А. К. Томилин, Н. Ф. Курильская, Колебания электропроводной струны в нестационарном магнитном поле с учетом двух нелинейных факторов, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2017, том 20, номер 4, 61–66

DOI: 10.17377/sibjim.2017.20.408

Сибирский журнал
индустриальной математики
Октябрь–декабрь, 2017. Том XX, № 4(72)

УДК 534.112

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СТРУНЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ФАКТОРОВ

А. К. Томилин, Н. Ф. Курильская

Рассматриваются колебания электропроводной струны с закрепленными концами в магнитном поле, индукция которого представляет собой заданную функцию времени. При этом одновременно учитываются два нелинейных фактора: изменение натяжения струны в зависимости от смещения и магнитострикционный эффект. Показано, что в случае периодически изменяющегося магнитного поля нелинейные факторы могут компенсировать друг друга, и задача сводится к исследованию линеаризованных параметрических колебаний.

Ключевые слова: электропроводная струна, нестационарное магнитное поле, поперечная магнитострикция, параметрические колебания.

DOI 10.17377/sibjim.2017.20.408

Введение. Задачи о колебаниях электропроводной струны служат модельными для изучения динамики электромеханических систем с распределенными параметрами, в связи с чем их исследование приобретает важное значение для качественного представления о возникающих эффектах. В работах [1, 2] рассматриваются линейные и нелинейные задачи о колебаниях электропроводной струны с закрепленными концами в магнитном поле. Некоторые технические приложения этих задач обсуждаются в [3]. Подобные задачи сводятся к решению интегродифференциальных уравнений в частных производных. При этом обнаружены интересные свойства электромагнитного воздействия на процесс колебаний струны, которые можно использовать для управления колебательным процессом [4, 5]. В частности, в [1] решена задача о колебаниях струны с учетом магнитострикции (пьезомагнитного эффекта). Исследован случай продольной магнитострикции, когда магнитное поле направлено вдоль струны. Показано, что при определенных условиях можно компенсировать два нелинейных эффекта: изменение натяжения струны при колебаниях и магнитострикционное натяжение.

В настоящей статье рассматривается задача о колебаниях струны в нестационарном магнитном поле с учетом поперечной магнитострикции, когда вектор индукции магнитного поля ортогонален плоскости колебаний струны. Целью работы является определение условий, при которых возможна физическая линеаризации колебаний струны.

Магнитострикцией (пьезомагнитным эффектом) называется явление изменения размеров тел в присутствии магнитного поля, наиболее значительно проявляющееся в ферромагнетиках. К настоящему времени синтезированы электропроводные материалы с так называемой гигантской магнитострикцией, которая проявляется при высоких температурах [6]. Перечень технических приложений этого явления довольно широк: генераторы звука и ультразвука, механизмы микроперемещений, другие устройства для радиотехники и электросвязи [6–8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим процесс плоских колебаний струны длиной l с закрепленными концами, изготовленной из немагнитного проводящего материала, обладающего магнитострикционными свойствами, в нестационарном однородном магнитном поле индуктивности $\vec{B}$. Пусть магнитное поле действует по всей длине струны. Концы струны закреплены и соединены идеальной электрической цепью, экранированной от внешнего магнитного поля; замыкающий контур расположен в плоскости Oyz. Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости колебаний струны и лежит в плоскости замыкающего контура (рис. 1).

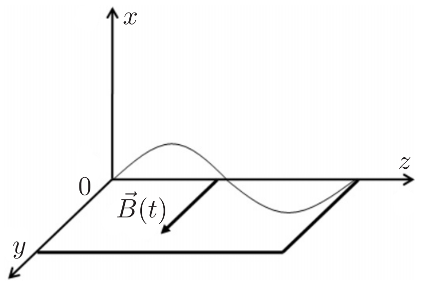

Рис. 1. Схема колебательной системы

Обычно в теории колебаний струны используется гипотеза абсолютной гибкости, считается, что натяжение струны в процессе колебаний не изменяется. Эта гипотеза позволяет исключить нелинейные свойства системы, однако она часто не соответствует реальным свойствам струны. Будем считать, что натяжение струны изменяется за счет растяжения при поперечных колебаниях согласно следующему закону [1]:

$$T = T_0 + \frac{EA}{2l}\int\limits_0^l u_z^2\,dz,$$

где $u(t,z)$ — функция смещений струны вдоль оси x; E — модуль упругости материала струны; A — площадь ее поперечного сечения; T_0 — натяжение струны в недеформированном состоянии. Производные по соответствующей переменной обозначаются нижним индексом.

