Lei 11,10

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

IX

Matematică

Algebră

Manual pentru clasa a IX-a

Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988

19. Să se calculeze:

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{y^{19}}} \cdot \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{xy^{-1}}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{x^{-\frac{3}{8}}}{y^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{4}{3}},$$

pentru $x = 5$; $y = 20$.

29. Să se calculeze:

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} (x^{-1} + y^{-1}) + \frac{2}{\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^{3}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right),$$

dacă se dă că:

$$\sqrt[3]{x} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^{-\frac{1}{3}}; \quad \sqrt[7]{y} = \sqrt[7]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}.$$

21. Să se arate că, pentru orice $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ și $\sqrt{abc} > 2$, are loc identitatea

$$\frac{\sqrt{\frac{abc + 4}{a} - 4\sqrt{\frac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc} - 2} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

CAPITOLUL VI

NUMERE COMPLEXE

Prin introducerea numerelor reale se pot exprima rezultatele oricăror măsurători, dar problema soluțiilor ecuațiilor de orice tip, cu coeficienți reali, nu este rezolvată. Ecuații simple ca $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ nu au soluții în mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale. De aceea, se pune în mod necesar problema extinderii în continuare a noțiunii de număr. Această extindere conduce la noțiunea de număr complex. Vom arăta la sfîrșitul acestui capitol că mulțimea numerelor complexe este suficient de largă, încît orice ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali să aibă soluții în această mulțime.

Numerele complexe nu reprezintă rezultatul unor măsurători și de aceea teoria numerelor complexe are un caracter mai abstract, mai formal decît teoria numerelor reale. Remarcăm că în pofida acestui grad de abstractizare a noțiunilor, teoria numerelor complexe, prin implicațiile sale, are multiple aplicații practice (de exemplu, în: mecanică, electrotehnică, fizică atomică ș.a.).

§1. MULȚIMEA NUMERELOR COMPLEXE

1.1. Definirea numerelor complexe

Prezentăm acum construcția mulțimii numerelor complexe, plecînd de la mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale.

Fie produsul cartezian

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\},$$

adică mulțimea perechilor ordonate de numere reale.

Precizăm că, două perechi (a, b) și (a', b') sînt *egale* dacă și numai dacă $a = a'$ și $b = b'$. Astfel egalitatea $(a, b) = (a', b')$ este echivalentă cu două egalități de numere reale: $a = a'$ și $b = b'$.

Definim pe mulțimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ două operații algebrice: *adunarea* și *înmulțirea*.

Dacă $z = (a, b)$ şi $z' = (a', b')$ aparţin mulţimii $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, atunci definim:

$$z + z' = (a + a', b + b'). \tag{1}$$

Elementul $(a + a', b + b')$ se numeşte *suma* dintre z şi z', iar operaţia prin care oricăror elemente z şi z' din mulţimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se asociază suma lor, se numeşte *adunare*.

De asemenea, definim:

$$zz' = (aa' - bb', ab' + a'b). \tag{2}$$

Elementul $(aa' - bb', ab' + a'b)$ se numeşte *produsul* dintre z şi z', iar operaţia prin care oricăror elemente z şi z' din mulţimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se asociază produsul lor, se numeşte *înmulţire*.

De *exemplu:*

$$(2, -1) + (-3, 1) = (2 - 3, -1 + 1) = (-1, 0),$$

$$(2, -1)(-3,1) = (2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1, 2 \cdot 1 + (-1)(-3)) = (-6 + 1, 2 + 3) = (-5, 5).$$

Definiţie. Fiecare element al mulţimii $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, pe care sînt definite cele două operaţii precedente (1) şi (2), se numeşte *număr complex*.

Se notează cu $\mathbf{C}$ *mulţimea numerelor complexe*.

Fie submulţimea lui $\mathbf{C}$:

$$R' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}.$$

Funcţia de la $\mathbf{R}$ la R' definită prin

$$a \to (a, 0)$$

este evident o funcţie bijectivă de la mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale în submulţimea R' a lui $\mathbf{C}$.

Mai mult, operaţiile de adunare şi înmulţire a numerelor complexe care aparţin mulţimii R' se transcriu astfel:

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0);$$

$$(a, 0)(a', 0) = (aa', 0).$$

Aceste relaţii arată că adunarea şi înmulţirea pe R' se fac după aceleaşi reguli ca adunarea şi înmulţirea numerelor reale. Din acest motiv rezultă că R' are aceleaşi proprietăţi aritmetice ca mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale. Acest fapt, permite să identificăm numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a. Practic, această identificare revine la a înlocui numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a şi invers.

