Tema 13. Integrale prime

Exerciţiul 1. *Să se determine integralele prime ale următoarelor sisteme diferenţiale autonome scrise sub formă simetrică:*

a) $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{x+z} = \dfrac{dz}{x+y}$, $\qquad$ $x - y = C_1(y-z)$, $(x+y+z)(y-z)^2 = C_2$

b) $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{x+y+z} = \dfrac{dz}{x-y}$, $\qquad$ $x + z = C_1$, $(x+y+z)(y-3x-z) = C_2$

c) $\dfrac{dx}{y-u} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{u-y} = \dfrac{du}{x-z}$, $\qquad$ $x + z = C_1$, $y + u = C_2$, $(x-z)^2 + (y-u)^2 = C_3$

d) $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y}$, $\qquad$ $x^2 - 2y = C_1$, $6xy - 2x^3 - 3z^2 = C_2$

e) $\dfrac{dx}{z^2-y^2} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{-y}$, $\qquad$ $y^2 + z^2 = C_1$, $x - yz = C_2$

f) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{xy+z}$, $\qquad$ $x = C_1 y$, $xy - z = C_2 x$

g) $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$, $\qquad$ $x = C_1 y$, $xy - 2\sqrt{z^2+1} = C_2$

h) $\dfrac{dx}{x+y^2+z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$, $\qquad$ $y = C_1 z$, $x - y^2 - z^2 = C_2 z$

i) $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)} = \dfrac{dy}{-y(z^2+x^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$, $\qquad$ $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$, $yz = C_2 x$

j) $\dfrac{dx}{x(z-y)} = \dfrac{dy}{y(y-x))} = \dfrac{dz}{y^2-xz}$, $x > 0$, $\qquad$ $x - y + z = C_1$, $y \ln x + z = C_2 y$

Exerciţiul 2. *Să se determine integralele prime ale următoarelor sisteme diferenţiale*

a) $\begin{cases} x' = 2y(2a-x) \\ y' = x^2 + z^2 - y^2 - 4ax \\ z' = -2yz, \quad a \in \mathbb{R}, \end{cases}$ $\qquad$ $2a - x = C_1 z$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2 z$

b) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \\ z' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{z}, \end{cases}$ $\qquad$ $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$, $y^2 + 2xy - x^2 = C_2$

c) $\begin{cases} x' = x + y - xy^2 \\ y' = x^2 y - x - y \\ z' = y^2 - x^2, \end{cases}$ $\qquad$ $x^2 + y^2 + 2z = C_1$, $\ln|1 - xy| + z = C_2$

Problema 1. *Aflaţi soluţia sistemului*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+t}{x-y} \\ y' = \dfrac{y+t}{x-y} \end{cases}$$

care respectă condiţia iniţială

$$\begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Scădem ecuaţiile şi obţinem $x' - y' = 1$ de unde găsim integrala primă neautonomă

$$x - y = t + C.$$

Din condiţia iniţială avem

$$x(1) - y(1) = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0,$$

deci soluţia problemei Cauchy satisface identitatea $x - y = t$. Prima ecuaţie se reduce la ecuaţia liniară

$$x' = \frac{x+t}{t}$$

care integrată conduce la soluţia generală

$$x = t(C + \ln t).$$

Din $x(1) = 1$ determinăm $C = 1$, în final obţinem soluţia

$$\begin{cases} x(t) = t + t\ln t, \\ y(t) = t\ln t, \quad t > 0. \end{cases}$$

Problema 2. *Studiaţi stabilitatea soluţiilor staţionare ale sistemului autonom*

$$\begin{cases} x' = x^2(1-y) \\ y' = y^2(1-x). \end{cases}$$

Arătaţi că, în spaţiul fazelor, axele de coordonate şi prima bisectoare sunt formate din traiectorii ale sistemului.

Rezolvare. Punctul (x, y) din spaţiul fazelor este traiectoria unei soluţii staţionare dacă

$$\begin{cases} x^2(1-y) = 0 \\ y^2(1-x) = 0. \end{cases}$$

Găsim numai două puncte staţionare: $(x = 0, y = 0)$ şi $(x = 1, y = 1)$. Matricea jacobiană asociată sistemului este

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(1-y) & -x^2 \\ -y^2 & 2y(1-x) \end{pmatrix}.$$

În punctul $(x = 1, y = 1)$ avem matricea

$$A = J(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cu polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 1$$

Deoarece $\lambda = +1$ o este rădăcină caracteristică strict pozitiză, soluţia analizată este instabilă.

