Lei 11,40

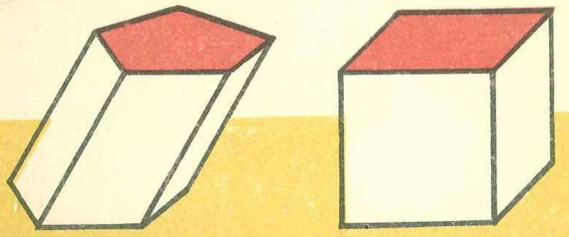
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

·X·

Matematică

Geometrie și trigonometrie

Manual pentru clasa a X-a



Editura Didactică și Pedagogică
București — 1988

Capitolul III

Aplicațiile trigonometriei în algebră

În clasa a IX-a s-au introdus numerele complexe și operațiile cu ele. Aceste numere au aplicații variate în geometrie, mecanică, fizică, electrotehnică etc. Pentru a ușura anumite calcule, vom defini forma trigonometrică a numerelor complexe. Reamintim că mulțimea numerelor complexe se notează cu $\mathbf{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbf{R},\ i^2 = -1\}$.

§ 1. Forma trigonometrică a unui număr complex

Să considerăm un sistem de coordonate în planul $\mathcal{P}$, reperul fiind (O, A, B) (fig. III.1). Fiecărui număr complex $z = x + iy\ (x, y \in \mathbf{R})$ îi asociem un punct unic $M \in \mathcal{P}$ de coordonate (x, y), față de reperul ales, numit *imaginea* numărului complex z.

Am definit în acest fel o funcție bijectivă $f : \mathbf{C} \to \mathcal{P}$. Dacă imaginea lui $z = x + iy$ este punctul M, atunci numărul complex z se numește *afixul* punctului M.

Dacă coordonatele polare ale punctului M sînt r și t^*, atunci conform formulelor

$$x = r\cos t^*,\ y = r\sin t^*.$$

((1), Cap. II, § 1), numărul complex $z = x + iy$ se scrie:

$$(1) \qquad z = r(\cos t^* + i\sin t^*),\ r \geqslant 0,\ t^* \in [0, 2\pi).$$

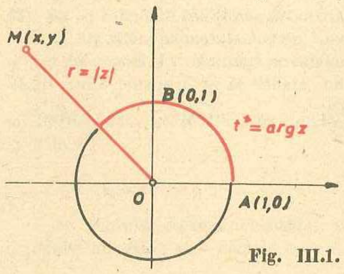


Fig. III.1.

Deoarece $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, rezultă că

$$(2) \qquad r = |z|,$$

deci *raza polară a imaginii lui z este egală cu modulul lui z*. Argumentul polar t^* al imaginii lui z se numește *argumentul redus* al lui z și se notează cu $\arg z$.

În concluzie, *orice număr complex z poate fi scris sub forma (1), numită forma trigonometrică a lui z. Dacă $z \neq 0$, modulul și argumentul redus ale lui z sînt determinate unic. Dacă $z = 0$, modulul este egal cu 0 și pentru argumentul său redus se poate lua orice număr din* $[0, 2\pi)$.

Dacă schimbăm pe t^* în $t^* + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, formula (1) rămîne valabilă. Așadar există mai multe valori t pentru care

$$(3) \qquad z = r(\cos t + i\sin t), \qquad r \geqslant 0.$$

Se pune întrebarea dacă pentru un număr dat $z \neq 0$ formula (3) este adevărată și cu valori t diferite de $\arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Fie numărul $z \neq 0$, scris sub forma (3). Se știe că oricare ar fi numărul real t, el poate fi scris ca $t_1 + 2k\pi$ cu $t_1 \in [0, 2\pi)$ și $k \in \mathbf{Z}$. Din (3) rezultă $z = r[\cos(t_1 + 2k\pi) + i\sin(t_1 + 2k\pi)] = r(\cos t_1 + i\sin t_1)$ de unde $r = |z|$, $t_1 = \arg z$ și am ajuns la concluzia că $t = \arg z + 2k\pi$.

Orice număr real t, pentru care relațiile (3) au loc, se numește *argument* al lui z. Mulțimea argumentelor lui z se notează cu $\operatorname{Arg} z$. Conform celor arătate mai sus putem scrie:

$$(4) \qquad \operatorname{Arg} z = \{t \mid t = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

deci *diferența a două argumente ale unui număr complex $z \neq 0$ este un multiplu de 2π.*

Exemple. 1. Fie numărul complex $z = 1 - i$. Să se determine $|z|$, $\arg z$ și $\operatorname{Arg} z$.

