

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ КИНО И ТЕЛЕВИДЕНИЯ

Кафедра математики и информатики

КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Методическое пособие
для студентов дневного, вечернего и заочного отделений
ФАВТ и ФПСКТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2010

Составители:

М. С. Семченко, И. Н. Щитов

Рецензент — профессор М. М. Попов.

Рекомендовано к изданию в качестве методического пособия
кафедрой математики и информатики.

Протокол №3 от 16.11.2009 г.

Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных, которые встречаются при решении физических задач, называют также уравнениями математической физики.

Одним из основных уравнений математической физики является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

где $u = u(x, y, z, t)$ — неизвестная функция, x, y, z — пространственные координаты, t — время, a — постоянный параметр.

Волновое уравнение имеет широкое применение. В частности, одномерное волновое уравнение описывает колебания струны, двумерное — колебания мембраны.

В этом методическом пособии мы остановимся только на уравнении колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Оно впервые появилось почти одновременно в работах Даниила Бернулли (1700 – 1782), Жана Лерона Д’Аламбера (1717 – 1783) и Леонарда Эйлера (1707 – 1783), позднее — в работах Жана Батиста Фурье (1768 – 1830).

Бернулли получил решение уравнения в виде тригонометрического ряда, Д’Аламбер и Эйлер представили решение в виде прямой и обратной волн, перемещающихся со скоростью a , что и дало название уравнению. Фурье показал эквивалентность этих двух решений.

На примере одномерного волнового уравнения мы не только изучим процесс колебаний струны, но и рассмотрим методы, широко применяемые в математической физике.

В данном пособии излагаются классические методы решения уравнения свободных колебаний струны: метод Д’Аламбера для бесконечной струны, метод продолжений для полубесконечной и конечной струны, а также метод Фурье для конечной струны, закрепленной на концах. Рассматривается один из методов численного решения уравнений с частными производными — метод сеток.

Приводится также решение неоднородного уравнения, описывающего вынужденные колебания струны.

Теоретический материал проиллюстрирован примерами, в которых используется статичная и анимационная графика, выполненная в MATLAB.

Кроме того, в пособии приведены задачи для выполнения лабораторных работ по математике на персональных компьютерах в системе MATLAB.

Необходимые сведения по системе MATLAB изложены в учебном пособии [7].

Методическое пособие соответствует действующей программе по дисциплине *Математика* и его рекомендуется использовать при изучении темы *Уравнения математической физики*.

1. Уравнение колебаний струны

Если натянутую струну немного отклонить от состояния равновесия и отпустить или слегка ударить по ней молоточком, то полученная энергия заставит струну совершать колебательные движения.

В идеальном случае при отсутствии сопротивления струна будет колебаться бесконечно долго. При наличии сопротивления энергия затратится на преодоление этого сопротивления, колебания будут затухать и через некоторое время прекратятся.

Но даже при наличии сопротивления колебания будут совершаться сколь угодно долго, если извне постоянно поступает энергия. В этом случае говорят о вынужденных колебаниях.

Под струной мы будем понимать тонкую упругую нить, которая натянута вдоль оси OX и при воздействии на нее совершает малые поперечные колебания в плоскости XOU .

Пусть функция $u = u(x, t)$ представляет собой отклонение струны от оси OX в точке x в момент времени t . Принимая некоторые упрощающие предположения, на основе принципа Д'Аламбера, согласно которому все силы, действующие на определенный участок струны должны уравновешиваться, можно вывести уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t),$$

где $a^2 = N/\rho$, N — натяжение струны, ρ — линейная плотность массы, $p(x, t)$ — внешняя сила. Будем предполагать, что N и ρ являются постоянными, хотя в более общем случае они могут быть и переменными.

Вывод уравнения, методы решения, физическая трактовка и приложения приведены в учебной литературе [1 – 3].

Если $p(x, t) \equiv 0$, то уравнение называется однородным и описывает свободные колебания струны. В противном случае уравнение называется неоднородным и описывает вынужденные колебания струны.

Однородное уравнение всегда имеет решение $u(x, t) \equiv 0$, что соответствует состоянию покоя струны.

Струна обычно связывается в нашем представлении с музыкальными инструментами, где она служит источником звука.

Но струна может быть также конструктивным элементом многих технических устройств. Такими струнами, например, являются провода линий электропередач, контактные провода электротранспорта, тросы подвесных канатных дорог и так далее. В этих устройствах колебания струны являются, чаще всего, нежелательным явлением, так как могут привести к разрушению конструкции.

2. Решение уравнения свободных колебаний бесконечной струны методом Д'Аламбера

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

и допустим, что $-\infty < x < \infty$, и $t \geq 0$.

Найдем решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (2)$$

которые задают форму и скорость струны в начальный момент времени.

Если ввести новые переменные

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad (3)$$

то уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (4) по η

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \vartheta(\xi),$$

а затем по ξ

$$u = \int \vartheta(\xi) d\xi + \theta_2(\eta),$$

и вводя обозначение

$$\theta_1(\xi) = \int \vartheta(\xi) d\xi,$$

получим общее решение уравнения (4) в виде

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta). \quad (5)$$

Возвращаясь к прежним переменным, будем иметь общее решение уравнения (1)

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at), \quad (6)$$

где θ_1 и θ_2 — произвольные функции, которые будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемыми.

Переходя к решению задачи Коши, функции θ_1 и θ_2 выберем так, чтобы решение (6) удовлетворяло начальным условиям (2):

$$f(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x), \quad g(x) = -a(\theta_1'(x) - \theta_2'(x)). \quad (7)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x g(\tau) d\tau + \frac{C}{2}, \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x g(\tau) d\tau - \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя функции (8) в формулу (6), найдем решение поставленной задачи Коши

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Рассмотрим два частных случая. Допустим, что $f(x) \neq 0$, а $g(x) = 0$, то есть струне придана начальная форма при нулевой начальной скорости. Тогда решение (9) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} \quad (10)$$

и, следовательно, представляет собой сумму двух бегущих волн: прямой волны $f(x - at)$ и обратной волны $f(x + at)$. Первая перемещается по направлению оси OX , а вторая — в противоположном направлении.

При $f(x) = 0$, и $g(x) \neq 0$ решение (9) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Пусть

$$G(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x g(\tau) d\tau, \quad (12)$$

тогда

$$u(x, t) = G(x + at) - G(x - at). \quad (13)$$

И в этом случае решение начальной задачи (1) – (2) представляет собой сумму двух волн: прямой волны $-G(x - at)$ и обратной волны $G(x + at)$.

Заметим, что рассмотренная нами бесконечная струна является математической идеализацией реальных струн очень большой длины.

Пример 2.1. Построить анимацию бегущих волн при следующих начальных условиях:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & \text{если } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [-1, 1], \end{cases} \quad g(x) = 0.$$

Для построения анимации используется следующая программа на языке MATLAB

```
function M = dаламбер( f, G, a, L, T)
```

```
%Входные параметры:
```

```
%f - начальное отклонение струны
```

```
%G - интеграл от начальной скорости
```



```
%a - скорость распространения волны
%L - граница изменения пространственной переменной
%T - граница временного интервала
```

```
%Выходной параметр: M - массив кадров анимации
```

```
x = linspace( -L, L, 300 );
t = linspace( 0, T, 300 );
f1 = inline(sprintf('(%s)', f));
G1 = inline(sprintf('(%s)', G));

for k = 1:300
    u(:,k)=(f1(x-a*t(k))+f1(x+a*t(k)))/2+...
    1/(2*a)*(G1(x+a*t(k))-G1(x-a*t(k)));
end

m1 = min(min(u)); m2 = max(max(u));
mm = 0.15*max(abs([m1 m2]));
```

```
%Построение анимации
for k = 1:300
    plot(x, u(:,k), 'r-', 'Linewidth', 3);
    axis([ -0.7*L 0.7*L m1-mm m2+mm ]);
    grid on;
    M(k) = getframe;
end
```

Для запуска этой программы следует задать фактические значения входных параметров (f и g должны вводиться в виде текстовой строки). Например,

```
>> M = dalamber('(x>=-1).*(x<=1).*(1-abs(x))', ...
    '0', 1, 7, 6);
```

После запуска программы система MATLAB вычисляет положение струны для всех заданных значений временной переменной и накапливает кадры анимации в массиве M . Затем анимация выводится на экран (см. соответствующие стоп-кадры на рис. 2.1).