În punctul $(x = 0, y = 0)$ avem matricea $A = J(0,0) = O$, matricea nulă, cu radacinile caracteristice $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Metoda primei aproximaţii este în cazul de dubiu.

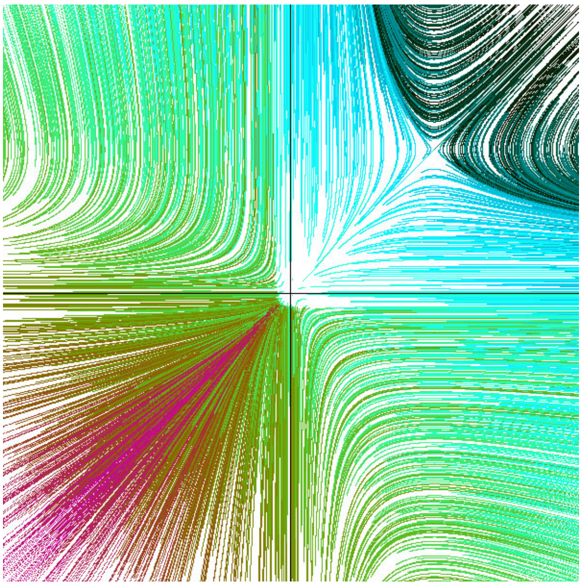

Figura 1: Problema 2. Portretul fazelor

O soluţie are traiectoria inclusă în axa Ox dacă este de forma

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = 0. \end{cases}$$

Verificăm sistemul şi obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi^2 \\ 0' = 0. \end{cases}$$

Este uşor de văzut că problema Cauchy

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi^2 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \neq 0. \end{cases}$$

are soluţia

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0 t}$$

Dacă $\varphi_0 < 0$ soluţia este definită pentru orice $t > 0$, cu $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$, iar traiectoria ei este segmentul $[\varphi_0, 0)$ de pe axa Ox, parcurs către origine.

Dacă $\varphi_0 > 0$ soluţia este definită doar pentru $t \in [0, T_0)$, cu $T_0 = \frac{1}{\varphi_0}$. Deoarece $\lim_{t\nearrow T_0} \varphi(t) = +\infty$, traiectoria ei toată este semidreapta $[\varphi_0, +\infty)$ de pe axa Ox, parcursă către punctul de la infinit. Rezultă de aici, în particular, că originea este un punct staţionar instabil: sistemul admite soluţii nemărginite având punctul iniţial de forma $(x = \varphi_0, y = 0)$ oricât de apropiat de origine.

O soluţie are traiectoria inclusă în prima bisectoare dacă este de forma

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

Se observă imediat că sistemul admite astfel de soluţii, este suficient ca funcţia $\varphi = \varphi(t)$ să respecte ecuaţia

$$\varphi' = \varphi^2(1 - \varphi).$$

Problema 3. *Studiaţi stabilitatea soluţiilor staţionare ale sistemului*

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - y - 1 \\ y' = x^2 + y^2 + x - 1 \end{cases}$$

Arătaţi că, în spaţiul fazelor, cercul unitate este o traiectorie a sistemului.

Rezolvare. Soluţiile staţionare se obţin rezolvând sistemul algebric

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + x - 1 = 0. \end{cases}$$

Scădem ecuaţiile şi obţinem substituţia $x = -y$, sistemul se reduce la ecuaţia

$$2y^2 - y - 1 = 0,$$

în final găsim punctele staţionare $(x = -1, y = 1)$ şi $(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2})$. Studiem stabilitatea acestora prin metoda primei aproximaţii. Matricea jacobiană asociată sistemului este

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y - 1 \\ 2x + 1 & 2y \end{pmatrix}.$$

În punctul $(x = -1, y = 1)$ avem matricea

$$A = J(-1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

cu polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 7$$

Deoarece $\lambda = +\sqrt{7}$ o este rădăcină caracteristică strict pozitiză, soluţia analizată este instabilă.

În punctul $(x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2})$ avem

$$A = J(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

cu polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 3$$

Deoarece $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$, suntem în cazul de dubiu al metodei.