Aşadar punem $(a, 0) = a$. În particular, numerele complexe $(0, 0)$ şi $(1, 0)$ sînt numerele reale 0 şi 1.

1.2. Proprietăţile adunării numerelor complexe

1° Adunarea este *comutativă*, adică oricare ar fi z şi z' din $\mathbf{C}$, avem

$$z + z' = z' + z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ şi $z' = (a', b')$, atunci avem $z + z' = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$. Analog avem $z' + z = (a' + a, b' + b)$. Cum însă adunarea numerelor reale este comutativă avem $a + a' = a' + a$ şi $b + b' = b' + b$. Deci $(a + a', b + b') = (a' + a, b' + b)$, adică $z + z' = z' + z$.

2° Adunarea este *asociativă*, adică oricare ar fi z, z' şi z'' din $\mathbf{C}$, avem

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ şi $z'' = (a'', b'')$, atunci avem $(z + z') + z'' = [(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = (a + a', b + b') + (a'', b'') = ((a + a') + a'', (b + b') + b'')$. Analog avem $z + (z' + z'') = (a + (a' + a''), b + (b' + b''))$. Cum însă adunarea numerelor reale este asociativă avem $(a + a') + a'' = a + (a' + a'')$ şi $(b + b') + b'' = b + (b' + b'')$. Deci $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

3° *Element neutru.* Numărul complex $0 = (0, 0)$ este *element neutru* pentru adunare adică oricare ar fi z din $\mathbf{C}$ avem

$$z + 0 = 0 + z = z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, atunci cum 0 este element neutru pentru adunarea numerelor reale, avem

$$z + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = z.$$

Dar după proprietatea 1°, avem de asemenea $0 + z = z$.

4° Orice număr complex are un *opus*, adică oricare ar fi z din $\mathbf{C}$ există un număr complex, notat cu $-z$, astfel încît

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, atunci $-z = (-a, -b)$, deoarece

$$z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = 0.$$

Conform proprietăţii 1° avem, de asemenea, $(-z) + z = 0$.

De exemplu:

dacă $z_1 = (2, 3)$, atunci $-z_1 = (-2, -3)$,

dacă $z_2 = (-1, 1)$, atunci $-z_2 = (1, -1)$.

Observaţie. Dacă z şi z' sînt numere complexe, suma $z + (-z')$ se notează, simplu prin $z - z'$ şi se numeşte *diferenţa* dintre z şi z'. Operaţia prin care oricăror două numere complexe z şi z' se asociază diferenţa lor se numeşte *scădere*.

Dacă $z = (a, b)$ şi $z' = (a', b')$, atunci avem formula:

$$z - z' = (a - a', b - b'). \tag{3}$$

De *exemplu:* dacă $z = (2, -5)$ şi $z' = (-3, 1)$, atunci $z - z' = z + (-z') = (2, -5) + [-(-3, 1)] = (2, -5) + (3, -1) = (5, -6)$.

1.3. Proprietățile înmulțirii numerelor complexe

1° Înmulțirea este *comutativă*, adică oricare ar fi z și z' din $\mathbb{C}$, avem:

$$zz' = z'z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$, atunci $zz' = (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$. Analog, avem $z'z = (a'a - b'b, a'b + ab')$. Cum adunarea și înmulțirea numerelor reale sînt operații comutative, avem $aa' - bb' = a'a - b'b$ și $ab' + a'b = a'b + ab'$.
Deci $zz' = z'z$.

2°. Înmulțirea este *asociativă*, adică oricare ar fi z, z' și z'' din $\mathbb{C}$, avem

$$(zz')z'' = z(z'z'').$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ și $z'' = (a'', b'')$, atunci $(zz')z'' = [(aa' - bb', ab' + a'b)](a'', b'') = ((aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + a''(ab' + a'b)) = (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + a''ab' + a''a'b)$. Analog, avem $z(z'z'') = (aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - ba''b', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - b'b''b)$. Avînd în vedere comutativitatea adunării și înmulțirii numerelor reale, rezultă că expresiile lui $(zz')z''$ și $z(z'z'')$ sînt aceleași; deci $(zz')z'' = z(z'z'')$.

3° *Element neutru.* Numărul complex $1 = (1, 0)$ este *element neutru* pentru înmulțire, adică oricare ar fi z din $\mathbb{C}$ avem

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ atunci cum 1 este element neutru pentru înmulțirea numerelor reale, avem

$$z \cdot 1 = (a, b)(1, 0) = (a, b) = z.$$

După proprietatea 1° avem, de asemenea, $1 \cdot z = z$.