Soluție. Deoarece $x = 1$ și $y = -1$, imaginea lui z se află în cadranul IV, adică $t^* = \arg z \in \left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$ și

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2},\ \operatorname{tg} t^* = \frac{y}{x} = -1;$$

deci $t^* = \frac{7\pi}{4}$ (pe fig. III.2, t^* este lungimea arcului mare $\widehat{AC}$). $\operatorname{Arg} z = \left\{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

2. Fie $z = -i$, să se determine $|z|$ și $\operatorname{Arg} z$.

Soluție. $|z| = r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$. Deoarece $x = 0$ și $y = -1$, imaginea lui z se găsește pe semiaxa negativă a axei ordonatelor, deci $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ și

$$\operatorname{Arg} z = \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

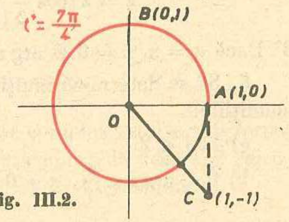


Fig. III.2.

3. Conjugatul $\bar{z} = x - iy$ al numărului complex $z = x + iy$, cu $y \neq 0$, are argumentul redus

$$(5) \qquad \arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$$

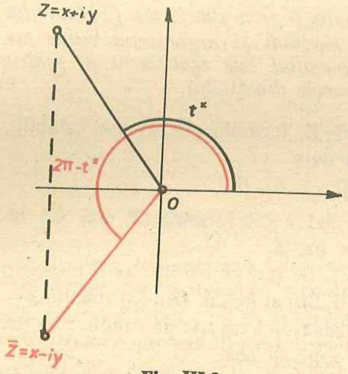


Fig. III.3.

(fig. III.3). Într-adevăr, dacă $|z| = r$ şi $\arg z = t^*$ atunci $\bar{z} = r\cos t^* - ir\sin t^* = r\,[\cos(2\pi - t^*) + i\sin(2\pi - t^*)]$, deci $2\pi - t^* \in \operatorname{Arg}\bar{z}$ şi cum $0 < 2\pi - t^* < 2\pi$, $2\pi - t^* = \arg\bar{z}$.

4. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z = 1 + \cos a + i\sin a$, unde $a \in (0, 2\pi)$.

Soluţie. $r = |z| = \sqrt{(1+\cos a)^2 + \sin^2 a} = \sqrt{2(1+\cos a)} =$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{a}{2}} = 2\left|\cos\frac{a}{2}\right| \text{ şi dacă } a \neq \pi,\ \operatorname{tg} t^* = \frac{\sin a}{1+\cos a} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\frac{a}{2},\quad t^* = \frac{a}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

1° Dacă $a \in (0, \pi)$, atunci $1 + \cos a > 0$, $\sin a > 0$, şi imaginea lui z se află în cadranul I, deci

$$t^* \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ şi cum } \frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ obţinem că } t^* = \frac{a}{2}$$

şi

$$z = 2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2} + i\sin\frac{a}{2}\right).$$

2° Dacă $a \in (\pi, 2\pi)$, atunci $1 + \cos a > 0$, $\sin a < 0$ şi imaginea lui z se află în cadranul IV, deci $t^* \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Deoarece $\frac{a}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. $t^* = \frac{a}{2} + \pi$ şi

$$z = 2\left|\cos\frac{a}{2}\right|\left[\cos\left(\frac{a}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{a}{2} + \pi\right)\right].$$

3° Dacă $a = \pi$, $z = 0$ şi $\arg z$ nu este determinat.

5. Să se determine mulţimea punctelor din plan al căror afix z verifică condiţiile:

a) $|z| \leqslant 2$.

b) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$, $z \neq 0$.

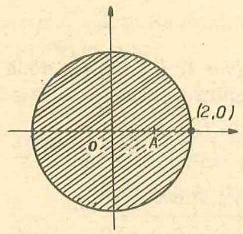


Fig. III.4.

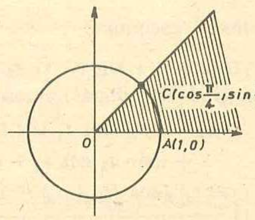


Fig. III.5.

a) Dacă $z = x + iy$, inegalitatea a) este echivalentă cu relaţia $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2$, deci mulţimea cerută este

$$\{M(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\},$$

adică discul $[\mathscr{C}(O, 2)]$ (fig. III.4).

b) Mulţimea căutată este $\{M(x, y) \mid x > 0 \text{ şi } 0 < y < x\} = \operatorname{Int}\widehat{AOC}$, unde $C\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$ (fig. III.5).

Exerciţii

1. Să se determine mulţimea punctelor din plan ale căror afixe z satisfac:

a) $|z| = 1$; b) $\pi < \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2}$; $z \neq 0$;

c) $\arg z > \frac{4\pi}{3}$, $z \neq 0$; d) $|z + i| \leqslant 2$.

