u}_l. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Система уравнений (14.3) относительно  $\gamma$  и  $\gamma_1$  имеет единственное решение, поскольку определитель этой системы не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} h_0 & -k \\ h_l & lh_l + k \end{vmatrix} = h_0(lh_l + k) + kh_l > 0,$$

так как  $h_0$ ,  $h_l$ ,  $k$  и  $l$  — положительные числа. Найдя из уравнений (14.3)  $\gamma$  и  $\gamma_1$ , получим для  $w(x, t)$  краевые условия в виде

$$k \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_0 w \Big|_{x=0}, \quad -k \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l} = h_l w \Big|_{x=l}, \quad (14.4)$$

которые уже являются однородными.

С другой стороны, в качестве начального условия для функции  $w$  мы получаем

$$w \Big|_{t=0} = u \Big|_{t=0} - \gamma - \gamma_1 x = f(x) - \gamma - \gamma_1 x = f_1(x), \quad (14.5)$$

где  $f_1(x)$ , как и  $f(x)$ , — функция, заданная на интервале  $0 < x < l$ . Наконец, уравнение, которому должна удовлетворять функция  $w$ , не отличается от исходного уравнения (13.1), так как

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Таким образом, мы приходим теперь к следующей задаче: *найти функцию  $w=w(x, t)$ , удовлетворяющую для  $0 < x < l$  и всех  $t > 0$  уравнению*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (14.6)$$

*начальному условию* (14.5) *и краевым условиям* (14.4). Эта задача уже решается методом Фурье, так как краевые условия однородны (им удовлетворяет изменение  $w \equiv 0$ ).

Первая часть метода Фурье — *разделение переменных* — применяется без каких бы то ни было изменений, и мы найдем, как в предыдущем параграфе, частные решения вида (13.8):

$$w(x, t) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t} \quad (14.7)$$

(где вместо  $\tau$  подставлено  $a^2 t$ ). Но если в случае бесконечного стержня  $\lambda$  оставалось совершенно произвольным, то наличие краевых условий, как мы сейчас увидим, накладывает на  $\lambda$  определенные требования. Действительно, подставляя функцию  $w(x, t)$  из (14.7) в условия (14.4) и сокращая на  $e^{-\lambda^2 a^2 t}$ , мы найдем, что для первого множителя в правой части (14.7):

$$\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x = X(x),$$

должны выполняться равенства

$$kX'(0) = h_0 X(0), \quad -kX'(l) = h_l X(l). \quad (14.8)$$

Заменяя значения функций  $X$  и  $X'$  их выражениями, получим

$$k\beta\lambda = h_0\alpha, \quad k\alpha \sin \lambda l - k\beta \lambda \cos \lambda l = h_l \alpha \cos \lambda l + h_l \beta \sin \lambda l,$$

откуда, с одной стороны,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k}{h_0} \lambda, \quad (14.8')$$

а с другой стороны,

$$\beta(h_l \sin \lambda l + k\lambda \cos \lambda l) = \alpha(k\lambda \sin \lambda l - h_l \cos \lambda l),$$

т. е.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{h_l \sin \lambda l + k\lambda \cos \lambda l}{k\lambda \sin \lambda l - h_l \cos \lambda l} = \frac{h_l \operatorname{tg} \lambda l + k\lambda}{k\lambda \operatorname{tg} \lambda l - h_l}.$$

Таким образом,  $\lambda$  должно удовлетворять уравнению

$$\frac{k}{h_0} \lambda = \frac{h_l \operatorname{tg} \lambda l + k\lambda}{k\lambda \operatorname{tg} \lambda l - h_l},$$

или

$$\operatorname{tg} \lambda l = \frac{k(h_0 + h_l)\lambda}{k^2\lambda^2 - h_0h_l}. \quad (14.9)$$

Прежде чем рассматривать решение в общем случае, займемся наиболее важными частными задачами.

**42. Распространение тепла в стержне в случаях постоянной температуры на концах или теплоизоляции концов.** В п. 35 мы уже видели, что краевые условия значительно упрощаются, если концы стержня либо теплоизолированы, либо поддерживаются при постоянной температуре. В случае теплоизоляции какого-либо конца надо соответствующий коэффициент теплообмена положить равным нулю, а в случае постоянства температуры устремить этот коэффициент к бесконечности.

При этом мы условимся говорить об *одинаковом режиме на концах стержня*, если они оба либо теплоизолированы, либо поддерживаются при постоянной температуре, и о *разном режиме*, если один из них (для определенности левый:  $x=0$ ) теплоизолирован, а другой (правый:  $x=l$ ) поддерживается при постоянной температуре.

Пусть сначала концы стержня находятся при одинаковом режиме. Если они теплоизолированы, то  $h_0 = h_l = 0$  и уравнение (14.9) примет вид  $\operatorname{tg} \lambda l = 0$ .

Чтобы рассмотреть случай постоянства температуры на концах, разделим числитель и знаменатель правой части формулы (14.9) на произведение  $h_0h_l$ :

$$\operatorname{tg} \lambda l = \frac{\frac{k\lambda}{h_l} \left( \frac{1}{h_l} + \frac{1}{h_0} \right)}{\frac{k^2\lambda^2}{h_0h_l} - 1}.$$

Переходя к пределу при  $h_0 \rightarrow \infty$ ,  $h_l \rightarrow \infty$ , замечаем, что снова получаем условие  $\operatorname{tg} \lambda l = 0$ .

Итак, в случае одинакового режима на концах стержня  $\lambda$  должно являться корнем уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda l = 0. \quad (14.10)$$

Пусть режим на концах разный. Если, скажем,  $h_0 = 0$ , то  $\operatorname{tg} \lambda l = \frac{h_l}{k\lambda}$  или  $\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{k\lambda}{h_l}$ . При  $h_l \rightarrow \infty$  получается

уравнение  $\operatorname{ctg} \lambda l = 0$ . Поменяв ролями  $h_0$  и  $h_l$ , мы снова придем к этому же уравнению<sup>1)</sup>.

Таким образом, в случае разного режима на концах стержня  $\lambda$  должно удовлетворять уравнению

$$\operatorname{ctg} \lambda l = 0. \quad (14.11)$$

Начнем со случая одинакового режима;  $\lambda$  должно быть корнем уравнения (14.10), т. е. должно быть

$$\lambda = n\pi,$$

где  $n$  — любое целое число. Таким образом,  $\lambda$  может принимать только значения из бесконечной последовательности

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14.12)$$

Эти значения называются *собственными числами* задачи. Отметим, что мы не учитываем отрицательных значений  $n$  потому, что в решении (14.7), куда мы должны подставить  $\lambda = \lambda_n$ , знак  $\lambda_n$  не играет никакой роли (в показатель  $e^{-\lambda^2 a^2 t}$  число  $\lambda$  входит в квадрате,  $\cos \lambda x$  — четная функция от  $\lambda$ , а знак синуса может быть включен в произвольную постоянную  $\beta$ ).

В случае разных режимов  $\lambda$  должно удовлетворять уравнению (14.11), т. е. *собственными числами* в этой задаче являются

$$\lambda = \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14.13)$$

(отрицательные значения  $\lambda$  мы не учитываем по указанным выше соображениям).

Каждому из собственных чисел  $\lambda_n$  будут соответствовать свои коэффициенты  $a_n$  и  $\beta_n$  в формуле (14.7).

Таким образом, решения уравнения (14.6), удовлетворяющие поставленным краевым условиям, должны иметь вид

$$w = w_n(x, t) = (a_n \cos \lambda_n x + \beta_n \sin \lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 a^2 t}, \quad (14.14)$$

<sup>1)</sup> Если в формуле (14.9) сначала устремить  $h_0$  к  $\infty$ , то получим  $\operatorname{tg} \lambda l = \frac{k}{h_l} \lambda$  или  $\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{h_l}{k\lambda}$ . Положив  $h_l = 0$ , мы опять приходим к уравнению  $\operatorname{ctg} \lambda l = 0$ .

где  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  связаны соотношением (14.8'). В частности,  $\beta_n = 0$ , если  $h_0 = 0$ , и  $\alpha_n = 0$ , если  $h_0 = \infty$  (в этом мы еще непосредственно убедимся ниже).

Ввиду того, что в дальнейшем выражение  $\alpha_n \cos \lambda_n x + \beta_n \sin \lambda_n x$  из формулы (14.14) будет фигурировать в качестве общего члена ряда Фурье, условимся, что при  $n = 0$  это выражение мы будем заменять на  $\frac{\alpha_0}{2}$ .

Рассмотрим подробнее все три решаемые нами задачи.

*Задача А. Оба конца теплоизолированы.*

*Задача Б. На обоих концах поддерживается постоянная температура.*

*Задача В. Левый конец теплоизолирован, а на правом конце поддерживается постоянная температура.*

В задачах А и Б собственные числа  $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$  и

$$w_n(x, t) = \left( \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}.$$

Но в задаче А должно быть

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w_n}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$$

( $h_0 = h_l = 0$  в краевых условиях (14.4)), откуда вытекает, что  $\beta_n = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Таким образом, уравнению и краевым условиям задачи А удовлетворяют функции

$$w_n(x, t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}. \quad (14.15A)$$

В задаче Б должно быть

$$w_n|_{x=0} = 0, \quad w_n|_{x=l} = 0$$

( $h_0 = h_l = \infty$  в краевых условиях (14.4)), откуда следует, что  $\alpha_n = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Таким образом, уравнению и краевым условиям задачи Б удовлетворяют функции

$$w_n(x, t) = \beta_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}. \quad (14.15B)$$

Наконец, в задаче В собственные числа  $\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$  и

$$w_n(x, t) = \left( \alpha_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} + \beta_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right) e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2 t}{4l^2}},$$

Здесь мы должны иметь

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad w_n|_{x=l} = 0,$$

откуда вытекает, что  $\beta_n = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Таким образом, уравнению и краевым условиям задачи В удовлетворяют функции

$$w_n(x, t) = \alpha_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}}. \quad (14.15B)$$

Решения (14.15A) — (14.15B) однородного уравнения (14.6) удовлетворяют соответствующим, и тоже однородным, краевым условиям задач А — В. Следовательно, сумма ряда, составленного из этих решений,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (14.16)$$

также удовлетворяет и уравнению и соответствующим краевым условиям.

Заметим, что выделение с помощью краевых условий последовательности собственных чисел каждой задачи существенно отличает эти задачи от задачи Коши без краевых условий, которую мы решили в предыдущем параграфе для бесконечного стержня. Там  $\lambda$  оставалось произвольным и, чтобы использовать все полученные частные решения, нам надо было интегрировать их по  $\lambda$ . Здесь  $\lambda$  может пробегать только последовательность собственных чисел, и мы должны суммировать частные решения по всем собственным числам. Там произвольные коэффициенты  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  определялись из разложения начального распределения температуры в интеграл Фурье. Здесь произвольные коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  определяются, как мы сейчас увидим, из разложения начального распределения температуры в ряд Фурье. В этом и заключается существенное отличие второй части метода Фурье (суперпозиция частных решений) в применении к задачам без краевых условий — бесконечный стержень — и к задачам с краевыми условиями — конечный стержень, о котором мы упоминали в самом начале этого параграфа.

Перейдем к определению произвольных коэффициентов  $\alpha_n$  или  $\beta_n$  из начального условия (14.5). Это мы должны по отдельности сделать для каждой из задач А, Б и В.

**Задача А.** Решение имеет вид (см. (14.15А))

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \cos \frac{n \pi x}{l}, \quad (14.17A)$$

и начальное условие (14.5) записывается так:

$$w|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n \pi x}{l} = f_1(x), \quad 0 < x < l.$$

Мы должны, следовательно, разложить функцию  $f_1(x)$ , заданную на интервале  $0 < x < l$ , в неполный ряд Фурье — ряд косинусов. Как известно из теории рядов Фурье (см. [1], п. 121), коэффициенты разложения находятся по формулам

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \cos \frac{n \pi x}{l} dx. \quad (14.18A)$$

Подставляя это выражение для  $\alpha_n$  в формулу (14.17А), получим искомое решение задачи.

**Задача Б.** Здесь решение имеет вид (см. (14.15Б))

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{n \pi x}{l} \quad (14.17B)$$

и начальное условие записывается так:

$$w|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n \pi x}{l} = f_1(x), \quad 0 < x < l.$$

Здесь мы должны разложить функцию  $f_1(x)$ , заданную на интервале  $0 < x < l$ , в ряд по синусам. Коэффициенты  $\beta_n$  вычисляются по формулам

$$\beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx, \quad (14.18B)$$

и, подставив это выражение в формулу (14.17Б), получим искомое решение задачи.

Задача В. Решение имеет вид (см. (14.15B))

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} \cos \frac{(2n+1) \pi x}{2l}, \quad (14.17B)$$

и начальное условие записывается так:

$$w|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{(2n+1) \pi x}{2l} = f_1(x), \quad 0 < x < l.$$

Легко проверить, что система функций  $\cos \frac{(2n+1) \pi x}{2l}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ортогональна на интервале  $(0, l)$  (см. аналогичное доказательство на стр. 85). Поскольку

$$\int_0^l \cos^2 \frac{(2n+1) \pi x}{2l} dx = \frac{l}{2},$$

то коэффициенты  $\alpha_n$  разложения функции  $f_1(x)$  по ортогональной системе функций находятся по формулам (см. [1], п. 205).

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \cos \frac{(2n+1) \pi x}{2l} dx. \quad (14.18B)$$

Подставляя выражение (14.18B) в формулу (14.17B), получаем искомое решение задачи.

Заметим, что формулу (14.18B) можно получить иначе, опираясь только на знание обычных рядов Фурье. Сумма тригонометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{(2n+1) \pi x}{2l} = f(x)$$

является четной функцией с периодом  $4l$ , обладающей еще специальным свойством:  $f(x + 2l) = -f(x)$ , где  $2l$ —половина периода. Действительно, достаточно убедиться в том, что каждое слагаемое меняет знак на обратный при замене  $x$  на  $x + 2l$ , а это очевидно:

$$\begin{aligned} \cos \frac{(2n+1) \pi (x + 2l)}{2l} &= \\ &= \cos \left\{ \frac{(2n+1) \pi x}{2l} + (2n+1)\pi \right\} = -\cos \frac{(2n+1) \pi x}{2l}. \end{aligned}$$

Графически это свойство иллюстрируется так: чтобы получить график функции на левой половине периода  $(-2l, 0)$ , можно график на правой половине  $(0, 2l)$  зеркально отобразить относительно оси  $x$  и затем сдвинуть на  $2l$  влево («зеркально-сдвинутые» полуволны). Процесс построения графика в интервале  $(-2l, 2l)$  показан на рис. 50. Сначала кривая (1) из основного интервала  $(0, l)$  четно

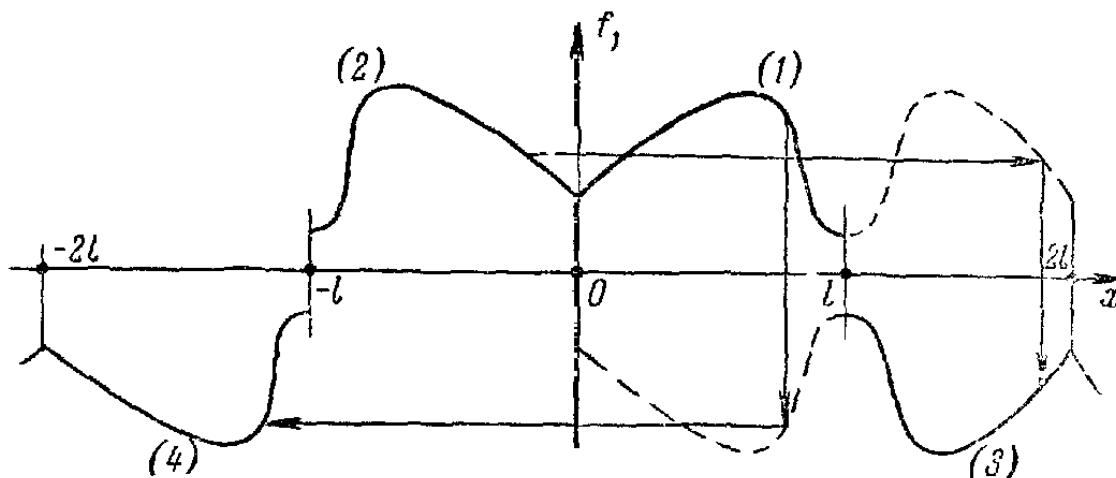


Рис. 50.

продолжается в интервал  $(-l, 0)$ , в результате чего получается кривая (2). Затем кривую (2) сдвигаем на  $2l$  вправо и берем ее зеркальное отображение относительно оси  $Ox$ ; получаем кривую (3). Наконец, кривая (4) строится так: берем зеркальное отображение кривой (1) относительно оси  $Ox$  и сдвигаем его на  $2l$  влево; то же получится, если кривую (3) зеркально отобразить относительно оси  $Oy$ .

Коэффициенты  $a_n$  вычисляются по обычным формулам Фурье для четных функций:

$$a_n = \frac{2}{2l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx,$$

так как подынтегральная функция имеет равные интегралы по четвертям периода:  $(0, l)$  и  $(l, 2l)$ . В интервале  $(0, l)$  функция  $f(x) = f_1(x)$ , и мы вновь получаем формулу (14.18В).

**43. Общий случай краевых условий.** Аналогично обстоит дело и в случае общих краевых условий (14.4), когда  $\lambda$  должно удовлетворять трансцендентному уравнению (14.9):

$$\operatorname{tg} \lambda l = \frac{k(h_0 + h_l)\lambda}{k^2\lambda^2 - h_0h_l},$$

простейшие частные случаи которого мы рассматривали выше. Уравнение (14.9) также имеет бесконечное множество корней, образующих последовательность  $\lambda_n \geq 0$  (см. рис. 51, где жирными линиями изображены графики левой и правой частей уравнения (14.9): сплошной линией — график левой части (тангенсоида) и пункти-

ром — график правой части). Нетрудно видеть, что в этом общем случае  $\lambda_n$  для больших  $n$  очень близки к последовательности (14.12) собственных значений для задач А и Б. В соответствующих решениях для общего случая

$$w_n(x, t) = (\alpha_n \cos \lambda_n x + \beta_n \sin \lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 a^2 t}$$

коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  должны быть связаны соотношением (14.8'):  $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{k}{h_0} \lambda_n$ , т. е.  $\alpha_n = \frac{k}{h_0} \lambda_n \beta_n$ , и эти решения принимают вид

$$w_n(x, t) = \beta_n \left( \frac{k}{h_0} \lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right) e^{-\lambda_n^2 a^2 t}. \quad (14.19)$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{k}{h_0} \lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right) e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \quad (14.20)$$

будет решением уравнения (14.6), удовлетворяющим условиям (14.4).

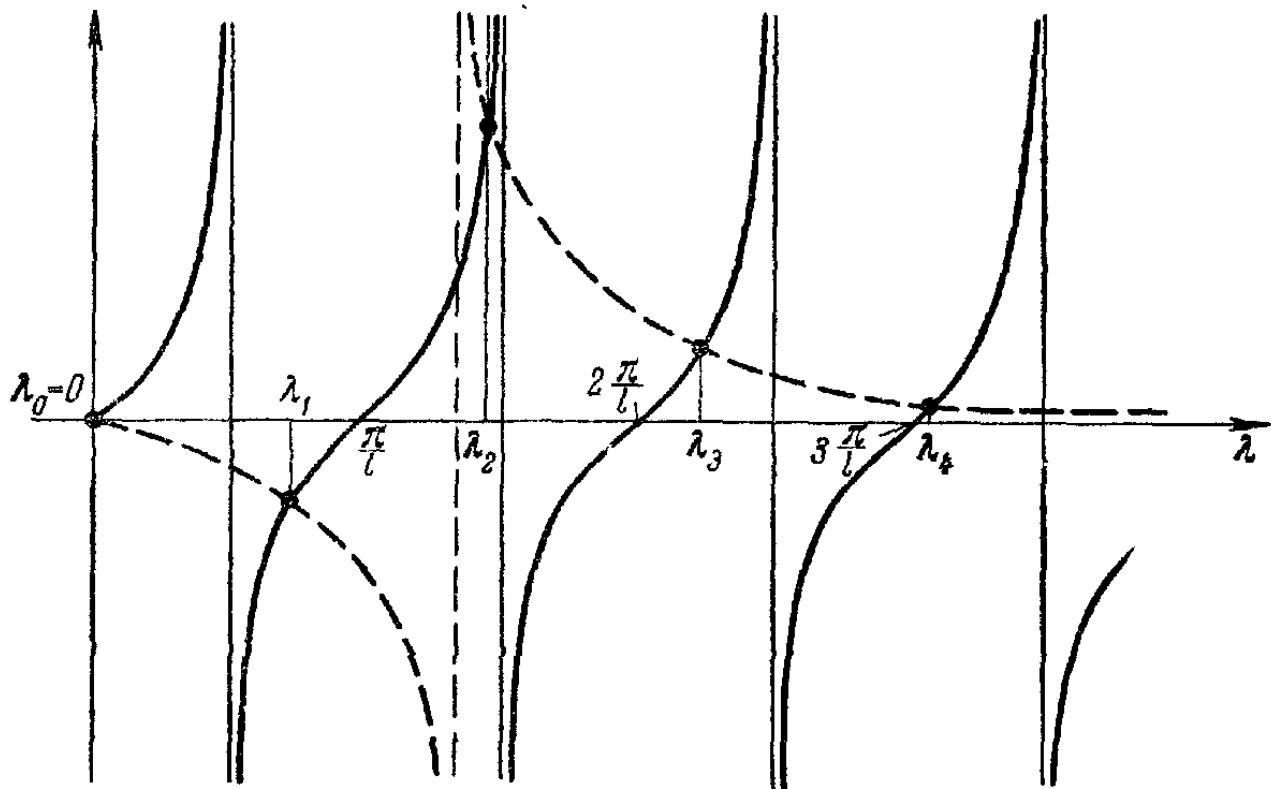


Рис. 51.

Чтобы удовлетворить начальному условию (14.5), мы должны положить

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left( \frac{k}{h_0} \lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x \right) = f_1(x), \quad 0 < x < l. \quad (14.21)$$

Докажем прежде всего, что система функций

$$X_n(x) = \frac{k}{h_0} \lambda_n \cos \lambda_n x + \sin \lambda_n x, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ортогональна на интервале  $(0, l)$ , т. е. что для  $m \neq n$

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0. \quad (14.22)$$

Из определения функций  $X_m(x)$  и  $X_n(x)$  следует, что они удовлетворяют уравнениям

$$X_m'' + \lambda_m^2 X_m = 0 \text{ и } X_n'' + \lambda_n^2 X_n = 0.$$

Умножим левую часть первого уравнения на  $X_n$ , а второго — на  $X_m$  и вычтем одно из другого:

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) X_n X_m = X_m X_n'' - X_n X_m'' = (X_m X_n - X_n X_m)'.$$

Интегрируя в пределах от 0 до  $l$ , получим

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_n X_m dx = X_m(l) X_n'(l) - X_n(l) X_m'(l) - X_m(0) X_n'(0) + X_n(0) X_m'(0).$$

Но  $X_m$  и  $X_n$  должны удовлетворять условиям (14.8), так что

$$X_m'(0) = \frac{h_0}{k} X_m(0), \quad X_n'(0) = \frac{h_0}{k} X_n(0),$$

$$X_m'(l) = -\frac{h_l}{k} X_m(l), \quad X_n'(l) = -\frac{h_l}{k} X_n(l).$$

Учитывая это, мы сразу находим, что

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_m X_n dx = 0,$$

а так как  $\lambda_m^2 \neq \lambda_n^2$ , то равенство (14.22) доказано. Записывая разложение (14.21) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n X_n(x) = f_1(x),$$

находим коэффициенты разложения  $\beta_n$  функции  $f_1(x)$  по ортогональной системе функций  $X_n(x)$ :

$$\beta_n = \frac{1}{I_n} \int_0^l f_1(x) X_n(x) dx, \quad (14.23)$$

где

$$I_n = \int_0^l X_n^2(x) dx.$$

Последний интеграл может быть выражен через  $\lambda_n$ . Общую формулу ввиду ее громоздкости мы не выписываем; частные случаи приведены в примерах 9 и 10 п. 44. Подставляя выражение (14.23) в формулу (14.20), получим искомое решение задачи в общем случае.

**44. Примеры. Пример 1.** В конечном стержне (с теплоизолированной боковой поверхностью) оба торцевых сечения теплоизолированы, а начальная температура постоянна по стержню:  $f(x) = u_0$  ( $0 < x < l$ ). Тогда мы имеем  $h_0 = h_l = 0$  и  $w$  из (14.2) совпадает с  $u$ , а  $f_1(x)$  из (14.5) — с  $f(x)$ , так как в силу уравнений (14.3)  $\gamma = \gamma_1 = 0$ . Это — задача А, а по формуле (14.18А)

$$a_n = \frac{2u_0}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 2u_0, & \text{если } n=0, \\ 0, & \text{если } n>0. \end{cases}$$

Следовательно, по формуле (14.17А)

$$w \equiv u \equiv \frac{u_0}{2} = u_0$$

(см. замечание к формуле (14.14)). Таким образом, мы получили физически очевидный результат: *при полной теплоизоляции стержня постоянная начальная температура сохраняется в нем для всех  $t > 0$* .

**Пример 2.** При тех же условиях, что и в примере 1, предположим, что начальное распределение температуры

$$f(x) = \begin{cases} u_0, & \text{если } 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Тогда по формуле (14.18А)  $\alpha_0 = u_0$ , а для  $n > 0$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2u_0}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2u_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_0^{\frac{l}{2}} = \\ &= \frac{2u_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ (-1)^m \frac{2u_0}{(2m+1)\pi} & \text{при } n = 2m+1, \\ & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно (учитывая замечание к формуле (14.14)), решением задачи будет (см. (14.17А))

$$w \equiv u = \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos \frac{(2m+1)\pi x}{l}}{2m+1} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}.$$

При  $x = \frac{l}{2}$  все косинусы равны нулю, так что  $u \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{u_0}{2}$  для всех  $t > 0$ . Кроме того, при замене  $x$  на  $\frac{l}{2} - x$  все

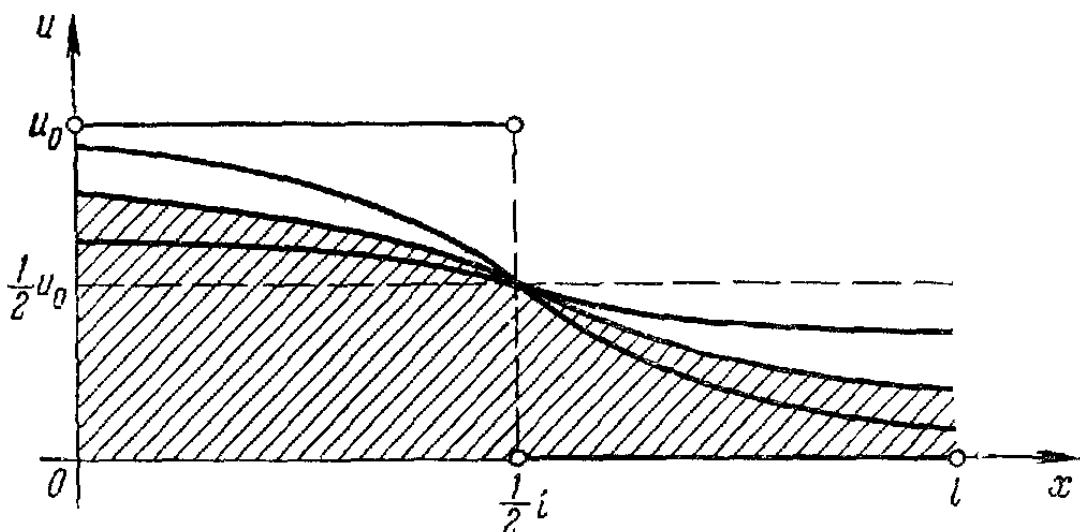


Рис. 52.