Кроме того, учтем поперечную магнитострикцию [6] за счет нестационарного магнитного поля. Примем, что индукция поля меняется по гармоническому закону: $B = B_0\cos\omega t$. Тогда полным натяжением струны будет

$$T = T_0 + \frac{EA}{2l}\int\limits_0^l u_z^2\,dz \pm T^*\cos^2\omega t,$$

где T^* — амплитудное значение магнитострикционного натяжения.

В соответствии с принципом Даламбера уравнение движения струны с учетом внешнего механического сопротивления, возникающего за счет взаимодействия струны с окружающей средой, и поперечной магнитной силы запишется в виде [1, 2]

$$u_{tt} - \frac{T_0}{m_0}u_{zz} - \frac{EA}{2m_0 l}u_{zz}\int\limits_0^l u_{zz}^2\,dz \pm \frac{T^*(t)}{m_0}u_{zz} + \beta u_t + \frac{\sigma BA}{m_0 l}\left(B\int\limits_0^l u_t\,dz + B_t\int\limits_0^l u\,dz\right) = 0, \quad (1)$$

где β — коэффициент внешнего демпфирования, зависящий от свойств окружающей среды, m_0 — линейная плотность струны, а последний член соответствует нестационарной магнитной силе.

Для струны с закрепленными концами имеют место однородные граничные условия $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

2. Физическая линеаризация колебаний. Применим к уравнению (1) процедуру Фурье [9], представив функцию смещения в виде бесконечного ряда по амплитудным функциям $X_n(z)$:

$$U(z,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) X_n(z), \tag{2}$$

где $q_n(t)$ — обобщенные координаты системы. В первом приближении для струны с закрепленными концами собственные амплитудные функции можно считать синусоидальными:

$$X_n = \sin\frac{\pi n}{l} z, \quad n \geq 1.$$

С учетом ортогональности последних, из (2) и (1) приходим к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_r + \beta\dot{q}_r + p_r^2 q_r = -\frac{4\sigma BA}{r\pi m_0}\left[\frac{2B}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\gamma_n \dot{q}_n}{n} + \frac{2B_t}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\gamma_n q_n}{n}\right]$$
$$\pm \frac{T^*}{m_0}\left(\frac{r\pi}{l}\right)^2 q_r \cos^2\omega t - \frac{EA\pi^4 r^2}{4m_0 l^4} q_r \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q_n^2 = 0, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Здесь σ — проводимость струны и введены обозначения

$$p_r = \frac{r\pi}{l}\sqrt{T_0/m_0}, \quad \gamma_r = \sin^2\frac{r\pi}{2}, \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Первый член в правой части (3) выражает электромагнитную силу, он содержит функцию времени в квадратной скобке и определяет параметрическое воздействие в системе. Соответственно из (3) следует, что электромагнитная сила не воздействует на колебания струны при $\gamma_r = 0$. Это условие выполняется для четных значений r.

Ряды, содержащиеся в выражениях (2), сходятся довольно быстро, поэтому в случае, когда ненулевые начальные условия наложены только на основную обобщенную координату $q_1(0) = q_{01}$, $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_{01}$, достаточно рассмотреть задачу в одномодовом приближении. Сохраняя только первые члены рядов, из (3) получим

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \frac{8\sigma B^2 A}{\pi^2 m_0}\gamma_1^2\right)\dot{q}_1 + \left(p_1^2 + BB_t\frac{2}{\pi}\gamma_1^2\right)q_1$$
$$+ \frac{EA\pi^4}{4m_0 l^4} q_1^3 \pm \frac{T^*}{m_0}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 q_1 \cos^2\omega t = 0. \tag{4}$$

При положительной магнитострикции, приводящей к удлинению струны, в уравнении (4) последний член берется со знаком минус. В этом случае при некоторых условиях в установившемся режиме колебаний можно уравновесить последний и предпоследний члены в (4). Таким образом, имеется возможность физически линеаризовать уравнение (4). Очевидно, это возможно, если установившееся решение линеаризованной системы будет выражаться простой гармонической функцией той же частоты, что и периодическое изменение магнитного поля: $q_1 = q_{01}\cos\omega t$. При этом относительное магнитострикционное растяжение струны должно иметь амплитудное значение $\Delta l^*/l = (q_{01}\pi/(2l))^2$. Полученное значение относительной амплитудной деформации зависит от q_{01}, поэтому необходимо, чтобы установившейся режим колебаний был устойчив. С энергетической точки зрения это возможно, так как имеются параметрическое возбуждение и диссипативная сила.