2. Să se afle forma trigonometrică a următoarelor numere complexe:

$z_1 = 5$; $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_4 = -i$;

$z_5 = -2$; $z_6 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $z_7 = 3 - 2i$, $z_8 = 1 + i\operatorname{tg} a$, unde $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

3. Să se determine modulele şi argumentele numerelor: $z_1 = \cos a - i\sin a$, $z_2 = \sin a + i\cos a$, $z_3 = \sin a + i(1 + \cos a)$, $z_4 = \cos a + \sin a + i(\sin a - \cos a)$, unde $a \in \mathbf{R}$.

§ 2. Operaţii cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică

Operaţia de adunare şi scădere a numerelor complexe scrise sub formă trigonometrică nu prezintă un interes deosebit din punct de vedere al calculării (se adună sau se scad părţile reale, respectiv părţile imaginare).

Înmulţirea numerelor complexe

Fie $z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$ şi $z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$ două numere complexe. Înmulţind cele două numere complexe avem:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2) +$$
$$+ i(\sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos (t_1 + t_2) + i \sin (t_1 + t_2)], \text{ deci}$$

(1) $$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos (t_1 + t_2) + i \sin (t_1 + t_2)]}$$

Rezultă că $|z_1 z_2| = r_1 r_2$, adică

(2) $$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

şi $t_1 + t_2$ este un argument al lui $z_1 z_2$, deci

(3) $$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$$

sau

(3′) $$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 - 2k\pi,$$

unde $k \in \{0, 1\}$ se alege astfel ca membrul II să aparţină intervalului $[0, 2\pi)$. Astfel am arătat că:

Modulul produsului a două numere complexe este egal cu produsul modulelor celor două numere, iar un argument al produsului este suma a cîte unui argument al numerelor date.

Dacă $z_1 = 0$ sau $z_2 = 0$, argumentul respectiv nu este determinat, dar atunci $z_1 z_2 = 0$ şi nici $\arg(z_1 z_2)$ nu este determinat.

Rezultă interpretarea geometrică a produsului $z_1 z_2$: dacă M_1, M_2 sînt imaginile lui z_1, z_2 şi P_1, P_2 intersecţiile cercului $\mathscr{C}(O, 1)$ cu $(OM_1$, $(OM_2$, se ia arcul $\widehat{P_2P_3} \equiv \widehat{AP_1}$ în sensul creşterii argumentelor şi se determină punctul $M_3 \in (OP_3$ astfel ca $OM_3 = OM_1 \cdot OM_2$. Atunci M_3 este imaginea lui $z_1 z_2$ (fig. III.6).

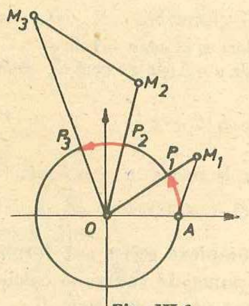


Fig. III.6.

Arătaţi că $\Delta OAM_1 \sim \Delta OM_2M_3$.

Formula (1) se poate generaliza pentru n numere complexe: Dacă

$$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1),\ z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2),\ \ldots,\ z_n = r_n(\cos t_n + i \sin t_n), \text{ atunci}$$

(4) $$z_1 z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n[\cos (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) + i \sin (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)].$$

Demonstraţi formula (4) prin inducţie matematică!

Exemplu. Să se determine modulul şi argumentul redus al produsului $(-1 + i\sqrt{3})(2 - 2i)$.

Soluţie. $z_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ şi $z_2 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$, deci

$$z_1 z_2 = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{4}\right)\right] =$$
$$= 4\sqrt{2}\left(\cos \frac{29\pi}{12} + i \sin \frac{29\pi}{12}\right).$$

Astfel $|z_1 z_2| = 4\sqrt{2}$ şi $\arg z_1 z_2 = \frac{29\pi}{12} - 2\pi = \frac{5\pi}{12}$.

Ridicarea la putere a unui număr complex

Fie $z = r(\cos t + i \sin t)$ un număr complex şi $n \in \mathbf{N}^*$. Aplicînd formula (4) în cazul $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, obţinem

$$z^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n \text{ ori}}[\cos \underbrace{(t + t + \ldots + t)}_{n \text{ ori}} + i \sin \underbrace{(t + t + \ldots + t)}_{n \text{ ori}}] =$$
$$= r^n(\cos nt + i \sin nt), \text{ adică}$$

5) $$\boxed{z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)}$$

Se observă, că

$$|z^n| = |z|^n \text{ şi } \operatorname{Arg} z^n = \{n \arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Exemplu. Să se calculeze $(1 - i)^{24}$.