Если мы хотим повторно воспроизвести данную анимацию, то должны в командной строке набрать

```
>> movie(M, 5, 20)
```

В данном случае анимация будет повторена 5 раз с частотой 20 кадров в секунду.

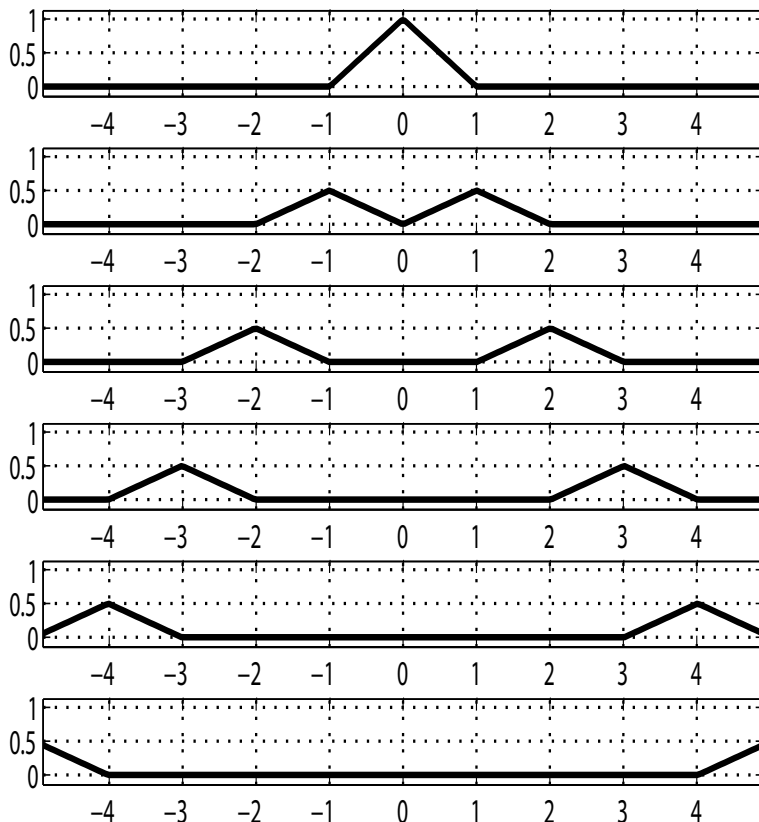


Рис. 2.1.

Для того чтобы воспроизвести отдельный кадр анимации, надо воспользоваться функцией `movie(M(n))`, где n – номер элемента массива M .

Пример 2.2. Построить анимацию бегущих волн при следующих начальных условиях:

$$f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Вычисляем интеграл от начальной скорости $g(x)$:

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^x g(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & x \in [-1, 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Снова используем программу `dalamber` для построения анимации (см. рис. 2.2).

```
>> M=dalamber('0', '(x>=-1).*(x<=1).*(x+1)/2+(x>1)', ...  
1, 7, 6);
```

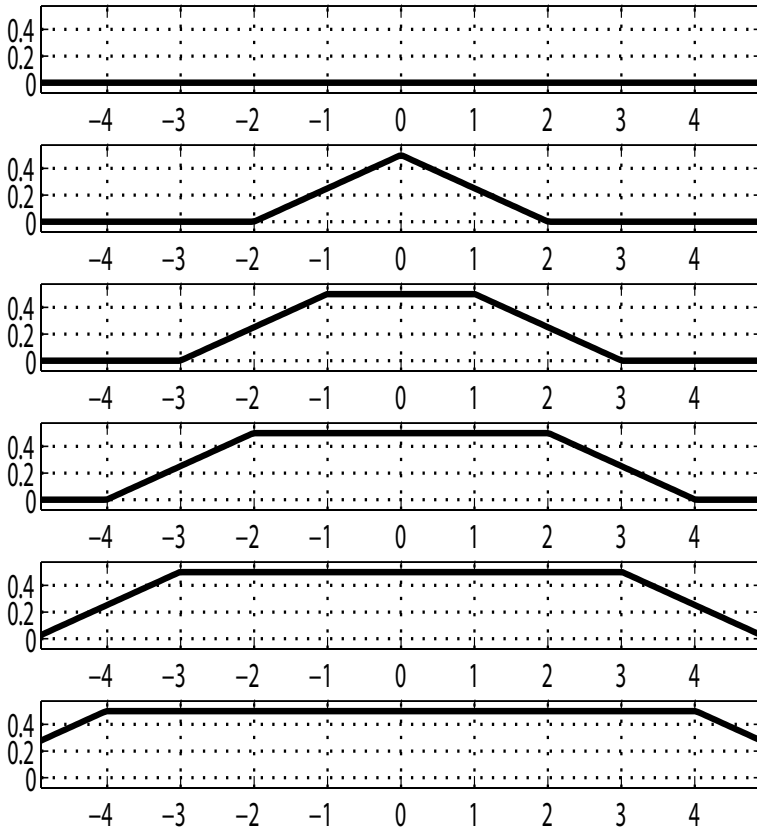


Рис. 2.2

Контрольные вопросы

1. Какой смысл имеет функция $u = u(x, t)$ в уравнении колебаний струны?
2. Какой смысл имеют начальные условия?
3. Как определить произвольные функции, входящие в общее решение?
4. Как истолковывается решение уравнения бесконечной струны, полученное методом Д'Аламбера?
5. Как зависит скорость бегущей волны a от натяжения струны N и от линейной плотности ρ ?

3. Колебания полубесконечной и конечной струны. Метод продолжений

Начнем со следующего замечания, на котором основано дальнейшее изложение в этом параграфе: если функции $f(x)$ и $g(x)$, входящие в начальные условия (2), нечетны, то решение $u(x, t)$ задачи Коши, даваемое формулой Д'Аламбера (9), удовлетворяет условию $u(0, t) = 0$ для всех $t > 0$.

Действительно,

$$u(0, t) = \frac{f(at) + f(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} g(\tau) d\tau \equiv 0.$$

Если же, вдобавок к этому, функции $f(x)$ и $g(x)$ являются $2l$ -периодическими, то выполняется также условие $u(l, t) = 0$ для всех $t > 0$.

В самом деле, в силу периодичности и нечетности $f(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(l+at) + f(l-at)}{2} &= \frac{f(l+at) + f(l-at-2l)}{2} = \\ &= \frac{f(l+at) + f(-l-at)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, делая в интеграле замену $\tau = \xi + l$, получим

$$\int_{l-at}^{l+at} g(\tau) d\tau = \int_{-at}^{at} g(\xi + l) d\xi = \int_{-at}^{at} h(\xi) d\xi = 0.$$

Последний интеграл равен нулю, так как функция $h(\xi) = g(\xi + l)$ нечетная:

$$h(-\xi) = g(-\xi + l) = g(-\xi + l - 2l) = g(-\xi - l) = -h(\xi).$$

Таким образом,

$$u(l, t) = \frac{f(l + at) + f(l - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{l-at}^{l+at} g(\tau) d\tau \equiv 0.$$

Аналогично можно показать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ — четны и $2l$ -периодичны, то для всех $t > 0$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Теперь можно рассмотреть колебания полубесконечной и конечной струны.