косинусы меняют знак на обратный, так что при любом  $t > 0$  график  $u$  симметричен относительно точки  $(\frac{l}{2}, \frac{u_0}{2})$  (см. рис. 52). Поэтому для любого  $t > 0$

$$\int_0^l u dx = \frac{1}{2} u_0 l$$

(эта площадь, пропорциональная количеству тепла в стержне, заштрихована на рис. 52). Теплоизоляция концов стержня находит свое выражение в том, что кривые распределения температуры при  $t = \text{const}$  имеют горизонтальные касательные при  $x = 0$  и  $x = l$ . При  $t \rightarrow \infty$  главным членом ряда является первый, так что

$$u \approx \frac{1}{2} u_0 + \frac{2u_0}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}} \cos \frac{\pi x}{l} \quad (\text{для больших } t).$$

Как ясно и из физических соображений,  $u \rightarrow \frac{1}{2} u_0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Пример 3. При тех же условиях, что в примере 1, предположим, что начальное распределение температуры таково:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2u_0}{l} x, & \text{если } 0 < x \leq \frac{1}{2} l, \\ \frac{2u_0}{l} (l - x), & \text{если } \frac{1}{2} l \leq x < l \end{cases}$$

(см. рис. 53). Тогда  $a_0 = u_0$ , а для  $n > 0$

$$a_n = \frac{4u_0}{l^2} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{4u_0}{l^2} \int_{\frac{l}{2}}^l (l - x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Сделаем во втором интеграле подстановку  $y = l - x$  и новую переменную интегрирования снова обозначим через  $x$ ; тогда

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4u_0}{l^2} \{1 + (-1)^n\} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2m - 1, \\ \frac{2u_0}{m^2 \pi^2} \{(-1)^m - 1\}, & \text{если } n = 2m, \end{cases} \end{aligned}$$

$m = 1, 2, 3, \dots$ . Таким образом, отличными от нуля  $a_n$ , кроме  $a_0$ , будут те, для которых  $n = 2m$ , а  $m = 2s + 1$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ , т. е.  $n = 4s + 2$ , причем

$$a_{4s+2} = -\frac{4u_0}{(2s+1)^2 \pi^2}.$$

Следовательно, как в предыдущем примере, получим

$$u = \frac{u_0}{2} - \frac{4u_0}{\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(4s+2)\pi x}{l}}{(2s+1)^2} e^{-\frac{(4s+2)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}.$$

При  $x = l/4$  и  $x = 3l/4$  все косинусы равны нулю, так что в этих точках  $u = \frac{1}{2} u_0$  для любого  $t > 0$ . Ясно также,

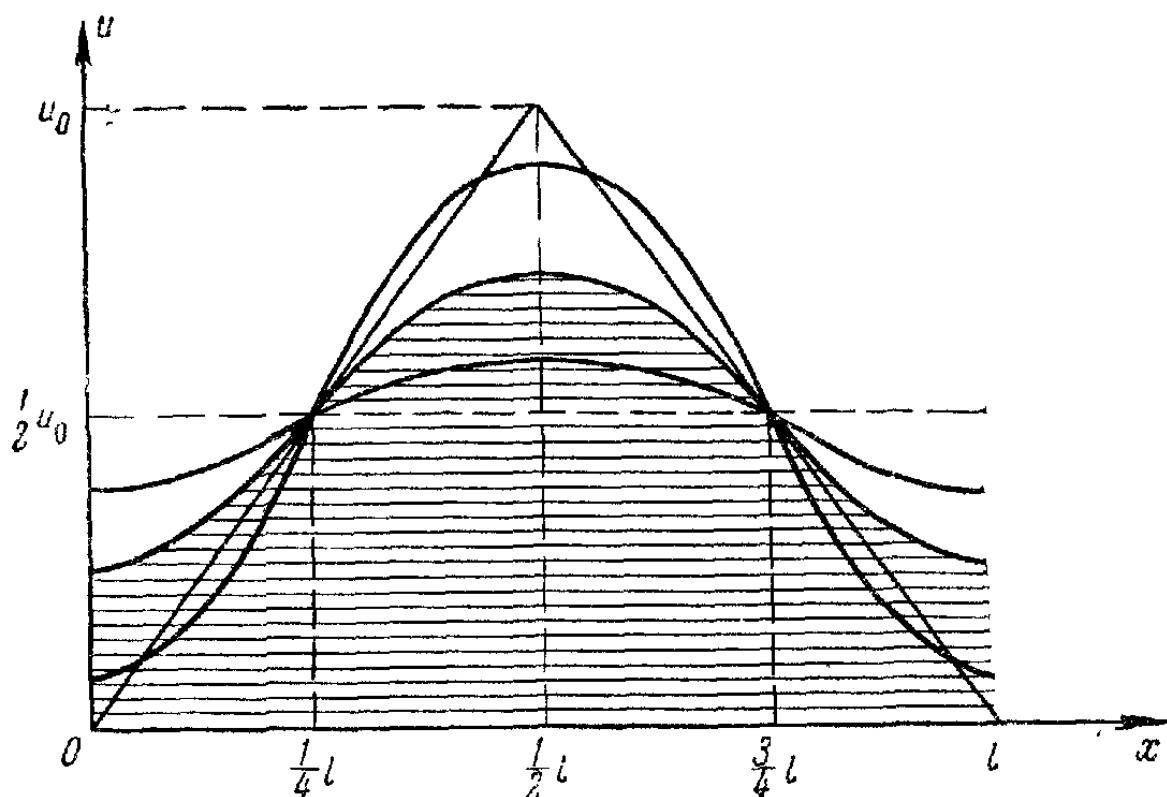


Рис. 53.

что при каждом фиксированном  $t$  график  $u$  симметричен относительно прямой  $x = l/2$  и что каждая его половина симметрична относительно, соответственно, точек  $(l/4, u_0/2)$  и  $(3l/4, u_0/2)$ . Поэтому для любого  $t > 0$

$$\int_0^l u dx = \frac{1}{2} u_0 l$$

(см. заштрихованную на рис. 53 площадь). Для больших  $t$

$$u \approx \frac{u_0}{2} - \frac{4u_0}{\pi^4} e^{-\frac{4\pi^2 a^2 t}{l^2}} \cos \frac{2\pi x}{l}.$$

Пример 4. В конечном стержне (с теплоизолированной боковой поверхностью) концы поддерживаются при постоянных температурах:  $u|_{x=0} = \tilde{u}_0$ ,  $u|_{x=l} = \tilde{u}_l$  (задача Б), а начальная температура постоянна по стержню:  $f(x) = u_0$  ( $0 < x < l$ ). Тогда  $h_0 = h_l = \infty$  и уравнения (14.3), которые можно записать в виде

$$\begin{aligned}\gamma - \frac{k}{h_0} \gamma_1 &= \tilde{u}_0, \\ \gamma + \left(l + \frac{k}{h_l}\right) \gamma_1 &= \tilde{u}_l,\end{aligned}$$

превращаются в  $\gamma = \tilde{u}_0$ ,  $\gamma + l\gamma_1 = \tilde{u}_l$ , т. е.  $\gamma = \tilde{u}_0$ ,  $\gamma_1 = \frac{1}{l}(\tilde{u}_l - \tilde{u}_0)$ , и по формуле (14.5)

$$f_1(x) = u_0 - \tilde{u}_0 - \frac{x}{l}(\tilde{u}_l - \tilde{u}_0).$$

Поэтому по формуле (14.17Б)

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{n \pi x}{l},$$

где (см. формулу (14.18Б))

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \left\{ u_0 - \tilde{u}_0 - \frac{x}{l}(\tilde{u}_l - \tilde{u}_0) \right\} \sin \frac{n \pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{n \pi} (u_0 - \tilde{u}_0) \{1 - (-1)^n\} - \frac{2}{l^2} (\tilde{u}_l - \tilde{u}_0) \int_0^l x \sin \frac{n \pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{n \pi} (u_0 - \tilde{u}_0) \{1 - (-1)^n\} + \frac{2}{n \pi} (-1)^n (\tilde{u}_l - \tilde{u}_0) = \\ &= \frac{2}{n \pi} \{u_0 - \tilde{u}_0 + (-1)^n (\tilde{u}_l - \tilde{u}_0)\}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$w(x, t) = \frac{2}{\pi} (u_0 - \tilde{u}_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n} e^{-\frac{n^2 \tau^2 a^2 t}{l^2}} + \\ + \frac{2}{\pi} (\tilde{u}_l - u_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}},$$

а

$$u(x, t) = w(x, t) + \gamma + \gamma_1 x = w(x, t) + \tilde{u}_0 + \frac{\tilde{u}_l - \tilde{u}_0}{l} x.$$

Чтобы по существу разобраться в полученном решении, заметим, что  $w \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $u \rightarrow \tilde{u}_0 + \frac{\tilde{u}_l - \tilde{u}_0}{l} x$ , т. е. к линейному распределению температуры между температурами на концах (см. рис. 54, где принято  $\tilde{u}_0 > u_0 > \tilde{u}_l$ ). Для сравнительно малых  $t > 0$  график  $u$  должен резко спускаться из точки  $(0, \tilde{u}_0)$ , примыкать к прямой  $u = u_0$  и затем опускаться в точку  $(l, \tilde{u}_l)$  (кривая (1)). Для больших  $t$

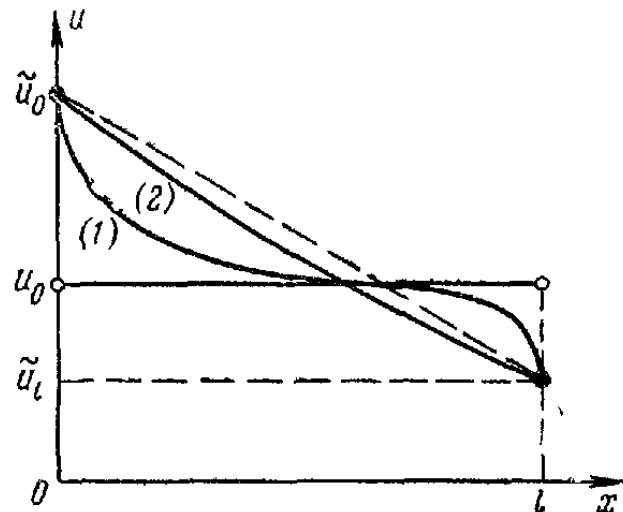


Рис. 54.

$$w \approx \frac{2}{\pi} (u_0 - \tilde{u}_0) e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi} (\tilde{u}_l - u_0) e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l} = \\ = -\frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\tilde{u}_0 + \tilde{u}_l}{2} - u_0 \right\} e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l},$$

т. е. ордината графика  $u$  ниже ординаты соответствующей точки прямой, соединяющей точки  $(0, \tilde{u}_0)$  и  $(l, \tilde{u}_l)$ , на величину, пропорциональную  $\sin \frac{\pi x}{l}$ : получается кривая (2).

Вид графиков  $u$  может резко меняться в зависимости от соотношения величин  $u_0$ ,  $\tilde{u}_0$  и  $\tilde{u}_l$ . Так, если  $u_0 = \frac{1}{2} (\tilde{u}_0 + \tilde{u}_l)$

(начальная температура равна среднему арифметическому температур концов), то  $u_0 - \tilde{u}_0 = -\frac{1}{2}(\tilde{u}_0 - \tilde{u}_l) = \tilde{u}_l - u_0$  и в выражении для  $w(x, t)$  останутся только слагаемые с четными индексами  $n=2m$ :

$$w(x, t) = -\frac{\tilde{u}_0 - \tilde{u}_l}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2m\pi x}{l}}{m} e^{-\frac{4m^2\pi^2a^2t}{l^2}}$$

и  $w|_{x=l/2}=0$ . В этом случае графики  $w$  симметричны относительно точки  $(\frac{1}{2}l, u_0)$ ; они изображены на рис. 55. Здесь для больших  $t$

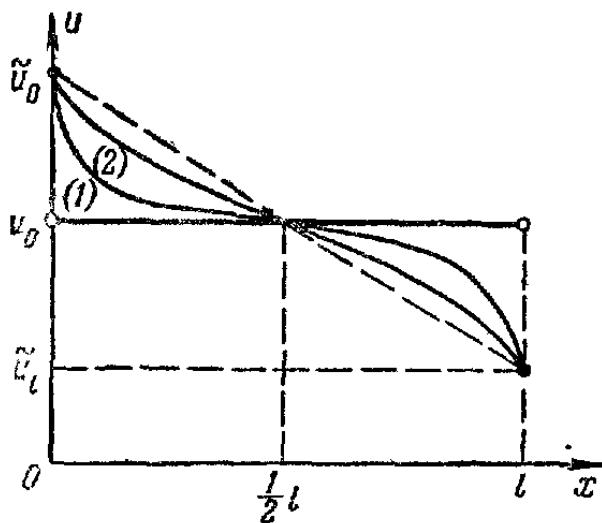


Рис. 55.

и  $w(x, t)=w(x, t)+\tilde{u}_0$ . Графики  $w$  симметричны относительно прямой  $x=\frac{l}{2}$ ; они изображены на рис. 56 для возрастающих  $t$ : (1), (2), (3).

$$\begin{aligned} w &\approx \\ &\approx -\frac{\tilde{u}_0 - \tilde{u}_l}{\pi} e^{-\frac{4\pi^2a^2t}{l^2}} \sin \frac{2\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Представляет интерес частный случай  $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_l$ . Тогда в сумме останутся только слагаемые с нечетными индексами

$$w(x, t) = \frac{4}{\pi} (u_0 - \tilde{u}_0) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi x}{l}}{2m+1} e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}$$

и  $u(x, t)=w(x, t)+\tilde{u}_0$ . Графики  $u$  симметричны относительно прямой  $x=\frac{l}{2}$ ; они изображены на рис. 56 для возрастающих  $t$ : (1), (2), (3).

Заметим, что в этом примере количество тепла, содержащееся в стержне, изменяется с течением времени, хотя боковая поверхность стержня теплоизолирована: теплообмен с внешней

средой происходит через торцевые сечения. Например, в последнем рассмотренном случае тепло уходит из стержня через торцевые сечения в более холодную внешнюю среду.

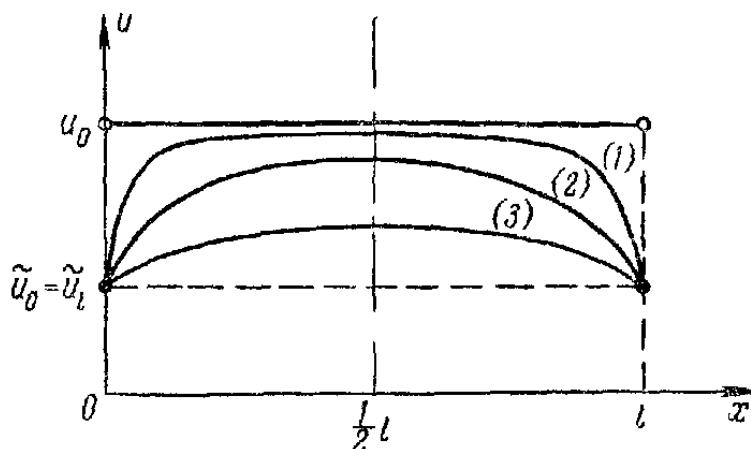


Рис. 56.

**Пример 5.** В конечном стержне (с теплоизолированной боковой поверхностью) концы поддерживаются при

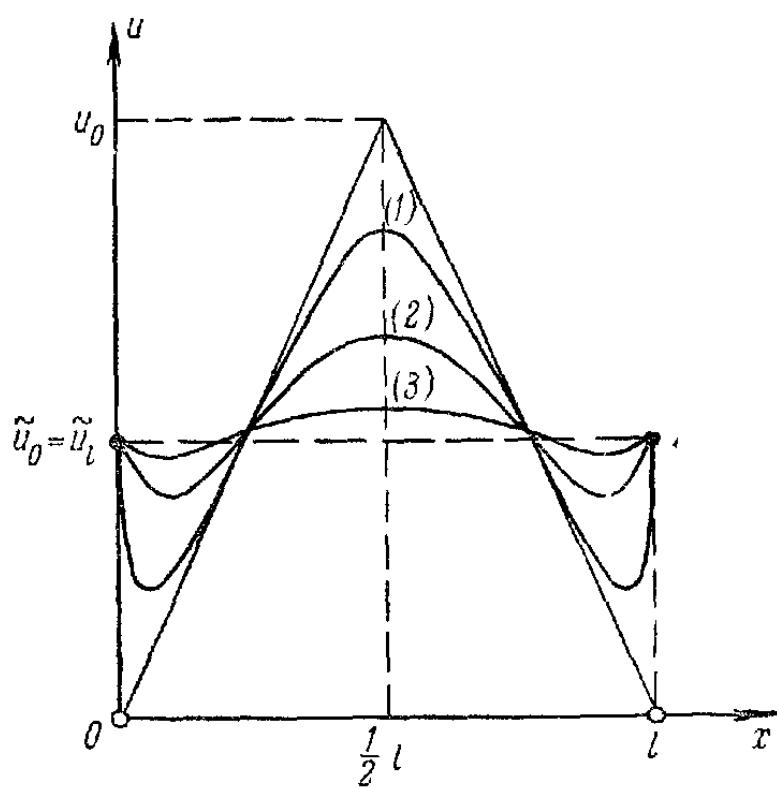


Рис. 57.

постоянной температуре  $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_l$ , а начальная температура

$$u|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} \frac{2u_0}{l}x, & \text{если } 0 < x \leq \frac{1}{2}l, \\ \frac{2u_0}{l}(l-x), & \text{если } \frac{1}{2}l \leq x < l \end{cases}$$

(см. рис. 57, где принято  $0 < \tilde{u}_0 < u_0$ ). Показать, что

$$u(x, t) = \tilde{u}_0 - \frac{4\tilde{u}_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi x}{l}}{2m+1} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} + \\ + \frac{8\tilde{u}_0}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi x}{l}}{(2m+1)^2} e^{-\frac{(2m+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}.$$

Провести исследование полученного решения для малых  $t > 0$  (кривая (1)) и больших  $t$  (кривая (3)). Найти приближенное выражение  $u$  для больших значений  $t$  и установить, что для них  $u > \tilde{u}_0$ , если  $u_0 > \frac{\pi}{2} \tilde{u}_0$ , и  $u < \tilde{u}_0$ , если  $u_0 < \frac{\pi}{2} \tilde{u}_0$ . Аналогично исследовать случай  $0 < u_0 < \tilde{u}_0$ .

Пример 6. В конечном стержне (с теплоизолированной боковой поверхностью) левый конец теплоизолирован:  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ , правый поддерживается при постоянной температуре:  $u \Big|_{x=l} = \tilde{u}_l$ , а начальная температура постоянна по

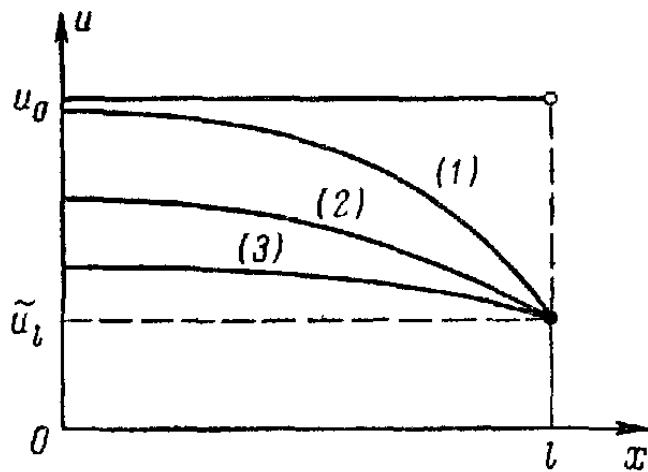


Рис. 58.

стержню:  $u \Big|_{t=0} = u_0$ . Это — задача В. Предварительно определим  $\gamma$  и  $\gamma_1$  из уравнений (14.3). Так как здесь  $h_0 = 0$ ,  $h_l = \infty$ , то эти уравнения принимают вид  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma = \tilde{u}_l$  и мы имеем  $u = w + \tilde{u}_l$ ,  $f_1(x) = u_0 - \tilde{u}_l$  (по формулам (14.2) и (14.5)). Далее, по формуле (14.17В)

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

где по формуле (14.18В)

$$a_n = \frac{2(u_0 - \tilde{u}_l)}{l} \int_0^l \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{4(u_0 - \tilde{u}_l)}{(2n+1)\pi} (-1)^n.$$

Таким образом, решением будет

$$u = \tilde{u}_l + \frac{4(u_0 - \tilde{u}_l)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}}$$

(см. рис. 58, где принято  $u_0 > \tilde{u}_l$ ). Для больших  $t$  (кривая (3))

$$u \approx \tilde{u}_l + \frac{4(u_0 - \tilde{u}_l)}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{4l^2}} \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

Пример 7. Пусть в условиях примера 6

$$u|_{t=0} = \frac{u_0}{l} x \quad (0 < x < l).$$

Показать, что тогда

$$\begin{aligned} u = \tilde{u}_l + \frac{4(u_0 - \tilde{u}_l)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} - \\ - \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}}. \end{aligned}$$

Построить приближенно графики  $u$  для  $u_0 > \tilde{u}_l$  и  $u_0 < \tilde{u}_l$ .

Пример 8. Пусть в условиях примера 6

$$u|_{t=0} = \frac{u_0}{l}(l-x) \quad (0 < x < l).$$

Показать, что тогда

$$\begin{aligned} u = \tilde{u}_l - \frac{4\tilde{u}_l}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} + \\ + \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}}. \end{aligned}$$

Построить приближение графики  $u$  для случаев  $u_0 > \tilde{u}_l$  и  $u_0 < \tilde{u}_l$ .

Пример 9. Пусть в общем краевом условии (14.8)  $h_0 = 0$  и  $h_l = h$ . Тогда в выражении (14.14)  $\beta_n = 0$  и  $w_n = a_n \cos \lambda_n x e^{-\lambda_n^2 a^2 t}$ , где  $\lambda_n$  — корень уравнения  $\operatorname{tg} \lambda l = \frac{h}{k \lambda}$  (частный случай уравнения (14.9)). Непосредственным вычислением проверить, что функции  $X_n(x) = \cos \lambda_n x$  ортого-

нальны в интервале  $(0, l)$  и  $\int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{1}{2} \left( l + \frac{kh}{k^2 \lambda_n^2 + h^2} \right)$ .

Пример 10. Пусть в общем краевом условии (14.8)  $h_0 = h_l = h$ . Показать, что в этом случае

$$\int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{l}{2} \left( \frac{k^2 \lambda_n^2}{h^2} + 1 \right) + \frac{k}{h}.$$

### § 15. Теплопроводность в полубесконечном стержне

**45. Распространение тепла при теплоизоляции или постоянстве температуры конца стержня.** Стержень, ограниченный только с одной стороны, а в другую сторону простирающийся в бесконечность, называется *полубесконечным*. Будем по-прежнему считать, что боковая поверхность стержня *теплоизолирована* и что его единственный — левый — конец расположен при  $x = 0$ . Тогда мы имеем только одно краевое условие, относящееся к  $x = 0$ , и в общем виде оно записывается так:

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_0 \{u|_{x=0} - \tilde{u}_0\} \quad (15.1)$$

(первое равенство (14.1)). Начальное условие имеет прежний вид:

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (x > 0), \quad (15.2)$$

где начальное распределение температуры  $f(x)$  должно быть задано лишь на полуоси  $x > 0$ .

Задача теплопроводности в полубесконечном стержне легко решается при помощи формул § 13 в случаях  $h_0 = 0$  (тепло-

изоляция на конце) и  $h_0 = \infty$  (постоянная температура на конце). Действительно, если мы сначала рассмотрим случай теплоизолированного конца:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (15.1')$$

и продолжим  $f(x)$  на отрицательную полусось  $x = 0$  четным образом:  $f(-x) = f(x)$ , то функция (13.17):

$$u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad (15.3)$$

будет являться решением нашей задачи. Как мы знаем, она является решением линейного уравнения теплопроводности (13.1) и удовлетворяет начальному условию (15.2). Чтобы проверить, что она удовлетворяет и краевому условию (15.1'), сбразуем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4a^3 t \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) (\xi - x) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{4a^3 t \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Последний интеграл равен нулю, так как  $f(\xi)$  по построению — четная функция,  $\xi f(\xi)$ , следовательно, нечетна и вся подынтегральная функция нечетна. Таким образом, условие (15.1') выполняется.

Решение задачи (15.3) может быть в этом случае несколько преобразовано. Используя четность  $f(x)$ , получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi, \end{aligned}$$

где в первом интеграле  $\xi$  заменено  $- \xi$ ; таким образом, при краевом условии (15.1') решением будет

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right\} d\xi. \quad (15.3')$$

Перейдем к случаю, когда конец  $x=0$  поддерживается при постоянной температуре  $\tilde{u}_0$ :

$$u|_{x=0} = \tilde{u}_0. \quad (15.1'')$$

(Решение для случая, когда  $\tilde{u}_0$  есть функция времени  $t$ , приведено в п. 52.) Сначала сведем краевое условие к однородному, полагая

$$w = u - \tilde{u}_0, \quad f_1(x) = f(x) - \tilde{u}_0 \quad (x > 0),$$

и продолжим  $f_1(x)$  на отрицательную полуось  $x < 0$  нечетным образом  $f_1(-x) = -f_1(x)$ . Тогда функция

$$w(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f_1(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi$$

удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , начальному условию  $w|_{t=0} = f_1(x)$  ( $x > 0$ ) и краевому условию  $w|_{x=0} = 0$ . Последнее вытекает из того, что

$$w|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f_1(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} d\xi = 0,$$

поскольку  $f_1(\xi)$  — нечетная функция. Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \tilde{u}_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f_1(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \\ &= \tilde{u}_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 f_1(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f_1(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{u}_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f_1(\xi) \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right\} d\xi = \\
 &= \tilde{u}_0 - \tilde{u}_0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right\} d\xi + \\
 &\quad + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right\} d\xi.
 \end{aligned}$$

Преобразуем эту формулу, привлекая интеграл вероятностей  $\Phi(z)$  (см. пример 1 § 13). Для этого, полагая  $\mu = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$ , заметим, что

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

а полагая  $\mu = \frac{x+\xi}{2a\sqrt{t}}$ , — что

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^\infty e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

вследствие чего

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right\} d\xi = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Поэтому окончательно мы получим решение задачи в случае краевого условия (15.1'') в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \tilde{u}_0 \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right\} d\xi. \quad (15.3'')
 \end{aligned}$$

Решение задачи теплопроводности в полубесконечном стержне при общем краевом условии (15.1) представляет значительно большие трудности и требует иных средств<sup>1)</sup>.

**46. Примеры.** Пример 1. Левый конец  $x=0$  полубесконечного стержня (как и его боковая поверхность) теплоизолирован. Начальное распределение температуры:

$$u|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < x_1, \\ u_0, & \text{если } x_1 < x < x_2, \\ 0, & \text{если } x_2 < x. \end{cases}$$

Найдем  $u=u(x, t)$ . По формуле (15.3') имеем

$$u = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right\} d\xi;$$

полагая для первого слагаемого  $\mu = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$ , а для второго  $\mu = \frac{x+\xi}{2a\sqrt{t}}$ , найдем, что

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu + \int_{\frac{x+x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu \right\} = \\ &= \frac{u_0}{2} \left\{ \Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi\left(\frac{x+x_2}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x+x_1}{2a\sqrt{t}}\right) \right\}. \quad (15.4) \end{aligned}$$

В частности, полагая  $x_1=0$ ,  $x_2=l$ , получим

$$u = \frac{u_0}{2} \left\{ \Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right) \right\}. \quad (15.5)$$

Вид графиков  $u$  при фиксированных значениях  $t>0$  виден на рис. 59. Так как теплообмена с окружающей средой нет,

<sup>1)</sup> Решение задачи теплопроводности для полубесконечного стержня методами операционного исчисления приведено в книге, упомянутой на стр. 100.