4° Orice număr complex diferit de 0 are un *invers*, adică oricare ar fi $z \neq 0$ există un număr complex, notat cu z^{-1}, astfel încît

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

Fie $z = (a, b)$ diferit de $(0, 0)$, adică cel puțin una din componentele a sau b este nenulă, altfel spus, $a^2 + b^2 \neq 0$. Dacă (x, y) este un număr complex astfel încît $(a, b)(x, y) = (1, 0)$, atunci

$$(ax - by, bx + ay) = (1, 0).$$

De aici rezultă:

$$ax - by = 1,$$
$$bx + ay = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

După proprietatea 1° avem, de asemenea,

$$(x, y)(a, b) = (1, 0).$$

Deci

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Observația 1. În loc de z^{-1} $(z \neq 0)$, se folosește uneori notația $\frac{1}{z}$. Dacă $z' = (a', b')$ este un alt număr complex, atunci $z'z^{-1}$ se notează încă prin $\frac{z'}{z}$ și se numește *cîtul împărțirii* lui z' la z $(z \neq 0)$.

Cîtul $\frac{z'}{z}$ este definit de formula:

$$\frac{z'}{z} = \left(\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}, \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}\right) \tag{4}$$

Exemple:

1) dacă $z = (2, -1)$ atunci $z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{2}{4 + 1}, \frac{1}{4 + 1}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

2) dacă $z = (2, -1)$ și $z' = (1, -1)$, atunci

$$z'z^{-1} = \frac{z'}{z} = \left(\frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{4 + 1}, \frac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)}{4 + 1}\right) = $$
$$= \left(\frac{2 + 1}{5}, \frac{-2 + 1}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5}\right).$$

5°. ***Înmulțirea este distributivă față de adunare***, adică oricare ar fi z, z' și z'' din $\mathbb{C}$, au loc relațiile:

$$z(z' + z'') = zz' + zz''$$
$$(z + z')z'' = zz'' + z'z''.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ și $z'' = (a'', b'')$, atunci $z(z' + z'') = (a, b) \cdot [(a', b') + (a'', b'')] = (a, b)(a' + a'', b' + b'') = (a(a' + a'') - b(b' + b''), a(b' + b'') + (a' + a'')b) = (aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + a'b + a''b)$. Pe de altă parte, avem $zz' + zz'' = (a, b)(a', b') + (a, b)(a'', b'') = (aa' - bb', ab' + a'b) + (aa'' - bb'', ab'' + a''b) = (aa' - bb' + aa'' - bb'', ab' + a'b + ab'' + a''b)$. Avînd în vedere comutativitatea adunării numerelor reale, rezultă că expresiile lui $z(z' + z'')$ și $zz' + zz''$ sînt aceleași; deci $z(z' + z'') = zz' + zz''$.

Analog, se demonstrează cea de a doua relație pe care o lăsăm ca exercițiu.

Observația 2. Să observăm că numărul complex $(0, 1)$ are proprietatea $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Rezultă deci că $(0,1)$ este o rădăcină a ecuației $x^2 + 1 = 0$. Așadar, această ecuație are soluții în mulțimea numerelor complexe, ceea ce nu era posibil în mulțimea numerelor reale.

§2. FORMA ALGEBRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

2.1. Notația $z = (a, b)$, introdusă pentru numerele complexe, nu este prea comodă în calculele cu numere complexe. De aceea, de obicei, se folosește o altă scriere a numerelor complexe. Convenim să notăm numărul com-

9 — Matematică-algebră, cl. a IX-a

plex (0, 1) prin i. Atunci, după regulile de adunare și înmulțire a numerelor complexe, avem:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)\,(0, 1).$$

Deoarece $(a, 0)$ și $(b, 0)$ se identifică cu a respectiv b, iar $(0, 1)$ s-a notat cu i, atunci această scriere se reprezintă sub forma

$$(a, b) = a + bi.$$

Această expresie se numește *forma algebrică* a numărului complex (a, b).

De *exemplu:*

$$(2, -1) = 2 + (-1)i = 2 - i;$$

$$(1, 0) = 1 + 0 \cdot i = 1;$$

$$(0, -5) = 0 + (-5)i = -5i.$$

În continuare vom scrie numerele complexe sub forma lor algebrică.

Numărul complex i se numește *unitate imaginară*. Numerele de forma bi, cu b număr real, se numesc *imaginare*. Dacă numărul complex z se scrie sub forma $z = a + bi$, atunci a se numește *partea reală*, iar bi *partea imaginară* a numărului z. Numărul b se numește *coeficientul părții imaginare**.