3.1 Полубесконечная струна

Требуется найти функцию $u(x, t)$, определенную для $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющую уравнению (1), начальным условиям (2) и крайнему условию на левом конце $u|_{x=0} = 0$.

Пусть при этом начальные условия $f(x)$ и $g(x)$ заданы только для $x > 0$ и выполнены условия сопряжения $f(0) = 0$, $g(0) = 0$.

Продолжим $f(x)$ и $g(x)$ на всю ось нечетным образом, то есть положим

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x > 0, \\ -f(-x), & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$g_0(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x > 0, \\ -g(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Решая задачу Коши с так определенными начальными функциями, получаем

$$u(x, t) = \frac{f_0(x - at) + f_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g_0(\tau) d\tau.$$

Рассматривая это решение только для $x \geq 0$, получаем решение уравнения (1), удовлетворяющее для $x \geq 0$ начальным условиям с $f(x)$ и $g(x)$ и удовлетворяющее в силу замечания краевому условию $u|_{x=0} = 0$. Таким образом, построенное решение $u(x, t)$ описывает при $x \geq 0$ колебания полубесконечной струны.

3.2 Конечная струна

Задано уравнение колебаний струны (1), начальные условия (2) для $x \in [0, l]$ и краевые условия (жесткое закрепление)

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$

при этом выполнены условия сопряжения

$$f(0) = f(l) = 0, \quad g(0) = g(l) = 0.$$

Для решения этой задачи продолжим функции $f(x)$ и $g(x)$ сначала нечетным образом на отрезок $[-l, l]$, полагая

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [0, l], \\ -f(-x), & \text{если } x \in [-l, 0]; \end{cases}$$

$$g_0(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in [0, l], \\ -g(-x), & \text{если } x \in [-l, 0]. \end{cases}$$

а затем полученные функции продолжаем на всю ось как $2l$ -периодические, полагая

$$f_1(x) = f_0(x - 2(k+1)l), \quad x \in [(2k+1)l, (2k+3)l];$$

$$g_1(x) = g_0(x - 2(k+1)l), \quad x \in [(2k+1)l, (2k+3)l];$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = f_1(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g_1(x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Ее решение дается формулой

$$u(x, t) = \frac{f_1(x - at) + f_1(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g_1(\tau) d\tau$$

и если рассмотреть это решение только для $0 \leq x \leq l$, то оно удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и в силу замечания краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$

то есть описывает колебания конечной струны.

4. Решение уравнения колебаний конечной струны методом Фурье

Закрепленная на концах струна является источником звука многих музыкальных инструментов. Струнные музыкальные инструменты известны с древних времен (арфа, лира, кифара и другие). На протяжении тысячелетий эти инструменты развивались и совершенствовались. Создателями инструментов и музыкантами опытным путем были выявлены некоторые закономерности и свойства звучащей струны. Теоретические исследования в этом направлении начались только в XVIII веке.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14}$$

в предположении, что $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, и будем искать его решение, удовлетворяющее начальным

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (15)$$

и краевым условиям

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (16)$$

Такие краевые условия означают, что струна на концах закреплена. Это наблюдается во всех струнных музыкальных инструментах.

Сначала найдем все ненулевые решения уравнения (14), удовлетворяющие краевым условиям (16). Эти решения будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (17)$$

Подставим функцию (17) в уравнение (14)

$$X T'' = a^2 X'' T \quad (18)$$

и разделим переменные

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \quad (19)$$

Поэтому метод Фурье называют также методом разделения переменных.

Поскольку равенство (19) выполняется тождественно, то левая и правая части его не зависят ни от t , ни от x и равны одной и той же постоянной, которую будем считать отрицательной и обозначим через $-\lambda^2$, $\lambda \neq 0$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \quad (20)$$

Отсюда получаем два уравнения:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (21)$$

с краевыми условиями

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (22)$$

следующими из условий (16), и уравнение

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0. \quad (23)$$

Найдем общее решение уравнения (21)

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \quad (24)$$

Учитывая, что $X(0) = 0$, получим $C_1 = 0$.

Принимая во внимание $X(l) = 0$, имеем $C_2 \sin \lambda l = 0$. Так как мы ищем ненулевые решения краевой задачи (21) – (22), то потребуем, чтобы $C_2 \neq 0$ (можно положить $C_2 = 1$). Следовательно, должно быть $\sin \lambda l = 0$, $\lambda l = \pi n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

Отсюда получаем значения λ

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad (25)$$

при которых эта краевая задача имеет ненулевые решения

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (26)$$

Числа (25) и функции (26) называются собственными числами и собственными функциями краевой задачи (21)–(22).

Собственные функции ортогональны на отрезке $[0, l]$, то есть

$$\int_0^l \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} dx = 0$$

при любых натуральных m, n , $m \neq n$.

Проверьте, что если в правой части равенства (20) выбрать положительную постоянную или ноль, то получим только нулевое решение краевой задачи (21) – (22) $X(x) = 0$.

Положив теперь в уравнении (23) $\lambda = \lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, найдем общее решение этого уравнения

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + b_n \sin \frac{\pi a n t}{l}. \quad (27)$$

Подставив (26) и (27) в (17), получим решения уравнения (14), удовлетворяющие краевым условиям (16)

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + b_n \sin \frac{\pi a n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Рассмотрим теперь ряд, членами которого являются найденные решения $u_n(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + b_n \sin \frac{\pi a n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (29)$$

Так как уравнение (14) является линейным однородным, то (29) также будет решением этого уравнения, кроме того (29) удовлетворяет краевым условиям (16).

Осталось удовлетворить начальным условиям (15), что позволит найти коэффициенты a_n и b_n .

Полагая в решении (29) $t = 0$, с учетом первого начального условия (15) получаем разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (30)$$

и значит

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (31)$$

Теперь продифференцируем (29)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi a n}{l} \left(-a_n \sin \frac{\pi n a t}{l} + b_n \cos \frac{\pi n a t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (32)$$

и положим в (32) $t = 0$. Из второго начального условия (15) получаем разложение функции $g(x)$ в ряд Фурье по синусам

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (33)$$

откуда

$$\frac{\pi n a}{l} b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad (34)$$

то есть

$$b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (35)$$

Сумма ряда (29), коэффициенты которого находятся по формулам (31) и (35), является решением задачи (14) – (16). Вопросы сходимости этого ряда рассматриваются в литературе [1 – 3].

Для выяснения физического смысла полученного решения удобно переписать решение (29) в виде

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n), \quad (36)$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{N}{\rho}},$$

$$\sin \varphi_n = \frac{a_n}{A}, \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{A}, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

Отсюда видно, что каждый член ряда (36) описывает гармонические (греч. *harmonia* – стройность, соразмерность) колебания точек струны с амплитудой $A_n \sin \frac{\pi n x}{l}$, циклической частотой ω_n и начальной фазой φ_n , причем амплитуды гармоник зависят не только от номера n , но и от переменной x , то есть разные точки струны каждой гармоники совершают колебания с разными амплитудами, одновременно достигая своего минимального и максимального значения. Такие колебания называются стоячими волнами.