3. Устойчивость параметрических колебаний. В случае физической линеаризации основное колебание струны становится сугубо параметрическим [9–12] и уравнение (4) упрощается:

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \frac{8\sigma B^2 A}{\pi^2 m_0}\gamma_1^2\right)\dot{q}_1 + \left(p_1^2 + BB_t\frac{2}{\pi}\gamma_1^2\right)q_1 = 0. \tag{5}$$

Для исследования получившейся линейной задачи о параметрической устойчивости колебаний основного тона запишем уравнение (5) в безразмерном виде:

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + St\frac{8\gamma_1^2}{\pi^2}B^2\right)\dot{q}_1 + \left(1 + \mathrm{St}\,\frac{8\gamma_1^2}{\pi^2}BB_t\right)q_1 = 0, \tag{6}$$

где $\mathrm{St} = \sigma AB^2/(m_0 p_1)$ — число Стюарта [1].

Поскольку индукция магнитного поля изменяется по безразмерному гармоническому закону $B = \cos\omega t$ (в качестве характерного здесь принято амплитудное значение магнитной индукции), то уравнение (6) преобразуется к виду

$$\ddot{q}_1 + \left(\beta + \mathrm{St}\,\frac{8\gamma_1^2}{\pi^2}\cos^2\omega t\right)\dot{q}_1 + \left(1 - \mathrm{St}\,\frac{4}{\pi^2}\gamma_1^2\omega\sin 2\omega t\right)q_1 = 0. \tag{7}$$

С помощью подстановки Хилла [12]

$$q_1 = \frac{\xi_1}{2}\exp\left[-\int_0^t\left(\beta + \mathrm{St}\,\frac{8\gamma_1^2}{\pi^2}\cos^2\omega t\right)dt\right]$$

уравнение (7) сводится к уравнению типа Хилла

$$\ddot{\xi}_1 + P_1^2(t)\xi_1 = 0, \tag{8}$$

где

$$P_1^2(t) = 1 - \frac{1}{4}\left(\beta + \mathrm{St}\,\frac{8\gamma_1^2}{\pi^2}\cos^2\omega t\right)^2.$$

Уравнение (8) можно представить в виде

$$\ddot{\xi}_1 + \left(f_1 + h_1\cos^2\omega t + k_1\cos^4\omega t\right)\xi_1 = 0, \tag{9}$$

где введены обозначения постоянных коэффициентов:

$$f_1 = 1 - \frac{1}{4}\beta^2, \quad h_1 = -\,\mathrm{St}\,\frac{4}{\pi^2}\beta\gamma_1^2, \quad k_1 = -\,\mathrm{St}^2\,\frac{16}{\pi^4}\gamma_1^4.$$

В случае малого внешнего сопротивления (при $\beta = 0$) из (9) получим

$$\ddot{\xi}_1 + \left(1 - \mathrm{St}^2\,\frac{16}{\pi^4}\gamma_1^4\cos^4\omega t\right)\xi_1 = 0, \tag{10}$$

По своим свойствам уравнение (10) близко к уравнению Матье [10–12], однако для него следует строить свою диаграмму устойчивости типа Айнса — Стретта [11], для чего произведем обычное преобразование уравнения, вводя новую переменную: $\omega t = 2\tau$. Тогда уравнение (10) примет вид

$$\frac{d^2\xi_1}{d\tau^2} + (\alpha_1 - \varepsilon_1 \cos^4 2\tau)\xi_1 = 0, \tag{11}$$

где

$$\alpha_1 = 4/\omega^2, \quad \varepsilon_1 = \mathrm{St}^2\,\frac{64\gamma_1^4}{\pi^2\omega^2}. \tag{12}$$