De exemplu, pentru numărul complex $4 + 5i$, partea reală este 4, iar partea imaginară $5i$; coeficientul părții imaginare este egal cu 5. Pentru numărul $-2i$, partea reală este 0, cea imaginară $-2i$, iar coeficientul părții imaginare este -2. Pentru numărul 3, partea reală este 3, cea imaginară este $0 \cdot i = 0$, iar coeficientul părții imaginare este egal cu 0.

Reluăm mai jos adunarea și înmulțirea a două numere complexe reprezentate sub forma lor algebrică. Astfel:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i; \tag{1'}$$

$$(a + bi)\,(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i. \tag{2'}$$

Deci, *suma a două numere complexe este un număr complex a cărui parte reală, respectiv imaginară, este suma părților reale, respectiv imaginare, ale numerelor date.*

Formula (2′) care dă înmulțirea a două numere complexe este mai greu de reținut și chiar de formulat. Observăm însă că, dacă $z = a + bi$ și $z' = a' + b'i$ sînt numere complexe, atunci avînd în vedere proprietățile operațiilor pe $\mathbb{C}$ rezultă:

$$(a + bi)\,(a' + b'i) = aa' + (ab' + a'b)i + bb'i^2.$$

Dar, înlocuind $i^2 = -1$ în ultima relație, se obține formula (2′).

* Pentru un număr complex $z = a + bi$ se notează, uneori, $a = \mathrm{Re}(z)$, care se citește „real de z" și $b = \mathrm{Im}(z)$, care se citește „imaginar de z".

2.2. Numere complexe conjugate

Dacă $z = a + bi$ este un număr complex, atunci numărul $a - bi$, notat prin $\bar{z}$ (adică z barat) sau $\overline{a + bi}$ se numește *conjugatul* său. Evident, conjugatul lui $\bar{z}$ este z. De aceea, numerele complexe z și $\bar{z}$ se numesc *conjugate*.

Dacă a este un număr real oarecare, atunci

$$a = a + 0i = a - 0i = \bar{a},$$

și deci a este egal cu conjugatul său. Mai mult, dacă $a + bi$ este un număr complex, astfel încît $a + bi = a - bi$, atunci $b = -b$, de unde $b = 0$. Deci $a + bi = a + 0i = a$ este un număr real.

Astfel, am arătat că: *dintre toate numerele complexe, numerele reale (și numai ele) sînt egale cu conjugatele lor.*

Avem următoarele proprietăți:

1° *Suma și produsul a două numere complexe conjugate sînt numere reale.*

Într-adevăr, $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ și

$$z\bar{z} = (a + bi)\,(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2° Oricare ar fi numerele complexe z și z' avem

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}',$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'.$$

Într-adevăr, dacă $z = a + bi$ și $z' = a' + b'i$, atunci

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + (b + b')i} = (a + a') - (b + b')i =$$
$$= (a - bi) + (a' - b'i) = \bar{z} + \bar{z}';$$

$$\overline{zz'} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + a'b)i} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i =$$
$$= (a - bi)\,(a' - b'i) = \bar{z}\bar{z}'.$$

Formulele (3) și (4), aplicate numerelor complexe scrise sub formă algebrică, dau relațiile:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i \tag{3'}$$

$$\frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}\,i. \tag{4'}$$

Pentru relația (3′) se poate da o regulă analoagă celei date pentru adunare. Observăm, de asemenea, că (4′) rezultă dacă amplificăm fracția $\frac{a' + b'i}{a + bi}$ prin conjugatul numitorului, care este $a - bi$.

În particular, așa se poate proceda și pentru aflarea inversului unui număr complex. Într-adevăr, dacă $a' + b'i = 1$ și $a + bi \neq 0$, atunci

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)\,(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i.$$

Exemple:

1) $\dfrac{7-i}{3+i} = \dfrac{(7-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{21-7i-3i-1}{9+1} = \dfrac{20-10i}{10} = 2 - i;$

2) $\dfrac{2+3i}{2+i} = \dfrac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{4-2i+6i+3}{4+1} = \dfrac{7+4i}{5} = \dfrac{7}{5} + \dfrac{4}{5}i;$

3) $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{1+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i.$

2.3. Modulul unui număr complex

Modulul unui număr complex $z = a + bi$ se definește ca fiind *numărul real* $\sqrt{a^2+b^2}$ și se notează prin $|z| = |a+bi|$.

Modulul unui număr complex $z = a + bi$ este întotdeauna pozitiv, el fiind egal cu zero dacă și numai dacă $a = b = 0$.

Exemple: $|1+3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, $|-1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,
$|2i| = |0+2i| = \sqrt{0+4} = 2$, $|4| = |4+0i| = \sqrt{16+0} = 4$.