Нетрудно видеть, что на струне есть точки, в которых амплитуда гармоники равна нулю. Эти точки называются узлами стоячих волн. Узловые точки получим, решив уравнение

$$\sin \frac{\pi n x}{l} = 0$$

при $0 \leq x \leq l$:

$$0, \quad \frac{l}{n}, \quad \frac{2l}{n}, \quad \frac{3l}{n}, \quad \dots, \quad \frac{(n-1)l}{n}, \quad l. \quad (37)$$

Найдем узловые точки для трех начальных гармоник:

$n = 1$, узловые точки: $x = 0, x = l$.

$n = 2$, узловые точки: $x = 0, x = \frac{l}{2}, x = l$.

$n = 3$, узловые точки: $x = 0, x = \frac{l}{3}, x = \frac{2l}{3}, x = l$.

Посередине между узлами находятся точки струны, в которых отклонение стоячей волны достигает максимального значения, равного A_n . Эти точки называются пучностями.

Пример 4.1. Построим анимацию колебаний стоячих волн струны, закрепленной на концах отрезка $[0, 1]$, при начальных условиях

$$f(x) = x(x^2 - 1), \quad x \in [0, 1],$$

$$g(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in [0.2, 0.3], \\ -2, & \text{если } x \in [0.7, 0.8], \\ 0, & \text{если } x \in [0, 0.2] \cup (0.3, 0.7) \cup (0.8, 0.1]. \end{cases}$$

Положим $a = 1$.

Для построения стоячих волн используем программу **SWave**.

```
function M = SWave( f, g, a, l, n )
```

```
% f - начальная форма струны,  
% f - начальная скорость струны,  
% a - параметр в уравнении струны,  
% l - длина струны,  
% n - число первых гармоник.
```

```
% Разбиение отрезков  
% по оси абсцисс и по оси времени.  
x = linspace( 0, l, 100*round(l) );  
t = linspace( 0, 6*l/a/n, 300);
```

```
% Приближенное вычисление коэффициентов ряда.
```

```

for m=1:n
    f1 = inline( sprintf( '%s).*sin(pi*d*x/%f)',...
        f, m, l) );
    A(m) = 2/l*quad(f1, 0, l,1.e-10);
    g1 = inline(sprintf('%s).*sin(pi*d*x/%f)',...
        g, m, l) );
    B(m) = 2/(pi*m*a)*quad( g1, 0, l,1.e-10);
end

% Вычисление амплитуды первой гармоники.
H = sqrt( A.^2+B.^2 );
H = max(H);

% Случайный выбор цветов стоячих волн.
color = rand(3,n);

% Построение анимации нескольких стоячих волн
% в одном окне.

for k=1:length(t)
    for m = 1:n
        plot( x,( A(m)*cos(pi*a*m*t(k)/l)+...
            B(m)*sin(pi*a*m*t(k)/l)).*sin(pi*m*x/l), ...
            'Linewidth',2,'Color', color(:,m));
        axis([0 l -H H]);
        grid on
        hold on;
    end
    hold off
    M(k)=getframe;
end

```

Построим анимацию трех первых стоячих волн в одном графическом окне (см. рис 4.1).

```

>> M = SWave( 'x.*(x.^2-1)', '3*(x>=0.2).*(x<=0.3)-...
    -2*(x>=0.7).*(x<=0.8)', 1, 1, 3 );

```

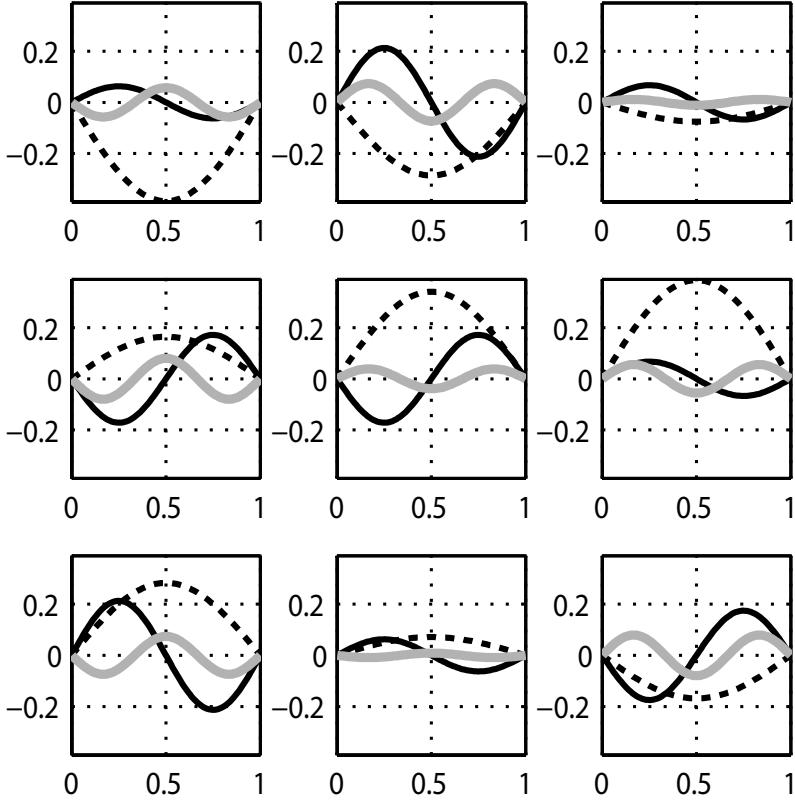


Рис. 4.1.

Циклическая частота

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{N}{\rho}}$$

называется основной, остальные частоты $\omega_n = n\omega_1$, $n = 2, 3, \dots$ (в акустике их называют частотами обертонов) кратны основной частоте.

Заметим, что в физике кроме циклической частоты ω , представляющей собой число колебаний за 2π единиц времени и связанной с периодом колебания T зависимостью $\omega = 2\pi/T$, применяется и другая частота $\nu = 1/T$, которая определяется числом колебаний в единицу времени. Обычно частота ν измеряется в герцах: 1 Гц

соответствует одному колебанию в секунду. Так, например, нота *ля*, первой октавы имеет частоту 440 Гц.

Энергия поперечных колебаний n -ой гармоник вычисляется по формуле

$$E_n = \frac{\omega_n^2 M (a_n^2 + b_n^2)}{4},$$

где $M = l\rho$ — масса струны.

Начальные фазы φ_n показывают сдвиг графиков гармоник вдоль оси времени на величину $\frac{\varphi_n}{\omega_n}$ влево, если $\varphi_n > 0$, и вправо, если $\varphi_n < 0$.

Начальную фазу φ_n удобно трактовать как аргумент комплексного числа $w_n = a_n + i b_n$ для нахождения которого в системе MATLAB существует функция `angle`:

$$\varphi_n = \text{angle}(w_n) = \text{atan}\left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Пример 4.2. Построим анимацию колебаний конечной закрепленной на концах струны при начальных условиях, заданных в примере 4.1.

Используем программу `Fstring`.

```
function M = Fstring(f, g, a, l, tn, n)
```

```
% f - начальная форма струны
% g - начальная скорость струны
% a - параметр в уравнении струны
% l - длина струны
% tn - время анимации
% n - количество гармоник
```

```
x = linspace( 0, l, 200 );
t = linspace( 0, tn, 200 );
[X, T] = meshgrid( x, t );
U = zeros( size( X ) );
```

```
% Вычисление коэффициентов ряда Фурье
```

```

for k = 1:n
    f1 = inline(sprintf('(%s).*sin(pi*d*x/%f)',...
        f, k, l));
    A(k) = 2/l*quad(f1, 0, l);
    g1 = inline(sprintf('(%s).*sin(pi*d*x/%f)',...
        g, k, l));
    B(k) = 2/(pi*k*a)*quad(g1, 0, l);
    U = U + (A(k)*cos(pi*a*k*T/l) +...
        B(k)*sin(pi*a*k*T/l)).*sin(pi*k*X/l);
end

```

```

% Нахождение максимального и минимального элементов
% матрицы U

```

```

m1 = max(max(U));
m2 = min(min(U));

```

```

% Построение анимации

```

```

for j=1:200
    plot(x, U(j,:), 'r-', 'Linewidth', 2);
    axis([0 l m2 m1]);
    grid on;
    M(j)=getframe;
end

```

Строим анимацию используя двадцать первых гармоник ряда Фурье (см. рис. 4.2).

```

>> M = Fstring('x.*(x.^2-1)', ...
    '3*(x>=0.2).*(x<=0.3)-2*(x>=0.7).*(x<=0.8)',...
    1, 1, 2, 20);

```

Сравним результаты для бесконечной струны, полученные по методу Д'Аламбера, и для конечной струны, полученные по методу Фурье.