Методом гармонического баланса [11] получены следующие уравнения граничных линий на диаграмме устойчивости (рис. 2):

$$\alpha_1^{(1)} = -\frac{3}{8}\varepsilon_1 + \frac{21}{256}\varepsilon_1^2, \quad \alpha_1^{(2)} = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon_1 + \frac{29}{512}\varepsilon_1^2,$$
$$\alpha_1^{(3)} = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon_1 - \frac{1}{16}\varepsilon_1^2, \quad \alpha_1^{(4)} = 4 - \frac{5}{8}\varepsilon_1 - \frac{3}{160}\varepsilon_1^2,$$
$$\alpha_1^{(5)} = 4 - \frac{5}{8}\varepsilon_1 - \frac{105}{768}\varepsilon_1^2, \quad \alpha_1^{(6)} = 9 - \frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{97}{2880}\varepsilon_1^2.$$

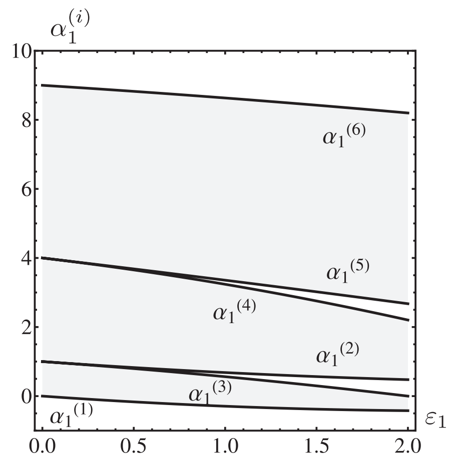

Рис. 2. Диаграмма устойчивости положений равновесия для уравнения (11)

Светлые области диаграммы соответствуют зонам параметрического резонанса, а более темные — зонам устойчивых положений равновесия. При малой внешней диссипации для обеспечения стационарных колебаний струны следует выбирать на диаграмме точки в устойчивой зоне вблизи граничных линий. В соответствии с выбранной точкой при помощи формул (12) находятся безразмерная частота ω и число Стюарта St. Это позволяет однозначно определить параметры индукции внешнего магнитного поля, обеспечивающие стационарные колебания струны.

Заключение. В заключение отметим, что все реальные колебательные системы в той или иной мере обладают нелинейными свойствами. В случае математической линеаризации задачи ее результат имеет ограничение, например по амплитуде колебаний. Предлагаемая в работе идея физической линеаризации позволяет распространить линейное решение на движение системы с комплексными свойствами без дополнительных ограничений. При решении конкретной технической задачи о вибрациях нелинейной системы в некоторых случаях имеет смысл поставить вопрос о физической линеаризации ее свойств за счет использования дополнительного нелинейного фактора. В частности, можно использовать дополнительные элементы с магнитострикционными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Томилин А. К.* Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами. Усть-Каменогорск: Изд-во ВКГТУ, 2004.
2. *Курильская Н. Ф.* Колебания проводящей струны в поперечном магнитном поле // Материалы докл. Междунар. конф. «IV Окуневские чтения». СПб.: Изд-во БГТУ, 2005. С. 68–78
3. *Томилин А. К., Байзакова Г. А., Береговая О. А., Прокопенко Е. В.* Вибрации континуальных электромеханических систем. Усть-Каменогорск: Изд-во ВКГТУ, 2011.
4. *Tomilin A. K.* Two-wave processes in the magnetic vibrations of a string // Appl. Mech. Mat. 2015. V. 756. P. 476–481.
5. *Tomilin A. K., Prokopenko E. V.* Non-destructive testing of rods using a potential component of a magnetic Field // World J. Mech. 2014. V. 4, N 2. P. 37–43.
6. *Белов К. П.* Магнитострикционные явления и их технические приложения. М.: Наука, 1987.
7. *Розенблат М. А.* Магнитные датчики. Состояние и тенденции развития // Автоматика и телемеханика. 1995. Вып. 6. С. 3–55.
8. *Levassort F., Pham Thi M., Hemery H., et. al.* Piezoelectric textured ceramics: Effective properties and application to ultrasonic transducers // Ultrasonics. 2006. V. 44. P. 621–626.
9. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. школа, 1980.
10. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. М.: Мир, 1978.
11. *Чечурин С. Л.* Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
12. *Левитский Н. И.* Колебания в механизмах. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 7 ноября 2016 г.

Томилин Александр Константинович
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
просп. Ленина, 30
634050 г. Томск
Курильская Наталья Федоровна
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)
ул. Ленинградская, 113
630008 г. Новосибирск
E-mail: aktomilin@tpu.ru; dream60@mail.ru