Dacă z și z' sînt două numere complexe, atunci

1° $\quad |zz'| = |z|\,|z'|$;

2° $\quad |z'| - |z| \leqslant |z'+z| \leqslant |z'| + |z|$.

Să demonstrăm prima relație. Într-adevăr dacă

$z = a + bi$ și $z' = a' + b'i$, atunci $|zz'| = |(aa' - bb') + (ab' + a'b)i| =$

$$= \sqrt{(aa'-bb')^2 + (ab'+a'b)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2} = |z|\,|z'|.$$

A doua relație o lăsăm ca exercițiu. Noi însă o vom demonstra în paragraful următor pe cale vectorială.

2.4. Puterile numărului i

Conform observației 2 din paragraful 1.3 avem $i^2 = -1$. Atunci se deduce succesiv:

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i.$$

$$i^4 = i^3 i = (-i)i = 1.$$

În general, fie n un număr natural oarecare. Atunci numărul n se găsește într-una (și numai într-una) din următoarele situații:

1° $n = 4k$ (k, număr natural) și deci $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$;

2° $n = 4l + 1$ (l, număr natural) și deci $i^n = i^{4l+1} = i^{4l} \cdot i = 1 \cdot i = i$;

3° $n = 4p + 2$ (p, număr natural) și deci $i^n = i^{4p+2} = i^{4p} \cdot i^2 = 1(-1) = -1$;

4° $n = 4q + 3$ (q, număr natural) și deci $i^n = i^{4q+3} = i^{4q} \cdot i^3 = 1(-i) = -i$.

Așadar, puterile cu exponent natural ale lui i sînt elementele mulțimii $\{-1, 1, -i, i\}$.

De exemplu,

$$i^{25} = i^{4\cdot6+1} = (i^4)^6 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$
$$i^{18} = i^{4\cdot4+2} = (i^4)^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$$
$$i^{31} = i^{4\cdot7+3} = (i^4)^7 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$$

§3. REPREZENTAREA GEOMETRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

3.1. Amintim că numerele reale se pot reprezenta prin punctele unei axe. Mai precis, fie d o axă pe care fixăm o origine O și o unitate de măsură. Dacă asociem fiecărui punct al dreptei d abscisa sa, se obține o funcție bijectivă de la punctele acestei drepte în mulțimea numerelor reale.

Un număr complex, $z = a + bi$, este determinat prin două numere reale a și b. De aceea este natural ca să reprezentăm geometric numerele complexe prin punctele unui plan.

Fie pentru aceasta un plan π în care ne fixăm un sistem de axe ortogonale xOy. Fiecărui număr complex $z = a + bi$, i se asociază punctul M de coordonate (a, b) (fig. VI.1).

Punctul M se numește *imaginea geometrică*-a numărului complex $a + bi$, iar numărul $a + bi$ se numește *afixul punctului M*.

Din teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul dreptunghic OMM', se deduce că $OM = \sqrt{OM'^2 + MM'^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. Această egalitate ne arată că lungimea segmentului $[OM]$ este modulul numărului complex $z = a + bi$.

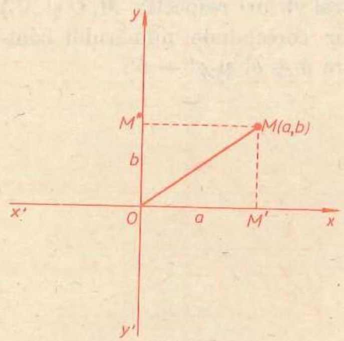

Fig. VI.1

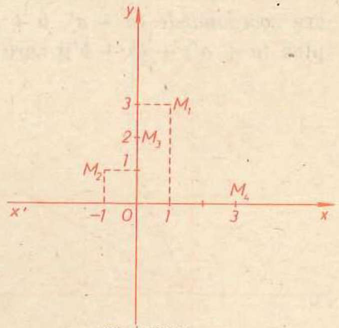

Fig. VI.2

Exemple. Numerelor complexe $1 + 3i$, $-1 + i$, $2i = 0 + 2i$, $3 = 3 + 0i$, li se asociază respectiv punctele $M_1(1, 3)$, $M_2(-1, 1)$, $M_3(0, 2)$, $M_4(3, 0)$ (fig. VI.2).

Avem $OM_1 = |1 + 3i| = \sqrt{10}$, $OM_2 = |-1-i| = \sqrt{2}$, $OM_3 = |2i| = 2$, $OM_4 = |3| = 3$.