O soluţie are ca traiectorie cercul unitate numai dacă este de forma

$$\begin{cases} x(t) = \cos\varphi(t) \\ y(t) = \sin\varphi(t), \end{cases}$$

cu $\varphi = \varphi(t)$ o funcţie de clasă C^1 pe un interval. Introducem în sistem şi avem:

$$\begin{cases} -\varphi' \sin\varphi = 1 - \sin\varphi - 1 \\ \varphi' \cos\varphi = 1 + \cos\varphi - 1 \end{cases}$$

Acest sistem se reduce la ecuaţia $\varphi' = 1$ de unde rezultă $\varphi = t$, deci

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t, \end{cases}$$

este o soluţie a sistemului şi aceasta are ca traiectorie cercul unitate.

Revenim la studiul stabilităţii punctului $(x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2})$. Din faptul că cercul unitate este traiectoria unei soluţii periodice, rezultă că soluţiile care pleacă din puncte interioare cercului unitate au traiectoria inclusă în interiorul acestui cerc. Vom afla ecuaţia lor căutând o integrală primă a sistemului.

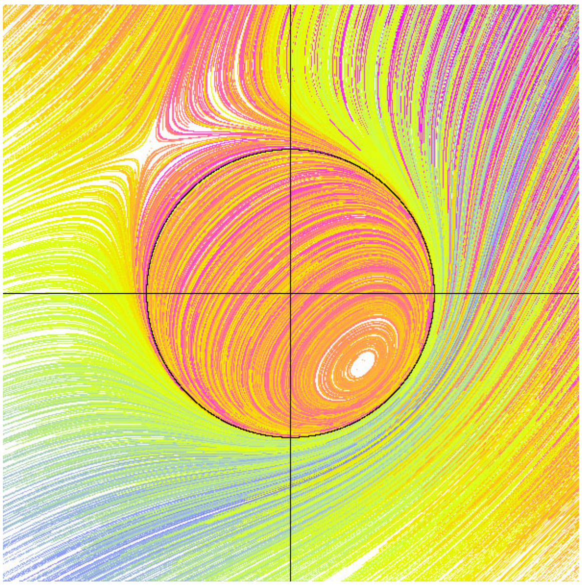

Figura 2: Problema 3. Portretul fazelor

Notăm
$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x - y, \end{cases}$$
şi avem
$$u' = 2xx' + 2yy' = 2(x+y)(x^2+y^2) + 2x + 2y = 2(x+y)(x^2+y^2+1)$$
şi
$$v' = x' - y' = -y - x = -(x+y).$$
Obţinem
$$\frac{du}{dv} = \frac{u'}{v'} = \frac{2(x+y)(x^2+y^2+1)}{-(x+y)} = -2u - 2.$$
Ecuaţia liniară
$$\frac{du}{dv} = -2u - 2$$
are soluţia generală
$$u = Ce^{-2v} + 1,$$
de unde obţinem ecuaţia traiectoriilor sistemului dat
$$x^2 + y^2 - 1 = Ce^{2(y-x)}.$$

Interpretăm o astfel de curbă ca proiecţia pe planul xOy a curbei de intersecţie dintre suprafeţele
$$z = x^2 + y^2 - 1$$
şi
$$z = Ce^{2(y-x)}.$$
Prima suprafaţă este un paraboloid de rotaţie în jurul axei Oz iar a doua este o suprafaţă riglată, descrisă de o dreaptă paralela cu prima bisectoare a planului xOy, translatată de-a lungul curbei exponenţiale
$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = Ce^{-4t}. \end{cases}$$

Traiectoria redusă la un singur punct, punctul $(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2})$ se obţine pentru $C = -\frac{e^2}{2}$ când cele două suprafeţe sunt tangente, pentru valori mai mici ale lui C suprafaţa riglată trece pe sub paraboloid, iar pentru $C \in (-\frac{e^2}{2}, 0)$ cele două suprafeţe se intersectează după o curbă închisă având proiecţia orogonală pe planul xOy în interiorul cercului unitate. Pentru $C = 0$ intersecţia este chiar cercul unitate.

Deducem de aici că, în interiorul cercului unitate, familia traiectoriilor este formată din curbe închise în jurul punctului staţionar $(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2})$. Rezultă că această soluţie staţionară este simplu stabilă.