Колебательный гистерезис струны.

АЧХ обычных колебательных систем с малой амплитудой, описываемых диф. уравнением:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = F/m\cos\Omega t,$$

может быть апределена известным уравнением:

$$A = \frac{F}{m\sqrt{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.$$

Данное уравнение симметрично относительно собственной частоты (при малом затухании) и достигает максимума в ней. Тем не менее, исходное уравнение написано из расчета линейной зависимости силы от координаты, что довольно точно описывается лишь при малых значениях амплитуды. При рассмотрении же нелинейной зависимости стоит учесть старшие степени,что актуально при больших амплитудах и меняет вид АЧХ.

Вывод уравнения колебаний струны

Работать с уравнением в частных производных неудобно. Сведем его к уравнению колебаний с одной степенью свободы в случае стоячей волны (или близкой к ней, считая нелинейность слабо выраженной).

Второй закон Ньютона для струны:

$$m\ddot{x} = -2T\sin\alpha \tag{1}$$

Найдем μ. Введем систему координат ZoY, в которой в дальнейшем будем считать геометрию струны, имеющую в ней форму $z(y) = \mu x\sin(\pi\frac{y}{L})$. Для угла в линейном приближении:

$$\sin\alpha \approx tg\alpha = \frac{d}{dy}z(0) = \frac{\pi\mu x}{L} \tag{2}$$

Приравняем частоты собственных колебаний из волнового уравнения для первой гармоники и уравнения (1):

$$\omega_0^2 = \frac{2T\pi\mu}{\rho_l L^2} = \frac{\pi^2 T}{\rho_l L^2} \Rightarrow \mu = \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

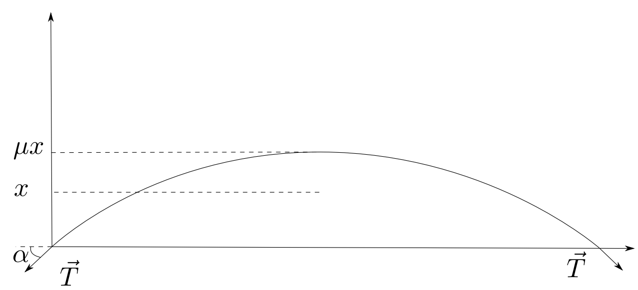

Рис. 1: Участок струны между узлами. x — положение центра масс струны. $\vec{T}$ — сила натяжения струны. μx — положение середины струны.

Учёт растяжения струны

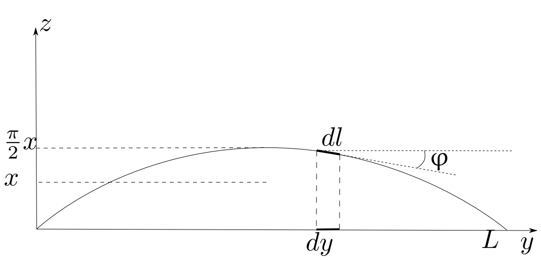

Рис. 2: К выводу уравнения колебаний. L — расстояние между узлами.

По закону Гука:

$$T = T_0 + k\Delta L = T_0 + k(l - L), \tag{4}$$

где l — длина растянутой пружины. Для неё справедливо:

$$l = \int_0^L \frac{dy}{\cos\varphi} = \frac{L}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\pi^2 x}{2L}\right)^2 \cos^2\theta}\, d\theta = \frac{L}{\pi}f(\alpha), \tag{5}$$

где сделаны замены $\theta = \frac{\pi y}{L}, \alpha = \left(\frac{\pi^2 x}{2L}\right)^2$. $f(\alpha)$ — эллиптический интегралл. Возьмём первые 2 члена его разложения в ряд:

$$f(\alpha) \approx \pi + \frac{\pi}{4}\alpha \Rightarrow \Delta L \approx \frac{\alpha L}{4} = \frac{\pi^4 x^2}{16L} \tag{6}$$

Обозначим $\beta = \frac{\pi^6 k}{16\rho_l L^3}$ и, подставив (4) в (1), получим диф. уравнение осциллятора Дуффинга:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \tag{7}$$