Asocierea

$$z = a + bi \to M(a, b)$$

este o funcție bijectivă de la mulțimea numerelor complexe la punctele planului π. Prin această funcție, mulțimii numerelor reale îi corespunde axa $x'x$, iar mulțimii numerelor imaginare îi corespunde axa $y'y$. De aceea axa $x'x$ se numește axa reală, iar axa $y'y$ axa imaginară. Planul ale cărui puncte se identifică cu numerele complexe prin funcția bijectivă definită mai înainte se numește *planul complex*.

3.2. Interpretarea geometrică a adunării și scăderii numerelor complexe

Numerele complexe au și o altă interpretare geometrică. Să asociem fiecărui punct M al planului π vectorul $\overrightarrow{OM}$, care are originea în O și capătul în punctul M. Această asociere este evident o funcție bijectivă de la mulțimea numerelor complexe în mulțimea vectorilor care au originea în $O(0, 0)$. Astfel fiecare număr complex $a + bi$ poate fi reprezentat geometric ca vectorul $\overrightarrow{OM}$ unde M are coordonatele (a, b). Se spune că (a, b) sînt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$.

Reprezentarea numerelor complexe cu ajutorul vectorilor ne dă o interpretare simplă a adunării numerelor complexe:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$$

Este cunoscut că la adunarea vectorilor coordonatele corespunzătoare lor se adună. De aceea dacă vectorul $\overrightarrow{OM}$ (fig. VI.3) are coordonatele (a, b), iar vectorul $\overrightarrow{OM'}$ are coordonatele (a', b'), atunci *vectorul* $\overrightarrow{OS}$ (S fiind al patrulea vîrf al paralelogramului, care are celelalte trei vîrfuri respectiv M, O și M') are *coordonatele* $(a + a', b + b')$. Acest vector corespunde numărului complex $(a + a') + (b + b')i$ care este *suma* dintre $a + bi$ și $a' + b'i$.

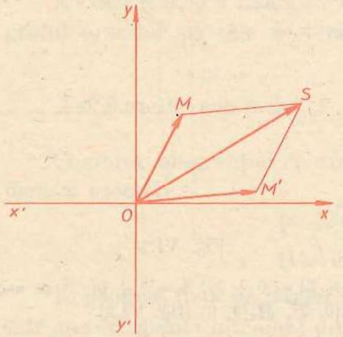

Fig. VI.3

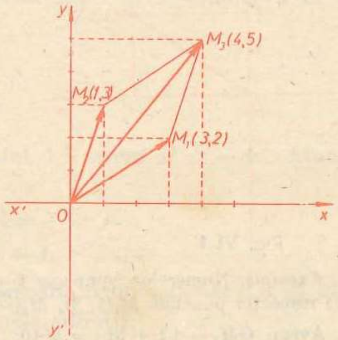

Fig. VI.4

Exemplu. Fie numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ și $z_2 = 1 + 3i$, reprezentate în plan prin vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$ unde: $M_1(3, 2)$ și $M_2(1, 3)$ (fig. VI.4). Atunci suma $z_3 = z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (1 + 3i) = 4 + 5i$ este reprezentată în plan prin vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ unde M_3 este punctul de coordonate $(4, 5)$.

Observăm, de asemenea, că opusul numărului $a + bi$, care este $-a -bi$, este reprezentat prin vectorul $\overrightarrow{OM_1}$, unde M_1 este simetricul punctului $M(a, b)$ față de origine (fig. VI.5). Astfel se deduce ușor interpretarea geometrică a scăderii a două numere complexe.

Cum $z' - z = z' + (-z)$, avînd în vedere interpretarea geometrică a adunării numerelor complexe, rezultă că D are coordonatele $(a' - a, b' - b)$ și vectorul $\overrightarrow{OD}$ corespunde diferenței

$$z' - z = (a' - a) + (b' - b)i.$$

Avem $OM = |z|$, $OM' = |z'|$, $OD = |z' - z|$ și $OS = |z' + z|$.

Relațiile dintre laturi în triunghiurile OMS și OMM' dau respectiv:

$$MS - OM \leqslant OS \leqslant MS + OM,$$

$$OM' - OM \leqslant MM' \leqslant OM' + OM.$$

Dar cum $MS = OM'$ și $MM' = OD$, rezultă:

$$|z'| - |z| \leqslant |z' + z| \leqslant |z'| + |z|,$$

$$|z'| - |z| \leqslant |z' - z| \leqslant |z'| + |z|.$$

Observație. Definiția produsului numerelor complexe are o interpretare geometrică mai puțin simplă. Aceasta se va face la geometrie, cu ajutorul reprezentării trigonometrice a numerelor complexe.