то площадь под каждым графиком равна  $u_0 t$  (заштрихована на рис. 59).

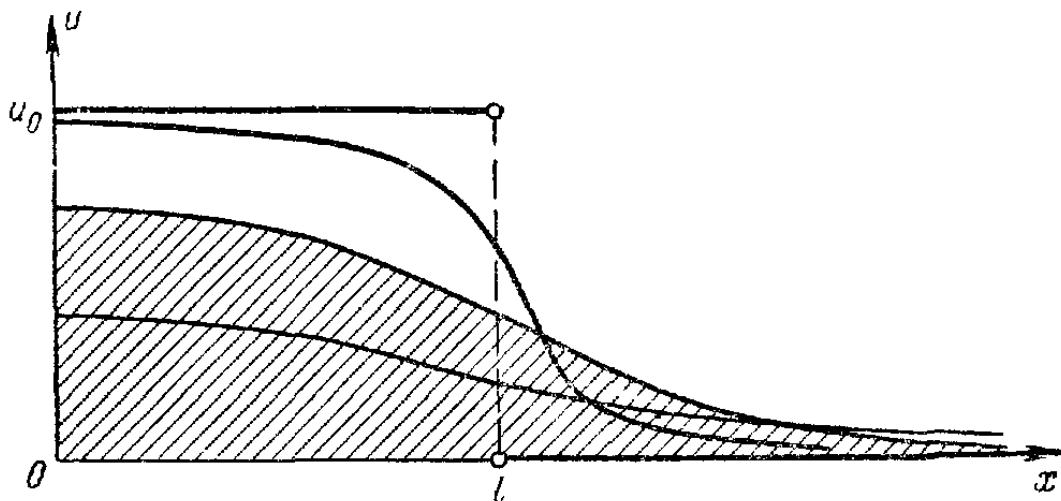


Рис. 59.

Представляет интерес предельный случай решения (15.4) при  $u_0 = \frac{1}{x_2 - x_1}$  и  $x_2 \rightarrow x_1$ . Если положим  $x_2 = x_1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ),  $u_0 = \frac{1}{\varepsilon}$  и  $\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x+x_1}{2a\sqrt{t}}\right) = \Psi(x_1)$ , то

$$\Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x+x_2}{2a\sqrt{t}}\right) = \Psi(x_2) = \Psi(x_1 + \varepsilon)$$

и

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\Psi(x_1 + \varepsilon) - \Psi(x_1)}{\varepsilon},$$

так что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u = -\frac{1}{2} \Psi'(x_1).$$

Дифференцируя  $\Psi(x_1)$  по  $x_1$ , найдем, что

$$\Psi'(x_1) = -\frac{1}{2a\sqrt{t}} \Phi'\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2a\sqrt{t}} \Phi'\left(\frac{x+x_1}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Так как

$$\Phi(z) = \frac{2}{V^\pi} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu,$$

то  $\Phi'(z) = \frac{2}{V^\pi} e^{-z^2}$  и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+x_1)^2}{4a^2 t}} \right\}. \quad (15.6)$$

Но очевидно, что осуществленный в начальном условии предельный переход означает, что

$$u|_{t=0} = \delta(x - x_1), \quad (15.7)$$

где  $\delta(x - x_1)$  — функция Дирака (см. стр. 164). Таким образом, решением задачи для полубесконечного стержня при краевом условии (15.1') и начальном условии (15.7) является сумма фундаментальных решений

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+x_1)^2}{4a^2 t}} \right\} = \varphi_{x_1}(x, t) + \varphi_{-x_1}(x, t)$$

см. формулу (13.18)). Это можно усмотреть и непосредственно.

**Пример 2.** Левый конец  $x = 0$  полубесконечного стержня (с теплоизолированной боковой поверхностью) поддерживается при постоянной температуре  $\tilde{u}_0$ :  $u|_{x=0} = \tilde{u}_0$ . Начальное распределение температуры то же, что в примере 1. Показать, что в этом случае (по формуле (15.3''))

$$\begin{aligned} u(x, t) = \tilde{u}_0 & \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right\} + \frac{u_0}{2} \left\{ \Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \right. \\ & \left. - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x+x_2}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{x+x_1}{2a\sqrt{t}}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (15.8)$$

рассмотреть частный случай решения при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = l$  и приблизенно нарисовать графики и при фиксированных значениях  $t > 0$ .

**Пример 3.** Показать, что при условиях примера 2, но при начальном условии  $u|_{t=0} = \delta(x - x_1)$  решение имеет вид

$$u(x, t) = \tilde{u}_0 \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right\} + \varphi_{x_1}(x, t) - \varphi_{-x_1}(x, t).$$

## § 16. Некоторые пространственные задачи теплопроводности

**47. Вывод уравнения теплопроводности в пространственном случае<sup>1)</sup>.** Рассмотрим неравномерно нагретое тело. Пусть температура в каждой точке  $(x, y, z)$  тела в момент

<sup>1)</sup> Перед чтением этого пункта читателю необходимо вспомнить теорию поля (векторный анализ). Все необходимые сведения содержатся в [1], гл. VII,пп. 126 и 127 и гл. IX,пп. 152—154.

времени  $t$  определяется функцией  $u(x, y, z, t)$ . Физические предпосылки были подробно рассмотрены в п. 34 при выводе уравнения линейной теплопроводности. Поэтому мы ограничимся краткими замечаниями, обратив основное внимание на те усложнения математической стороны дела, которые возникают в пространственном случае.

В любой момент времени  $t$  функция  $u$  определяет *скалярное поле* — поле температуры. В общем курсе анализа обычно ограничиваются изучением стационарных полей, когда температура  $u$  не зависит от времени<sup>1)</sup>. Нам же сейчас придется рассматривать *нестационарное поле*, поскольку мы предполагаем, что температура точек тела изменяется со временем. Если зафиксировать момент времени  $t$ , то совокупность точек, в которых температура  $u(x, y, z, t)$  принимает одно и то же значение, образует *изотермическую поверхность* (поверхность уровня). В отличие от стационарного случая, форма и расположение изотермических поверхностей с течением времени будут изменяться.

Как известно, направление наибольшей скорости изменения температуры  $u$  совпадает с направлением *градиента* функции  $u(x, y, z, t)$  при данном значении  $t$ . При этом

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

В точках изотермической поверхности градиент направлен по нормали к этой поверхности в сторону увеличения значений  $u$  и модуль градиента равен производной по этому направлению:

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Обобщая формулу (12.2), считают, что *величина теплового потока через малый участок  $\Delta s$  изотермической поверхности за время  $\Delta t$  равна*

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta s \Delta t, \quad (16.1)$$

<sup>1)</sup> Задачи о стационарных температурных полях приводят к уравнению Лапласа, которое мы рассматриваем в гл. III.

где  $k$  — коэффициент теплопроводности, который мы считаем постоянным (см. стр. 146) <sup>1)</sup>.

Обратим особое внимание на роль знака «минус» в формуле (16.1). Условимся считать величину теплового потока положительной, если направление потока тепла совпадает с выбранным направлением нормали, и отрицательной, если оно ему противоположно. Для нормали, совпадающей с направлением градиента,  $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ ; тепло же переходит от более нагретых участков к менее нагретым, т. е. как раз в противоположную сторону, и, следовательно, по определению,  $\Delta Q < 0$ , что и объясняет знак «минус» в формуле (16.1). Изменив направление нормали на противоположное, мы получили бы, что  $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ ; но тогда  $\Delta Q > 0$  и опять-таки знак «минус» сохраняется.

В линейном случае изотермическими поверхностями являются сечения стержня, перпендикулярные оси  $Ox$ ; нормаль к ним совпадает с осью  $Ox$ , и  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$  (если направление нормали совпадает с положительным направлением оси  $Ox$ ).

В теории теплопроводности доказывается, что формула (16.1) для величины теплового потока справедлива для любых поверхностей (не только для изотермических). Производная  $\frac{\partial u}{\partial n}$  по направлению нормали к выбранной поверхности равна проекции градиента на эту нормаль, т. е. скалярному произведению  $\text{grad } u$  на единичный вектор нормали  $n$ :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad } u \cdot n.$$

<sup>1)</sup> Вообще коэффициент  $k$  может зависеть от температуры и координат точки  $x$ ,  $y$  и  $z$  (для неоднородного тела). Возможен и более сложный случай, когда тело обладает свойством *тепловой анизотропии*, т. е. когда коэффициент теплопроводности зависит от направления, в котором происходит передача тепла (например, для тел с волокнистым строением). Любое из этих предположений приводит к значительному усложнению уравнения теплопроводности.

Поэтому поток тепла через участок  $\Delta\sigma$  любой поверхности за время  $\Delta t$  будет равен

$$\Delta Q = -k \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma \Delta t. \quad (16.2)$$

Для краткости назовем вектор  $-k \operatorname{grad} u$  *вектором теплового потока* и обозначим через  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = -k \operatorname{grad} u.$$

Тогда  $\Delta Q$  есть *поток вектора A* через элементарную площадку  $\Delta\sigma$  за время  $\Delta t$ :

$$\Delta Q = A_n \Delta\sigma \Delta t.$$

Если теперь выделить в теле некоторую часть, ограниченную замкнутой поверхностью  $S$ , то поток тепла изнутри через эту замкнутую поверхность за время  $\Delta t$  будет равен произведению потока вектора  $\mathbf{A}$  на  $\Delta t$ :

$$Q = \Delta t \iint_S A_n d\sigma, \quad (16.3)$$

где  $A_n$  — проекция  $A$  на внешнюю нормаль (рис. 60).

Поток  $Q$  будет положительным, если выбранная часть тела теряет тепло, и отрицательным, если приобретает.

Применяя к интегралу в формуле (16.3) теорему Гаусса — Остроградского, запишем, что

$$\iint_S A_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv,$$

где  $V$  — часть тела, ограниченная поверхностью  $S$ , и

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -k \operatorname{div} \operatorname{grad} u = -k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -k \Delta u,$$

где  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

Таким образом, количество тепла  $Q_1$ , приобретенное выделенной частью тела за счет прохождения теплового

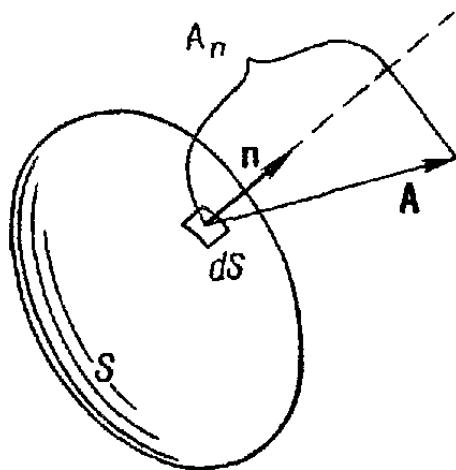


Рис. 60.

потока, будет равно (оно противоположно по знаку величине  $Q$ )

$$Q_1 = \iiint_V k \Delta u dv. \quad (16.4)$$

Предположим, далее, что в теле имеются тепловые источники, плотность которых характеризуется функцией  $F(x, y, z, t)$  (см. стр. 148). Тогда за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$  в выбранной части тела выделится тепло  $Q_2$ , равное (с точностью до бесконечно малых высшего порядка)

$$Q_2 = \Delta t \iiint_V F(x, y, z, t) dv. \quad (16.5)$$

Общее количество тепла, сообщенного выделенному объему  $V$ , будет равно сумме  $Q_1 + Q_2$ . Подсчитаем теперь это тепло иначе, учитывая изменение температуры в точках тела, лежащих внутри поверхности  $S$ . В точке  $(x, y, z)$  за промежуток времени  $\Delta t$  температура изменится на величину

$$u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t) = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Поэтому элементарному объему  $\Delta v$  для такого изменения температуры потребуется количество тепла, равное  $c\rho \Delta v \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$ , где  $c$  — удельная теплоемкость,  $\rho$  — плотность, а всему объему — количество

$$Q_3 = \Delta t \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv, \quad (16.6)$$

которое должно быть равно сумме  $Q_1 + Q_2$ . Следовательно,

$$\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv = \iiint_V k \Delta u dv + \iiint_V F(x, y, z, t) dv.$$

Перенося все слагаемые в левую часть, приходим к равенству

$$\iiint_V \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u - F \right) dv = 0. \quad (16.7)$$

Равенство (16.7) должно соблюдаться для любой части тела  $V$ . Это возможно только тогда, когда в каждой точке внутри тела

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u - F = 0. \quad (16.8)$$

Это заключение справедливо, когда все слагаемые в левой части равенства (16.8) — непрерывные функции. Действительно, если предположить, что в точке  $M(x, y, z)$  равенство (16.8) нарушается, т. е., например,  $\left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u - F\right)_M > 0$ , то в силу непрерывности это же неравенство будет соблюдаться и в некоторой области  $\Omega$ , окружающей точку  $M$ . Но тогда интеграл по этой области, вопреки условию (16.7), был бы величиной положительной. Подобное же рассуждение неоднократно встречалось в курсе анализа (см., например, [1], стр. 486).

Переписав равенство (16.8) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{1}{c\rho} F, \quad (16.9)$$

получим основное уравнение теплопроводности ( $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$  — коэффициент температуропроводности). Если тепловые источники внутри тела отсутствуют, то  $F = 0$  и уравнение становится однородным:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (16.10)$$

Еще раз отметим, что уравнения (16.9) и (16.10) выведены в предположении, что все физические величины, характеризующие свойства тела (плотность, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности), постоянны.

Ясно, что уравнение (12.4) линейной теплопроводности является частным случаем уравнения (16.10).

**48. Начальное и краевые условия.** Перейдем теперь к начальному и краевым условиям. Начальное условие для уравнения теплопроводности состоит в задании температуры во всех точках тела в некоторый данный момент, от которого ведется отсчет времени. В этот начальный момент поэтому полагают  $t = 0$ , так что начальное условие принимает вид

$$u(x, y, z, 0) \equiv u|_{t=0} = f(x, y, z), \quad (16.11)$$

где  $f(x, y, z)$  — данная функция, определенная и непрерывная во всех точках тела.

Краевое условие должно выполняться на поверхности  $\Gamma$ , ограничивающей тело. Вдоль  $\Gamma$  тело граничит с окружающей средой, имеющей в каждой точке  $\xi, \eta, \zeta$  границы  $\Gamma$  свою температуру  $\tilde{u} = \tilde{u}(\xi, \eta, \zeta, t)$ . Разность  $u(\xi, \eta, \zeta, t) - \tilde{u}(\xi, \eta, \zeta, t)$  между температурой тела в точке границы и температурой окружающей среды в этой точке называется *перепадом температур* в точке  $\xi, \eta, \zeta$  границы. Существует физический закон, устанавливающий, что *поток тепла изнутри тела через любую часть поверхности  $\Gamma$  пропорционален перепаду температур на этой части границы*.

Если выделить некоторую часть границы, то поток тепла через нее за время  $\Delta t$  будет равен

$$\Delta t \int_{\Gamma_1} \int h(u - \tilde{u}) d\sigma;$$

где  $\Gamma_1$  — рассматриваемая часть границы  $\Gamma$ , а  $h$  — *коэффициент теплообмена*, зависящий от физических свойств тела и окружающей среды. Вообще говоря,  $h$  может изменяться от точки к точке границы, т. е.  $h = h(\xi, \eta, \zeta)$ , но в случае однородности тела и среды  $h = \text{const}$ . Поскольку поток тепла, уходящий в окружающее пространство, должен равняться потоку тепла, подходящему изнутри, то, применяя формулу (16.3) к участку  $\Gamma_1$ , получим

$$\int_{\Gamma_1} \int A_n d\sigma = \int_{\Gamma_1} \int h(u - \tilde{u}) d\sigma.$$

Так как  $\Gamma_1$  — любая часть границы, то, повторяя рассуждения, обосновывающие равенство (16.8), придем к условию на границе  $\Gamma$ :

$$A_n = h(u - \tilde{u}).$$

Вспоминая, что  $A_n = -k \operatorname{grad} u \cdot n = -k \frac{\partial u}{\partial n}$ , где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная  $u$  в точке границы по направлению внешней нормали к ней, запишем последнее равенство так:

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = h[u]_{\Gamma} - \tilde{u}. \quad (16.12)$$

Здесь черта подстановки  $|_G$  означает, что имеется в виду значение соответствующей величины в точке границы  $G$ .

Общее краевое условие (16.12) может в частных случаях иметь более простой вид.

Первый частный случай  $h = 0$ . Это означает, что переход тепла через границу тела исключен, т. е. что, как говорят, граница тела теплоизолирована. В этом случае краевое условие принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_G = 0. \quad (16.13)$$

Второй случай соответствует очень большому коэффициенту внешней теплопроводности  $h$ . Тогда условие (16.12), записанное в виде

$$-\frac{k}{h} \frac{\partial u}{\partial n} = u |_G - \bar{u},$$

в пределе при  $h \rightarrow \infty$  приводит к равенству

$$u |_G = \bar{u}, \quad (16.14)$$

выражающему тот факт, что на границе тело имеет температуру внешней среды.

Следует отметить, что разные части границы тела могут находиться в задачах теплопроводности в разных условиях, выраженных разными значениями  $h$ . Так, например, одна часть границы может быть теплоизолирована, а на другой температура тела может совпадать с температурой окружающей среды.

Подводя итоги, мы можем следующим образом сформулировать математическую задачу теплопроводности (для однородного тела без тепловых источников): ищется температура  $u = u(x, y, z, t)$  внутри тела, удовлетворяющая там уравнению (16.10), начальному условию (16.11) и краевому условию (16.12) (или условиям (16.13) или (16.14)). В теории дифференциальных уравнений в частных производных показывается, что эта задача имеет одно и только одно решение [при некоторых достаточно общих требованиях к заданным функциям  $f$  и  $\bar{u}$ , следующих из условий (16.11) и (16.12)].

Перейдем теперь к решению этой задачи для простейших случаев.

**49. Распространение тепла в однородном цилиндре<sup>1)</sup>.** Пусть боковая поверхность бесконечного круглого цилиндра радиуса  $R$  поддерживается при постоянной температуре. Если в начальный момент времени температура в каждой точке зависит только от ее расстояния  $r$  до оси цилиндра, то ясно, что и в последующем температура  $u$  будет зависеть лишь от  $r$  и времени  $t$ . Тепловой поток при этом всегда направлен по радиусам цилиндра. Таким образом,  $u = u(r, t)$ .

Преобразуем общее уравнение теплопроводности (16.10)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

( $a$  — коэффициент температуропроводности) к цилиндрическим координатам, учитывая, что функция  $u$  не зависит от  $\varphi$  и  $z$ . Придем к уравнению *радиального распространения тепла в цилиндре*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (16.15)$$

Начальное условие имеет вид

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad (16.16)$$

где  $\varphi(r)$  — заданная функция в интервале  $0 \leq r \leq R$ .

Краевым условием будет условие постоянства температуры боковой поверхности цилиндра

$$u|_{r=R} = u_0. \quad (16.17)$$

Будем считать, что  $u_0 = 0$ , т. е. что краевое условие (16.3) однородное. В противном случае нужно ввести новую функцию  $\tilde{u}(r, t) = u(r, t) - u_0$ . Уравнение (16.15) не изменится, а начальное и краевое условия примут вид

$$\tilde{u}|_{t=0} = \varphi(r) - u_0 \quad \text{и} \quad \tilde{u}|_{r=R} = 0.$$

Применим к решению задачи метод Фурье. Полагая  $u(r, t) = U(r) T(t)$ , разделим переменные:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{U''(r) + \frac{1}{r} U'(r)}{U(r)} = -\lambda^2.$$

<sup>1)</sup> Перед чтением этого пункта рекомендуем вспомнить содержание § 10, касающегося уравнения и функций Бесселя.

(Соображения, в силу которых постоянная в правой части не может быть положительной, приведены при решении задачи о бесконечном стержне на стр. 155.) Отсюда

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Для функции  $U(r)$  получаем уже знакомое нам уравнение (см. п. 30):

$$U''(r) + \frac{1}{r} U'(r) + \lambda^2 U(r) = 0, \quad (16.18)$$

одно частное решение которого выражается через функцию Бесселя нулевого порядка:

$$U(r) = J_0(\lambda r).$$

Второе линейно независимое решение уравнения (16.18) — функцию Неймана  $N_0$  — мы не принимаем в расчет, так как она обращается в бесконечность при  $r = 0$ .

Чтобы решение удовлетворяло однородному краевому условию, нужно положить

$$J_0(\lambda R) = 0. \quad (16.19)$$

Таким образом, *собственными числами* задачи являются величины  $\lambda_k = \frac{\mu_k}{R}$ , где  $\mu_k$  — корни функции Бесселя нулевого порядка. Каждому собственному числу  $\lambda_k$  соответствует *собственная функция*

$$u_k(r, t) = e^{-\lambda_k^2 a^2 t} J_0(\lambda_k r).$$

Образуем теперь функцию

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} J_0(\lambda_k r) \quad (16.20)$$

и подберем коэффициенты  $C_k$  так, чтобы

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = \varphi(r).$$

Полагая  $r = Rx$ , придадим последнему равенству вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\mu_k x) = \varphi(Rx),$$

после чего, основываясь на условиях ортогональности функций  $J_0(\mu_k r)$ , выраженных формулами (10.11), найдем коэффициенты  $C_k$ :

$$C_k = \frac{2}{J_0^2(\mu_k)} \int_0^R x J_0(\mu_k x) \varphi(Rx) dx. \quad (16.21)$$

Напомним еще, что  $J_0^2(\mu_k) = J_1^2(\mu_k)$  (см. формулу (10.16) п. 31).

Вычисляя коэффициенты  $C_k$  по формулам (16.21) и подставляя в ряд (16.20), мы и завершим решение задачи <sup>1)</sup>.

Почти так же решается задача в случае теплоизоляции боковой поверхности цилиндра.

Краевое условие запишется теперь в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (16.22)$$

(нормаль к боковой поверхности цилиндра направлена по радиусу).

Для определения собственных чисел взамен уравнения (16.19) мы получим уравнение  $J_0'(\lambda R) = 0$  или, согласно формуле (10.16),

$$J_1(\lambda R) = 0. \quad (16.23)$$

Таким образом, *собственными числами* являются величины  $\lambda_k = \frac{\nu_k}{R}$ , где  $\nu_k$  — нули функции Бесселя первого порядка (см. п. 31).

*Собственные функции*  $u_k(r, t) = e^{-\lambda_k^2 a^2 t} J_0\left(\nu_k \frac{r}{R}\right)$  отличаются от собственных функций предыдущей задачи (постоянство температуры на поверхности цилиндра) только тем, что в аргумент функции Бесселя входят множителями корни не самой функции  $J_0(x)$ , а корни функции  $J_1(x)$ . Ряд (16.20) запишется теперь в виде

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t} J_0\left(\nu_k \frac{r}{R}\right), \quad (16.24)$$

<sup>1)</sup> Решение почти полностью повторяет решение задачи о колебаниях круглой мембраны, разобранное в п. 32.

и, чтобы удовлетворялось начальное условие (16.16), должно соблюдаться равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\nu_n x) = \varphi(Rx), \quad (16.25)$$

где  $x = \frac{r}{R}$ .

Оказывается, что функции  $J_0(\nu_n x)$  в интервале  $[0, 1]$  удовлетворяют такому же условию ортогональности, что и функции  $J_0(\mu_n x)$ . Это следует из формулы (10.12) п. 30. Напомним, что, согласно этой формуле и примечанию к формуле (10.13), для любых чисел  $p$  и  $q$

$$\int_0^1 x J_0(px) J_0(qx) dx = \frac{q J_0(p) J'_0(q) - p J_0(q) J'_0(p)}{p^2 - q^2}.$$

Отсюда сразу следует, что при  $p = \nu_k$  и  $q = \nu_n$ , где  $k \neq n$ , правая часть обращается в нуль, так как  $J'_0(\nu_k) = J_1(\nu_k) = 0$  и  $J_0(\nu_n) = 0$ . Если же  $k = n$ , то, полагая  $p = \nu_k$  и переходя по правилу Лопиталя к пределу при  $q \rightarrow \nu_k$ , получим

$$\int_0^1 x J_0^2(\nu_k x) dx = \lim_{q \rightarrow \nu_k} \frac{q J_0(\nu_k) J'_0(q)}{\nu_k^2 - q^2} = -\frac{J_0(\nu_k) J''_0(\nu_k)}{2}.$$

Из уравнения Бесселя  $J''_0(x) + \frac{1}{x} J'_0(x) + J_0(x) = 0$  и условия  $J'_0(\nu_k) = 0$  следует, что  $J''_0(\nu_k) = -J_0(\nu_k)$ . Поэтому

$$\int_0^1 x J_0^2(\nu_k x) dx = \frac{1}{2} J_0^2(\nu_k).$$

Воспользовавшись этим соотношением, сразу получим, что коэффициенты  $C_k$  в формуле (16.25) равны

$$C_k = \frac{2}{J_0^2(\nu_k)} \int_0^1 x J_0(\nu_k x) \varphi(Rx) dx.$$

Подставляя найденные значения  $C_k$  в ряд (16.24), завершим решение задачи.

Общий случай краевых условий  $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + hu \Big|_{r=R} = 0$  может быть рассмотрен точно так же, однако уравнение для отыскания собственных чисел приобретает более сложный вид:  $\lambda J_0(\lambda R) + hJ_0'(\lambda R) = 0$ . Решение этого уравнения и доказательство ортогональности получающихся собственных функций требуют более детального знакомства с теорией бесселевых функций; мы этим заниматься не будем.

**50. Распространение тепла в однородном шаре.** В качестве второй пространственной задачи рассмотрим *радиальное распространение тепла в однородном шаре радиуса  $R$* . Мы предполагаем, что как в начальный, так и в произвольный момент времени температура одна и та же во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии  $r$  от центра шара. Если ввести сферические координаты, то это означает, что температура зависит только от  $r$  и  $t$ . Переходя в общем уравнении (16.10) к сферическим координатам, получим (см. п. 3 введения)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (16.26)$$

Начальное и краевое условия примем такими же, как в задаче о цилиндре:

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(r), \quad u \Big|_{r=R} = 0 \quad (16.27)$$

(как уже отмечалось, неоднородность краевого условия  $u \Big|_{r=R} = u_0$  легко устраняется введением вспомогательной функции).

При решении нам даже не понадобится заново применять метод Фурье. Введем новую неизвестную функцию

$$v(r, t) = ru(r, t). \quad (16.28)$$

Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = r \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = r \frac{\partial u}{\partial r} + u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Уравнение (16.26) преобразуется при этом к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}. \quad (16.29)$$

Начальное условие примет вид

$$v \Big|_{t=0} = r\varphi(r),$$

а краевое останется без изменения:

$$v|_{r=R} = 0.$$

Кроме того, появится новое условие

$$v|_{r=0} = 0.$$

В результате мы пришли к задаче о теплопроводности в конечном стержне длины  $R$ , на концах которого поддерживается температура, равная нулю, а начальное распределение температур задается функцией  $v|_{t=0} = r\varphi(r)$ . Эта задача уже решена в п. 42 (задача Б).