Приведение уравнения к безразмерному виду

Добавим в (7) затухание и вынуждающую силу. Также заменим координату на безразмерную координату $x = A\chi$ и время на безразмерное время $t = B\tau$:

$$\ddot{\chi} + 2\lambda B\dot{\chi} + B^2\omega_0^2\chi + A^2B^2\beta\chi^3 = \frac{fB^2}{mA}\cos\gamma B\tau$$

Подберем A и B так, чтобы коэффициенты при χ и χ^3 были равны 1. Тогда $B = \omega_0^{-1}$, $A = \frac{\omega_0}{\sqrt{\beta}}$. Получим более удобное для анализа уравнение:

$$\ddot{\chi} + Q^{-1}\dot{\chi} + \chi + \chi^3 = \xi\cos k\tau, \tag{8}$$

где $Q = \frac{2\lambda}{\omega_0}$ — добротность струны на частоте ω_0. $\xi = \frac{f\sqrt{\beta}}{m\omega_0^3}$ — безразмерная амплитуда вынуждающих колебаний. $k = \frac{\gamma}{\omega_0}$ — безразмерная частота.

Анализ уравнения

Для дальнейшего анализа уравнения положим $G^2 + H^2 = \xi^2$ (8) и приведем его к следующему виду:

$$\ddot{x} + k^2x = G\cos kt - H\sin kt + (k^2-1)x - x^3 - Q^{-1}\dot{x}. \tag{9}$$

Вообще говоря, решение данного уравнения будет представлять сумму обертонов вынуждающей частоты. Тем не менее, амплитуда слагаемых будет очень быстро падать (покажем это позже), поэтому за амплитуду колебаний в дальнейшем будем считать амплитуду первой гармоники.

Решение (9) представим в виде суммы последовательных приближений $x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$. Для первого приближения возьмем $x_1 = A\cos kt$. Для второго напишем:

$$x_2 + k^2x_2 = G\cos kt - H\sin kt + (k^2-1)A\cos kt - \frac{3}{4}A^3\cos kt - \frac{1}{4}A^3\cos 3kt + Q^{-1}Ak\sin kt \tag{10}$$

Нас интересуют лишь периодические решения. При наличии в правой части членов вида $\cos kt$ или $\sin kt$ (называемых секулярными) амплитуда будет неограниченно возрастать. Поэтому эти члены должны быть равны нулю. Из этого условия получим зависимость амплитуды от частоты:

$$\begin{aligned} H &= Q^{-1}Ak \\ G &= (1-k^2)A + \frac{3}{4}A^3 \end{aligned} \Rightarrow \xi^2/A^2 = \frac{G^2+H^2}{A^2} = Q^{-2}k^2 + [(1-k^2) + \frac{3}{4}A^2]^2 \tag{11}$$

Данный процесс можно продолжить и далее, получив более точный вариант формулы (11). Тем не менее поправка будет порядка $A^3, A^4 \ldots$. В начале мы отметили малость колебаний, из чего слеует различие порядков величин, пропорциональных различным степеням A. Помимо формулы 11 получим и значение второго приближения:

$$x_2 = \frac{9A^3}{32k^2}\cos 3kt, \tag{12}$$

пропорционального A^3. Последующие приближения будут также иметь малость порядка степени A^{2n+1}, поэтому ими можно пренебречь и считать амплитуду равной A.

Анализ АЧХ

Нарисуем график уравнения (11) при различных значениях Q и ξ. Как мы можем увидеть, при малых A график слабо отличается от графика в линейном приближении. При увеличении значений силы и добротности происходит смещение резонансной чаcоты. Более того, при определенной величине смещения можно наблюдать три возможных значения амплитуды при одном значении частоты.