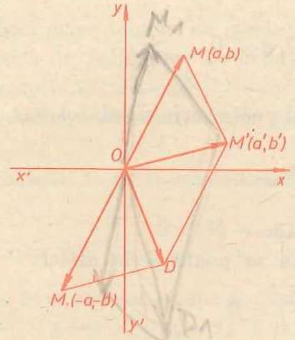

Fig. VI.5

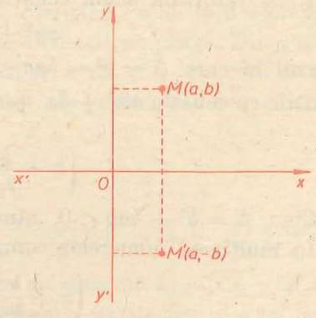

Fig. VI.6

3.3. Interpretarea geometrică a numerelor complexe conjugate

Dacă M este imaginea geometrică a numărului complex $a + bi$ (fig. VI.6), atunci simetricul M' al lui M față de axa reală este imaginea geometrică a conjugatului său, $a - bi$.

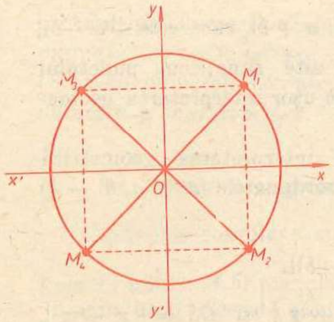

Fig. VI.7

Observăm, de asemenea, că numerele complexe de modul egal cu r se reprezintă în plan prin punctele cercului cu centrul în origine şi de rază egală cu r.

De exemplu, numerele: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, al căror modul este egal cu 1 se găsesc pe cercul cu centrul în origine şi de rază unitate (punctele M_1, M_2, M_3, M_4) (fig. VI.7).

§4. REZOLVAREA ECUAŢIEI DE GRADUL AL DOILEA CU COEFICIENŢI REALI

În capitolul I, am rezolvat ecuaţia de gradul al doilea cu coeficienţi reali, în cazul în care discriminantul său este pozitiv sau nul. Am arătat astfel că rădăcinile ecuaţiei

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$$

pentru $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$, sînt date de formulele:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

În acest caz rădăcinile ecuaţiei sînt numere reale.

1. Să rezolvăm acum ecuaţia

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$$

în cazul în care $\Delta=b^2-4ac<0$.

Ştim că ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ se mai poate scrie şi sub forma:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Cum $\Delta=b^2-4ac<0$, atunci $-\Delta=4ac-b^2>0$.

În mulţimea numerelor complexe ecuaţia se poate scrie astfel:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

sau

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0,$$

de unde

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=0 \text{ sau } x+\frac{b}{2a}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=0.$$

Deducem de aici că, *în acest caz, rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea sînt:*

$$x_1=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \text{ şi } x_2=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Aşadar, dacă $\triangle<0$ rădăcinile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ sînt *numere complexe conjugate.*

Relaţiile lui Viète sînt evident aceleaşi ca în cazul cînd $\triangle\geqslant 0$, adică

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

2. *Formarea ecuaţiei de gradul al doilea cînd se cunosc rădăcinile.*

Fie x_1 şi x_2 numere complexe date. Pentru ca ele să fie rădăcinile unei ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţi reali, trebuie ca x_1 şi x_2 să fie conjugate. Deci $x_1=a+bi$ şi $x_2=a-bi$. Atunci

$$x_1+x_2=2a \text{ şi } x_1x_2=a^2+b^2.$$

Ecuaţia de gradul al doilea care are ca rădăcini pe x_1 şi x_2 va fi $x^2+px+q=0$, unde $-p=x_1+x_2=2a$, iar $q=x_1x_2=a^2+b^2$.

Deci, ecuaţia $x^2-2ax+a^2+b^2=0$ are ca rădăcini numerele complexe: $a+bi$ şi $a-bi$.

3. *Descompunerea trinomului de gradul al doilea cu coeficienţi reali în produs de polinoame de gradul întîi.*

Fie trinomul aX^2+bX+c, $a\neq 0$, cu a, b, c numere reale. Dacă x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $ax^2+bx+c=0$, atunci un raţionament analog celui făcut în cap. I, § 2.4, pentru cazul $b^2-4ac\geqslant 0$, dă

$$aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)=(aX-ax_1)(X-x_2).$$

Deci orice trinom de gradul al doilea cu coeficienţi reali se descompune în produs de polinoame de gradul întîi cu coeficienţi complecşi. Din cap. I, § 2.4 rezultă că în cazul $b^2-4ac\geqslant 0$ şi numai în acest caz, trinomul de gradul al doilea se descompune în produs de factori de gradul întîi cu coeficienţi reali.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2+x+1=0.$$

Avem $\Delta=1-4=-3<0$. Atunci $x_1=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ şi $x_2=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

2) Să se găsească ecuaţia de gradul al doilea care are rădăcinile $x_1=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ şi $x_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$. Avem $x_1+x_2=2\sqrt{3}$ şi $x_1x_2=4$. Deci ecuaţia căutată este $x^2-2\sqrt{3}x+4=0$.