Согласно формуле (14.17Б) ее решение имеет вид

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{R^2}} \sin \frac{\pi n r}{R}, \quad (16.30)$$

где коэффициенты  $\beta_n$  определяются по формулам (14.18Б), в которых функцию  $f_1(x)$  надо заменить на  $x\varphi(x)$ :

$$\beta_n = \frac{2}{R} \int_0^R x\varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{R} dx.$$

Чтобы вернуться к функции  $u(r, t)$ , надо найденную функцию  $v(r, t)$  разделить на  $r$ :

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{R^2}} \frac{\sin \frac{\pi n r}{R}}{r}. \quad (16.31)$$

Из формулы (16.31) получается, что температура в центре шара ( $r = 0$ ) будет для любого  $t > 0$  равна

$$u(0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} u(r, t) = \frac{\pi}{R} \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{R^2}}.$$

Если на поверхности шара задано общее краевое условие (однородное)

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + hu|_{r=R} = 0,$$

то для вспомогательной функции  $v$  оно преобразуется в следующее.

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v \right)_{r=R} + h \left( \frac{v}{r} \right)_{r=R} = 0$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} + \left( h - \frac{1}{R} \right) v \Big|_{r=R} = 0.$$

При этом вновь добавляется условие  $v|_{r=0} = 0$ .

Решение задачи с такими краевыми условиями приведено в п. 43, и мы его повторять не будем. Отметим только, что уравнение (14.9) для определения собственных чисел принимает более простой вид:

$$\operatorname{tg} \lambda R = \frac{\lambda R}{1 - hR}$$

(это соответствует случаю  $h_0 = \infty$ ,  $k = 1$ ,  $h_l = h - \frac{1}{R}$ ).

## § 17. Задачи диффузии

**51. Уравнение диффузии.** В процессе диффузии исключаемой функцией является *концентрация диффундирующего вещества*, которую обычно обозначают через  $c = c(x, y, z, t)$ . Этот процесс во многом схож с распространением тепла, и в предположениях, аналогичных тем, которые мы делали в § 16 при выводе уравнения теплопроводности, функция  $c(x, y, z, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c, \quad (17.1)$$

тождественному с уравнением теплопроводности (16.10). Положительный коэффициент  $D$  называется *коэффициентом диффузии*. Он играет роль коэффициента  $a^2$  в теории теплопроводности. Начальное условие

$$c|_{t=0} = f(x, y, z) \quad (17.2)$$

задает *начальную концентрацию*. В качестве краевых условий рассматриваются главным образом условия

$$\frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (17.3')$$

и

$$c|_{\Gamma} = 0, \quad (17.3'')$$

где  $\Gamma$  — граница области, в которой происходит диффузия. Условие (17.3') означает, что  $\Gamma$  является *непроницаемой для диффундирующего вещества стенкой*, а условие (17.3'') задает *концентрацию на границе*  $\Gamma$ .

Линейные задачи диффузии в тонкой трубке с непроницаемой стенкой:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c|_{t=0} = f(x)$$

и на конце или на концах  $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$  или  $c = \tilde{c}$ , решаются при помощи методов, изложенных в §§ 13, 14 и 15. В соответствующих формулах следует только и заменить на  $c$  и  $a$  на  $\sqrt{D}$ .

В большинстве практически интересных задач *коэффициент  $D$  является переменным*. Это приводит к дальнейшему усложнению задачи. Мы рассмотрим три наиболее часто встречающихся случая неравномерного коэффициента диффузии для линейных задач.

I. В первую очередь  $D$  зависит от температуры. Поскольку температура в условия задачи явно не входит, но закон зависимости температуры от времени, как правило, известен, то коэффициент диффузии может рассматриваться как функция времени:  $D = D(t)$ . Уравнение диффузии становится уже уравнением с переменным коэффициентом:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (17.4)$$

Однако это уравнение легко привести к более простому виду, введя вместо независимой переменной  $t$  новую переменную:

$$\vartheta = \int_0^t D(\tau) d\tau.$$

Так как  $D > 0$ , то  $\vartheta = \vartheta(t)$  монотонно возрастает с  $t$  (а при  $t = 0$  также и  $\vartheta = 0$ ). Поэтому существует однозначная обратная функция  $t = t(\vartheta)$ , так что концентрацию  $c$  можно считать функцией  $x$  и  $\vartheta$ . Но

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial \vartheta} D(t)$$

(так как  $\frac{d\theta}{dt} = D(t)$ ). Поэтому уравнение (17.4) принимает простой вид:

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

т. е. вид уравнения теплопроводности с  $a^2 = 1$ . Начальное условие не меняется:  $c|_{\theta=0} = f(x)$ , краевое условие также остается прежним.

II. Если отвлечься от изменения коэффициента диффузии со временем (например, если процесс диффузии происходит при постоянной температуре), то коэффициент диффузии  $D$  не обязан все же быть постоянным. Процесс диффузии может происходить в неоднородной среде, и тогда  $D$  будет зависеть от  $x$ :  $D = D(x)$ .

Уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(x) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (17.5)$$

значительно сложнее уравнения (17.4), так как в него входит вторая производная искомой функции по переменной  $x$ , от которой зависит коэффициент  $D(x)$ . Уравнение (17.5) уже не может быть сведено к уравнению с постоянным коэффициентом, его приходится решать приближенно. Одним из простых методов приближенного решения является замена  $D(x)$  на *кусочно-постоянной* функцией. Для этого интервал изменения  $x$  (всю ось, конечный интервал или полуось) разбивают на частичные интервалы  $(x_{k-1}, x_k)$  и в каждом частичном интервале считают  $D$  постоянным:  $D = D_k$  (в качестве  $D_k$  можно взять значение  $D(x)$  в любой точке  $\xi_k$  частичного интервала:  $D_k = D(\xi_k)$ ). В каждом частичном интервале задача решается методами §§ 13—15 с краевыми условиями «склеивания» решения: если  $x_k$  — точка деления (граница двух соседних частичных интервалов), то в ней *концентрация должна быть непрерывной*.

Практически важным является и несколько более простой случай, когда диффузия проходит через конечное число сред с разными коэффициентами диффузии (т. е. через *кусочно-однородную среду*); задачи подобного рода приведены в п. 53.

III. При достаточно больших концентрациях коэффициент диффузии зависит от самой концентрации:  $D = D(c)$ .

Соответствующее уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(c) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

будет уже нелинейным и может быть решено только приближенно специальными методами.

**52. Уравнения теплопроводности и диффузии с краевым условием, зависящим от времени.** До сих пор, рассматривая задачи теплопроводности с краевыми условиями для полубесконечного или конечного стержня, мы ограничивались случаями, когда температура внешней среды  $\tilde{u}$  была постоянной (см. стр. 174 и 197). Однако во многих важных задачах диффузии для кусочно-однородных сред приходится иметь дело и с такими краевыми условиями, когда концентрация вещества на границе (в терминах теплопроводности — температура конца стержня) является некоторой заданной функцией времени. Сейчас мы рассмотрим такую задачу, ограничиваясь случаем полубесконечной трубы (стержня). Имея в виду последующие примеры, будем считать, что трубка занимает интервал  $l \leq x < \infty$ , где  $l \geq 0$ . Соответствующая задача формулируется так:

Найти решение уравнения диффузии (теплопроводности)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (17.6)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$c|_{t=0} = 0 \quad (x > l) \quad (17.7)$$

и краевому условию

$$c|_{x=l} = \varphi(t) \quad (t > 0), \quad (17.8)$$

где  $\varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ .

Это — более сложная задача, чем те, которые решались нами в §§ 14 и 15, так как краевое условие неоднородно и непостоянно.

Для того чтобы ее решить, необходимо в первую очередь заменить краевое условие (17.8) однородным путем введения новой искомой функции

$$g(x, t) = c(x, t) - \varphi(t). \quad (17.9)$$

Тогда для  $g(x, t)$  уравнение (17.6) примет вид

$$\frac{\partial g}{\partial t} = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{d\varphi}{dt}, \quad (17.10)$$

начальное условие (17.7) сведется к

$$g|_{t=0} = 0 \quad (x > l) \quad (17.11)$$

(поскольку  $\varphi(t) = 0$  при  $t = 0$ ), а краевое условие (17.8) — к

$$g|_{x=t} = 0. \quad (17.12)$$

Таким образом, мы заменили однородное уравнение (17.6) с неоднородным краевым условием (17.8) неоднородным уравнением (17.10) с однородным краевым условием (17.12).

Рассмотрим теперь выражение

$$\int_0^t \psi(t-\tau) \chi(\tau) d\tau,$$

называемое *сверткой функций*  $\psi$  и  $\chi$ . Чтобы найти производную свертки по  $t$ , воспользуемся правилом Лейбница (для дифференцирования интеграла от функции, зависящей от параметра, при условии, что пределы интегрирования также являются функциями этого параметра):

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(\tau, t) d\tau = f(b, t) b'(t) - f(a, t) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau.$$

Частным случаем этого правила, когда  $a$  и  $b$  не зависят от  $t$ , является теорема, упомянутая в п. 2 введения. Производная свертки будет равна

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \psi(t-\tau) \chi(\tau) d\tau = \psi(0) \chi(t) + \int_0^t \psi'(t-\tau) \chi(\tau) d\tau.$$

Воспользуемся этой формулой, взяв в качестве  $\psi$  любое решение  $c_1(x, t)$  однородного уравнения (17.6) и положив

$$\int_0^t c_1(x, t-\tau) \chi(\tau) d\tau = g_1(x, t). \quad (17.13)$$

Тогда

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = c_1(x, 0) \chi(t) + \int_0^t \frac{\partial c_1(x, t-\tau)}{\partial t} \chi(\tau) d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 c_1(x, t-\tau)}{\partial x^2} \chi(\tau) d\tau,$$

так что

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} =$$

$$= c_1(x, 0) \chi(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial c_1(x, t-\tau)}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 c_1(x, t-\tau)}{\partial x^2} \right\} \chi(\tau) d\tau.$$

Поскольку функция  $c_1(x, t)$  выбрана так, что она является решением уравнения (17.6), то подынтегральное выражение равно нулю при любом значении  $t > \tau$  и, следовательно,

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} - D \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = c_1(x, 0) \chi(t). \quad (17.14)$$

Пусть теперь функция  $c_1(x, t)$  удовлетворяет начальному условию

$$c_1(x, 0) = -1 \quad (x > l) \quad (17.15)$$

и краевому условию

$$c_1(l, t) = 0 \quad (t > 0). \quad (17.16)$$

Функция  $c_1(x, t)$ , как решение уравнения (17.6) при условиях (17.15) и (17.16), может быть найдена из решения примера 2 п. 46. Для этого надо в формуле (15.8) положить

$$a^2 = D, \quad \tilde{u}_0 = 0, \quad u_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \infty$$

и заменить  $x$  на  $x - l$ . Мы получим (рекомендуем читателю все выкладки провести самостоятельно)

$$c_1(x, t) = -\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (x > l, t > 0),$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятностей. Легко проверить, что при  $x > l$  и  $t \rightarrow 0$  функция  $c_1(x, t) \rightarrow -1$ , а при  $t > 0$  и  $x = l$  функция  $c_1(l, t) = 0$ . Именно так следует понимать начальное и краевое условия. Тогда функция  $g_1(x, t)$ , определенная формулой (17.13), примет вид

$$g_1(x, t) = - \int_0^t \Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{D(t-\tau)}}\right) \chi(\tau) d\tau.$$

Согласно равенству (17.14) и условию (17.15) она является решением уравнения

$$\frac{\partial g}{\partial t} = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \chi(t),$$

а согласно (17.13) и (17.16) удовлетворяет условиям

$$g_1|_{t=0} = 0, \quad g_1|_{x=l} = 0.$$

Остается только положить

$$\chi(t) = \frac{d\varphi}{dt},$$

и задача решена. Окончательно функция  $g(x, t)$ , удовлетворяющая неоднородному уравнению (17.10) и условиям (17.11) и (17.12), будет иметь вид

$$g(x, t) = - \int_0^t \Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{D(t-\tau)}}\right) \dot{\varphi}'(\tau) d\tau$$

или, после интегрирования по частям,

$$\begin{aligned} g(x, t) = & -\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{D(t-\tau)}}\right) \varphi(\tau) \Big|_0^t + \\ & + \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{D(t-\tau)}}\right) d\tau. \end{aligned}$$

Так как  $\varphi(0) = 0$ ,  $\Phi(\infty) = 1$  (получается при  $x > l$  и  $\tau = t$ ) и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{D(t-\tau)}}\right) = & -\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-l}{2\sqrt{D(t-\tau)}}} e^{-z^2} dz = \\ = & \frac{x-l}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)^{3/2}}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4D(t-\tau)}}, \end{aligned}$$

то

$$g(x, t) = -\varphi(t) + \frac{x-l}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4D(t-\tau)}} d\tau.$$

Согласно формуле (17.9) окончательное решение поставленной задачи будет<sup>1)</sup>

$$c(x, t) = \frac{x-l}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4D(t-\tau)}} d\tau. \quad (17.17)$$

Тот факт, что функция  $c(x, t)$  удовлетворяет начальному и краевому условиям, следует понимать так: при  $x > l$  и  $t \rightarrow 0$  функция  $c(x, t) \rightarrow 0$ , а при  $t > 0$  и  $x \rightarrow l$  функция  $c(x, t) \rightarrow c(l, t) = \varphi(t)$ . Проверка последнего условия наиболее важна, так как на первый взгляд из формулы (17.17) следует, что при  $x = l$  функция  $c(l, t)$  равна нулю благодаря множителю перед интегралом. На самом же

<sup>1)</sup> Другой вывод формулы (17.17), основанный на применении операционного исчисления, содержится в книге, указанной в сноске на стр. 100.

деле при  $x = l$  интеграл становится расходящимся; это особенно ясно видно, если  $\varphi(\tau) = c \neq 0$ . Действительно,

$$\int_0^t \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} = -\frac{2}{\sqrt{t - \tau}} \Big|_0^t$$

и при  $\tau = t$  правая часть обращается в  $\infty$ . Таким образом, просто подставлять значение  $x = l$  в формулу (17.17) нельзя. Чтобы все-таки проверить требуемое условие, преобразуем эту формулу, произведя замену переменной (как это уже неоднократно делалось раньше):

$$\begin{aligned} \frac{x - l}{2\sqrt{D(t - \tau)}} &= z, \quad \frac{(x - l)d\tau}{4\sqrt{D(t - \tau)^{3/2}}} = dz, \\ \tau &= t - \frac{(x - l)^2}{4Dz^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$c(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-l}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} \varphi \left[ t - \frac{(x - l)^2}{4Dz^2} \right] e^{-z^2} dz.$$

Теперь видно, что при  $x = l$  и  $t > 0$

$$c(l, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-z^2} dz = \varphi(t)$$

(здесь мы воспользовались значением интеграла Пуассона).

**53. Примеры.** Пример 1. В тонкой бесконечной непроницаемой трубке находятся две среды: 1)  $x < l$  ( $l > 0$ ) с коэффициентом диффузии  $D_1$  и 2)  $x > l$  с коэффициентом диффузии  $D_2$ . В момент  $t = 0$  в трубку при  $x = 0$  вводится («вспрыскивается») «погонная единица» диффундирующего вещества (т. е. такое количество, которое при равномерном распределении по единице длины трубы дает концентрацию, равную единице<sup>1</sup>). Тогда в среде 1, т. е. для  $x < l$ , решением будет фундаментальное решение

$$\varphi_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_1 t}} e^{-\frac{x^2}{4D_1 t}} = c_1(x, t).$$

<sup>1</sup>) Можно сказать, что начальным условием является  $c|_{t=0} = \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  — импульсная функция Дирака (см. стр. 164).

Чтобы найти решение в среде 2, мы должны для отрезка трубы  $x > l$  поставить следующую задачу: найти решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальному условию

$$c_2|_{t=0} = 0 \quad (x > l)$$

и краевому условию (условию «склеивания»)

$$c_2|_{x=l} = c_1|_{x=l} = c_1(l, t).$$

Это в точности та задача, которая была нами решена в п. 52. По формуле (17.17)

$$c_2(x, t) = \frac{x-l}{2\sqrt{D_2\pi}} \int_0^t \frac{c_1(l, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4D_2(t-\tau)}} d\tau,$$

где

$$c_1(l, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_1\tau}} e^{-\frac{l^2}{4D_1\tau}}.$$

При фактическом отыскании функции  $c_2(x, t)$  возникают серьезные затруднения, связанные с необходимостью численно вычислять несобственные интегралы.

Пример 2. В полубесконечной (непроницаемой) тонкой трубке  $x > 0$  конец  $x = 0$  закрыт непроницаемой перегородкой. В отрезке  $0 < x < l$  имеется постоянная концентрация  $c_0$  в среде с коэффициентом диффузии  $D_1$ . В отрезке трубы  $x > l$  диффундирующего вещества нет (концентрация равна нулю); этот отрезок заполнен средой с коэффициентом диффузии  $D_2$ . При  $x = l$  находится непроницаемая перегородка, которая в момент  $t = 0$  удаляется. С этого момента начинается процесс диффузии, в течение которого надо определить концентрацию  $c(x, t)$  ( $x > 0$ ).

Для участка трубы  $0 < x < l$  решение совпадает (с соответствующими изменениями) с решением примера 1 п. 46. Заменяя в формуле (15.5)  $u_0$  на  $c_0$  и  $a$  на  $\sqrt{D_1}$ , получим

$$c(x, t) = c_1(x, t) = \frac{c_0}{2} \left\{ \Phi \left( \frac{x+l}{2\sqrt{D_1 t}} \right) - \Phi \left( \frac{x-l}{2\sqrt{D_1 t}} \right) \right\}.$$

При  $x = l$  концентрация будет равна

$$c_1(l, t) = \frac{c_0}{2} \Phi \left( \frac{l}{\sqrt{D_1 t}} \right),$$

и это значение служит (в силу условия «склеивания») краевым условием для концентрации  $c_2(x, t)$  на отрезке  $x > l$ . Таким образом, мы должны решить для  $c_2$  следующую задачу:

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2},$$

$$c_2|_{t=0} = 0 \quad (x > l),$$

$$c_2|_{x=l} = \frac{c_0}{2} \Phi\left(\frac{l}{\sqrt{D_1 t}}\right).$$

Эта задача совпадает с задачей п. 52 при

$$\varphi(t) = \frac{c_0}{2} \Phi\left(\frac{l}{\sqrt{D_1 t}}\right).$$

Решение дается, как мы видели, формулой (17.17), т. е.

$$c_2(x, t) = \frac{c_0(x-l)}{4\sqrt{D_2\pi}} \int_0^t \frac{\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{D_1\tau}}\right)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4D_2(t-\tau)}} d\tau \quad (x > l).$$


---

## ГЛАВА III

### УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

#### § 18. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Метод функции Грина

**54. Постановка краевых задач.** Уравнением Лапласа называется уравнение

$$\Delta u = 0, \quad (18.1)$$

где  $\Delta u$  — лапласиан, имеющий в декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно следующий вид (см. введение, п. 3):

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (18.2)$$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (18.2')$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (18.2'')$$

Уравнение Лапласа играет важную роль в приложениях. Например, ему должно удовлетворять всякое стационарное распределение температуры в теле (см. § 12). Действительно, если температура  $u = u(x, y, z, t)$  не зависит от  $t$ , то  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  и уравнение теплопроводности (16.10) сводится к уравнению Лапласа (18.1)<sup>1</sup>). Применение уравнения Лапласа выходит далеко за рамки вопроса стационарного распределения температуры. Однако при изучении этого уравнения

---

<sup>1)</sup> Уравнению Лапласа удовлетворяет также потенциал стационарного электрического поля во всякой области, где отсутствуют заряды.

представление функции  $u$  как температуры очень удобно и наглядно.

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются *гармоническими*. В каждой задаче, связанной с уравнением Лапласа, искомое решение выделяется из множества всех гармонических функций определенным дополнительным условием, которое чаще всего является краевым. Если обратиться к «тепловой» иллюстрации, то общим краевым условием является условие (16.12) п. 48. Таким образом, возникает следующая краевая задача: *в области пространства, ограниченной замкнутой поверхностью  $\Gamma$ , ищется гармоническая функция  $u(x, y, z)$ , удовлетворяющая на границе  $\Gamma$  краевому условию ( $n$  — направление внешней нормали к  $\Gamma$ )*

$$H \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma} = u|_{\Gamma} - \tilde{u},$$

где  $H$  и  $\tilde{u}$  — функции, заданные на границе  $\Gamma$ . В задаче стационарного распределения температуры  $H = -\frac{k}{h}$ ,  $\tilde{u}$  — температура внешней среды на границе тела.

Наиболее важным является частный случай  $H = 0$  этой краевой задачи, соответствующий случаю  $h = \infty$ , т. е. заданию температуры границы тела:  $u|_{\Gamma} = \tilde{u}$ . Эта краевая задача называется *задачей Дирихле*.

Задача Дирихле в пространстве формулируется так:

*Найти функцию  $u(x, y, z)$ , удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности  $\Gamma$  уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  и принимающую на границе  $\Gamma$  заданные значения:*

$$u|_{\Gamma} = \tilde{u}. \quad (18.3)$$

То, что задача Дирихле всегда имеет решение (при некоторых весьма общих предположениях относительно  $\Gamma$  и  $\tilde{u}$ ), можно считать очевидным по физическим соображениям. Действительно, если каждая точка границы тела постоянно поддерживается при определенной температуре (которая может быть разной в разных точках границы), то в каждой точке тела установится в конце концов своя температура, которая и дает решение задачи Дирихле при данных граничных

значениях. Кроме того, очевидно, что по тем же соображениям это решение будет единственным.

Задача Дирихле может, конечно, интерпретироваться также и в терминах диффузии: ее решением будет стационарная концентрация (см. § 17) при условии, что концентрация на границе известна.

Задача Дирихле может быть поставлена и в двух измерениях. Если  $u$  зависит только от двух пространственных координат, например  $x$  и  $y$  (или только от  $r$  и  $\varphi$  в полярной системе координат), то уравнение Лапласа (18.2) или (18.2') принимает более простой вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (18.2a)$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (18.2'a)$$

Задача Дирихле на плоскости формулируется так:

*Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую внутри замкнутой кривой  $\Gamma$  уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  и принимающую на границе  $\Gamma$  заданные значения:*

$$u|_{\Gamma} = \bar{u}. \quad (18.3a)$$

Эта задача тоже имеет единственное решение. Она может возникнуть в физических задачах двух типов, которые мы разъясним опять на примере тела, распределение температуры в котором стационарно. Первый тип задачи относится к стационарному распределению температуры в тонкой однородной пластинке, параллельной плоскости  $xOy$  с теплоизолированными нижней и верхней поверхностями. Край пластиинки  $\Gamma$  поддерживается при определенной температуре  $\bar{u}$ . Пластиинка должна быть настолько тонкой, чтобы можно было пренебречь изменением температуры по ее толщине. Тогда температура  $u$  будет функцией только  $x$  и  $y$ .

Второй тип задачи возникает при рассмотрении стационарного распределения температуры в бесконечном однородном цилиндре, у которого образующие параллельны оси  $z$ , направляющая  $\Gamma$  лежит в плоскости  $xOy$ , а боковая поверхность поддерживается при определенной температуре  $\bar{u}$  (см. п. 49). Здесь  $u$  тоже остается постоянной на любой прямой, параллельной оси  $z$ , проходящей в цилиндре, так что  $u = u(x, y)$ .

Заметим, что задача Дирихле решается очень просто в одномерном случае, т. е. когда в соответствующей системе координат неизвестная функция  $u$  зависит только от одной из координат.

В случае декартовых координат одномерное уравнение Лапласа принимает вид  $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$  и его решениями являются линейные функции  $u = Ax + B$  (стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью всегда линейно). Задача Дирихле имеет в этом случае решение  $u = \frac{u_l - u_0}{l} x + u_0$ , где  $u_0 = u|_{x=0}$ ,  $u_l = u|_{x=l}$ .

В случае задач с осевой симметрией запишем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах (18.2'), считая, что  $u$  не зависит от  $\varphi$  и  $z$ :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

Отсюда  $r \frac{du}{dr} = A$  и  $u = A \ln r + B$ , где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Задача Дирихле  $u|_{r=a} = u_a$ ,  $u|_{r=b} = u_b$  имеет, как это легко проверить, решение

$$u = \frac{1}{\ln a - \ln b} [(u_a - u_b) \ln r + (u_b \ln a - u_a \ln b)] = \\ = u_a + (u_b - u_a) \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Эта формула дает решение задачи о стационарном распределении тепла в пространстве между двумя цилиндрами с общей осью при условии, что на поверхностях цилиндров поддерживается постоянная температура<sup>1)</sup>. (Ясно, что если  $u_a = u_b$ , то  $u \equiv u_a$ .) Заметим, что полученное решение теряет смысл при  $r = 0$ .

Наконец, если гармоническая функция  $u$  зависит только от расстояния точки до начала координат, то, воспользовав-

<sup>1)</sup> Можно также сказать, что  $u$  — потенциал электростатического поля в цилиндрическом конденсаторе, на обкладках которого потенциалы соответственно равны  $u_a$  и  $u_b$ .

вшись сферическими координатами (см. (18.2'')), получим уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0,$$

откуда  $r^2 \frac{du}{dr} = A$ ,  $\frac{du}{dr} = \frac{A}{r^2}$  и  $u = -\frac{A}{r} + B$ . Поставив задачу Дирихле  $u|_{r=a} = u_a$ ,  $u|_{r=b} = u_b$ , найдем стационарное распределение температуры в сферическом слое<sup>1)</sup>  $a \leq r \leq b$ :

$$u = u_a + (u_b - u_a) \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

(и здесь решение не имеет смысла при  $r=0$ ).

Трехмерные и двумерные задачи Дирихле могут быть точно решены только для сравнительно простых областей (приближенные методы решения мы не рассматриваем). Мы сейчас изложим основы общего метода решения задачи Дирихле, называемого *методом функции Грина*<sup>2)</sup>.

**55. Метод функции Грина для задачи Дирихле (трехмерный случай).** Метод функции Грина базируется на формуле Грина, являющейся следствием формулы Остроградского — Гаусса (см. [1], п. 152):

$$\iint_S A_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv, \quad (18.4)$$

где  $S$  — граница области  $V$ ,  $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$  — единичный вектор внешней нормали к  $S$ ,  $A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$  — проекция вектора  $\mathbf{A}$  на направление  $\mathbf{n}$ .

Пусть  $u = u(x, y, z)$  и  $v = v(x, y, z)$  — две любые дважды дифференцируемые функции и

$$\mathbf{A} = u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u.$$

Тогда

$$A_n = (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} = u \operatorname{grad} v \cdot \mathbf{n} - v \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}.$$

<sup>1)</sup>  $u$  является также потенциалом электростатического поля в шаровом конденсаторе.

<sup>2)</sup> Если читатель интересуется только применением метода Фурье, то он может прямо перейти к чтению § 21.

Поскольку скалярное произведение градиента функции на единичный вектор равно производной функции по направлению этого вектора, то

$$\operatorname{grad} v \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Поэтому выражение для  $A_n$  примет вид

$$A_n = u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Перейдем теперь к вычислению  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ :

$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) - \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u)$ .  
Преобразуем каждое из выражений в правой части:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) &= \operatorname{div}\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + u \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + u \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \\ &= u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = \\ &= u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \end{aligned}$$

и аналогично

$$\operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) = v \Delta u + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = u \Delta v - v \Delta u.$$

Подставляя выражения для  $A_n$  и  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  через  $u$  и  $v$  в формулу (18.4), получим формулу Грина

$$\iint_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_V (u \Delta v - v \Delta u) dv. \quad (18.5)$$

Нам понадобится, однако, обобщение этой формулы на тот случай, когда область ограничена не одной, а двумя поверхностями. Пусть область  $W$  ограничена снаружи замкнутой поверхностью  $S$  и изнутри замкнутой поверхностью  $S_1$ , лежащей целиком внутри  $S$  (так что  $W$  — это часть внутренности  $S$ , внешняя относительно  $S_1$ ). Тогда формула Остроградского — Гаусса (18.4) запишется в виде

$$\iint_{S_1} A_{n_1} d\sigma + \iint_S A_n d\sigma = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{A} dv,$$

где  $\mathbf{n}_1$  — единичный вектор внешней нормали к  $S_1$ , т. е. вектор, направленный внутрь  $S_1$  (внутренность  $S_1$  не принадлежит  $W$  и поэтому является областью, внешней относительно  $W$ ). Соответственно формула Грина (18.5) примет вид

$$\iint_{S_1} \left( u \frac{\partial v}{\partial n_1} - v \frac{\partial u}{\partial n_1} \right) d\sigma + \iint_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \\ = \iiint_W (u \Delta v - v \Delta u) dv \quad (18.6)$$

Эта формула и служит основой метода функции Грина решения задачи Дирихле в пространстве.