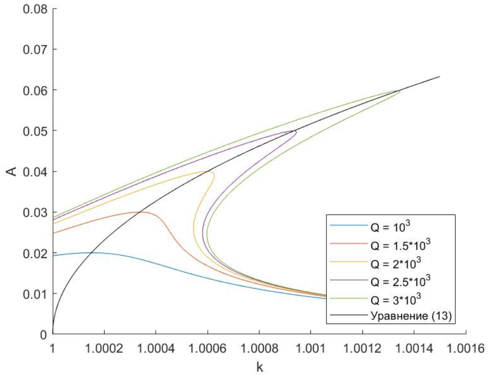

Рис. 3: АЧХ при различных значениях Q при $\xi = 2 * 10^{-5}$.

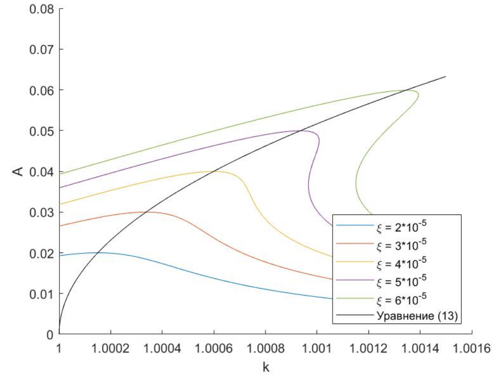

Рис. 4: АЧХ при различных значениях ξ при $Q = 10^3$.

Возникает вопрос о том, какой будет амплитуда. В данном случае мы будем наблюдать явление гистерезиса. Так, при медленном увеличении частоты мы достигнем максимума, после чего будет резкое падение амплитуды. Если же уменьшать частоту, то мы увидим резкий скачок, после чего амплитуда начнет уменьшаться. Появляется область невозможных (неустойчивых) состояний струны.

Найдем зависимость изменения резонансной частоты от резонансной амплитуды, продифференциировав (11) по dk и приравняв $\frac{dA}{dk} = 0$. Пренебрежем членом $\frac{1}{2Q^2}$(справедливость пренебрежения будет показана позже) и получим:

$$k^2 = 1 + \frac{3}{4}A_{max}^2 \Rightarrow \Delta k \approx \frac{3}{8}A_{max}^2, \tag{13}$$

где A_{max} — резонансная амплитуда.

Теперь найдем условие гистерезиса, т.е. параметры системы, при которых мы будем иметь явление скачка и разный характер АЧХ при увеличении и уменьшении частоты. Для этого продифференциируем АЧХ по dA и приравняем $\frac{dk}{dA} = 0$.

$$Q^{-2}k^2 + (1 - k^2 + 3A^2/4)(1 - k^2 + 9A^2/4) = 0 \tag{14}$$

Полученное уравнение является ГМТ, в которых АЧХ вертикальна при разных ξ. Чтобы представить как оно выглядит устремим $Q \to \infty$ и получим, что оно распадается на два:

$$\begin{cases} 1 - k^2 + 3A^2/4 = 0 \\ 1 - k^2 + 9A^2/4 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Получим 2 гиперболы. Полагая Q большим, можно считать, что итоговая кривая будет чем-то близким к ним. В действительности изначальное уравнение не имеет корней при малых амплитудах, в отличие от двух полученных. Это показывает существоваение ξ_{min}, которая ограничивает снизу величину вынуждающей силы для существования гистерезиса. Найдем это ξ_{min}.

При искомой силе АЧХ будет иметь одну вертикальную касательную в точке, где и у уравнения (14) вертикальная касательная. Найдем эту точку продиференцировав (14) и приравняв $\frac{dk}{dA} = 0$. Подставим это в (14) и получим искомое условие гистерезиса:

$$\xi_{min}Q^{3/2} = \sqrt{\frac{32}{9\sqrt{3}}} \approx 1.43 \Rightarrow \xi Q^{3/2} \geq 1.43. \tag{16}$$

Как мы видим, при большой добротности системы даже малая вынуждающая сила будет проявлять нелинейность системы. Более того подтверждается справедливость пренебрежения членом $1/Q^2$ в (13).