Soluţie. Forma trigonometrică a numărului $z = 1 - i$ este $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$, deci aplicînd formula (5) avem $z^{24} = 2^{12}(\cos 42\pi + i \sin 42\pi) = 2^{12}(\cos 0 + i \sin 0) = 2^{12}$.

În cazul $r = |z| = 1$ formula (5) ne dă

(6) $$\boxed{(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt}$$

Formula (6) valabilă pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, se numeşte *formula lui Moivre*.

Aplicaţie. Folosind formula lui Moivre putem afla formule pentru $\cos 3t$ şi $\sin 3t$. Avem în virtutea lui (6):

(7) $$(\cos t + i \sin t)^3 = \cos 3t + i \sin 3t.$$

Calculînd direct putem scrie

$$(\cos t + i \sin t)^3 = \cos^3 t + 3 i \cos^2 t \sin t + 3i^2 \cos t \sin^2 t + i^3 \sin^3 t =$$
$$= \cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t + i(3 \cos^2 t \cdot \sin t - \sin^3 t).$$

Ținînd seama și de (7) se obține:

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

$$\sin 3t = 3\cos^2 t \sin t - \sin^3 t = 3\sin t - 4\sin^3 t.$$

Împărțirea a două numere complexe

Fie $z_1 = r_1(\cos t_1 + \mathrm{i} \sin t_1)$ și $z_2 = r_2(\cos t_2 + \mathrm{i} \sin t_2) \neq 0$ două numere complexe și

$$\frac{z_1}{z_2} = z = r(\cos t + \mathrm{i} \sin t). \tag{8}$$

Atunci $zz_2 = z_1$, deci conform formulelor (2) și (3')

$$rr_2 = r_1 \text{ și } t + t_2 = t_1 + 2k\pi, \text{ unde } k \in \mathbf{Z}.$$

Așadar

$$r = \frac{r_1}{r_2} \text{ și } t = (t_1 - t_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

și înlocuind aceste valori în (8) obținem

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1 - t_2) + \mathrm{i} \sin(t_1 - t_2)]. \tag{9}$$

Putem scrie:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \{\arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}. \tag{10}$$

Astfel am arătat că:

Modulul cîtului a două numere complexe, diferite de zero, este egal cu cîtul modulelor celor două numere, iar un argument al cîtului este diferența a cîte unui argument al numerelor date.

Din construcția imaginii produsului rezultă și construcția imaginii cîtului. Pe figura III.7 M_1, M_2, Q sînt respectiv imaginile lui z_1, z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.

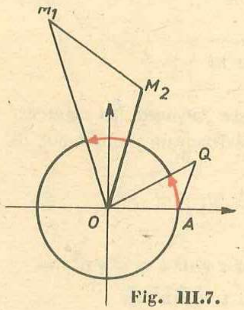


Fig. III.7.

Exemplu. Să se determine modulul și argumentul redus al numărului $z = \frac{(1+\mathrm{i})^8}{(\sqrt{3} - \mathrm{i})^8}$.

Soluție.

$$z = \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^8}{\left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^3} =$$

$$= \frac{2^4(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi)}{2^3\left(\cos\frac{11\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{2}\right)} =$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\mathrm{i}.$$

Astfel $|z| = 2$ și $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

Exerciții

1. Să se calculeze produsul $(2\sqrt{3} + 2\mathrm{i})(-1 + \mathrm{i})(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$ sub formă trigonometrică.

2. Să se determine modulele și argumentele reduse ale următoarelor numere complexe:

a) $(2 + \mathrm{i}\sqrt{12})^6$; b) $(-1 + \mathrm{i})^6$; c) $\left(\frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}}\right)^{16}$;

d) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}\mathrm{i} - 1}\right)^{12}$; e) $\frac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})^{16}}{(1 + \mathrm{i})^9} + \frac{(\sqrt{3} + \mathrm{i})^{16}}{(1 - \mathrm{i})^9}$;

f) $\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9$.

3. Să se calculeze:

a) $(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{60}$; b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}$;

c) $(1 - \cos a + \mathrm{i}\sin a)^n$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

4. Știind că $z + \frac{1}{z} = 2\cos a$, $a \in \mathbf{R}$, să se calculeze

$$z^n + \frac{1}{z^n}.$$

5. Să se demonstreze că formula lui Moivre este adevărată și în cazul cînd n este un număr întreg negativ.

6. Să se demonstreze

$$\left(\frac{1 + \mathrm{i}\operatorname{tg} t}{1 - \mathrm{i}\operatorname{tg} t}\right)^n = \frac{1 + \mathrm{i}\operatorname{tg} nt}{1 - \mathrm{i}\operatorname{tg} nt}, \quad t \in \mathbf{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\} \text{ și } n \in \mathbf{N}^*.$$