Введем теперь определение самой функции Грина для трехмерного случая. В качестве поверхности  $S$  возьмем границу  $\Gamma$  области  $\Omega$ , для которой

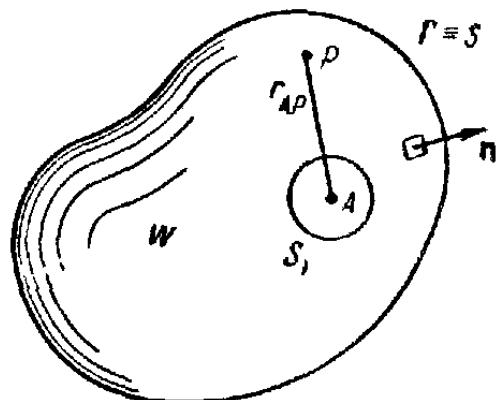


Рис. 61

мы решаем задачу Дирихле, и выберем внутри  $\Gamma$  произвольную, но фиксированную точку  $A(x_0, y_0, z_0)$ , которую окружим сферой  $S_1$  радиуса  $\epsilon > 0$  с центром в  $A$ . При этом мы предположим, что сфера  $S_1$  целиком лежит внутри  $\Gamma$  (рис. 61). Тогда между  $S_1$  и  $\Gamma$  мы имеем область  $W$ . Обозначим, далее, через  $P(x, y, z)$  любую точку

области  $\Omega$ , отличную от  $A$ , и через  $r_{AP}$  — расстояние между точками  $A$  и  $P$ :

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Легко проверить, что функция

$$\omega = \frac{1}{r_{AP}}$$

является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\omega = 0$ , во всех точках, кроме самой точки  $A$ , в которой она обращается в бесконечность.

Действительно,

$$\frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = \frac{x - x_0}{r_{AP}}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{1}{r_{AP}^2} \frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = -\frac{x - x_0}{r_{AP}^3}$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{r_{AP}^6} + 3 \frac{x - x_0}{r_{AP}^4} \frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = -\frac{1}{r_{AP}^5} + 3 \frac{(x - x_0)^2}{r_{AP}^5} = \\ = \frac{2(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2}{r_{AP}^5};$$

аналогично

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{2(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 - (z - z_0)^2}{r_{AP}^5},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{2(z - z_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{r_{AP}^5}$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Еще проще в этом можно убедиться, если рассмотреть лапласиан в сферической системе координат с началом в точке  $A$  (см. (18.2'')); тогда  $r_{AP} = r$ ,  $w = \frac{1}{r}$  и  $\Delta w = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0$ , так как  $r^2 \frac{\partial w}{\partial r} = -1$  и  $w$  не зависит от  $\theta$  и  $\varphi$ .

Обозначим, далее, через  $w_1$  решение задачи Дирихле для области  $\Omega$  с краевым условием

$$w_1|_I = w|_I. \quad (18.7)$$

Согласно определению функция  $w_1$  — гармоническая уже во всей области  $\Omega$ , в то время как  $w$  — гармоническая только в области  $W$ , получающейся удалением из области  $\Omega$  сферы  $S_1$ , содержащей точку  $A$  (таким образом, область  $W$  не содержит точки  $A$ ). Поясним это простым примером. Пусть  $\Omega$  — шар радиуса 1 с центром в начале координат,  $\Gamma$  — его граница и точка  $A$  совпадает с началом координат. Тогда  $w = \frac{1}{r}$  и  $w|_\Gamma = w|_{r=1} = 1$ . В то же время функция, принимающая на  $\Gamma$  значения, равные 1, и гармоническая во всем шаре, будет, очевидно, тождественно равна единице:  $w_1 \equiv 1$  (это особенно ясно из физических соображений: если температура в точках тела не меняется с течением времени, а на границе тела постоянна, то она вообще будет величиной

постоянной). Этим примером подчеркивается, что функции  $w$  и  $w_1$  совпадают, вообще говоря, только на границе  $\Gamma$ .

*Разность функций  $w_1 - w$  называется функцией Грина для области  $\Omega$  и обозначается обычно через*

$$G = G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = w_1 - w = w_1 - \frac{1}{r_{AP}}. \quad (18.8)$$

Обратим внимание на то, что функция Грина зависит как от координат  $x, y, z$  текущей точки  $P$ , так и от координат  $x_0, y_0, z_0$  произвольно выбранной, но фиксированной точки  $A$  (последние входят в явном виде в  $w$ , но они войдут также через краевые значения и в  $w_1$ ).

Особо отметим, что, в силу условия (18.7), *функция Грина на границе  $\Gamma$  обращается в нуль.*

$$G|_{\Gamma} = 0. \quad (18.9)$$

Пусть теперь  $u$  — искомая гармоническая функция в области  $\Omega$ , принимающая на границе  $\Gamma$  значения  $\tilde{u}$ ; положим  $v = G$  и применим к области  $\Omega$  формулу Грина (18.6). Тогда, ввиду того что в этой области  $\Delta u = 0$  и  $\Delta v = 0$ , правая часть формулы Грина обращается в нуль, и мы получим следующее равенство:

$$\oint_{S_1} \left( u \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial u}{\partial n_1} \right) d\sigma + \oint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0. \quad (18.10)$$

Второй из этих интегралов в силу равенства (18.9) и условия  $u|_{\Gamma} = \tilde{u}$  сведется к

$$\oint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma.$$

Для вычисления первого интеграла введем систему сферических координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в точке  $A$ . Тогда на  $S_1$

$$r_{AP} = r = \varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial r}, \quad d\sigma = \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Следовательно, равенство (18.10) перепишется в виде

$$\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left\{ u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \Big|_{r=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \oint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma.$$

Правая часть этого равенства, очевидно, не зависит от  $\epsilon$ . Поэтому она должна быть равна также и пределу левой части при  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left\{ u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \Big|_{r=\epsilon} \sin \theta d\theta = \\ = \iint_D \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (18.11)$$

Чтобы вычислить этот предел, заметим, что по формуле (18.8)  $G = w_1 - \frac{1}{r}$  (так как мы теперь  $r_{AP}$  обозначаем через  $r$ ). Тогда

$$\epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left\{ u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \Big|_{r=\epsilon} \sin \theta d\theta = \\ = \epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left\{ u \frac{\partial w_1}{\partial r} - w_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \Big|_{r=\epsilon} \sin \theta d\theta + \\ + \epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left\{ -u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \Big|_{r=\epsilon} \sin \theta d\theta.$$

Функции  $u$  и  $w_1$  — гармонические во всей области  $\Omega$ , включая точку  $A$ . Поэтому они вместе со своими производными ограничены (точное доказательство этого факта мы не проводим; отметим лишь, что с физической стороны он совершенно ясен: функции  $u$  и  $w_1$  можно толковать как некоторые стационарные распределения температур в однородном теле). Это значит, что

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left\{ u \frac{\partial w_1}{\partial r} - w_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \Big|_{r=\epsilon} \sin \theta d\theta = 0.$$

Со вторым интегралом дело обстоит сложнее, так как  $\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} \Big|_{r=\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon^2}$  и  $\frac{1}{r} \Big|_{r=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}$  неограниченно возрастают

при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Найдем предел каждого слагаемого в отдельности:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ -u \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial r} \right]_{r=\epsilon} \sin \theta d\theta =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi u|_{r=\epsilon} \sin \theta d\theta.$$

Так как функция  $u$  непрерывна, то  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u|_{r=\epsilon} = u|_{r=0}$ . Считая возможным переход к пределу под знаком интеграла, получим

$$u|_{r=0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi u|_{r=0}.$$

Далее, в силу ограниченности  $\frac{\partial u}{\partial r}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=\epsilon} \sin \theta d\theta =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\epsilon} \sin \theta d\theta = 0.$$

Таким образом, предел в левой части равенства (18.11) есть просто  $4\pi u|_{r=0} = 4\pi u(x_0, y_0, z_0)$ , так как при  $r = 0$  в качестве аргументов функции  $u$  мы получаем координаты точки  $A$ . Теперь формула (18.11) принимает окончательный вид:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (18.12)$$

Эта формула дает решение задачи Дирихле в пространстве, если известна функция Грина  $G$ ; действительно, мы получили значение искомой функции  $u$  в любой точке  $A$  области  $\Omega$ .

**Примечание.** В некоторых руководствах под функцией Грина понимается функция, отличающаяся от функции (18.8) знаком. Соответственно появляется знак минус перед интегралом в формуле (18.12).

**56. Метод функции Грина для задачи Дирихле (двумерный случай).** Здесь метод функции Грина также основывается на формуле Грина, аналогичной формуле (18.5), а именно:

$$\oint_C \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma, \quad (18.13)$$

где  $C$  — замкнутая кривая на плоскости, ограничивающая область  $D$ , а  $\frac{\partial u}{\partial n}$  и  $\frac{\partial v}{\partial n}$  — производные по направлению внешней нормали к  $C$ .

Эта формула может быть получена из формулы (18.5), примененной к цилиндру высоты 1, построенному на  $C$  как на направляющей с образующими, параллельными оси  $z$ . Тогда, поскольку  $u$  и  $v$  не зависят от  $z$ ,

$$\iiint_{\text{цил}} (u \Delta v - v \Delta u) dv = 1 \cdot \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma,$$

а

$$\oint_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 1 \cdot \oint_C \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

(плюс интегралы по основаниям цилиндра, которые, однако, равны нулю, так как на верхнем основании  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z}$ , на нижнем  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$ , а  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ).

Отметим, что формула (18.13) может быть выведена из формулы Грина на плоскости.

Нам нужна обобщенная формула Грина, аналогичная формуле (18.6), а именно:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \left( u \frac{\partial v}{\partial n_1} - v \frac{\partial u}{\partial n_1} \right) ds + \oint_C \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \\ = \iint_E (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma, \end{aligned} \quad (18.14)$$

где  $C_1$  — замкнутая кривая, лежащая внутри  $C$ , а  $E$  — двухсвязная область, заключенная между кривыми  $C_1$  и  $C$ . Как и

в пространственном случае под направлением вектора  $n_1$  понимается направление внешней нормали к кривой  $C_1$  (см. рис. 62).

Функция Грина на плоскости вводится теперь следующим образом. В качестве кривой  $C$  возьмем границу  $\Gamma$  области  $D$ ,

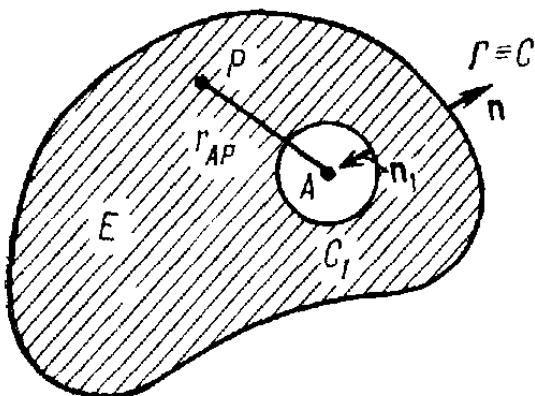


Рис. 62.

для которой мы решаем задачу Дирихле, и выберем внутри  $\Gamma$  произвольную, но фиксированную точку  $A(x_0, y_0)$ ; за контур  $C_1$  примем окружность радиуса  $\epsilon > 0$  с центром в точке  $A$ . При этом мы предположим, что окружность  $C_1$  целиком лежит внутри  $\Gamma$ . Тогда между  $C_1$  и  $\Gamma$  мы имеем область  $E$  (заштрихованную на рис. 62). Обозначим вновь через  $P(x, y)$

любую точку области  $D$ , отличную от  $A$ , и через  $r_{AP}$  — расстояние между точками  $A$  и  $P$ :

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Проверим, что функция

$$w = \ln \frac{1}{r_{AP}} = -\ln r_{AP}$$

является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению  $\Delta w = 0$ .

Действительно,

$$\frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = \frac{x - x_0}{r_{AP}}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{r_{AP}} \frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = -\frac{x - x_0}{r_{AP}^2}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{1}{r_{AP}^2} + 2 \frac{x - x_0}{r_{AP}^3} \frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{r_{AP}^2} + 2 \frac{(x - x_0)^2}{r_{AP}^4} = \frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{r_{AP}^4}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2}{r_{AP}^4}$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

В этом можно также убедиться, если рассмотреть лапласиан в полярной системе координат с началом в точке  $A$  (см. (18.2')); тогда  $r_{AP} = r$ ,  $w = -\ln r$  и  $\Delta w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0$ , так как  $r \frac{\partial w}{\partial r} = -1$  и  $w$  не зависит от  $\varphi$ .

Отметим, что функция  $w$  — гармоническая в области  $E$  (так как эта область не содержит точку  $A$ ).

Обозначим, далее, через  $w_1$  решение задачи Дирихле для области  $D$  с краевым условием

$$w_1|_{\Gamma} = w|_{\Gamma}. \quad (18.15)$$

Функция  $w_1$  — гармоническая уже во всей области  $D$ . (Различие между функциями  $w$  и  $w_1$  было выяснено на стр. 233.)

Тогда функция Грина для области  $D$  будет иметь вид

$$G = G(x, y; x_0, y_0) = w_1 - w = w_1 - \ln \frac{1}{r_{AP}}. \quad (18.16)$$

Как и в трехмерном случае, функция Грина и здесь зависит от координат точек  $P$  и  $A$ , и по определению (18.16) и условию (18.15)

$$G|_{\Gamma} = 0. \quad (18.17)$$

Для искомой гармонической функции  $u$ , удовлетворяющей условию  $u|_{\Gamma} = \tilde{u}$ , и функции  $v = G$  запишем формулу (18.14), правая часть которой обратится в нуль (так как  $\Delta u = \Delta v = 0$ ):

$$\oint_{C_1} \left( u \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial u}{\partial n_1} \right) ds + \oint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0, \quad (18.18)$$

причем в силу равенства (18.17)

$$\oint_{\Gamma} G \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Введем полярные координаты  $r, \varphi$  с началом в точке  $A$ . Тогда на окружности  $C_1$  справедливы соотношения  $\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial r}$ ,  $r_{AP} = r = \varepsilon$  и  $ds = \varepsilon d\varphi$ . Учитывая все это, мы можем

переписать формулу (18.18) в виде

$$\epsilon \int_0^{2\pi} \left( u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=\epsilon} d\varphi = \oint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} ds, \quad (18.19)$$

так как  $u|_{\Gamma} = \tilde{u}$ .

Поскольку правая часть равенства (18.19) не зависит от  $\epsilon$ , то в левой части можно перейти к пределу при  $\epsilon \rightarrow 0$  аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте (см. (18.11)). Подставим  $G$  из формулы (18.16); разбивая интеграл в левой части формулы (18.19) на два слагаемых и учитывая, что функции  $u$ ,  $w$ , и их производные ограничены<sup>1)</sup> в области  $D$ , получим, что искомый предел равен

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_0^{2\pi} \left( u \frac{1}{r} - \ln r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=\epsilon} d\varphi = 2\pi u(x_0, y_0),$$

так как  $\epsilon \ln \epsilon \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ , а  $u|_{r=\epsilon} \rightarrow u|_{r=0} = u(x_0, y_0)$ .

Поэтому

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad (18.20)$$

Эта формула дает решение задачи Дирихле на плоскости, если известна функция Грина  $G$ .

**57. Задача Неймана.** В приложениях встречается еще одна краевая задача для уравнения Лапласа, так называемая *задача Неймана*. Задача Неймана состоит в следующем:

Найти функцию  $u$ , удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности (или кривой)  $\Gamma$  уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  и на границе  $\Gamma$  условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_1 = \tilde{u}_1, \quad (18.21)$$

где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная по направлению внешней нормали к  $\Gamma$ , а  $\tilde{u}_1$  — функция, заданная на  $\Gamma$ .

<sup>1)</sup> Точное доказательство этого факта мы опускаем (см. соответствующее замечание на стр. 235).

Прежде всего отметим, что функция  $\tilde{u}_1$  на поверхности (или кривой)  $\Gamma$  не может быть задана произвольно. Если в формуле (18.5), верной для любых функций  $u$  и  $v$ , положить  $v = 1$ , то  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  и  $\Delta v = 0$  и формула примет вид

$$\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iiint_V \Delta u dv.$$

Поэтому для любой функции  $u$ , гармонической в области  $V$ , ограниченной поверхностью  $\Gamma$ , должно соблюдаться равенство

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0. \quad (18.22)$$

Следовательно, граничное значение производной  $\frac{\partial u}{\partial n}$  на  $\Gamma$  — функция  $\tilde{u}_1$  — должно удовлетворять условию

$$\oint_{\Gamma} \tilde{u}_1 d\sigma = 0. \quad (18.23)$$

(Аналогично в двумерном случае из формулы (18.13) будет следовать, что  $\oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ , где  $\Gamma$  — граница области  $D$ .)

При соблюдении условия (18.23) задача Неймана всегда имеет решение. При этом очевидно, что вместе с любым решением  $u$  решением будет также  $u + \text{const}$ . Можно доказать, что других решений задачи Неймана не имеет, т. е. что разность двух любых решений задачи Неймана постоянна. Это означает, что решение задачи Неймана единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Задача Неймана играет важную роль в теории волновых процессов, в частности в теории электромагнетизма.

Метод функции Грина может быть применен и к решению задачи Неймана на основе формул (18.6) (для пространства) и (18.14) (для плоскости). Но функция Грина  $\tilde{G}$  для задачи Неймана должна быть определена несколько иначе. Мы по-прежнему полагаем

$\tilde{G} = w_1 - w$ , где  $w = \frac{1}{r_{AP}}$  для пространства и  $w = \ln \frac{1}{r_{AP}}$  для плоскости; однако на функцию  $w_1$ , гармоническую во всей области  $V$ , накладываем теперь краевое условие

$$\frac{\partial w_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + K.$$

Применяя формулу (18.6), можно доказать, что если положить  $K = 4\pi/S$ , где  $S$  — площадь поверхности  $\Gamma$  (или, в двумерном случае,  $K = 2\pi/l$ , где  $l$  — длина кривой  $\Gamma$ ), то интеграл от  $\frac{\partial w_1}{\partial n}$ , взятый по границе  $\Gamma$  области  $V$ , будет равен нулю, т. е. что условие (18.22)

будет соблюдаться. Тогда

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = K,$$

и, рассуждая так же, как в пп. 55 и 56, мы придем к решению задачи Неймана

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \tilde{u}_1 \tilde{G} d\sigma \quad (18.24)$$

(в пространстве) и

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \tilde{u}_1 \tilde{G} ds \quad (18.25)$$

(на плоскости); как уже отмечено, функция  $u$  определяется с точностью до произвольной постоянной.

Задачу Дирихле часто называют *первой краевой задачей* для уравнения Лапласа, а задачу Неймана — *второй краевой задачей*. Рассматривается еще *третья краевая задача*: найти функцию  $u$ , удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности (или кривой)  $\Gamma$  уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$  и на границе  $\Gamma$  условию

$$\tilde{\alpha} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \tilde{\beta} u \Big|_{\Gamma} = \tilde{\gamma},$$

где  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$ ,  $\tilde{\gamma}$  — функции, заданные на  $\Gamma$ . Очевидно, что задачи Дирихле и Неймана являются частными случаями этой задачи. Однако третьей краевой задачи мы касаться не будем.

### § 19. Решение задачи Дирихле для шара и полупространства

**58. Сопряженные точки.** Основной трудностью при решении задачи Дирихле является нахождение функции Грина, которая в явном виде известна только для небольшого числа простых областей. В частности, *функция Грина известна для шара, круга, полупространства и полуплоскости*. Поэтому мы и займемся решением задачи Дирихле для этих областей. Решения, которые мы получим, играют важную роль в приложениях.

При построении функций Грина нам понадобится понятие сопряженных точек.

*Две точки  $A$  и  $A^*$  называются сопряженными относительно плоскости* (в пространстве) или *прямой* (на плоскости), если они симметричны относительно этой плоскости или прямой. Так, точки  $A(x_0, y_0, z_0)$  и  $A^*(x_0, y_0, -z_0)$  сопряжены относительно плоскости  $z = 0$ , а точки  $A(x_0, y_0)$  и  $A^*(x_0, -y_0)$  — относительно прямой  $y = 0$ .

Несколько сложнее понятие сопряженности относительно сферы (в пространстве) или окружности (на плоскости). Точки  $A$  и  $A^*$  называются сопряженными относительно сферы или окружности, если они лежат на одном луче, исходящем из центра  $O$  сферы или окружности, и произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса:  $OA \cdot OA^* = R^2$ , где  $R$  — радиус сферы или окружности.

Если центр сферы совпадает с началом координат, то в пространстве точка  $A(x_0, y_0, z_0)$  сопряжена с точкой  $A^*\left(\frac{R^2}{r_0^2}x_0, \frac{R^2}{r_0^2}y_0, \frac{R^2}{r_0^2}z_0\right)$ , где  $r_0 = OA = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ .

Чтобы в этом убедиться, обозначим координаты сопряженной точки  $A^*$  через  $x_0^*, y_0^*, z_0^*$ , тогда  $r_0^* = OA^* = \sqrt{x_0^{*2} + y_0^{*2} + z_0^{*2}}$ . В силу определения  $rr_0^* = R^2$ . Поскольку точки  $A$  и  $A^*$  лежат на одном луче, выходящем из начала координат, то

$$\frac{x_0^*}{x_0} = \frac{r_0^*}{r_0} = \frac{R^2}{r_0^2}, \quad \frac{y_0^*}{y_0} = \frac{R^2}{r_0^2}, \quad \frac{z_0^*}{z_0} = \frac{R^2}{r_0^2},$$

т. е.

$$x_0^* = \frac{R^2}{r_0^2} x_0, \quad y_0^* = \frac{R^2}{r_0^2} y_0, \quad z_0^* = \frac{R^2}{r_0^2} z_0. \quad (19.1)$$

Совершенно аналогично получим, что точки  $A(x_0, y_0)$  и  $A^*\left(\frac{R^2}{r_0^2}x_0, \frac{R^2}{r_0^2}y_0\right)$ , где  $r_0 = OA = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ , сопряжены относительно окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат.

Очевидно, что если точка  $A$  лежит внутри сферы или окружности, то точка  $A^*$  находится вне сферы, соответственно окружности; если  $A$  лежит на сфере (окружности), то  $A^*$  совпадает с  $A$ . Центру сферы или окружности не сопряжена никакая точка. Для сферы и окружности геометрическое построение сопряженных точек состоит в следующем. Пусть  $A$  лежит внутри окружности и не совпадает с ее центром (рис. 63); проведем через  $A$  хорду  $TT_1$ , перпендикулярную лучу  $OA$ , и через концы  $T$  и  $T_1$  — касательные

к окружности; эти касательные пересекаются в точке  $A^*$  на луче  $OA$ , так как из подобия треугольников  $OAT$  и  $OTA^*$  вытекает, что  $\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA^*}$ , откуда  $OA \cdot OA^* = OT^2 = R^2$ .

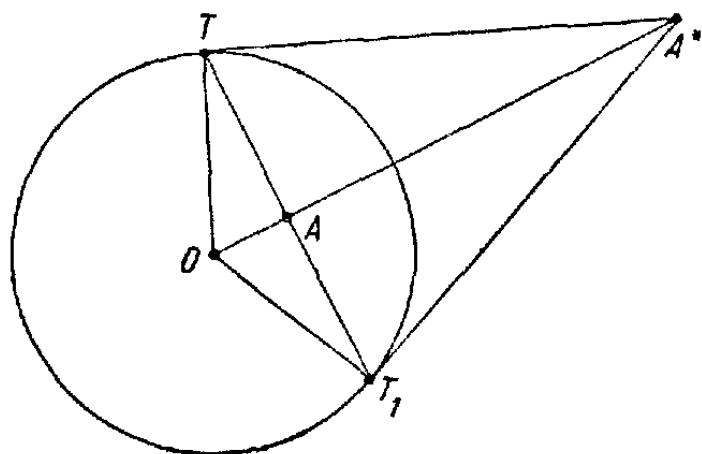


Рис. 63.

Если мы будем вращать фигуру на рис. 63 вокруг оси  $OAA^*$ , то возникает соответствующее построение для сферы. Очевидно, что указанным образом можно по точке  $A^*$  построить точку  $A$  (т. е. сопряженную с точкой, лежащей вне сферы или окружности).

**59. Задача Дирихле для шара.** Рассмотрим шар радиуса  $R$  с центром в начале координат. Пусть  $A(x_0, y_0, z_0)$  — фиксированная точка шара,  $A^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$  — точка, ей сопряженная, и  $P(x, y, z)$  — произвольная переменная точка. Тогда

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

и

$$r_{A^*P} = \sqrt{(x - x_0^*)^2 + (y - y_0^*)^2 + (z - z_0^*)^2}.$$

Если ввести обозначения  $OP = r$ ,  $OA = r_0$ ,  $OA^* = r_0^*$  и  $\angle AOP = \psi$  (рис. 64), то по теореме косинусов

$$r_{AP} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi} \text{ и } r_{A^*P} = \sqrt{r^2 + r_0^{*2} - 2rr_0^* \cos \psi}.$$

Так как  $r_0 r_0^* = R^2$ , то

$$r_{A^*P} = \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2r \frac{R^2}{r_0} \cos \psi}.$$

Согласно доказанному в п. 55, функция  $w = \frac{1}{r_{AP}}$  удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, кроме точки  $A$ . Поэтому функция

$$w_2 = \frac{1}{r_{A^*P}}$$

будет гармонической всюду в и у т р и шара, так как точка  $A^*$  лежит в н е шара (точка  $A^*$  — сопряженная с точкой, лежащей внутри шара).

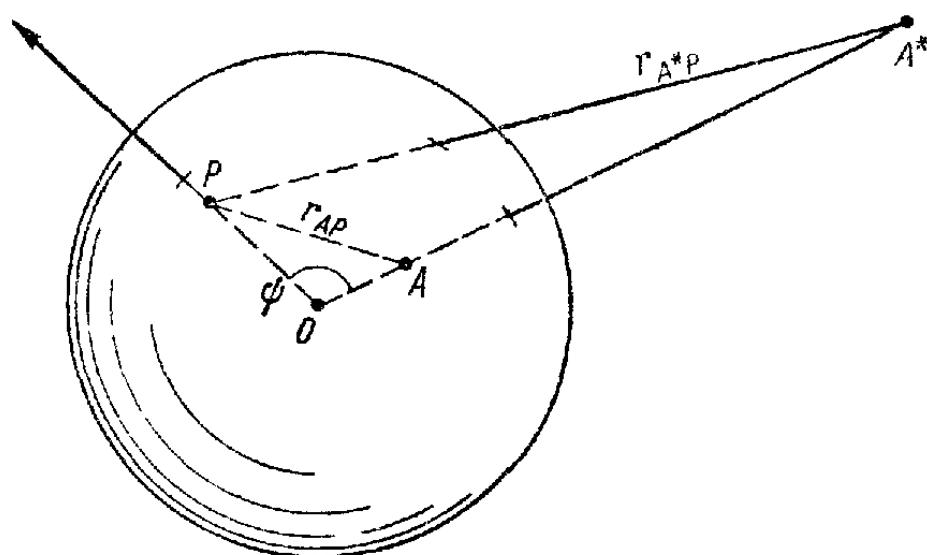


Рис. 64.