Решение уравнения колебания бесконечной струны по методу Д'Аламбера мы получили в виде двух волн, бегущих в противоположных направлениях. На очень длинных струнах такое явление можно наблюдать.

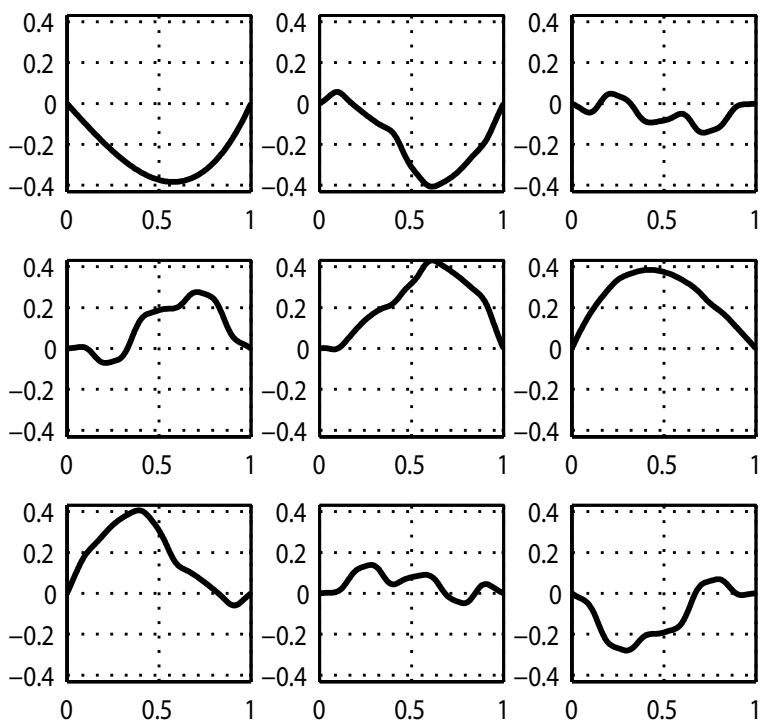


Рис. 4.2.

Решение уравнения для конечной струны можно трактовать аналогично. Если мы отклоним струну и затем отпустим или ударим по струне молоточком, то по струне побегут две волны в противоположных направлениях. Но поскольку струна конечна, то бегущие волны отразятся от концов струны и снова побегут в противоположных направлениях. Отраженные бегущие волны, добрав до концов, опять отразятся и так далее. В результате наложения всех этих бегущих волн получаются стоячие волны.

Рассмотренные нами аналитические методы решения уравнения колебаний бесконечной и конечной струны позволяют получить точные решения. К сожалению, эти методы применимы к ограниченному кругу задач. Поэтому при решении прикладных задач, возникающих в инженерной практике, приходится применять приближенные численные методы [4, 5].

В нашей задаче о колебании струны это может быть вызвано следующими причинами:

- начальные условия заданы в виде числового массива;
- коэффициент a является функцией независимых переменных $a = a(x, t)$;
- коэффициент a зависит от искомой функции $a = a(u)$ и уравнение становится нелинейным.

Контрольные вопросы

1. В каком виде ищем решение уравнения колебаний струны методом Фурье?
2. Как зависит основная циклическая частота ω от натяжения N , от плотности ρ и от длины струны l ?
3. В каком отношении находятся основная циклическая частота ω и частоты обертонов ω_n ?
4. Как зависит период колебаний T от циклической частоты ω ?
5. Какая связь между циклической частотой ω и частотой ν ?
6. Как зависит сила звука (энергия) гармоник от натяжения N , плотности ρ и длины струны l ?
7. Как с увеличением номера n меняется энергия гармоник?
8. Сколько узловых точек и пучностей у гармоник с номером n ?

5. Численное решение уравнения свободных колебаний струны

Метод сеток или метод конечных разностей — один из наиболее распространенных методов численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, успешно реализуемый на современной вычислительной технике. Суть метода состоит в том, что производные в дифференциальном уравнении приближенно заменяются разностными отношениями и мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений, которая решается методами линейной алгебры.

Мы продемонстрируем метод сеток на задаче, которую уже решили точно методом разделения переменных.

Снова обратимся к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (38)$$

И как прежде поставим начальные

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (39)$$

и краевые условия

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (40)$$

Будем решать задачу (38) – (40) методом сеток. С этой целью на прямоугольнике $D = (0 \leq x \leq l) \times (0 \leq t \leq b)$ построим сетку с шагом $h = l/n$ по пространственной переменной и с шагом $k = b/m$ по временной переменной, полагая $x_i = h i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t_j = k j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Точки пересечения прямых, образующих сетку, называются узлами сетки.

Требуется получить численные значения решения поставленной задачи в узлах сетки.

Для удобства введем обозначение $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ и заменим приближенно производные разностными отношениями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}. \quad (42)$$

Подставив (41) и (42) в уравнение (38), придем к разностному уравнению

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (43)$$

Полагая $r = (a \cdot k)/h$, перепишем уравнение (43) в виде

$$u_{i,j+1} = 2(1 - r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}. \quad (44)$$

Уравнение (44) позволяет найти значения функции $u(x, y)$ в узлах сетки $j + 1$ -го слоя, если известны ее значения в узлах сетки j -го и $j - 1$ -го слоев.

Значения искомой функции в узлах нулевого слоя найдем из первого начального условия $u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Для получения значений искомой функции в узлах сетки первого слоя воспользуемся вторым начальным условием, заменяя производную по времени разностным отношением

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{k} = g(x_i),$$

откуда

$$u_{i,1} = u_{i,0} + k g(x_i) = f(x_i) + k g(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Согласно краевым условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = u_{0,i} = u_{n,i} = 0.$$

Пример 5.1. Построить методом сеток решение уравнения колебаний конечной струны, используя программу `FDstring`. Начальные данные вводятся в интерактивном режиме. Заметим также, что эта программа позволяет построить анимацию колебаний струны, начальное отклонение которой заданно с помощью мыши.

```
function FDstring

l = input('Введите l: ');
T = input('Введите T: ');
a = input('Введите a: ');

h = 1/49; k = h/a/2; x = [0:h:1]; t = [0:k:T]; r = a*k/h;

answ = input('Задать начальное отклонение...
с помощью мыши? [y/n]: ', 's');

if answ == 'y';
    axis([0 1 -2 2]); grid on;
    xy = ginput;
    p = polyfit([0; xy(:,1); 1], [0; xy(:,2); 0], 12);
    f = polyval(p, x);
```

```

    f = [0, f(2:end-1), 0]; g = zeros(size(f));
    plot(x, f, 'r-'); hold on;
    plot(xy(:,1), xy(:,2), 'b*'); hold off;
    pause(5);
else
    f = input('Введите начальное отклонение f(x)= ', 's');
    g = input('Введите начальную скорость g(x)= ', 's');
    f = vectorize(inline( f )); g = inline( g );
    f = feval( f, x ); g = feval( g, x );
end

U = zeros(length(x), length(t));
U(:, 1) = f; U(:, 2) = f + k*g;

for j=2:length(t)-1
    U(2:end-1, j+1) = (2-2*r^2)*U(2:end-1,j) + ...
        r^2*( U(1:end-2,j)+U(3:end,j))-U(2:end-1, j-1);
end

m1 = max(max(U)); m2 = min(min(U));

for j=1:length(t)
    plot(x, U(:, j), 'r-', 'Linewidth', 2);
    axis([0 1 m2 m1]); grid on;
    M(j)=getframe;
end

```

Продемонстрируем работу программы в случае когда начальное отклонение задается с помощью мыши. В качестве упражнения постройте методом сеток решение уравнения струны при начальных данных из примера 2.

```

>> FDstring
Введите l: 2
Введите T: 5
Введите a: 1
Задать начальное отклонение с помощью мыши? [y/n]: y

```

Стоп-кадры анимации показаны на рис. 5.1.