§ 3. Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex

Definiție. Fie z un număr complex nenul și $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. Se numește *rădăcină de ordinul n a lui z* orice număr complex Z, care verifică ecuația

$$Z^n = z. \tag{1}$$

Teoremă. Fie $z = r(\cos t^* + \mathrm{i}\sin t^*)$ un număr complex, $\arg z = t^*$. Numărul z are n rădăcini distincte de ordinul n, și anume:

$$Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^* + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{t^* + 2k\pi}{n}\right), \tag{2}$$

$$k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Demonstrație. Scriind pe Z sub formă trigonometrică $Z = R(\cos T + i \sin T)$, $R > 0$, $T \in \mathbf{R}$, ecuația (1) este echivalentă cu relațiile:

$$R^n = r, \tag{3}$$

$$nT = t^* + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

Deoarece r este un număr real pozitiv, rezultă că ecuația (3) are o soluție unică: $R = \sqrt[n]{r}$. Din (4) rezultă că

$$T = \frac{t^* + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbf{Z}. \tag{5}$$

Am obținut mulțimea rădăcinilor de ordinul n ale lui z:

$$Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^* + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{t^* + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbf{Z}. \tag{6}$$

Se pune problema: cîte dintre valorile Z_k sînt distincte? Pentru $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ obținem argumente reduse diferite:

$$T_0 = \frac{t^*}{n},\ T_1 = \frac{t^* + 2\pi}{n},\ T_2 = \frac{t^* + 4\pi}{n}, \ldots, \tag{7}$$

$$T_k = \frac{t^* + 2k\pi}{n}, \ldots, T_{n-1} = \frac{t^* + 2(n-1)\pi}{n},$$

deoarece pentru $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $T_k \in [0, 2\pi)$, iar diferența dintre T_i și T_k nu este multiplu întreg de 2π, dacă $i \neq k$.

Pentru $k = n$ obținem

$$T_n = \frac{t^* + 2n\pi}{n} = \frac{t^*}{n} + 2\pi,$$

care diferă de T_0 cu 2π, deci $Z_n = Z_0$. Dacă k este un întreg oarecare, îl scriem sub forma $k = q \cdot n + r$ cu $r, q \in \mathbf{Z}$ și $0 \leqslant r < n$ și observăm că

$$T_k = \frac{t^* + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{t^* + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

deci $Z_k = Z_r$ și astfel am demonstrat că printre numerele complexe (6) există exact n numere distincte:

$$Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}.$$

În particular, dacă $z = 1$, rădăcinile ecuației

$$Z^n = 1 \tag{8}$$

se numesc *rădăcinile de ordinul n ale unității.*

Deoarece $1 = \cos 0 + i \sin 0$, rădăcinile de ordinul n ale unității, pe care le notăm cu ε_k, sînt:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n},\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}. \tag{9}$$

Problemă rezolvată. *Imaginile rădăcinilor de ordinul $n(n \geqslant 3)$ ale unui număr complex $z \neq 0$ sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul de centru O și de rază $|z|^{\frac{1}{n}}$.*

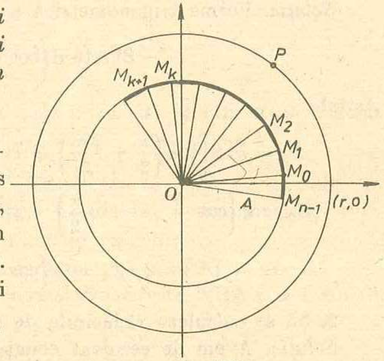


Fig. III.8.

Rezolvare. Fie $z = r(\cos t^* + i \sin t^*)$ un număr complex scris sub formă trigonometrică, $t^* = \arg z$, $|z| = r$. Imaginea lui z este un punct P pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ (fig. III.8). Fie $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ imaginile lui $Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t^* + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{t^* + 2k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Deoarece $OM_k = |Z_k| = \sqrt[n]{r}$, aceste puncte aparțin cercului $\mathcal{C}(O, \sqrt[n]{r})$. Pe de altă parte imaginile M_k, M_{k+1} ale numerelor complexe Z_k, Z_{k+1} sînt două puncte pe acest cerc, pentru care

$$\arg Z_k = \frac{t^* + 2k\pi}{n},\quad \arg Z_{k+1} = \frac{t^* + 2(k+1)\pi}{n}.$$

Diferența celor două argumente este măsura unghiului

$$\widehat{M_k O M_{k+1}},$$

deci

$$\mu(\widehat{M_k O M_{k+1}}) = \arg Z_{k+1} - \arg Z_k = \frac{2\pi}{n},$$

și astfel arcele mici $\overset{\frown}{M_0M_1}, \overset{\frown}{M_1M_2}, \overset{\frown}{M_2M_3}, \ldots, \overset{\frown}{M_kM_{k+1}}, \ldots, \overset{\frown}{M_{n-1}M_0}$ sînt congruente și le corespund coarde congruente:

$$(M_0M_1) \equiv (M_1 M_2) \equiv \ldots \equiv (M_kM_{k+1}) \equiv$$
$$\equiv \ldots \equiv (M_{n-1}M_0),$$

deci problema este rezolvată.