Далее, если точка  $P$  расположена на границе шара — сфере  $\Gamma$ , то  $r = R$  и

$$\left. \begin{aligned} r_{AP}|_{\Gamma} &= \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \phi}, \\ r_{A^*P}|_{\Gamma} &= \sqrt{R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2 \frac{R^3}{r_0} \cos \phi} = \\ &= \frac{R}{r_0} \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \phi} = \frac{R}{r_0} r_{AP}|_{\Gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

Поэтому функция  $w_1 = \frac{R}{r_0} w_2 = \frac{\frac{R}{r_0}}{r_{A^*P}}$  является гармонической во всем шаре, и ее значения на сфере  $\Gamma$  совпадают со значениями функции  $w = \frac{1}{r_{AP}}$ , так как

$$w_1|_{\Gamma} = \left. \frac{\frac{R}{r_0}}{r_{A^*P}} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{1}{r_{AP}} \right|_{\Gamma} = w|_{\Gamma}.$$

Согласно определению (см. п. 55) функция Грина для шара имеет вид

$$G = w_1 - w = \frac{R}{r_{A*P}} - \frac{1}{r_{AP}}. \quad (19.3)$$

После того как функция Грина найдена, можно по общей формуле (18.12) написать решение задачи Дирихле для шара. Для этого нужно предварительно вычислить значения производной от функции Грина по внешней нормали, т. е.  $\frac{\partial G}{\partial r}$  при  $r = R$ . Согласно формулам, определяющим  $G$ ,  $r_{AP}$  и  $r_{A*P}$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r} &= \frac{1}{r_{AP}^2} \frac{\partial r_{AP}}{\partial r} - \frac{R}{r_0} \frac{1}{r_{A*P}^2} \frac{\partial r_{A*P}}{\partial r} = \\ &= \frac{r - r_0 \cos \psi}{r_{AP}^3} - \frac{R}{r_0} \frac{r - \frac{R^2}{r_0} \cos \psi}{r_{A*P}^3}. \end{aligned}$$

Учитывая формулы (19.2), получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R} &= \frac{R - r_0 \cos \psi}{r_{AP}^3|_{\Gamma}} - \frac{R}{r_0} \frac{R - \frac{R^2}{r_0} \cos \psi}{\left. \frac{R^3}{r_0^3} r_{AP}^3 \right|_{\Gamma}} = \\ &= \frac{R^2 - r_0^2}{R r_{AP}^3|_{\Gamma}} = \frac{R^2 - r_0^2}{R (R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}}. \quad (19.4) \end{aligned}$$

Введем теперь сферические координаты с началом в  $O$ :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Обозначим координаты точки  $P$  через  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , а координаты точки  $A$  — через  $r_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$ . Тогда в формуле (18.12)

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$\tilde{u}$  будет функцией  $\theta$  и  $\varphi$ , и нам остается только выразить через введенные сферические координаты величину  $\cos \psi$

из выражения (19.4). Это можно сделать при помощи единичных векторов  $\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{e}$  направлений  $OA$  и  $OP$ . Так как

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k} = \\ &= r_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \mathbf{i} + r_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \mathbf{j} + r_0 \cos \theta_0 \mathbf{k}, \\ \overline{OP} &= r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k},\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0 &= \frac{1}{r_0} \overline{OA} = \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \mathbf{i} + \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \mathbf{j} + \cos \theta_0 \mathbf{k}, \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{r} \overline{OP} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\cos \psi = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e} = \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta. \quad (19.5)$$

Таким образом, мы получаем окончательное решение задачи Дирихле для шара в следующем виде:

$$\begin{aligned}u(r_0, \theta_0, \varphi_0) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \tilde{u}(\theta, \varphi) \frac{R^2 - r_0^2}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}} d\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \tilde{u}(\theta, \varphi) \frac{R(R^2 - r_0^2)}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}} \sin \theta d\theta,\end{aligned} \quad (19.6)$$

где вместо  $\cos \psi$  нужно подставить его выражение (19.5). Интеграл (19.6) называется *интегралом Пуассона для шара*.

Следует обратить внимание на то, что при выводе формулы (19.6) мы должны были предполагать, что точка  $A$  не совпадает с началом координат, т. е. что  $r_0 \neq 0$  (так как центр сферы не имеет сопряженной точки). Но по непрерывности решения формула (19.6) останется в силе и при  $r_0 = 0$ ; она тогда примет вид

$$u|_{r_0=0} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\Gamma} \tilde{u}(\theta, \varphi) d\sigma, \quad (19.7)$$

означающий, что *в центре сферы гармоническая функция имеет значение, равное среднему ее значений на сфере* (теорема о среднем для гармонических функций).

Формула решения (19.6) довольно сложна, однако ее можно воспользоваться в некоторых частных случаях.

Если мы предположим, что граничная температура  $\tilde{u} = 1$  на всей сфере, то в силу единственности решения задачи Дирихле всюду внутри шара  $u \equiv 1$ . Это означает, по формуле (19.6), что

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{R(R^2 - r_0^2)}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}} \sin \theta d\theta \equiv 1 \quad (19.8)$$

для всех  $0 \leq r_0 \leq R$ ,  $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$  ( $\cos \psi$  определяется по формуле (19.5)). Указанный факт можно проверить и непосредственно, правда, при этом приходится иметь дело с весьма сложными интегралами.

Пример 1. Дан однородный шар радиуса  $R$ , верхняя половина границы которого поддерживается при температуре 1, а нижняя — при температуре 0. Найдем стационарное распределение температуры вдоль диаметра шара  $SN$  (рис. 65).

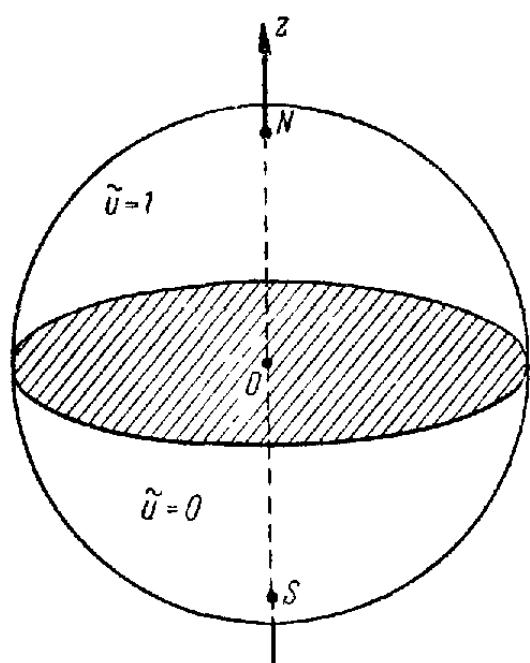


Рис. 65.

Для точек верхней полусфера  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , для точек нижней полусфера  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ ; следовательно,

$$\tilde{u} = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Сложность формулы Пуассона (19.6) видна из того, что

даже в этом простейшем случае распределения внешней температуры получить выражение для температуры во всех точках шара очень затруднительно. Поэтому мы и ограничиваемся лишь частным случаем.

Будем искать температуру в точках вертикального диаметра  $SN$ . Если точка  $A$  лежит на радиусе  $ON$  (т. е. в верхней части шара), то  $\theta_0 = 0$  и  $\cos \psi = \cos \theta$  (см.

формулу (19.5)). Если же точка  $A$  лежит на радиусе  $OS$ , то  $\theta_0 = \pi$  и  $\cos \phi = -\cos \theta$ .

По формуле (19.6) для точки  $A$ , лежащей на радиусе  $ON$  на расстоянии  $r_0$  от  $O$ , получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{R(R^2 - r_0^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \, d\theta}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= \frac{R(R^2 - r_0^2)}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \, d\theta}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= -\frac{R^2 - r_0^2}{2r_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta}} \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{R^2 - r_0^2}{2r_0} \left\{ \frac{1}{R - r_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2r_0} \left\{ R - \frac{R^2 - r_0^2}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Для точки  $A$ , лежащей на радиусе  $OS$  на расстоянии  $r_0$  от  $O$ ,

$$\begin{aligned} u &= \frac{R(R^2 - r_0^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \, d\theta}{(R^2 + r_0^2 + 2Rr_0 \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= \frac{R^2 - r_0^2}{2r_0} \left\{ -\frac{1}{R + r_0} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2r_0} \left\{ R - \frac{R^2 - r_0^2}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, температура на вертикальном диаметре  $SN$  равна

$$u = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2r_0} \left\{ R - \frac{R^2 - r_0^2}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} \right\},$$

где верхний знак берется для верхней половины диаметра, а нижний — для нижней. Любопытно отметить, что полусумма температур в точках, одинаково удаленных от центра

шара, равна  $\frac{1}{2}$ . Это же значение получится, если найти предел  $u$  при  $r_0 \rightarrow 0$ . Можно показать, что полусумма температур двух точек, лежащих на любом диаметре и равноудаленных от центра, равна  $\frac{1}{2}$ .

Значительно более сложным оказывается вычисление температуры в точках экваториальной плоскости. Здесь  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  и  $\cos \psi = -\sin \theta \cos(\phi - \varphi_0)$ . Согласно формуле (19.6)

$$u\left(r_0, \frac{\pi}{2}, \varphi_0\right) = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{R^2 - r_0^2}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}} d\sigma,$$

где интеграл распространен по верхней полусфере. Вычисление этого интеграла показывает, что  $u\left(r_0, \frac{\pi}{2}, \varphi_0\right) = \frac{1}{2}$ .

**Пример 2.** Дан однородный шар радиуса  $R$  и на его границе — сфере  $\Gamma$  — точка  $M$  со сферическими координатами  $\theta'$  и  $\phi'$  (рис. 66). Проведем на  $\Gamma$  с центром в точке  $M$  маленький кружок, видный из центра сферы под углом  $2\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Площадь полученного сферического сегмента  $\Sigma$  (заштрихован на рис. 66) равна  $2\pi R^2(1 - \cos \varepsilon) = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$ <sup>1)</sup>. Пусть граничная температура  $\tilde{u}$  на всей сфере  $\Gamma$ , кроме сегмента  $\Sigma$ , равна 0, а на  $\Sigma$  равна  $\frac{1}{4\pi R^2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}$ , т. е. величине,

обратной площади сегмента  $\Sigma$ . Найдем стационарное распределение температуры внутри шара при малых значениях угла  $\varepsilon$ .

1) Если совместить ось сегмента с осью  $Oz$ , то площадь его выражается с помощью интеграла

$$R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\varepsilon \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

Применяя формулу (19.6), найдем, что в данном случае

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{1}{4\pi R^2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \frac{R^2 - r_0^2}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}} d\sigma,$$

где  $d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  — дифференциал площади сферы  $\Gamma$ . По теореме о среднем интегрального исчисления это может быть записано в виде

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \tilde{\psi})^{3/2}},$$

причем через  $\tilde{\psi}$  обозначено среднее значение  $\psi$ , соответствующее некоторой точке  $M$  со сферическими координатами  $\tilde{\theta}$  и  $\tilde{\varphi}$ ,

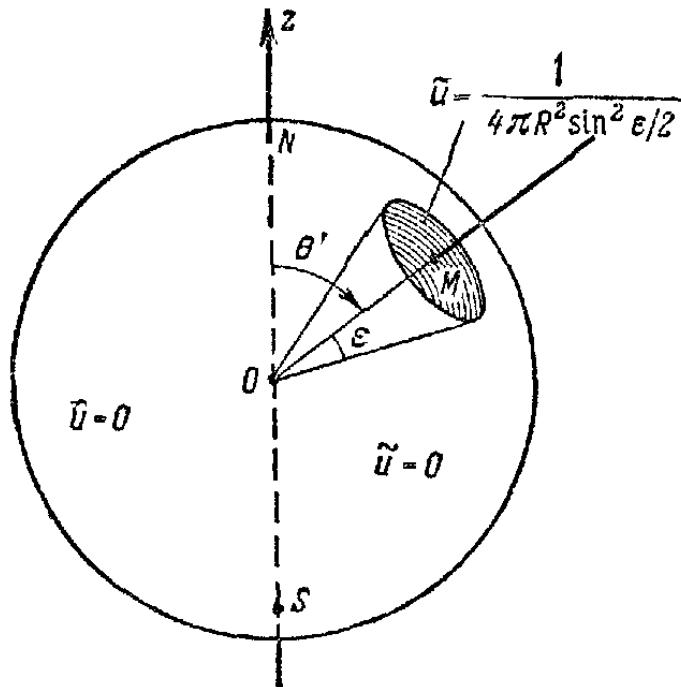


Рис. 66.

лежащей в сегменте  $\Sigma$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  граничная температура сводится к нулю на всей сфере  $\Gamma$ , кроме точки  $M$ , где температура будет бесконечна (*двумерная импульсная функция Дирака*; см. стр. 164). Так как при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\tilde{\theta} \rightarrow \theta'$  и  $\tilde{\varphi} \rightarrow \varphi'$ , то стационарное распределение температуры будет стремиться к

$$\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi')^{3/2}},$$

где согласно формуле (19.5)

$$\cos \psi' = \sin \theta_0 \sin \theta' \cos (\varphi_0 - \varphi') + \cos \theta_0 \cos \theta'.$$

Опуская теперь штрихи, мы можем сказать, что выражение

$$\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}}, \quad (19.9)$$

где  $\cos \psi$  определен формулой (19.5), является *стационарным распределением температуры в точке*  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ , если на границе шара поддерживается всюду температура 0, кроме одной точки  $M$  с координатами  $\theta$  и  $\varphi$ , в которой температура бесконечна (в смысле указанного выше предельного перехода при  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

Выражение (19.9) называется *ядром Пуассона для шара*. По формуле (19.8) интеграл от ядра Пуассона для шара по граничной сфере  $\Gamma$  равен 1 для любых  $r_0, \theta_0$  и  $\varphi_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}} d\sigma &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{R(R^2 - r_0^2)}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}} \sin \theta d\theta = 1. \end{aligned}$$

**60. Задача Дирихле для внешности шара.** Можно представить себе теплопроводящее пространство, из которого изъят шар. Границей оставшейся бесконечной области будет сфера, являющаяся и границей шара (только температуру, поддерживаемую на этой границе, мы должны себе теперь представить «приложенной» изнутри). Очевидно, что решение задачи о распределении температуры в такой бесконечной области, внешней к шару, может быть получено так же, как и формула (19.6); единственное изменение, которое мы должны произвести в выводе, заключается в том, что нужно точки  $A$  и  $A'$  поменять местами, т. е.  $r_0$  в формуле (19.6) заменить на  $\frac{R^2}{r_0}$ . Тогда мы получим искомую

температуру

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \tilde{u}(\theta, \varphi) \frac{R \left( R^2 - \frac{R^4}{r_0^2} \right)}{\left( R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2 \frac{R^3}{r_0} \cos \psi \right)^{3/2}} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \tilde{u}(\theta, \varphi) \frac{r_0 (r_0^2 - R^2)}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \psi)^{3/2}} \sin \theta d\theta, \quad (19.10) \end{aligned}$$

где уже, конечно,  $r_0 > R$ .

Пример. В условиях граничной температуры примера I п. 59 стационарное распределение температуры во внешности шара на продолжениях вертикального диаметра мы получим, поменяв местами  $r_0$  и  $R$  в соответствующих формулах для температуры ~~внутри~~ шара (именно такая замена переводит интеграл (19.6) в интеграл (19.10)).

Таким образом,

$$u = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2R} \left\{ r_0 - \frac{r_0^2 - R^2}{\sqrt{r_0^2 + R^2}} \right\}$$

с верхним знаком для верхнего продолжения диаметра  $SN$  и с нижним — для нижнего. Отметим, что в обе стороны  $u \rightarrow \frac{1}{2}$  при  $r_0 \rightarrow \infty$ .

**61. Задача Дирихле для полупространства.** Для полупространства  $z > 0$  функция Грина имеет вид

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{r_{AP}} - \frac{1}{r_{A^*P}},$$

где  $A(x_0, y_0, z_0)$  — произвольная точка полупространства  $z > 0$  и  $A^*(x_0, y_0, -z_0)$  — точка, ей сопряженная. В этом случае

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}$$

и границею  $\Gamma$  служит плоскость  $z = 0$ .

Действительно, при этом  $\frac{1}{r_{AP}} \Big|_{z=0} = \frac{1}{r_{A^*P}} \Big|_{z=0}$  и функция  $\frac{1}{r_{A^*P}}$  — гармоническая при  $z \geq 0$ . Далее,

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = - \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

(так как внешняя нормаль к  $\Gamma$  направлена вниз, в сторону отрицательных  $z$ ), а

$$\frac{\partial G}{\partial z} = - \frac{1}{r_{A^*P}^2} \frac{\partial r_{A^*P}}{\partial z} + \frac{1}{r_{AP}^2} \frac{\partial r_{AP}}{\partial z} = - \frac{z+z_0}{r_{A^*P}^3} + \frac{z-z_0}{r_{AP}^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{z_0}{r_{A^*P}^3 \Big|_{z=0}} + \frac{z_0}{r_{AP}^3 \Big|_{z=0}} = \frac{2z_0}{(V(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

Границные значения  $\tilde{u}$  здесь заданы на плоскости  $z=0$ , т. е.  $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y)$  ( $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ), и по формуле (18.12)

$$u(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{u}(x, y)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} dy. \quad (19.11)$$

Интеграл (19.11) называется *интегралом Пуассона для полупространства*. Если ввести в пространстве цилиндрические координаты, положив  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ , то формула (19.11) может быть записана в виде

$$u(r_0, \varphi_0, z_0) =$$

$$= \frac{z_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\tilde{u}(r, \varphi)}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + z_0^2]^{3/2}} r dr. \quad (19.12)$$

Следует иметь в виду, что интегралы (19.11) и (19.12) несобственные и для их сходимости (тем более правильной) граничные значения  $\tilde{u}$  должны достаточно хорошо вести себя на бесконечности, например быть ограниченными.

### Ядро Пуассона для полупространства

$$\frac{z_0}{2\pi} \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} = \frac{z_0}{2\pi} \frac{1}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + z_0^2]^{3/2}}$$

физически может быть (по аналогии со случаем шара) интерпретировано как *стационарное распределение температуры в однородном полупространстве  $z > 0$ , на границе которого — плоскости  $z = 0$  поддерживается температура 0 всюду, кроме точки  $(x, y)$  этой плоскости, где она бесконечна*. Действительно, если  $\tilde{u} = 0$  вне квадрата  $x' - \varepsilon < x < x' + \varepsilon, y' - \varepsilon < y < y' + \varepsilon$  и равно  $\frac{1}{4\varepsilon^3}$  внутри этого квадрата (рис. 67), то по формуле (19.11)

$$u = \frac{z_0}{8\pi\varepsilon^2} \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} dx \int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon} \frac{dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} = \\ = \frac{z_0}{2\pi} \frac{1}{[(\tilde{x}-x_0)^2 + (\tilde{y}-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}},$$

где  $x' - \varepsilon < \tilde{x} < x' + \varepsilon, y' - \varepsilon < \tilde{y} < y' + \varepsilon$ . В пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  мы получаем

$$u = \frac{z_0}{2\pi} \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}},$$

т. е., опуская штрихи, ядро Пуассона для полупространства. Как следует из единственности решения задачи Дирихле,

$$\frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} dy = 1,$$

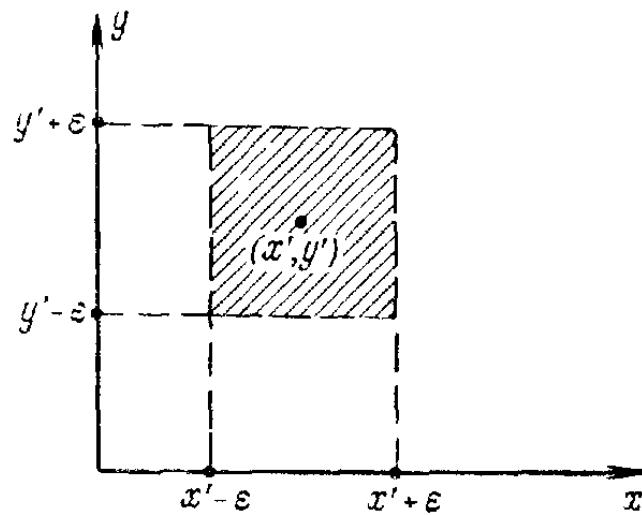


Рис. 67.

т. е. интеграл от ядра Пуассона для полупространства по всей граничной плоскости равен 1. Это может быть проверено непосредственно интегрированием.

Перейдем к примерам.

Пример 1. На границе  $z = 0$  однородного полупространства  $z > 0$  температура равна 0 для  $x < 0$  и равна 1 для  $x > 0$ . Найдем стационарное распределение температуры в полупространстве.

По формуле (19.11)

$$u = \frac{z_0}{2\pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} dy.$$

Очевидно, что это выражение не зависит от  $y_0$ , так как замена  $y - y_0 = \eta$  приведет к выражению

$$u = \frac{z_0}{2\pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty \frac{d\eta}{[\eta^2 + (x - x_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}.$$

Вычислим внутренний интеграл, обозначив для краткости  $(x - x_0)^2 + z_0^2 = \lambda^2$  и совершая подстановку  $\eta = \lambda \operatorname{tg} t$ :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\eta}{(\eta^2 + \lambda^2)^{3/2}} = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Тогда

$$u = \frac{z_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{(x - x_0)^2 + z_0^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{z_0} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{z_0}.$$

Таким образом,

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{z_0}.$$

В этом случае температурное поле в каждой плоскости  $y_0 = \text{const}$  одно и то же. В разрезе плоскостью  $y_0 = 0$  мы получим картину, изображенную на рис. 68. Изотермами

являются лучи, исходящие из начала координат; луч, наклоненный к положительному направлению оси  $x_0$  под углом  $\alpha\pi$ ,  $0 < \alpha < 1$ , является изотермой  $u = 1 - \alpha$ . Изометрическими поверхностями служат плоскости, проходящие через ось  $y_0$ .

**Пример 2.** На границе  $z=0$  однородного полупространства  $z>0$  поддерживается температура 0 всюду вне круга радиуса  $R$  с центром в начале координат, а внутри этого круга поддерживается температура 1. Найдем стационарное распределение температуры на положительной полуоси  $z_0$ .

Здесь удобнее применить формулу (19.12). Ввиду осевой симметрии задачи искомая температура  $u$  не будет зависеть от  $\varphi_0$ , и мы получим

$$u(r_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r dr}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi + z_0^2]^{3/2}}.$$

На оси  $z_0$  имеем  $r_0=0$ , поэтому подынтегральное выражение значительно упрощается. Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} u(0, z_0) &= \frac{z_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z_0^2)^{3/2}} = z_0 \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z_0^2)^{3/2}} = \\ &= z_0 \left\{ \frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right\} = 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}. \end{aligned}$$

Температура  $u(0, z_0)$ , таким образом, монотонно убывает от 1 до 0 при возрастании  $z_0$  от 0 до  $\infty$ .

Для точек, не лежащих на оси  $z_0$ , т. е. при  $r_0 > 0$ , внутренний интеграл по  $r$  может быть вычислен точно, однако интегрирование по  $\varphi$  приводит к интегралам, не берущимся в элементарных функциях, именно к эллиптическим интегралам<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. книгу [10].

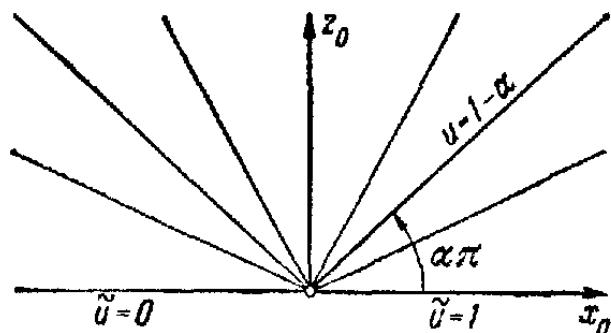
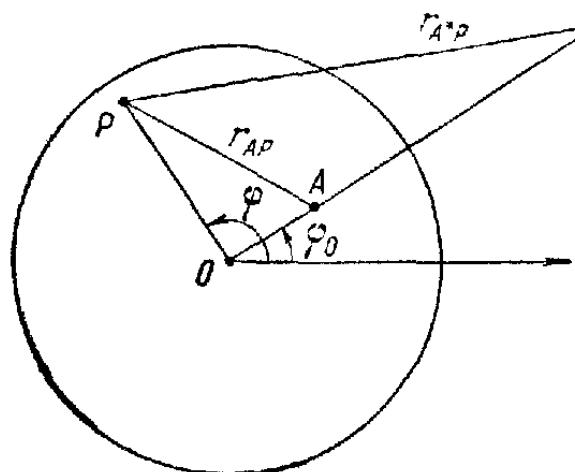


Рис. 68.

## § 20. Решение задачи Дирихле для круга и полуплоскости

**62. Задача Дирихле для круга.** Эта задача решается аналогично соответствующей задаче для шара, только формулы, естественно, получаются более простыми. Покажем, что функция Грина для круга радиуса  $R$  с центром в начале координат имеет вид



$$G(x, y; x_0, y_0) = \ln \frac{R}{r_0} - \ln \frac{1}{r_{AP}} \quad (20.1)$$

Рис. 69.

(ср. с формулой (19.3)), где  $x, y$  — координаты точки  $P$ ,  $x_0, y_0$  — координаты точки  $A$ . Точки  $A$  и  $A^*$  сопряжены, и

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{\left(x - \frac{R^2}{r_0^2} x_0\right)^2 + \left(y - \frac{R^2}{r_0^2} y_0\right)^2},$$

а  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  (рис. 69). Нетрудно проверить, что функция

$w_1 = \ln \frac{R}{r_{A^*P}} = \ln \frac{1}{r_{A^*P}} + \text{const}$  удовлетворяет уравнению

Лапласа  $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0$  всюду внутри круга, так как точка  $A^*$  лежит вне его. Это доказывается так же, как на стр. 238 для функции  $w = \ln \frac{1}{r_{AP}}$ . Из рис. 69 видно, что

$$r_{AP} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2r \frac{R^2}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

где  $r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Если точка  $P$  попадает на границу круга (т. е.  $r = R$ ), то

$$r_{A^*P} \Big|_{r=R} = \frac{R}{r_0} \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{R}{r_0} r_{AP} \Big|_{r=R}.$$

Следовательно, значения функций  $w = \ln \frac{1}{r_{AP}}$  и  $w_1 = \ln \frac{R}{r_{A^*P}}$  совпадают на границе круга, и согласно определению (см. п. 56) правая часть формулы (20.1) действительно представляет собой функцию Грина для круга.

Чтобы воспользоваться общей формулой (18.20), нам осталось вычислить

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial r_{AP}}{\partial r} = \frac{r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{AP}},$$

$$\frac{\partial r_{A^*P}}{\partial r} = \frac{r - \frac{R^2}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{A^*P}},$$

то из формулы (20.1), которую удобно записать в виде  $G = \ln \frac{R}{r_0} - \ln r_{A^*P} + \ln r_{AP}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r} &= \frac{1}{r_{AP}} \frac{\partial r_{AP}}{\partial r} - \frac{1}{r_{A^*P}} \frac{\partial r_{A^*P}}{\partial r} = \\ &= \frac{r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{AP}^2} - \frac{r - \frac{R^2}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{A^*P}^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{R - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{AP}^2} - \frac{R - \frac{R^2}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{\frac{R^2}{r_0^2} r_{AP}^2} = \frac{R - \frac{r_0^2}{R}}{r_{AP}^2},$$

где  $r_{AP}^2 = R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ . Таким образом, окончательно

$$\frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{R^2 - r_0^2}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))},$$

и решение задачи Дирихле для круга по формуле (18.20) примет вид

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\varphi) \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi \quad (20.2)$$

(дифференциал длины дуги  $ds$  окружности  $\Gamma$  заменен на  $R d\varphi$ ).