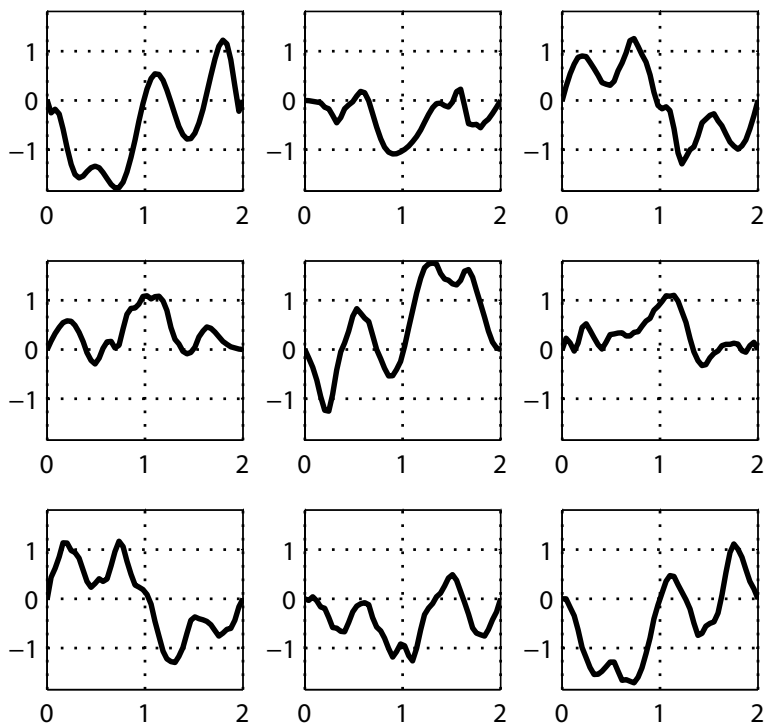


Рис. 5.1.

Метод сеток является приближенным методом, поэтому в процессе вычислений может накапливаться ошибка, которая в результате может стать настолько значительной, что решение окажется абсолютно неверным. Это происходит если нарушены условия устойчивости. Метод называется неустойчивым если ошибка увеличивается на каждом последующем шаге. Для гарантии устойчивости конечно-разностной формулы (44) необходимо, чтобы выполнялось соотношение $r = (a \cdot k)/h \leq 1$ (см. литературу по численным методам [4 – 5]).

Контрольные вопросы

1. Чем вызвана необходимость применения численных методов решения уравнения колебаний струны?
2. В чем состоит идея метода сеток?
3. В каком виде получаем решение уравнения методом сеток?

6. Вынужденные колебания конечной струны

До сих пор мы рассматривали однородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее свободные колебания струны. Допустим теперь, что на струну оказывается внешнее воздействие. В этом случае колебательный процесс описывается неоднородным линейным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t). \quad (45)$$

Поставим начальные условия

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (46)$$

и краевые условия

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \quad (47)$$

Будем искать решение этой задачи в виде

$$u = v + w, \quad (48)$$

где $v = v(x, t)$ — решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + p(x, t) \quad (49)$$

с начальными условиями

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (50)$$

и краевыми условиями

$$v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \quad (51)$$

а функция $w = w(x, t)$ — решение соответствующего однородного уравнения с начальными условиями

$$w|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad (52)$$

и краевыми условиями

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \quad (53)$$

Решение $w = w(x, t)$, описывающее свободные колебания струны, вызванные начальными условиями, мы нашли в предыдущем параграфе. Так что теперь будем искать решение задачи (49)–(51), полагая

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (54)$$

Краевые условия (51) для функции $v = v(x, t)$ выполняются. Остается найти коэффициенты $c_n(t)$ так, чтобы выполнялись и начальные условия (50). Для этого подставим ряд (54) в уравнение (49)

$$\sum_{n=1}^{\infty} [c_n''(t) + \omega_n^2 c_n(t)] \sin \frac{\pi n x}{l} = p(x, t), \quad (55)$$

где

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l}.$$

Разложим функцию $p(x, t)$ по переменной x на отрезке $[0, l]$ в ряд Фурье по синусам

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (56)$$

где

$$d_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l p(x, t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (57)$$

Подставив (56) в (55) и приравняв коэффициенты при $\sin \frac{\pi n x}{l}$, получим

$$c_n''(t) + \omega_n^2 c_n(t) = d_n(t). \quad (58)$$

Чтобы решение (54) удовлетворяло условиям (50), достаточно положить

$$c_n(0) = 0, \quad c_n'(0) = 0. \quad (59)$$

В общем случае решение задачи (58) – (59) находится методом вариации произвольных постоянных, что приводит к результату

$$c_n(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^t d_n(\tau) \sin \frac{n\pi a}{l}(t - \tau) d\tau, \quad (60)$$

который с учетом (57) запишем в виде

$$c_n(t) = \frac{2}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi a}{l}(t - \tau) d\tau \int_0^l p(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (61)$$

Подставляя (61) в (54), а затем (29) и (54) в (48), получим решение задачи (45) – (47)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + b_n \sin \frac{\pi a n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где коэффициенты a_n , b_n и $c_n(t)$ определяются соответственно по формулам (31), (35) и (61).

Пример 6.1. Решить задачу (45) – (47), если $p(x, t) = E \sin \Omega t$. По формуле (57) имеем

$$\begin{aligned} d_n(t) &= \frac{2E}{l} \int_0^l \sin \Omega t \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2E}{l} \sin \Omega t \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{2E}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin \Omega t. \end{aligned}$$

Напишем уравнения (58)

$$c_n''(t) + \omega_n^2 c_n(t) = \frac{2E}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin \Omega t,$$

которые будем решать с учетом начальных условий (59).

Воспользуемся специальным видом правых частей этих уравнений, не прибегая к методу вариации произвольных постоянных.

Возможны два случая:

1. Нерезонансный случай: $\Omega \neq \omega_n$. В этом случае получаем

$$c_n(t) = \frac{2E[1 - (-1)^n]}{\pi n(\omega_n^2 - \Omega^2)} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right).$$

Отсюда

$$v(x, t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n(\omega_n^2 - \Omega^2)} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Принимая во внимание (29) и (48), получаем в нерезонансном случае ограниченное решение неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n(\omega_n^2 - \Omega^2)} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \frac{\pi n x}{l} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + b_n \sin \frac{\pi a n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}, \end{aligned}$$

где коэффициенты a_n и b_n находятся по формулам (31) и (35).