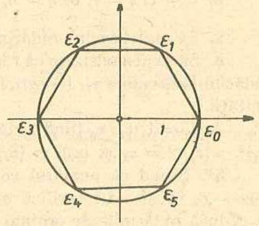


Fig. III. 9.

Se observă că în cazul rădăcinilor de ordinul n ale unității $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, imaginile acestora sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 1)$, unde vîrful M_0 are coordonate $(1, 0)$, deoarece $\varepsilon_0 = 1$ (fig. III.9 în cazul $n = 6$).

Exemple **1.** Să se calculeze rădăcinile de ordinul 3 ale lui $-8i$.

Soluție. Forma trigonometrică a numărului complex

$$-8i \text{ este } 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Astfel

$$Z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right].\ k \in \{0, 1, 2\}.$$

$$Z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,\ Z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} - i,\ Z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

2. Să se calculeze rădăcinile de ordinul 6 ale unității.

Soluție. Avem de rezolvat ecuația $Z^6 = 1$. Rădăcinile ecuației sînt:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3},\ \text{unde } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

adică

$$\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,\ \varepsilon_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exerciții

1. Să se calculeze rădăcinile de ordinul n ale lui z în următoarele cazuri:

a) $n = 2, z = i$; b) $n = 6, z = -i$; c) $n = 4, z = \sqrt{3} + i$; d) $n = 3,\ z = \dfrac{1+i}{1-i}$.

2. Să se determine rădăcinile de ordinul 3, 4 și 8 ale unității.

3. Să se demonstreze că rădăcinile de ordinul n ale unității sînt egale cu puterile unei rădăcini particulare ε_1. (O astfel de rădăcină se numește *rădăcină primitivă* de ordinul n a unității.)

4. $\varepsilon_0 = 1$, ε_1, ε_2 fiind rădăcinile de ordinul trei ale unității, să se arate că: $\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_1$, $(\varepsilon_1)^2 = (\varepsilon_1)^{-1} = \varepsilon_2$ și $(\varepsilon_2)^2 = (\varepsilon_2)^{-1} = \varepsilon_1$.

5*. Știind că numărul complex Z verifică ecuația $Z^4 = z$, să se arate că numerele $-Z$, iZ și $-iZ$ verifică aceeași ecuație. *Aplicație*: Să se calculeze $(1 - 2i)^4$ și să se deducă rădăcinile de ordinul patru ale numărului $-7 + 24i$.

6*. Să se arate că, dacă numerele naturale m și n sînt prime între ele, atunci ecuațiile $z^m - 1 = 0$ și $z^n - 1 = 0$ au o singură rădăcină comună.

§ 4. Ecuații binome

Definiție. O ecuație de forma

(1) $$z^n + c = 0,\ c \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$$

se numește *ecuație binomă*.

Pentru a rezolva ecuația (1) vom scrie numărul $-c$ sub formă trigonometrică. Astfel ecuația (1) este echivalentă cu

$$z^n = r(\cos t + i\sin t),$$

deci rădăcinile ecuației (1) sînt rădăcinile de ordinul n ale numărului complex $-c$. Astfel, ecuația dată are n rădăcini diferite.

Exemple. **1.** Să se rezolve ecuația binomă $z^3 - 8 = 0$.

Soluție. Forma trigonometrică a numărului 8 este $8(\cos 0 + i\sin 0)$. Rădăcinile ecuației sînt:

$$z_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right),\ k \in \{0, 1, 2\};\ z_0 = 2,$$

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3};\ z_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

2. Să se rezolve ecuația

$$z^8 + (1 - i)z^4 - i = 0.$$

Soluție. Ecuația dată este o ecuație de gradul doi în z^4. Obținem: $z^4 = i$ sau $z^4 = -1$. Soluțiile acestor ecuații binome sînt:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i),\ \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} \pm i\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right).$$

3. Scriind rădăcinile ecuației $z^5 - 1 = 0$ sub formă trigonometrică și rezolvînd această ecuație și pe cale algebrică, să se afle $\cos\frac{2\pi}{5}$ și $\sin\frac{2\pi}{5}$. Să se deducă valorile lui $\sin\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{10}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$ și să se calculeze lungimile laturilor unui decagon regulat și ale unui pentagon regulat, înscrise într-un cerc de rază R.