Интеграл (20.2) называется *интегралом Пуассона для круга*, а выражение

$$\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (20.3)$$

— *ядром Пуассона для круга*. Физической иллюстрацией его является стационарное распределение температуры внутри круга радиуса  $R$ , граница которого — окружность  $\Gamma$  —

поддерживается при температуре 0 всюду, кроме одной точки  $M$  с полярной координатой  $\varphi$ , в которой температура бесконечна. Для доказательства положим в формуле (20.2)  $\tilde{u} = 0$ , если  $|\varphi - \varphi'| > \varepsilon$ , и  $\tilde{u} = \frac{1}{2R\varepsilon}$ , если  $|\varphi - \varphi'| < \varepsilon$  (рис. 70). По формуле (20.2)

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\tilde{\varphi} - \varphi_0)},$$

где  $\tilde{\varphi}$  — некоторое среднее значение  $\varphi$ ,  $|\tilde{\varphi} - \varphi'| < \varepsilon$  (здесь мы, как и в пространственном случае, применили теорему о среднем интегрального исчисления). При  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\tilde{\varphi} \rightarrow \varphi'$ , и в пределе мы получаем стационарное распределение температуры

$$\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi' - \varphi_0)},$$

которое и является ядром Пуассона для круга, если мы опустим штрих при  $\varphi$ . Нетрудно видеть также, что интеграл от ядра Пуассона для круга по граничной окружности  $\Gamma$

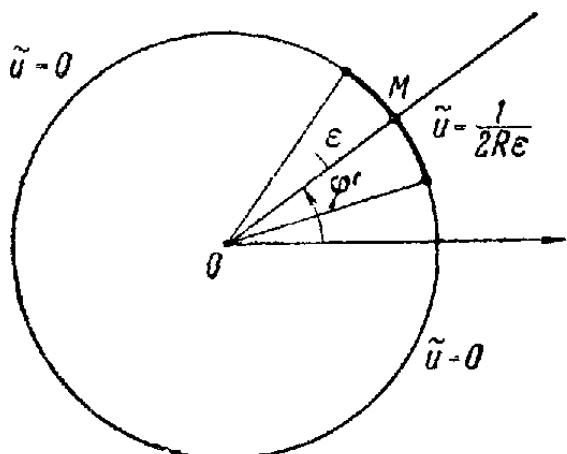


Рис. 70.

равен 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi R} \oint_{\Gamma} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi &= \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi &= 1. \quad (20.4) \end{aligned}$$

Это вновь следует из единственности решения задачи Дирихле и может быть также проверено непосредственно интегрированием.

Пример. Данна тонкая однородная круглая пластинка радиуса  $R$ , верхняя половина границы которой поддерживается при температуре 1, а нижняя — при температуре 0

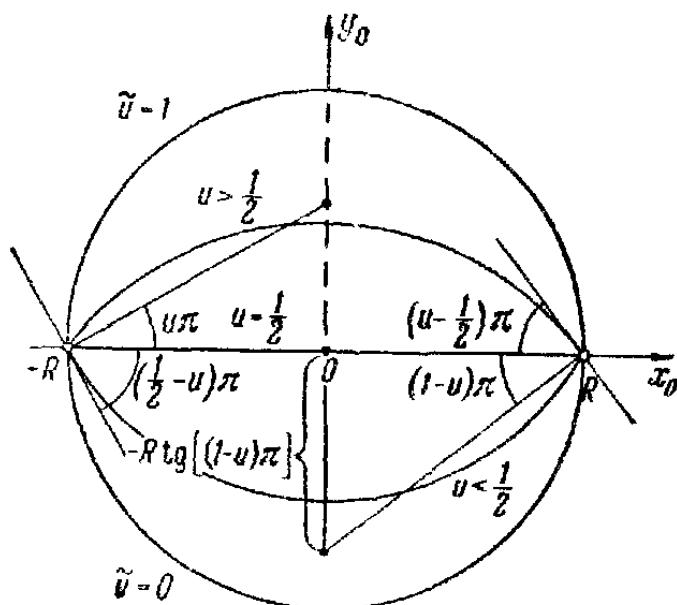


Рис. 71.

(рис. 71). Найдем стационарное распределение температуры на пластинке и определим форму изотерм.

В формуле общего решения (20.2) мы должны положить  $\tilde{u}(\varphi) = 0$  для  $\pi < \varphi < 2\pi$  и  $\tilde{u}(\varphi) = 1$  для  $0 < \varphi < \pi$ ; следовательно, искомое распределение температуры будет дано формулой

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi.$$

Этот интеграл надо вычислять с осторожностью. Предположим

сначала, что  $0 < \varphi_0 < \pi$  (т. е. что точка  $(r_0, \varphi_0)$  расположена в верхнем полукруге); тогда разность  $\varphi - \varphi_0$  изменяется в пределах от  $-\varphi_0$  до  $\pi - \varphi_0$ , а этот интервал длины  $\pi$  не содержит точек  $\pm\pi$ . Поэтому законна подстановка  $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = t$ ,  $\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $d\varphi = \frac{2dt}{1+t^2}$ , и мы получаем

$$\begin{aligned} u(r_0, \varphi_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}} \frac{R^2 - r_0^2}{(R-r_0)^2 + (R+r_0)^2 t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{R+r_0}{R-r_0} t \right) \Big|_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \arctg \left( \frac{R+r_0}{R-r_0} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} \right) + \arctg \left( \frac{R+r_0}{R-r_0} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы представить найденное выражение в более удобном виде, вычислим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(u\pi) &= \frac{\frac{R+r_0}{R-r_0} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} + \frac{R+r_0}{R-r_0} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}{1 - \left( \frac{R+r_0}{R-r_0} \right)^2} = \\ &= \frac{R^2 - r_0^2}{-4Rr_0} \left( \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right) = -\frac{R^2 - r_0^2}{2Rr_0 \sin \varphi_0}. \end{aligned}$$

Так как правая часть отрицательна, то это означает, что  $u$  для  $0 < \varphi_0 < \pi$  удовлетворяет неравенствам  $\frac{1}{2} < u < 1$ . Таким образом,

$$\operatorname{tg}(\pi - u\pi) = \frac{R^2 - r_0^2}{2Rr_0 \sin \varphi_0},$$

или

$$u = 1 - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{R^2 - r_0^2}{2Rr_0 \sin \varphi_0} \quad (0 < \varphi_0 < \pi). \quad (20.5)$$

Если  $\pi < \varphi_0 < 2\pi$  (точка  $(r_0, \varphi_0)$  расположена в нижнем полукруге), то интервал  $(-\varphi_0, \pi - \varphi_0)$  изменения  $\varphi - \varphi_0$  содержит точку  $-\pi$ , но не содержит точку  $0$  и мы можем сделать подстановку  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = t$ ,  $\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ ,  $d\varphi = -\frac{2dt}{t^2 + 1}$ .

Таким образом, для этих значений  $\varphi_0$

$$\begin{aligned} u(r_0, \varphi_0) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} \frac{R^2 - r_0^2}{(R + r_0)^2 + (R - r_0)^2 t^2} dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{R - r_0}{R + r_0} t \right) \Big|_{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \left( \frac{R - r_0}{R + r_0} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{R - r_0}{R + r_0} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Преобразовывая, как и раньше, найдем

$$\operatorname{tg}(u\pi) = -\frac{\frac{R - r_0}{R + r_0} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} + \frac{R - r_0}{R + r_0} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}}{1 - \left( \frac{R - r_0}{R + r_0} \right)^2} = -\frac{R^2 - r_0^2}{2Rr_0 \sin \varphi_0}$$

— прежний результат, с тем лишь различием, что теперь правая часть положительна, так как  $\sin \varphi_0 < 0$ . Следовательно,

$$u = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r_0^2}{2Rr_0 \sin \varphi_0} \quad (\pi < \varphi_0 < 2\pi) \quad (20.6)$$

и  $0 < u < \frac{1}{2}$ .

Изотермы в верхнем полукруге по формуле (20.5) будут иметь уравнение ( $u$  постоянно,  $\frac{1}{2} < u < 1$ )

$$\operatorname{tg} \{(1 - u)\pi\} = \frac{R^2 - r_0^2}{2Rr_0 \sin \varphi_0}$$

или, если перейти к декартовым координатам  $x_0 = r_0 \cos \varphi_0$ ,  $y_0 = r_0 \sin \varphi_0$ , уравнение

$$\operatorname{tg} \{(1 - u)\pi\} = \frac{R^2 - x_0^2 - y_0^2}{2Ry_0},$$

т. е.

$$x_0^2 + \{y_0 + R \operatorname{tg} [(1 - u)\pi]\}^2 = \frac{R^2}{\cos^2 [(1 - u)\pi]}.$$

Это — уравнение окружности с центром в точке  $(0, -R \operatorname{tg} [(1 - u)\pi])$  радиуса  $\frac{R}{\cos [(1 - u)\pi]}$ , проходящей через точки  $(\pm R; 0)$ ; однако нашей изотермой является лишь дуга этой окружности, лежащая в верхней полуплоскости  $y_0 > 0$ .

(так как  $\sin \varphi_0 > 0$ ). Аналогично показывается, что в нижнем полукруге  $y_0 < 0$  изотермами также являются дуги окружностей, проходящих через точки  $(\pm R; 0)$  (рис. 71). Уравнения этих окружностей:  $x_0^2 + (y_0 - \operatorname{tg} \pi u)^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \pi u}$ .

**63. Задача Дирихле для внешности круга.** Так же, как мы поставили и решили выше задачу Дирихле для внешности шара (см. п. 60), можно поступить и с внешностью круга. Решением будет формула (20.2), в которой нужно поменять местами  $r_0$  и  $R$ :

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\varphi) \frac{r_0^2 - R^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi \quad (r_0 > R).$$

Если мы теперь поставим задачу об изотермах во внешности круга радиуса  $R$ , верхняя половина границы которого поддерживается («изнутри») при температуре 1, а нижняя — при температуре 0, то эти изотермы будут продолжением изотерм для внутренности круга, т. е. дополнительными дугами соответствующих окружностей. При этом, если дуга такой окружности является внутри круга радиуса  $R$  изотермой  $u$ , то ее дополнительная дуга вне этого круга является изотермой  $1-u$  (рис. 72). Это легко доказать таким же образом, как мы это делали выше для внутренности круга.

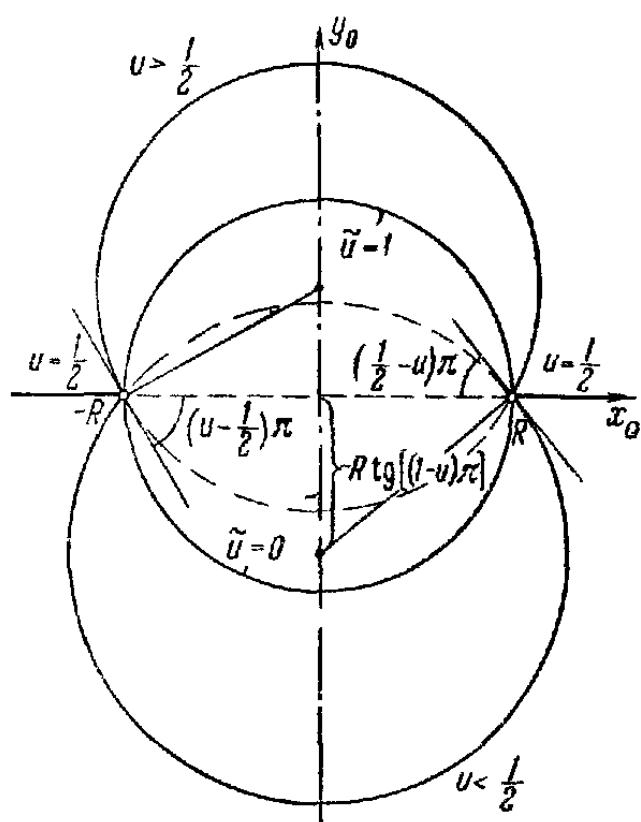


Рис. 72.

Если мы теперь поставим задачу об изотермах во внешности круга радиуса  $R$ , верхняя половина границы которого поддерживается («изнутри») при температуре 1, а нижняя — при температуре 0, то эти изотермы будут продолжением изотерм для внутренности круга, т. е. дополнительными дугами соответствующих окружностей. При этом, если дуга такой окружности является внутри круга радиуса  $R$  изотермой  $u$ , то ее дополнительная дуга вне этого круга является изотермой  $1-u$  (рис. 72). Это легко доказать таким же образом, как мы это делали выше для внутренности круга.

**64. Задача Дирихле для полуплоскости.** Функция Грина для полуплоскости  $y_0 > 0$  имеет вид

$$G(x, y; x_0, y_0) = \ln \frac{1}{r_{A*P}} - \ln \frac{1}{r_{AP}}, \quad (20.7)$$

где  $A(x_0, y_0)$  — произвольная точка полуплоскости  $y_0 > 0$ , а  $A^*(x_0, -y_0)$  — точка, ей сопряженная. В этом случае

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$r_{A*P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$$

и границей  $\Gamma$  служит прямая  $y = 0$ . (Рекомендуем читателю получить формулу (20.7) самостоятельно.) Далее (см. задачу Дирихле для полупространства, п. 61),

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= -\frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=0} = \\ &= \left( \frac{1}{r_{A^*P}} \frac{\partial r_{A^*P}}{\partial y} - \frac{1}{r_{AP}} \frac{\partial r_{AP}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}, \end{aligned}$$

и решение запишется в виде (по формуле (18.20))

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{u}(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2} dx. \quad (20.8)$$

Выражение (20.8) называется *интегралом Пуассона для полуплоскости*, а

$$\frac{y_0}{\pi} \frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2} \quad (20.9)$$

— *ядром Пуассона для полуплоскости*.

Физический смысл ядра Пуассона для полуплоскости состоит в том, что функция

$$\frac{y_0}{\pi} \frac{1}{(x'-x_0)^2+y_0^2}$$

представляет стационарное распределение температуры в полу-  
плоскости  $y_0 > 0$ , если граница — ось  $x$  — поддерживается при температуре  $\hat{u} = \delta(x - x')$  (см. стр. 164), т. е. при температуре 0 для всех  $x \neq x'$  и температуре  $\infty$  в точке  $x'$  (в смысле предельного перехода, который ведет к импульсной функции Дирака  $\delta(x - x')$ ). Интеграл от ядра Пуассона для полуплоскости по границе полуплоскости равен 1:

$$\frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^2+y_0^2} = 1.$$

Все эти утверждения предоставляем доказать читателю.

Рассмотрим в заключение еще один пример.

Пример. Дано однородная полуплоскость  $y_0 > 0$ , граница которой — ось  $x$  — поддерживается при температуре 0 для  $|x| > l$  и при температуре 1 для  $|x| < l$ . Найдем

стационарное распределение температуры в полуплоскости и соответствующие изотермы. В интеграле формулы (20.8)

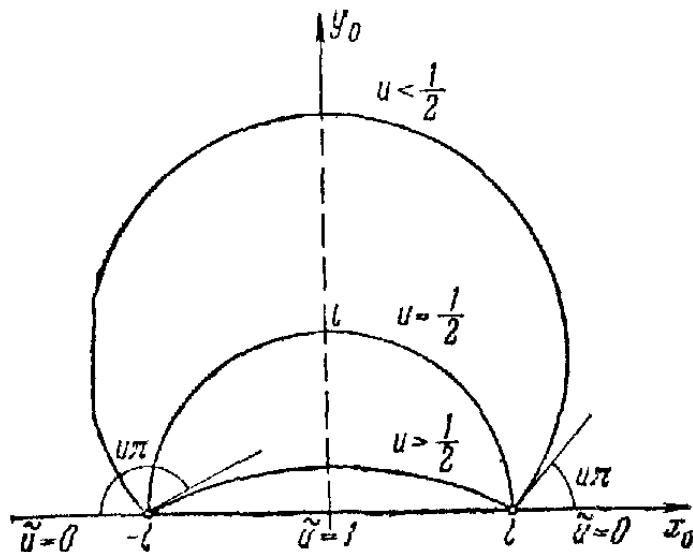


Рис. 73.

сделаем замену переменной  $x - x_0 = \xi$ ; тогда

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{y_0}{\pi} \int_{-l}^l \frac{dx}{(x - x_0)^2 + y_0^2} = \frac{y_0}{\pi} \int_{-l-x_0}^{l-x_0} \frac{d\xi}{\xi^2 + y_0^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{y_0} \Big|_{-l-x_0}^{l-x_0} = \frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{l-x_0}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{l+x_0}{y_0} \right\}. \end{aligned}$$

Начнем с изотермы  $u = \frac{1}{2}$ . На ней

$$\operatorname{arctg} \frac{l-x_0}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{l+x_0}{y_0} = \frac{\pi}{2},$$

т. е.  $\frac{l-x_0}{y_0} = \frac{y_0}{l+x_0}$ , откуда

$$\frac{l^2 - x_0^2}{y_0^2} = 1, \quad x_0^2 + y_0^2 = l^2.$$

Эта изотерма является верхней полуокружностью радиуса  $l$  с центром в начале координат (рис. 73). Для  $u < \frac{1}{2}$

$$\operatorname{tg}(u\pi) = \frac{\frac{l-x_0}{y_0} + \frac{l+x_0}{y_0}}{1 - \frac{l^2 - x_0^2}{y_0^2}} = \frac{2ly_0}{x_0^2 + y_0^2 - l^2},$$

т. е.

$$x_0^2 + [y_0 - l \operatorname{ctg}(u\pi)]^2 = \frac{l^2}{\sin^2(u\pi)}.$$

Изотермой является дуга окружности радиуса  $\frac{l}{\sin(u\pi)} > l$ , лежащая в верхней полуплоскости. Окружность эта проходит через точки  $(\pm l, 0)$  и имеет свой центр на положительной полуоси  $y_0$  в точке  $(0, l \operatorname{ctg}(u\pi))$ . Для  $\frac{1}{2} < u < 1$  мы приходим к аналогичному результату, только центр окружности будет располагаться на отрицательной полуоси  $y_0$  (рис. 73).

## § 21. Метод Фурье для уравнения Лапласа

**65. Двумерное уравнение Лапласа и задача Дирихле для круга.** Метод Фурье разделения переменных, который играет большую роль в задачах колебаний и теплопроводности (см. гл. I и II), применим также к решению уравнения Лапласа и задачи Дирихле для таких простых областей, как круг, прямоугольник и т. п. В этом пункте мы решим методом Фурье задачу Дирихле для круга. Радиус круга обозначим через  $R$ , центр поместим в начало координат. Очевидно, что целесообразно решать задачу в полярных координатах. Тогда задача формулируется так: ищется решение  $u = u(r, \varphi)$  уравнения Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (21.1)$$

для  $r < R$ , принимающее на границе круга, т. е. при  $r = R$  заданные значения  $\tilde{u}(\varphi)$ :

$$u|_{r=R} = \tilde{u}(\varphi). \quad (21.1a)$$

Метод Фурье заключается в том, что мы сначала ищем решения уравнения (21.1) в виде  $u = U(r)\Phi(\varphi)$ , где неизвестные функции  $U(r)$  и  $\Phi(\varphi)$  зависят каждой только от одной переменной, соответственно  $r$  и  $\varphi$ . Тогда для этих неизвестных функций из уравнения (21.1) находим:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) \Phi = - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} U,$$

или

$$\frac{r}{U} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}. \quad (21.2)$$

Так как левая часть уравнения (21.2) не зависит от  $\varphi$ , а правая — от  $r$ , то ни левая, ни правая части этого равенства не могут зависеть ни от  $\varphi$ , ни от  $r$ , т. е. являются постоянными:

$$\frac{r}{U} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = \lambda, \quad - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = - \lambda, \quad (21.3)$$

где  $\lambda$  — постоянная разделения. Постоянная  $\lambda$ , как мы сейчас увидим, должна быть неотрицательной.

Второе из уравнений (21.3),  $\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda \Phi = 0$ , имеет общее решение

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi, \quad (21.4)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Покажем теперь, что  $\lambda$  не может принимать любые значения. Это вытекает из того, что увеличение  $\varphi$  на  $2\pi$  возвращает точку  $(r, \varphi)$  в исходное положение; значит, все функции от  $\varphi$ , которые мы рассматриваем, должны быть периодическими по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Таким образом, и  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ , а это по формуле (21.4) означает, что  $\sqrt{\lambda}$  должен равняться целому числу  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Отрицательные  $n$  мы можем отбросить, так как знак  $n$  влияет только на знак произвольной постоянной  $B$ . Итак,  $\lambda = n^2$  (собственные числа) и

$$\Phi(\varphi) = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi. \quad (21.4a)$$

Вернемся теперь к первому уравнению (21.3), в котором заменим  $\lambda$  на  $n^2$ :

$$\frac{r}{U} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = n^2,$$

откуда

$$r^2 \frac{d^2 U}{dr^2} + r \frac{dU}{dr} - n^2 U = 0.$$

Это уравнение для функции  $U(r)$  может быть решено подстановкой  $U = r^\alpha$ , причем для показателя  $\alpha$  легко получаем уравнение

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0$$

или

$$\alpha(x - 1) + \alpha - n^2 = 0, \quad \alpha^2 = n^2, \quad \alpha = \pm n.$$

Следовательно,

$$U(r) = r^n \text{ либо } U(r) = r^{-n}.$$

Второе из этих решений мы должны отбросить, так как при  $r > 0$  оно обращается в бесконечность в центре круга  $r = 0$ . Окончательно

$$u_n(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Полученное частное решение уравнения Лапласа (21.1), которое мы искали в виде  $u = U(r)\Phi(\varphi)$ , обозначено через  $u_n$ , так как оно зависит от  $n$ ; произвольные постоянные  $A_n$  и  $B_n$  тоже зависят от  $n$ .

В силу линейности и однородности уравнения Лапласа сумма частных решений

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad (21.5)$$

будет также решением уравнения Лапласа; это решение содержит две бесконечные последовательности неопределенных коэффициентов (произвольных постоянных)  $A_n$  и  $B_n$ . Чтобы придать решению (21.5) вид, напоминающий ряд Фурье, положим

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = a_n, \quad B_n = b_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда  $u(r, \varphi)$  может быть записано в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n. \quad (21.5a)$$

Оставшиеся неопределенными коэффициенты  $a_0$ ,  $a_n$  и  $b_n$  мы определим из граничного условия (21.1a), в котором заданная функция  $\tilde{u}(\varphi)$  также должна быть периодической с периодом  $2\pi$ . Полагая в решении (21.5a)  $r = R$ , получим граничное условие в виде соотношения

$$\tilde{u}(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (R^n a_n \cos n\varphi + R^n b_n \sin n\varphi).$$

которое представляет собой разложение  $\tilde{u}(\varphi)$  в ряд Фурье. По известным формулам для коэффициентов Фурье мы можем теперь установить, что

$$R^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \cos n\psi d\psi$$

и

$$R^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \sin n\psi d\psi,$$

т. е. что

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\varphi) \sin n\psi d\psi. \quad (21.6)$$

Чтобы получить решение задачи Дирихле для круга, остается только подставить формулы для коэффициентов (21.6) в выражение (21.5а).

Покажем, что полученое решение совпадает с интегралом Пуассона для круга (см. формулу (20.2)). Действительно, подстановка формул (21.6) в выражение (21.5а) дает

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right\} \tilde{u}(\psi) d\psi.$$

Сумма в фигурных скобках может быть вычислена. С этой целью заметим, что согласно формуле Эйлера (см. [1], п. 74)

$$\cos n(\varphi - \psi) = \operatorname{Re} e^{in(\varphi - \psi)},$$

где  $\operatorname{Re} z$  означает вещественную часть  $z$ . Поэтому

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \psi) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n e^{in(\varphi - \psi)} \right].$$

Для  $r < R$  отношение  $\frac{r}{R} < 1$  и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n e^{in(\varphi - \psi)} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

является бесконечной геометрической прогрессией с знаменателем  $q = \frac{r}{R} e^{i(\varphi-\psi)}$ , модуль которого  $|q| = \frac{r}{R} < 1$ . Производя простые преобразования, получим

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n e^{in(\varphi-\psi)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{r}{R} e^{i(\varphi-\psi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi-\psi)}} = \frac{1}{2} \frac{R + r e^{i(\varphi-\psi)}}{R - r e^{i(\varphi-\psi)}}.$$

Чтобы отделить вещественную часть этого выражения, умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженный знаменатель:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \frac{R + r e^{i(\varphi-\psi)}}{R - r e^{i(\varphi-\psi)}} \right] &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \frac{(R + r e^{i(\varphi-\psi)}) (R - r e^{-i(\varphi-\psi)})}{(R - r e^{i(\varphi-\psi)}) (R - r e^{-i(\varphi-\psi)})} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2 + 2iRr \sin(\varphi - \psi)}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + r^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + r^2}, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \psi) = \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + r^2}$$

и

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi.$$

Это и есть интеграл Пуассона для круга (отличие от формулы (20.2) состоит только в том, что вместо  $r_0, \varphi_0$  мы теперь пишем  $r, \varphi$ , а вместо  $\varphi$  применяем переменную интегрирования  $\psi$ ).

**66. Разделение переменных в трехмерном уравнении Лапласа в сферических координатах. Многочлены Лежандра.** Применим теперь метод Фурье к трехмерному уравнению Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Мы рассмотрим здесь наиболее простой и важный случай, когда  $u$  не зависит от  $\varphi$ :  $u = u(r, \theta)$ . Это — так называемый осесимметричный случай, в котором  $u$  постоянно на каждом круге широты:  $r = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Тогда

уравнение Лапласа принимает вид (после сокращения на общий множитель  $\frac{1}{r^2}$ ).

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (21.7)$$

Посмотрим, каковы могут быть решения этого уравнения вида  $u = U(r)\Phi(\theta)$ , ограниченные в шаре радиуса  $R$  с центром в начале координат. Подставляя  $u = U(r)\Phi(\theta)$  в уравнение (21.7), находим

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) \Phi = - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) U,$$

или

$$\frac{1}{U} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = - \frac{1}{\Phi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right). \quad (21.8)$$

По стандартному для метода Фурье рассуждению, поскольку левая часть уравнения (21.8) не зависит от  $\theta$ , а правая — от  $r$ , обе они должны быть постоянными:

$$\frac{1}{U} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = \lambda, \quad \frac{1}{\Phi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) = -\lambda, \quad (21.9)$$

где  $\lambda$  — постоянная разделения, которую опять-таки считаем неотрицательной. Для дальнейших вычислений нам удобнее вместо  $\lambda$  ввести другую произвольную постоянную  $v$ , связанную с  $\lambda$  соотношением

$$\lambda = v(v+1).$$

Тогда первое уравнение (21.9) примет вид

$$r^2 \frac{d^2 U}{dr^2} + 2r \frac{dU}{dr} - v(v+1)U = 0.$$

Полагая  $U = r^\alpha$ , мы найдем для показателя  $\alpha$  уравнение  $\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - v(v+1) = 0$  или

$$\alpha(\alpha+1) = v(v+1).$$

Очевидно, что это квадратное уравнение относительно  $\alpha$  имеет следующие два корня:  $\alpha = v$  и  $\alpha = -v - 1$ . Считая  $v \geq 0$ , мы можем второй из этих корней отбросить, поскольку соответствующая функция  $U(r) = r^{-v-1}$  обращается в бесконечность при  $r = 0$  (напомним, что наша цель — найти

ограниченные решения). Таким образом, остается решение  $U(r) = r^\nu$  ( $\nu \geq 0$ ).