2. Резонансный случай: $\Omega = \omega_k$ для некоторого определенного номера k , то есть частота вынуждающей силы совпадает с одной из частот свободных колебаний. Тогда решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -\frac{E[1 - (-1)^k]}{\pi k \omega_k} t \cos \omega_k t \sin \frac{\pi k x}{l} + \\ & + \frac{2E}{\pi} \sum_{n \neq k}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n(\omega_n^2 - \Omega^2)} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \frac{\pi n x}{l} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + b_n \sin \frac{\pi a n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}. \end{aligned}$$

Таким образом, на k -ой частоте свободных колебаний струны возникло явление резонанса. Это вызвано появлением в решении слагаемого, содержащего множитель $t \cos \omega_k t$, амплитуда которого стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Явление резонанса приводит к тому, что амплитуда колебаний струны благодаря интенсивному

поступлению энергии извне неограниченно возрастает, что с течением времени приводит к разрыву струны.

В данной задаче явление резонанса может наблюдаться только на частотах с нечетными номерами ($\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$), поскольку решение задачи (49) – (51) $v = v(x, t)$ при четных n равно нулю.

Пример 6.2. Построим анимацию вынужденных колебаний конечной струны в нерезонансном и резонансном случаях при начальных условиях $f(x) = x(x - 1)$ и $g(x) = 0$. Пусть струна закреплена в точках $x = 0, x = 1$, а $\rho = 0.005$ и $N = 0.03$.

Сначала вычислим собственные циклические частоты пяти первых гармоник. $\omega_n = \frac{n\pi a}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{N}{\rho}}$.

```
>> n=1:5;
>> l=1;
>> rho=0.05;
>> N=0.07;
>> omegan=n*pi/l*sqrt(N/rho)
```

```
omegan =
```

```
3.7172    7.4344   11.1515   14.8687   18.5859
```

Программа **StringF** позволяет построить анимацию вынужденных колебаний струны под действием синусоидальной внешней силы, как в нерезонансном, так и в резонансном случае.

```
function M = StringF (f, g, a, l, tn, n, Omega)
```

```
% f - начальная форма струны
% g - начальная скорость струны
% a - параметр в уравнении колебаний струны
% l - длина струны
% tn - время анимации
% n - число гармоник ряда
% Omega - циклическая частота вынуждающей силы
```

```
x = linspace( 0, 1, 200 );
```

```

t = linspace( 0, tn, 300 );

[X, T] = meshgrid( x, t );

% Создание матрицы размера X, состоящей из нулей
U = zeros( size(X));

% Вычисление коэффициентов ряда и заполнение матрицы U
for k=1:n
    f1 = inline(sprintf('(s).*sin(pi*d*x/%f)',...
        f, k, l));
    A(k) = 2/l*quad(f1, 0, l);
    g1 = inline(sprintf('(s).*sin(pi*d*x/%f)',...
        g, k, l));
    B(k) = 2/(pi*k*a)*quad(g1, 0, l);
    if abs(0mega-pi*k*a/l)>=0.1

        %Нерезонансный случай
        U = U + (A(k)*cos(pi*a*k*T/l) + ...
            B(k)*sin(pi*a*k*T/l)).*sin(pi*k*X/l)+...
            2/pi*(1-(-1)^k)/(k*((pi*k*a/l).^2-0mega^2))*...
            (sin(0mega*T)-(0mega*l/pi*k*a)...
            .*sin(pi*k*a/l*T)).*sin(pi*k*X/l);
    else
        %Резонансный случай
        U = U + (A(k)*cos(pi*a*k*T/l) + ...
            B(k)*sin(pi*a*k*T/l)).*sin(pi*k*X/l)-...
            -1/pi*(1-(-1)^k)/k/(pi*k*a/l).*T...
            .*cos(pi*k*a/l*T).*sin(pi*k*X/l);
    end
end

% Нахождение максимального
% и минимального элементов матрицы U
m1 = max(max(U)); m2 = min(min(U));

% Анимация вынужденных колебаний струны
for j=1:300

```

```

plot(x, U(j,:), 'r-', 'LineWidth', 2);
axis([0 1 m2 m1]);
grid on;
M(j)=getframe;
end

```

Используя программу **StringF** построим анимацию в нерезонансном случае $\Omega = 10$ (см. рис. 6.2).

```

>> M = StringF('x.*(x-1)', '0', ...
    sqrt(0.07/0.05), 1, 7, 15, 10);

```

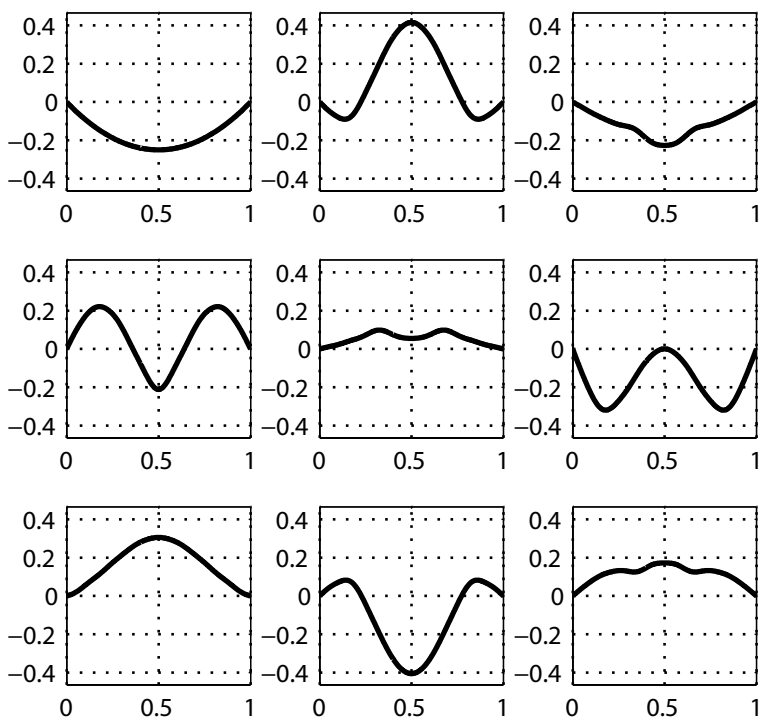


Рис. 6.2.

Убедимся, что резонанс будет возникать только на частотах с нечетными номерами

```

omegan =
    3.7172    11.1515    18.5859

```

при условии, что $\Omega = \omega_n$. Например, построим анимацию для случая резонанса на ретейей собственной частоте $\Omega = \omega_3$ (см. рис. 6.3).

```
>> M = StringF('x.*(x-1)', '0', ...  
    sqrt(0.07/0.05), 1, 70, 10, 11.1515)
```

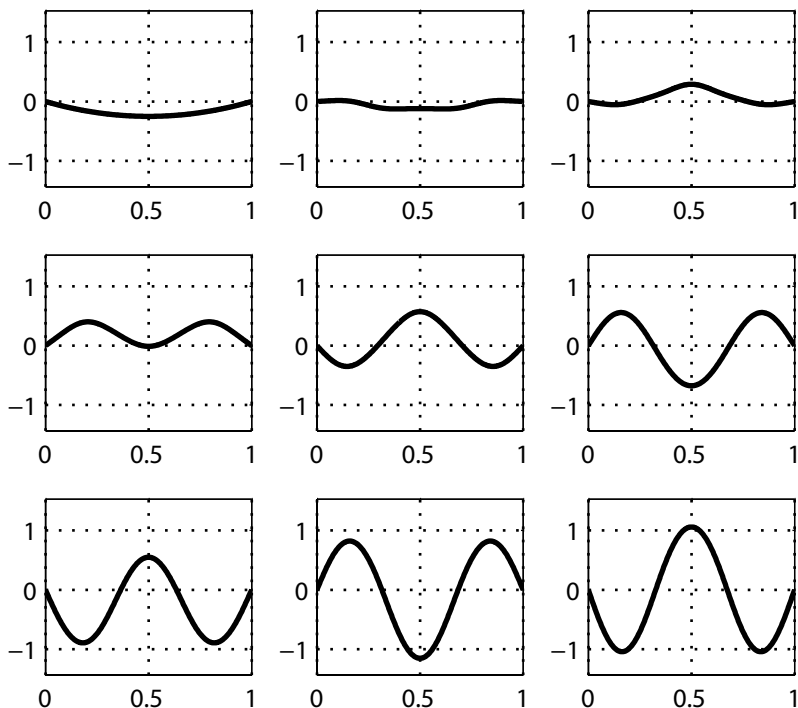


Рис. 6.3.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания струны называются вынужденными?
2. Какое уравнение описывает вынужденные колебания?
3. Как находится решение неоднородного уравнения?
4. При каком условии возникает явление резонанса?
5. Как вычисляются собственные циклические частоты?