Soluție. Rădăcinile ecuației $z^5 - 1 = 0$ sînt

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Pe de altă parte $z^5 - 1 = (z - 1)z^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1\right)$ și notînd $z + \frac{1}{z} = y$ (în conformitate cu metoda de rezolvare a ecuațiilor reciproce), găsim $z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2$.

$$y^2 + y - 1 = 0,\ y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

deci

$$z^2 + \frac{\alpha\sqrt{5}+1}{2} z + 1 = 0, \text{ unde } \alpha = \pm 1.$$

$$z_{1,2,3,4} = -\frac{\alpha\sqrt{5}+1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10-2\alpha\sqrt{5}}}{4}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

de unde

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$l_{10} = 2R\sin\frac{\pi}{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad l_5 = 2R\sin\frac{\pi}{5} = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Exerciții

1. Să se rezolve următoarele ecuații binome:
a) $z^3 - 27 = 0$, b) $z^4 + 625 = 0$, c) $z^3 + 1 = 0$, d) $(2-3i)z^6 + 1 + 5i = 0$.
2. Să se rezolve ecuațiile:
a) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$, b) $z^8 - 2z^4 + 2 = 0$,
c) $z^4 + 6(1+i)z^2 + 5 + 6i = 0$, d) $z^6 - 7iz^3 + 8 = 0$.
3. Să se rezolve ecuația $\bar{z} = z^{n-1}$, $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
Indicație. $|z^{n-1}| = |z|^{n-1}$ și deoarece $|\bar{z}| = |z|$, rezultă $|z| = 0$ sau $|z| = 1$. În cazul $z \neq 0$, înmulțim ecuația dată cu z și obținem $z^n = 1$.

§ 5. Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

Probleme rezolvate. Dacă punctele M_1, M_2 *au afixele* z_1, z_2, *atunci mijlocul* M *al segmentului* $[M_1M_2]$ *are afixul* $\frac{z_1+z_2}{2}$.

Rezolvare. Fie $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Deoarece coordonatele lui M_1, M_2 sînt (x_1, y_1), (x_2, y_2), M are coordonatele $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Rezultă că afixul lui M este

$$\frac{x_1+x_2}{2} + i\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}{2} = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

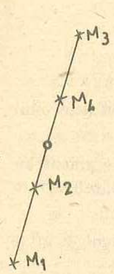


Fig. III.10.

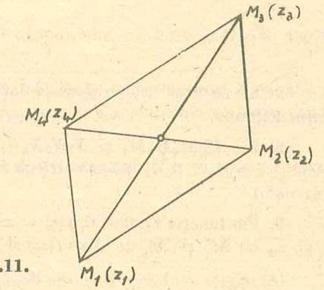


Fig. III.11.

Problema 2. Dacă punctele M_1, M_2, M_3, M_4 sînt coliniare și segmentele $[M_1M_3]$, $[M_2M_4]$ au același mijloc, atunci $M_1M_2M_3M_4$ se numește *paralelogram degenerat* (fig. III.10). Să se demonstreze că imaginile numerelor complexe z_1, z_2, z_3, z_4 *sînt vîrfurile unui paralelogram* $M_1M_2M_3M_4$ *(propriu sau degenerat) dacă și numai dacă*

$$(1) \qquad z_1 + z_3 = z_2 + z_4.$$

Rezolvare. Dacă $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram propriu sau degenerat (fig. III.11) $[M_1M_3]$ și $[M_2M_4]$ au același mijloc. Deci afixele z_i ale punctelor M_i verifică relația

$$\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{z_2+z_4}{2}$$

și rezultă (1). Reciproc, din (1) deducem că $[M_1M_2]$ și $[M_2M_4]$ au același mijloc. Dacă punctele M_i nu sînt coliniare $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram propriu-zis, iar dacă sînt coliniare, atunci conform definiției, $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram degenerat.

Observație. Dacă M, M' *sînt imaginile lui* z, z', *atunci imaginea sumei* $z + z'$ *este cel de-al patrulea vîrf* P *al paralelogramului (eventual degenerat)* $MOM'P$ (fig. III. 12), *iar imaginea diferenței* $z - z'$ *este vîrful* Q *al paralelogramului* $OM'MQ$ (fig. III.13).

Deoarece $MM' = OQ$, avem și următorul

Corolar. *Dacă* M, M' *au afixele* z, z', *atunci*

$$(2) \qquad M'M = |z - z'|.$$

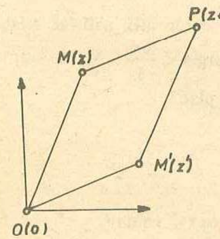


Fig. III.12.

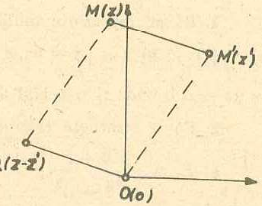


Fig. III.13.