Вернемся теперь ко второму уравнению (21.9):

$$\frac{1}{\Phi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) = -\nu(\nu + 1). \quad (21.10)$$

Так как сферическая координата  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi$ :  $0 \leq \theta \leq \pi$ , то мы должны искать решения уравнения (21.10), ограниченные для всех таких  $\theta$ . Преобразуем уравнение (21.10), введя вместо  $\theta$  новую независимую переменную

$$x = \cos \theta. \quad (21.11)$$

При  $\theta$ , изменяющемся от 0 до  $\pi$ ,  $x$  изменяется от 1 до  $-1$ :  $-1 \leq x \leq 1$ . Кроме того, при дифференцировании по  $\theta$  мы должны учесть, что по правилу дифференцирования сложной функции в силу подстановки (21.11)

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\theta} &= \frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d\Phi}{dx}, \\ \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) &= \sin \theta \frac{d}{dx} \left( \sin^2 \theta \frac{d\Phi}{dx} \right), \end{aligned}$$

и уравнение (21.10) должно быть записано в форме

$$\frac{d}{dx} \left( \sin^2 \theta \frac{d\Phi}{dx} \right) = -\nu(\nu + 1)\Phi$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{d\Phi}{dx} \right] + \nu(\nu + 1)\Phi = 0.$$

Если мы, кроме того, обозначим зависимую переменную  $\Phi$  как функцию от  $x = \cos \theta$  через  $y$ :

$$\Phi(\theta) = \Phi(\arccos x) = y(x),$$

то получим для определения искомой функции  $y$  уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \nu(\nu + 1)y = 0, \quad (21.12)$$

называемое *уравнением Лежандра*. Решения этого уравнения играют важную роль во многих прикладных вопросах. Точки  $x = \pm 1$  являются *особыми* для дифференциального уравнения (21.12), и поэтому не все решения уравнения Лежандра будут ограничены на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  (аналогичную картину мы наблюдали для других дифференциальных

уравнений этой главы, а также для уравнения Бесселя (см. п. 29)). Можно показать, что уравнение Лежандра имеет ограниченные решения только в том случае, когда  $v = n =$  целому числу ( $n \geq 0$ ). Для таких  $v$  ограниченными решениями уравнения Лежандра (21.12) являются некоторые многочлены, называемые *многочленами Лежандра*. Эти многочлены имеют довольно простое замкнутое выражение:

$$y = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (21.13)$$

Покажем, что многочлены (21.13) действительно удовлетворяют уравнению (21.12) при  $v = n$ . Положим  $(x^2 - 1)^n = z$  и  $y = z^{(n)}$ . Тогда  $z' = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}$  и  $(x^2 - 1)z' = 2nxz$ . Дифференцируя последнее равенство  $n$  раз по  $x$ , будем иметь

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)z'] = 2n \frac{d^n}{dx^n} (xz). \quad (21.14)$$

Но по правилу Лейбница дифференцирования произведения (см. [1], п. 54)

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (uv) &= uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2!} u''v^{(n-2)} + \dots + nu^{(n-1)}v' + u^{(n)}v, \end{aligned}$$

в при  $u = x^2 - 1$ ,  $v = z'$  получим

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)z'] = (x^2 - 1)z^{(n+1)} + 2nxz^{(n)} + 2 \frac{n(n-1)}{2!} z^{(n-1)},$$

так как все производные функции  $u = x^2 - 1$  порядка выше второго равны нулю. Точно так же по правилу Лейбница при  $u = x$ ,  $v = z$  найдем, что

$$\frac{d^n}{dx^n} (xz) = xz^{(n)} + nz^{(n-1)}.$$

Следовательно, равенство (21.14) может быть также записано в виде

$$(x^2 - 1)z^{(n+1)} + 2nxz^{(n)} + n(n-1)z^{(n-1)} = 2nxz^{(n)} + 2n^2z^{(n-1)}$$

или

$$(x^2 - 1)z^{(n+1)} - n(n+1)z^{(n-1)} = 0.$$

Дифференцируя это последнее равенство еще раз по  $x$ , придадим ему вид

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)z^{(n+1)}] + n(n+1)z^{(n)} = 0$$

или, поскольку  $z^{(n)} = y$ ,

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0.$$

Это показывает, что  $y = z^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$  является решением уравнения (21.12) при  $v = n$ , а следовательно, при любой постоянной  $C$  и  $Cy = C \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$  является решением этого же уравнения.

Выбор постоянной  $C = \frac{1}{2^n n!}$  в многочлене Лежандра (21.13) зависит от условия нормировки: потребуем, чтобы при  $x = 1$  многочлен Лежандра  $P_n(x)$  принимал значение 1:  $P_n(1) = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда нужно выбрать  $C$  так, чтобы выполнялось условие

$$C \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \Big|_{x=1} = 1. \quad (21.15)$$

По правилу Лейбница, уже использованному выше,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] &= \frac{d^n}{dx^n} [(x+1)^n (x-1)^n] = \\ &= (x+1)^n \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^n] + \\ &+ n \frac{d}{dx} [(x+1)^n] \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x-1)^n] + \dots = \\ &= (x+1)^n n! + n \frac{d}{dx} [(x+1)^n] \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x-1)^n] + \dots ; \end{aligned}$$

но все члены последнего выражения, начиная со второго, содержат разность  $x - 1$  в качестве множителя и поэтому обращаются в нуль при  $x = 1$ . В силу этого

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \Big|_{x=1} = 2^n n!.$$

Из условия нормировки (21.15) теперь действительно следует, что

$$C \cdot 2^n n! = 1, \quad C = \frac{1}{2^n n!}.$$

Таким образом, мы установили, что в качестве  $\Phi(\theta)$  следует взять  $P_n(x) = P_n(\cos \theta)$  и что, следовательно, ограниченными решениями вида  $U(r)\Phi(\theta)$  уравнения Лапласа (21.7) будут функции

$$u_n(r, \theta) = U_n(r)\Phi_n(\theta) = r^n P_n(\cos \theta). \quad (21.16)$$

Рассмотрим некоторые свойства многочленов Лежандра.

1. Многочлен  $P_n(x)$  содержит только степени  $x$  одинаковой с  $n$  четности, а именно:  $x^n, x^{n-2}, x^{n-4}, \dots$ ; низшей степенью  $x$  в  $P_n(x)$  будет первая, если  $n$  нечетно, и нулевая, если  $n$  четно.

В качестве примера приведем первые пять многочленов Лежандра, вычисленных по формуле (21.13)<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned}$$

Графики этих многочленов изображены на рис. 74.

2. При  $x = 1$  значение  $P_n(1) = 1$  и при  $x = -1$  значение  $P_n(-1) = (-1)^n$  для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$

Выше (см. формулу (21.15) и связанный с ней текст) уже показано, что  $P_n(1) = 1$ . Ввиду того, что при  $n$  четном  $P_n(-x) = P_n(x)$ , а при  $n$  нечетном  $P_n(-x) = -P_n(x)$ , очевидно и соотношение  $P_n(-1) = (-1)^n$ . Графики  $P_n(x)$  при четном  $n$  симметричны относительно оси  $y$ , а при нечетном  $n$  обладают центральной симметрией относительно начала координат.

3. На отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  многочлены Лежандра сами по абсолютной величине не превосходят единицы:

$$|P_n(x)| \leq 1 \quad \text{для } |x| \leq 1.$$

Для первых пяти многочленов Лежандра это видно из рис. 74, в общем случае мы доказательства не приводим.

4. Многочлен  $P_n(x)$  для  $n > 1$  имеет  $n$  действительных простых корней, расположенных в интервале  $-1 < x < 1$ . Например, на рис. 74 отмечены 4 корня  $P_4(x)$ . Доказательство в общем случае мы также опускаем.

5. Многочлены Лежандра ортогональны на интервале  $(-1, 1)$ , т. е. для  $n \neq m$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0. \quad (21.17)$$

<sup>1)</sup> Таблицы многочленов Лежандра имеются в книге [10].

Докажем это важное свойство методом, неоднократно применявшимся ранее. Пусть  $n \neq m$ , и запишем, что  $P_n(x)$  и  $P_m(x)$

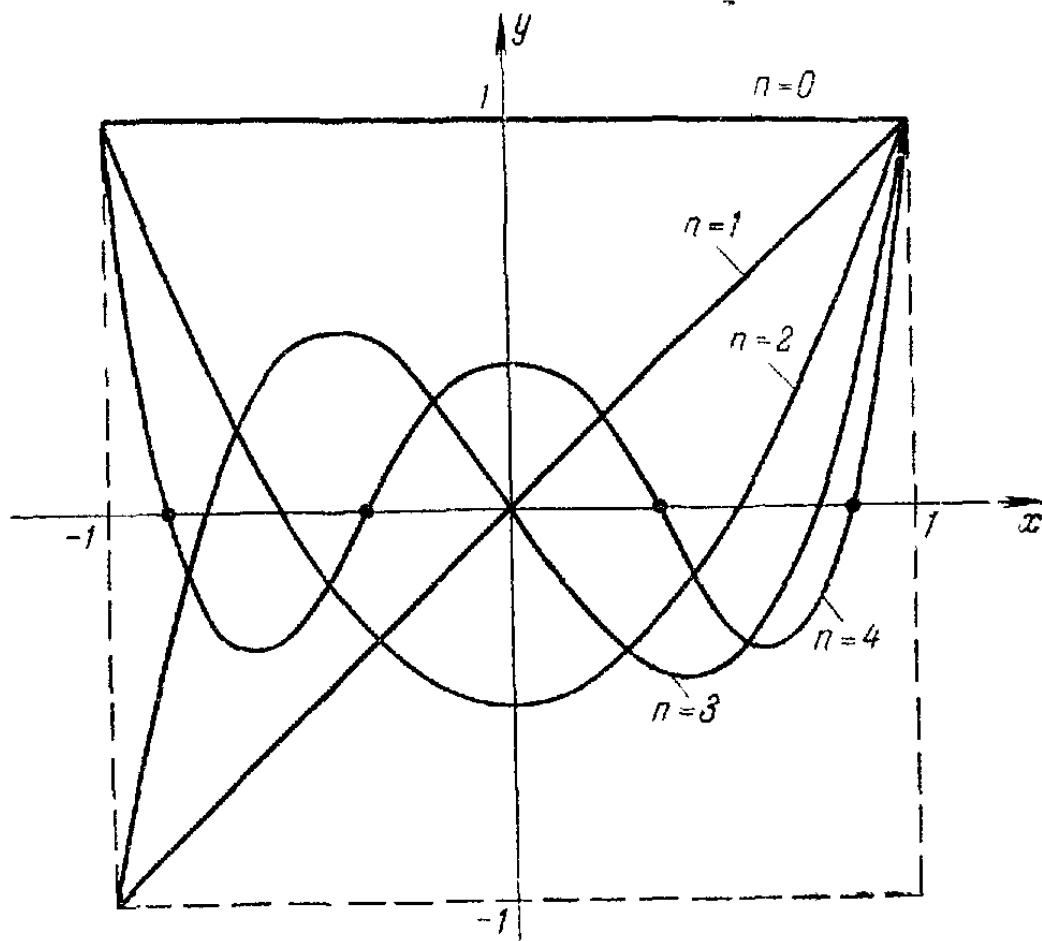


Рис. 74.

удовлетворяют уравнению Лежандра (21.12) соответственно для  $v = n$  и  $v = m$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1)P_n = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] + m(m+1)P_m = 0.$$

Умножим первое из этих равенств на  $P_m(x)$ , а второе на  $P_n(x)$ , и вычтем из первого полученного равенства второе:

$$P_m \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] - P_n \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] = \\ = \{m(m+1) - n(n+1)\} P_n P_m.$$

Нетрудно видеть, что

$$P_m \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] - P_n \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right] = \\ = \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \left\{ P_m \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dP_m}{dx} \right\} \right];$$

интегрируя это последнее равенство по  $x$  в пределах от  $x = -1$  до  $x = 1$ , найдем, что

$$\{m(m+1) - n(n+1)\} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \\ = \left[ (1-x^2) \left\{ P_m \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{dP_m}{dx} \right\} \right] \Big|_{-1}^1 = 0,$$

так как последнее выражение из-за множителя  $1-x^2$  обращается в нуль при  $x = \pm 1$ . Учитывая, что  $m(m+1) - n(n+1) \neq 0$ , мы приходим к равенству (21.17).

**6.** В приложениях многочленов Лежандра важную роль играет еще формула

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (21.18)$$

которую мы не будем выводить. Ее легко проверить для малых  $n=0, 1, 2, 3, 4$ : так, например,

$$\int_{-1}^1 P_3^2(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (5x^3 - 3x)^2 dx = \\ = \frac{1}{4} \left\{ \frac{25}{7} x^7 \Big|_{-1}^1 - 6x^5 \Big|_{-1}^1 + 3x^3 \Big|_{-1}^1 \right\} = \frac{2}{7}.$$

Доказательства всех приведенных свойств многочленов Лежандра имеются в более полных курсах.

**67. Решение задачи Дирихле для шара в осесимметричном случае разложением по многочленам Лежандра.** Осесимметричная задача Дирихле для шара радиуса  $R$  с центром в начале координат состоит в определении функции  $u(r, \theta)$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа (21.7) для  $r < R$  и граничному условию

$$u \Big|_{r=R} = \tilde{u}(\theta). \quad (21.19)$$

Выше мы установили, что для  $n=0, 1, 2, \dots$  решениями уравнения (21.7) являются функции (21.16):  $r^n P_n(\cos \theta)$ . Ввиду линейности и однородности уравнения Лапласа его

решением будет также функция

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (21.20)$$

где  $C_n$  — произвольные постоянные коэффициенты, которые мы определим так, чтобы функция (21.20) удовлетворяла граничному условию (21.19). Для этого надо потребовать, чтобы по  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , тождественно имело место соотношение

$$\tilde{u}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n P_n(\cos \theta). \quad (21.21)$$

В предположении, что тождество (21.21) имеет место, мы можем эти коэффициенты найти, воспользовавшись свойством ортогональности многочленов Лежандра (свойство 5 в предыдущем п. 66). Действительно, умножим тождество (21.21) на  $P_m(\cos \theta)$ , где  $m \geq 0$  — некоторое фиксированное целое число, и проинтегрируем его по граничной сфере радиуса  $R$ :

$$\iint_S \tilde{u}(\theta) P_m(\cos \theta) d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n \iint_S P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d\sigma. \quad (21.22)$$

Элемент площади поверхности сферы  $d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , и интегрирование по сфере означает интегрирование по  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi$  и по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_S P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d\sigma &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi R^2 \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 2\pi R^2 \frac{2}{2m+1}, & \text{если } n = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь интегрирование по  $\varphi$  дало множитель  $2\pi$ , а последующая замена переменной  $\cos \theta = x$ ,  $-\sin \theta d\theta = dx$  приводит к последнему интегралу, который по свойствам 5 и 6 многочленов Лежандра (п. 66) равен 0 при  $n \neq m$  и  $\frac{2}{2m+1}$  при  $n = m$ .

Таким образом, в правой части равенства (21.22) все члены суммы, кроме одного, равны нулю; действительно, когда  $n$ , пробегая все значения от 0 до  $\infty$ , принимает значения, отличные от фиксированного номера  $m$ , соответствующий интеграл равен 0; только в единственном члене суммы соответствующем значению  $n = m$ , интеграл оказывается отличным от нуля. Следовательно, правая часть равенства (21.22) равна

$$C_m R^m \frac{4\pi R^2}{2m+1},$$

откуда следует, что

$$C_m = \frac{1}{R^m} (2m+1) \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S \tilde{u}(\theta) P_m(\cos \theta) d\sigma. \quad (21.23)$$

Так как  $m$  — произвольный фиксированный номер,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то мы можем заменить его на  $n$  и подставить выражение (21.23) в решение (21.20). Тогда мы получим окончательное решение задачи Дирихле для шара радиуса  $R$ .

Мы уже имели выше (см. п. 59) решение задачи Дирихле для шара в виде интеграла Пуассона в более общем (не осесимметричном) случае зависимости граничной функции  $\tilde{u}$  и решения от  $\varphi$ . Можно показать, что решение (21.20) совпадает с решением (19.6) из п. 59 в том частном случае, когда  $\tilde{u}$  не зависит от  $\varphi$ .

Формула (21.20), представляющая решение задачи Дирихле (в осесимметричном случае) в виде ряда по многочленам Лежандра, имеет некоторые преимущества перед решением в виде интеграла Пуассона. Мы ограничимся только одним простейшим следствием из этой формулы. Очевидно, что если граничные значения  $\tilde{u}(\theta)$  сами являются одним из многочленов Лежандра или их конечной линейной комбинацией, то в правой части формулы (21.20) останется только одно или несколько слагаемых, отличных от нуля. Например, если  $\tilde{u}(\theta) = \cos \theta = P_1(\cos \theta)$ , то в формуле (21.23) интеграл

будет отличен от нуля только для  $m=1$  и при этом

$$C_1 = \frac{3}{R} \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S \cos \theta \cdot P_1(\cos \theta) d\sigma = \frac{3}{2R} \int_0^\pi \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, по формуле (21.20) решением задачи Дирихле для шара радиуса  $R$  при граничных значениях  $\tilde{u}(\theta) = \cos \theta$  будет  $u(r, \theta) = \frac{r}{R} \cos \theta$ . Рассмотрим еще один такой пример: пусть  $\tilde{u}(\theta) = \cos 2\theta$ ; представим  $\cos 2\theta$  в виде линейной комбинации многочленов Лежандра:

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2x^2 - 1 =$$

$$= \frac{4}{3} P_2(x) - \frac{1}{3} P_0(x) = \frac{4}{3} P_2(\cos \theta) - \frac{1}{3} P_0(\cos \theta),$$

где  $x = \cos \theta$ . Следовательно, в решении (21.20) от суммы останутся только два отличных от нуля члена, соответствующих  $n=0$  и  $n=2$ , причем

$$C_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S \tilde{u}(\theta) P_0(\cos \theta) d\sigma = -\frac{1}{3},$$

$$C_2 = \frac{5}{R^2} \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S \tilde{u}(\theta) P_2(\cos \theta) d\sigma = \frac{4}{3R^2},$$

так что решением задачи Дирихле при этом граничном условии будет

$$u(r, \theta) = \frac{4}{3} \left( \frac{r}{R} \right)^2 P_2(\cos \theta) - \frac{1}{3}.$$

Изложенный выше метод Фурье решения задачи Дирихле для шара применим не только в осесимметричном случае. Однако в общем случае при разделении переменных в уравнении Лапласа в сферических координатах мы получаем вместо уравнения Лежандра (21.12) более сложное уравнение, решения которого — так называемые присоединенные функции Лежандра — тесно связаны с многочленами Лежандра. Соответственно и формула решения в виде ряда примет более сложный вид. Подробнее эти вопросы рассматриваются в специальных руководствах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

68. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Как уже отмечалось во введении, общий вид линейного дифференциального уравнения второго порядка при условии, что неизвестная функция  $u$  зависит от двух переменных  $x$  и  $y$ , таков:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y). \quad (1)$$

Как и раньше, мы предполагаем, что все коэффициенты уравнения постоянны<sup>1)</sup>.

Большинство дифференциальных уравнений математической физики, которые изучались в настоящем курсе, представляют частные случаи общего уравнения (1).

Так, если для единообразия обозначений вместо переменной  $t$  (времени) писать переменную  $y$ , то уравнение свободных колебаний струны (§ 1) примет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

а уравнение линейной задачи теплопроводности (§ 12)

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Наконец, уравнение Лапласа (§ 18) в двумерном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

---

<sup>1)</sup> Приводимая ниже классификация линейных уравнений переносится и на уравнения с переменными коэффициентами, которые в нашей книге не рассматриваются.

В уравнении (4) обе вторые частные производные входят в левую часть с одинаковыми знаками, в уравнении (2) — с противоположными знаками, а в уравнении (3) — вторая производная по одной из переменных вовсе не входит.

Л. Эйлер доказал, что любое дифференциальное уравнение вида (1) с помощью замены независимых переменных  $x$  и  $y$  может быть приведено к одному из следующих трех видов.

1. Если  $AC - \frac{B^2}{4} > 0$ , то после введения новых независимых переменных  $\xi$  и  $\eta$ <sup>1)</sup> уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_1 u = f_1(\xi, \eta). \quad (5)$$

В этом случае уравнение называется *эллиптическим*. Наиболее простым эллиптическим уравнением является уравнение Лапласа (4).

2. Если  $AC - \frac{B^2}{4} < 0$ , то уравнению (1) можно придать вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_2 u = f_2(\xi, \eta). \quad (6)$$

Такое уравнение называется *гиперболическим*; простейшим примером его является одномерное уравнение свободных колебаний (2).

3. Если  $AC - \frac{B^2}{4} = 0$ , то уравнение (1) приводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + D_3 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_3 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_3 u = f_3(\xi, \eta), \quad (7)$$

и называется *парabolическим*. Примером его служит уравнение линейной теплопроводности (3).

Наименования уравнений объясняются тем, что при исследовании общего уравнения кривых второго порядка  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  оказывается, что

---

<sup>1)</sup> Мы ограничиваемся только принципиальной стороной вопроса и не указываем формул, по которым фактически производится замена переменной. Читатель, интересующийся этим вопросом, должен обратиться к более полным курсам.

в случае  $AC - \frac{B^2}{4} > 0$  кривая представляет эллипс, в случае  $AC - \frac{B^2}{4} < 0$  — гиперболу и в случае  $AC - \frac{B^2}{4} = 0$  — параболу<sup>1)</sup>.

Уравнения (5), (6) и (7) можно еще более упростить введением новой неизвестной функции. Именно, вводя функцию  $v(\xi, \eta)$  по формуле

$$u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) e^{\alpha\xi + \beta\eta}, \quad (8)$$

мы можем всегда подобрать числа  $\alpha$  и  $\beta$  так, что в эллиптическом и гиперболическом уравнениях исчезнут члены с производными первого порядка, а в параболическом — член с первой производной по одной из независимых переменных (в уравнении (7) по  $\xi$ ) и член с самой функцией.

Введение вспомогательной функции по формуле (8) уже встречалось нам в п. 21 при изучении телеграфного уравнения для линии без искажений (см. формулу (7.13)).

Окончательно любое уравнение вида (1) может быть, с учетом сделанных замечаний, приведено к одному из следующих *канонических типов*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + cu = g \quad (\text{эллиптический тип}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + cu = g \quad (\text{гиперболический тип}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = g \quad (\text{параболический тип})$$

( $c$  — постоянное число,  $g$  — функция переменных  $x$  и  $y$ ).

**69. Корректность постановки задач математической физики.** Уравнения гиперболического и параболического типов возникают чаще всего при изучении *процессов, протекающих во времени* (в нашем курсе это были уравнения колебаний, распространения электрических волн, распространения тепла, диффузии). В одномерном случае всегда участвовала одна координата  $x$  и время  $t$ .

<sup>1)</sup> Поскольку бывают еще случаи вырождения кривых второго порядка, то чаще говорят, что в первом случае кривая *эллиптического типа*, во втором — *гиперболического* и в третьем — *параболического* (см., например, книгу Н. В. Ефимова «Квадратичные формы и матрицы», Физматгиз, М., 1967).

Поэтому канонические уравнения этих типов обычно записываются так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + cu = g(x, t) \quad (\text{гиперболический тип}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = g(x, t) \quad (\text{параболический тип}).$$

Для задач, приводящих к таким уравнениям, дополнительные условия разделяются на начальные и краевые.

Начальные условия, как мы видели, состоят в задании при  $t = 0$  значений искомой функции  $u$  и ее производной (в гиперболическом случае) или только значений самой функции (в параболическом случае).

Краевые условия для этих задач заключаются в том, что указываются значения неизвестной функции  $u(x, t)$  на концах интервала изменения координаты (в задаче о колебаниях струны это концы струны<sup>1</sup>), в задаче о распространении электрических колебаний это концы линии, в задаче о линейной теплопроводности это концы стержня и т. д.).

Если процесс протекает в бесконечном интервале изменения координаты  $x$  (бесконечная струна, бесконечный стержень), то краевые условия отпадают и получается задача только с начальными условиями, или, как ее часто называют, *задача Коши*.

Если ставится задача для конечного интервала, то должны быть заданы и начальные и краевые условия. Тогда говорят о *смешанной задаче*.

Уравнения эллиптического типа возникают обычно при исследовании *стационарных процессов*. Время  $t$  в эти уравнения не входит, и обе независимые переменные являются координатами точки. Такими оказываются уравнения стационарного температурного поля, электростатического поля и уравнения многих других физических задач, которые мы в курсе не рассматривали.

Для задач такого типа ставятся только краевые условия, т. е. указывается поведение неизвестной функции на контуре области. Это может быть *задача Дирихле*, когда заданы значения самой функции; *задача Неймана*, когда заданы значения нормальной производной искомой

---

<sup>1</sup>) В задаче о колебаниях мембраны задаются значения неизвестной функции на контуре мембранны.

функции, и, наконец, задача, когда на контуре задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной.

В основных задачах математической физики, рассматривавшихся в настоящей книге, именно физические соображения подсказывали, какие дополнительные условия следует поставить в той или иной задаче, чтобы получить *единственное ее решение, отвечающее характеру изучаемого процесса.*

Кроме того, следует иметь в виду, что все выведенные уравнения носят идеализированный характер, т. е. отражают лишь наиболее существенные черты процесса. Функции, входящие в начальные и краевые условия, в физических задачах определяются из экспериментальных данных и могут считаться известными лишь приближенно. Поэтому мы должны быть уверены в том, что решения задачи при приближенных исходных данных будут близки к тем решениям, которые получились бы при точных исходных данных. Таким образом, важно, чтобы малые изменения данных задачи вызывали лишь малые изменения в ее решении во всей области, в которой эти решения рассматриваются. В этом случае говорят об *устойчивости задачи относительно начальных и краевых условий.*

Все задачи, рассмотренные в книге, принадлежат к типу задач, имеющих единственное решение, устойчивое относительно исходных данных. Как говорят, эти задачи *поставлены корректно.*

Исследование корректности более сложных задач математической физики представляет очень важную и трудную задачу теории этих уравнений.

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. Берман А. Ф. и Араманович И. Г., Краткий курс математического анализа, «Наука», 1967.
  2. Кошляков Н. С., Глинэр Э. Б., Смирнов М. М., Основные дифференциальные уравнения математической физики, Физматгиз, 1962.
  3. Левин В. И., Гроссберг Ю. И., Дифференциальные уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.
  4. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1967.
  5. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
  6. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.
  7. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н., Сборник задач по математической физике, Гостехиздат, 1956.
  8. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С., Сборник задач по математической физике, Гостехиздат, 1955.
  9. Смирнов М. М., Задачи по уравнениям математической физики, «Наука», 1968.
  10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, «Наука», 1968.
-

*Исаак Генрихович Араманович,  
Виктор Иосифович Левин*

**УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

(Серия: «Избранные главы высшей математики  
для инженеров и студентов вузов»)

М., 1969 г., 288 стр. с илл.

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова*

Корректор *Л. С. Кугушева*

---

Сдано в набор 23/I 1969 г. Подписано к не-  
печати 9/IV 1969 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Физ. печ.  
л. 9. Условн. неч. л. 15,12. Уч.-изд. л. 13,3.  
Тираж 75 000 экз. Цена книги 57 коп. Заказ № 243.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция  
физико-математической литературы,  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Главполиграфпром Комитета по печати при Совете  
Министров СССР. Отпечатано в Ленинградской  
типографии № 2 им. Евг. Соколовой, Измай-  
ловский пр., 29, с матриц Ордена Трудового Крас-  
ного Знамени Ленинградской типографии № 1  
«Печатный Двор» имени А. М. Горького, Гат-  
чинская ул., 26.