Задача 10. Колебания струны

Элементарная теория колебаний струны

Рассмотрим упругую струну, натянутую горизонтально (рисунок 1). В равновесии силу натяжения T создаёт груз, подвешенный к концу струны, прекинутому через блок. Действием силы тяжести на струну пренебрегаем.

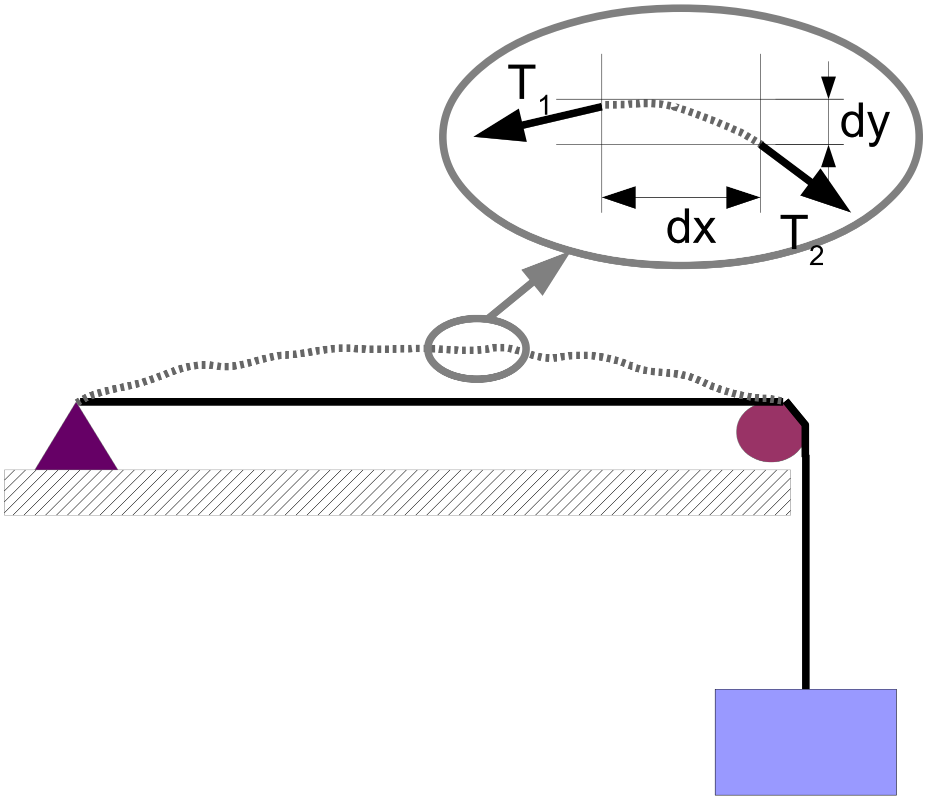

Рисунок 1: Схематическое изображение натянутой струны (сплошная линия) и отклоненной при колебаниях струны (пунктир). На выноске показаны силы, действующие на фрагмент струны при отклонении от равновесия.

При отклонении от равновесия на небольшой фрагмент струны действуют силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, приложенные к концам фрагмента. Для гибкой струны направление этих сил совпадает с касательной к струне. Отклонения будем считать малыми, так что $dy \ll dx$. Масса фрагмента струны $\delta m = \rho_L dx$, где ρ_L — погонная плотность (масса единицы длины).

Пусть форма струны описывается уравнением $Y(x,t)$. Под действием сил натяжения возникает возвращающая сила, которая придает фрагменту ускорение

$$\delta m \ddot{Y} = T_{1y} + T_{2y} \quad .$$

Силы натяжения по модулю равны создаваемой внешним грузом силе натяжения. то в приближении малых отклонений ($\frac{\partial Y}{\partial x} \ll 1$) вектор касательной к струне может быть записан в виде $\vec{t}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{\partial Y}{\partial x}\end{pmatrix}$. С учётом того, что силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ направлены в разные стороны и приложены к точкам, разнесенным на dx , получим, что сумма y-проекций сил натяжения определяется тем, насколько на интервале dx изменилась производная $\frac{\partial Y}{\partial x}$ и равна $T\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}d\,x$.

Отсюда получаем итоговое уравнение

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}-\frac{T}{\rho_L}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}=0$$
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}=0 ,$$

где величина $u=\sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$ имеет размерность скорости.

Полученное уравнение называется волновым уравнением, оно возникает во всех задачах, где в среде распространяются волны (электромагнитные, звуковые итд.). Решеием такого уравнения является функция вида $Y(x,t)=A\cos(\omega t\pm k\,x+\phi)$, где волновое число $k=\frac{\omega}{u}$. Знаки «плюс» и «минус» соответсвуют волнам, бегущим налево и направо. Скорость u имеет смысл скорости распространения поверхности постоянной фазы или *фазовой скорости волны*.

Стоячие волны

В условиях опыта, изображенного на рисунке 1, смещение струны на краях равно нулю в любой момент времени. Такие условия могут быть выполнены в *стоячей волне*, являющейся суперпозицией волн равной амплитуды, бегущих в противоположных направлениях:

$$Y_{cm}=A\cos(\omega t+k\,x+\phi_1)+A\cos(\omega t-k\,x+\phi_2)=2A\cos\left(\omega t+\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\cos\left(k\,x+\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right) .$$

Виднор, что в стоячей волне колебания «во времени» и «в пространстве» стали независимыми множителями — огибающая такой волны «стоит», также не смещаются узлы (точки, где $Y=0$) и пучности (места колебаний максимальной амплитуды). Стоячие волны возникают во многих задачах физики, где распространение волн чем-то ограничено — напрмиер, в микроволновке пищу разогревает стоячая волна элеметромагнитного поля, формирующаяся в результатте отражений электромагнитных волн от проводящих стенок внутреннего объёма СВЧ-печки.

Если расстояние между крайними точками струны равно L , то условие отсутствия смещения на краях означает $k\,L=\pi N$, где N – целое. При этом на длине L укладывается целое число полуволн. С учётом связи между волновым числом и частотой, получаем, что стоячие волны в струне возникают на частотах

$$f_N=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\rho_L}}\frac{N}{2L} .$$

Задача работы

1. Пронаблюдать разные гармоники стоячих волн в струне при разных натяжениях струны.
2. Оценить добротность струны как колебательной системы
3. Определить погонную плотность струны из полученных результатов, сравнить с непосредственным измерением.