Exerciții

1. Să se arate că mijloacele laturilor unui patrulater oarecare sînt vîrfurile unui paralelogram.

2. Fie $M_1M_2M_3M_4$ și $N_1N_2N_3N_4$ două paralelograme și P_i mijloacele segmentelor $[M_iN_i]$, $i \in (1, 2, 3, 4)$. Să se arate că $P_1P_2P_3P_4$ este un paralelogram sau un paralelogram degenerat.

3. Fie funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az + b(a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0)$. Dacă M_1 și M_2 sînt de afixe z_1 și z_2, iar M'_1 și M'_2 de afixe $f(z_1)$ și $f(z_2)$, să se arate că

$$M'_1M'_2 = |a| \cdot M_1M_2. \tag{3}$$

Avem

$$M'_1M'_2 = M_1M_2, \text{ dacă și numai dacă } |a| = 1. \tag{4}$$

(Egalitatea (3) definește asemănarea, iar egalitatea (4) definește izometria.)

4. Arătați că funcția $z \to \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ definește o izometrie. (Vezi exercițiul 3.)

5. Fie M_1, M_2 de afixe z_1, $z_2 \neq 0$ și $z_2 = \alpha z_1$. Să se arate că semidreptele $(OM_1$, $(OM_2$ coincid (respectiv sînt opuse) dacă și numai dacă $\alpha > 0$ (respectiv $\alpha < 0$).

6. Se consideră punctele M_1, M_2, M_3 de afixe z_1, z_2, z_3, $M_1 \neq M_2$. Să se arate:

a) $M_3 \in (M_1M_2 \Leftrightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0.$

b) $M_3 \in M_1M_2 \Leftrightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$

Indicație. Se construiesc imaginile lui $z_2 - z_1$ și $z_3 - z_1$ în conformitate cu problema 2 rezolvată și se ține cont de exerc. 5.

7*. Demonstrați teorema lui Pompeiu: Dacă punctul M din planul triunghiului echilateral $M_1M_2M_3$ nu aparține cercului circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$, atunci există un triunghi avînd lungimile laturilor MM_1, MM_2, MM_3.

Indicație. Putem presupune că afixele lui M_1, M_2, M_3 sînt 1, ε, ε^2 unde $\varepsilon^3 = 1$. Se folosește egalitatea $(z - 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) = (z - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)$, valabilă pentru orice $z \in \mathbb{C}$

Exerciții recapitulative

1. Să se reprezinte mulțimile punctelor din plan ale căror afix satisfac relațiile a) $|z| \geqslant 1$; b) $1 < |z - 1| < 2$; c) $|z - i| < 1$; d) $0 < \arg z < \dfrac{5\pi}{6}$; e) $|z - z_1| = |z - z_2|$, unde z_1 și z_2 sînt afixele a două puncte fixe din plan.

2. Să se efectueze calculele:

a) $E_1 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{(\sqrt{3} - i)^5}$,

b) $E_2 = 1 + 3(\cos t + i \sin t) + 3(\cos t + i \sin t)^2 + (\cos t + i \sin t)^3$.

3. Fie expresia $E(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 1 - i$; să se calculeze $E(1 + i)$.

4. Să se afle poziția celui de al treilea vîrf al triunghiului echilateral, afixele a două vîrfuri fiind $z_1 = 1$; $z_2 = 2 + i$.

5*. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe, nenule, distincte două cîte două și de module egale. Să se demonstreze că, dacă $z_1 + z_2z_3$; $z_2 + z_3z_1$ și $z_3 + z_1z_2$ sînt numere reale, atunci $z_1z_2z_3 = 1$.

6. Notînd cu G mulțimea rădăcinilor de ordinul n ale unității, $G = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1})$, să se demonstreze că

a) $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in G$, $\forall i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$,

b) $\varepsilon_i^{-1} \in G$, $\forall\, i \in \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$.

7. Să se determine numerele complexe de modul unu care satisfac relația:

$$\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1.$$

8*. Fie ecuația $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ și $\arg a + \arg c = 2 \arg b$ și $|a| + |c| = |b|$. Să se arate că ecuația dată are cel puțin o rădăcină de modul unitar.

9*. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe nenule, astfel ca $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

a) Să se demonstreze că există numerele complexe α și β astfel ca $z_2 = \alpha z_1$, $z_3 = \beta z_1$ și $|\alpha| = |\beta| = 1$.

b) Să se rezolve ecuația $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 0$ în raport cu una dintre necunoscute.

c) Folosind eventual rezultatele de la punctele a) și b) să se demonstreze că dacă $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$, atunci avem $z_1 = z_2 = z_3$, sau numerele z_1, z_2 și z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.