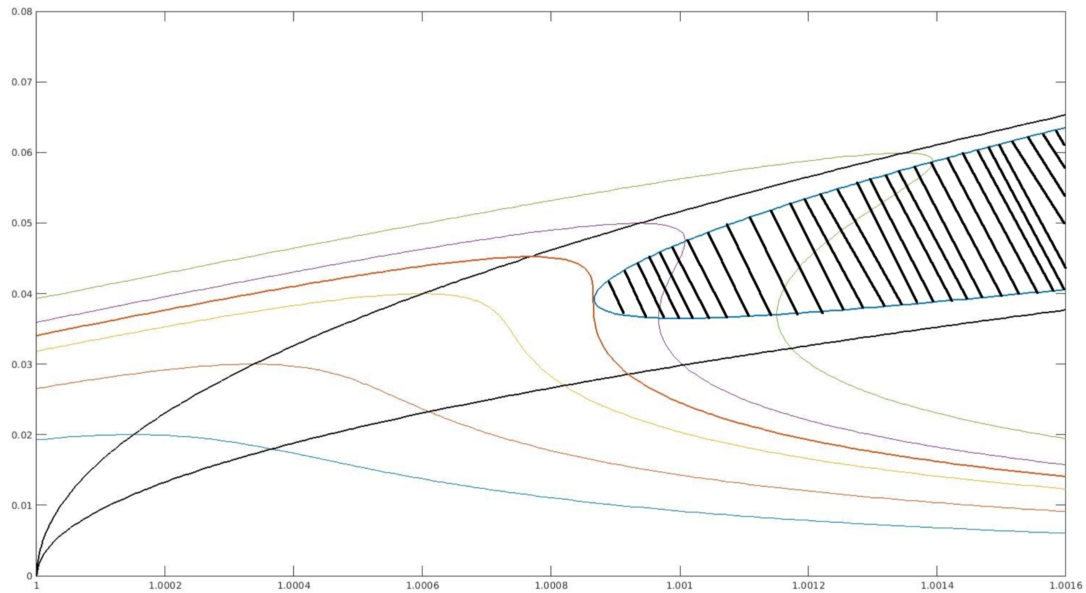

Рис. 5: Уравнение (13) с АЧХ при минимальном значении ξ_{min} (красным) и областью неустойчивых состояний (заштриховано) значения остальных ξ и Q взяты с рис. 4.

Численные оценки

Интересно проверить все полученные выкладки оценкой для стальной струны. В частности, при какой точности измерений частоты следует учитывать изменение из-за нелинейности? Возьмём струну длиной 50 см под натяжением 10.13 Н и диаметром 0.3 мм. Жесткость такой струны будет равна 28 кН/м, а частота собственных колебаний 133.3 Гц (циклическая соответвсвенно 837.1 рад/с). Оценим Δk предполагая резонансной амплитуду порядка 1 мм:

$$\Delta k = \frac{3\beta}{8\omega_0^2}a_{max}^2 = \frac{3\pi^4 k}{128LT}a_{max}^2 \approx 0.01 \tag{17}$$

Получим, что учитывать поправку стоит уже при точности порядка 1%. Оценка в 1 мм является здесь скорее оценкой сверху. При измерении с меньшими амплитудами, очевидно, эта поправка будет меньше.

Так же интересно получить силу и резонансную амплитуду, при которых будет проявляться гистерезис и отклонение частоты при этих параметрах. В линейном приближении можно положить $A_{max} = Q\xi = 1000\xi$. Тогда:

$$a_{max} = \frac{1.43\omega_0}{Q\sqrt{\beta}} \approx 0.2 \text{ мм} \Rightarrow f = \omega_0^2 m a_{max}/Q = 3.9 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \tag{18}$$

Заметим также, что ранее подразумевалась малость затуханий. Тогда интересно также оценить и добротность системы, в которой при малости колебаний будут проявляться нелинейные эффекты. Для этого воспользуемся условием гистерезиса и условием малости A. Для определенности положим $A \leq 0.1$. Тогда подставим это в условие и получим:

$$Q \geq \left(\frac{1.4}{A}\right)^2 \approx 200$$