7. Задания для лабораторной работы

Задание 1: Метод Д’Аламбера. Для заданного начального отклонения $f(x)$ и начальной скорости $g(x)$ постройте решение уравнения струны методом Д’Аламбера. Построив анимацию, изучите характер распространения волн в бесконечной струне. Для всех вариантов положите параметр $a = 1$.

$$1. f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & -1 \leq x \leq 0, \\ -2x + 2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x \notin [-1, 1], \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 0.5, \\ -x + 2, & 0.5 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & x \notin [1, 3], \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [1, 3], \\ 0, & x \notin [1, 3]. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{1 + x^2}; \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 2], \\ 0, & x \notin [-1, 2]. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 + x^2}; \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-2, 0], \\ 0, & x \notin [-2, 0]. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \sin^2 x e^{-|x|}; \quad g(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-1, 2], \\ 0, & x \notin [-1, 2]. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \frac{x^2}{1 + x^4}; \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-3, 1], \\ 0, & x \notin [-3, 1]. \end{cases}$$

$$8. f(x) = |x|e^{-|x|}; \quad g(x) = \begin{cases} -2, & x \in [-1, 0], \\ 0, & x \notin [-1, 0]. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \frac{|x|}{1 + x^2}; \quad g(x) = \begin{cases} 3, & x \in [2, 3], \\ 0, & x \notin [2, 3]. \end{cases}$$

$$10. f(x) = |\sin x| e^{-x^2}; \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-2, -1], \\ 0, & x \notin [-2, -1]. \end{cases}$$

Задание 2: Метод Фурье. Начальное отклонение конечной струны $f(x)$ задано на отрезке $[0, l]$, а начальная скорость

$$g(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & \text{если } x \in [0, \alpha) \cup (\beta, l]. \end{cases}$$

$$1. \quad f(x) = \sqrt{x(l-x)}, \quad c = 1; \\ l = 0.8, \quad \rho = 0.02, \quad N = 0.04, \quad \alpha = 0.38, \quad \beta = 0.42.$$

$$2. \quad f(x) = x^2 \sin \pi x, \quad c = 1.3; \\ l = 1.0, \quad \rho = 0.02, \quad N = 0.03, \quad \alpha = 0.48, \quad \beta = 0.52.$$

$$3. \quad f(x) = x(l-x^3), \quad c = 1.5; \\ l = 1.0, \quad \rho = 0.02, \quad N = 0.05, \quad \alpha = 0.47, \quad \beta = 0.53.$$

$$4. \quad f(x) = l - |l - 2x|, \quad c = 2; \\ l = 0.8, \quad \rho = 0.05, \quad N = 0.04, \quad \alpha = 0.39, \quad \beta = 0.41.$$

$$5. \quad f(x) = (l-x) \sin x, \quad c = 1; \\ l = 0.8, \quad \rho = 0.03, \quad N = 0.04, \quad \alpha = 0.39, \quad \beta = 0.41.$$

$$6. \quad f(x) = x^3(l-x), \quad c = 1.4; \\ l = 0.9, \quad \rho = 0.02, \quad N = 0.03, \quad \alpha = 0.44, \quad \beta = 0.46.$$

$$7. \quad f(x) = x(l-x^2), \quad c = 3; \\ l = 1.0, \quad \rho = 0.04, \quad N = 0.04, \quad \alpha = 0.48, \quad \beta = 0.52.$$

$$8. \quad f(x) = \sqrt{x(l-x^2)}, \quad c = 1.5; \\ l = 1.0, \quad \rho = 0.06, \quad N = 0.05, \quad \alpha = 0.49, \quad \beta = 0.51.$$

$$9. \quad f(x) = e^{-x} \sin \pi x, \quad c = 2.3; \\ l = 1.0, \quad \rho = 0.06, \quad N = 0.07, \quad \alpha = 0.49, \quad \beta = 0.51.$$

$$10. \quad f(x) = (l-x)\sqrt{x}, \quad c = 1; \\ l = 0.8, \quad \rho = 0.02, \quad N = 0.05, \quad \alpha = 0.39, \quad \beta = 0.41.$$

1. Постройте графики начальной формы и начальной скорости струны.
2. Вычислите амплитуды, циклические частоты, начальные фазы и энергии пяти первых гармоник при $f = f(x)$, $g = g(x)$. Выберите линейную плотность или натяжение струны так, чтобы первая гармоника имела частоту ноты *ля* первой октавы (440 Гц).
3. Постройте анимацию колебаний пяти первых стоячих волн.
4. Постройте анимацию свободных колебаний струны при а) $f = f(x)$, $g = 0$; б) $f = 0$, $g = g(x)$; в) $f = f(x)$, $g = g(x)$. Для всех вариантов положите число гармоник в ряде Фурье равным $n = 10$. Затем, уменьшая и увеличивая значение этого параметра, выясните его влияние на получаемый результат.
5. Постройте анимацию свободных колебаний струны при $f = f(x)$, $g = g(x)$ постепенно увеличивая отрезок $[\alpha, \beta]$ и исследуйте его влияние на колебания струны.

Задание 3: Метод сеток. Пользуясь данными из задания 2, решите уравнение свободных колебаний конечной струны методом сеток. Постройте соответствующую анимацию.

Задание 4: Вынужденные колебания. Пользуясь данными задания 2, постройте анимацию вынужденных колебаний струны в нерезонансном и резонансном случаях при внешнем воздействии $p(x, t) = \sin \Omega t$. Подберите значения частоты внешнего воздействия Ω так, чтобы последовательно возникало явление резонанса для первых пяти частот собственных колебаний.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. – М.: МГУ, 2004.
2. Соболев С.Л., *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1992.
3. Смирнов М. М. *Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка*. – М.: Наука, 1984.
4. Вержбицкий В.М. *Основы численных методов*. – М.: Высшая школа, 2002.
5. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. *Численные методы и программное обеспечение*. – М.: Мир, 2001.
6. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д.. *Численные методы. Использование MATLAB*. – Издательский дом Вильямс, Москва - Санкт-Петербург - Киев, 2001.
7. Семченко М.С., Семченко Н.М. *Система MATLAB. Учебное пособие. Часть 1*. – Санкт-Петербург, СПбГУКиТ, 2005.

Редактор Н. Н. Калинина
Подписано к печати
Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Печать офсетная. Объем печ. л.
Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ .

Редакционно-издательский отдел СПбГУКиТ.
192102, Санкт-Петербург, ул. Бухарестская, 22.

Подразделение оперативной полиграфии СПбГУКиТ.
192102, Санкт-Петербург, ул. Бухарестская, 22.