3) Să se descompună în factori de gradul întîi trinomul $X^2-2X+10$.

Rădăcinile ecuaţiei $x^2-2x+10=0$ sînt:

$$x_1=1+3\mathrm{i} \text{ şi } x_2=1-3\mathrm{i}.$$

Atunci $X^2-2X+10=(X-1-3\mathrm{i})(X-1+3\mathrm{i})$.

Aplicaţie. Descompunerea trinomului în factori de gradul întîi se foloseşte la simplificarea fracţiilor. Dacă printre factorii numărătorului şi ai numitorului sînt trinoame de gradul al doilea, le descompunem în factori de gradul întîi ca la pct. 3 şi apoi factorii comuni la numărător şi la numitor se pot simplifica.

Exemple. 1) Să se simplifice fracţia: $\dfrac{X^2 + 10X - 11}{-5X^2 + 7X - 2}$.

Descompunînd în factori numărătorul şi numitorul, obţinem:

$$\frac{X^2 + 10X - 11}{-5X^2 + 7X - 2} = \frac{(X - 1)(X + 11)}{(X - 1)(-5X + 2)} = \frac{X + 11}{-5X + 2}.$$

2) Să se simplifice fracţia $\dfrac{X^3 + X^2 + X + 1}{X^3 + (1 - i)X^2 - iX}$.

Avem $\dfrac{X^3 + X^2 + X + 1}{X^3 + (1 - i)X^2 - iX} = \dfrac{(X + 1)(X + i)(X - i)}{X(X + 1)(X - i)} = \dfrac{X + i}{X}$.

EXERCIŢII

1. Să se găsească numerele reale x şi y din ecuaţiile:

a) $(5x + 3yi) + (2y - xi) = 3 - i$;

b) $(x + 3yi) + \dfrac{3}{2}y + 2xi = 4 + 8i$;

c) $\left(-3y + \dfrac{1}{2}xi\right) - (-8x + 5yi) = -2 + 12i$;

d) $\dfrac{x - 2}{1 - i} + \dfrac{y - 3}{1 + i} = 1 - 3i$.

2. Să se calculeze:

a) $(2 + i)(3 - 2i)$; b) $(-6 + i)(5 + 2i)$; c) $(\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + 2i)$;

d) $(\sqrt{2} + 3i)(3 - \sqrt{2}i)$; e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)(\sqrt{3} - \sqrt{2}i)$.

3. Să se calculeze:

a) $\dfrac{2 + 3i}{1 - i}$; b) $\dfrac{2i}{2 - i}$; c) $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$; d) $\dfrac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}\,i}{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}\,i}$; e) $\dfrac{-2 - 5i}{4 + i} - \dfrac{6 - 7i}{4 - i}$;

f) $\dfrac{a - bi}{b + ai} - i\dfrac{b - ai}{a + bi}$; g) $\dfrac{\sqrt{1 + a} + i\sqrt{1 - a}}{\sqrt{1 + a} - i\sqrt{1 - a}} - \dfrac{\sqrt{1 - a} + i\sqrt{1 + a}}{\sqrt{1 - a} - i\sqrt{1 + a}}$;

h) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

4. Să se demonstreze egalităţile

a) $\dfrac{6 - i}{3 + 4i} = \dfrac{13 + 41i}{-25 + 25i}$; b) $\dfrac{2 + i}{3 - i} = \dfrac{13 + 4i}{17 - 9i}$.

5. Să se spună care sînt conjugatele numerelor complexe: $1 + i$, $2 - 3i$; 5; $4i$; 0, $2i - 1$ şi să se interpreteze geometric.

6. Să se calculeze:

a) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46}$; b) $(-i)^3 + (-i)^{13} + (-i)^{23} + (-i)^{33} + (-i)^{43}$;

c) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^n$ $(n \geqslant 4)$; d) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \ldots \cdot i^{100}$; e) $\dfrac{1}{i^{11}} - \dfrac{1}{i^{41}} + \dfrac{1}{i^{75}} - \dfrac{1}{i^{243}}$;

f) $[i(2 - i)]^2$; g) $[2i(3 - 4i)]^2$; h) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$, $n \in \mathbf{N}$.

7. Să se găsească valorile reale ale lui m astfel încît numărul $3i^3 - 2mi^2 + (1 - m)i + 5$ să fie: a) real; b) imaginar; c) nenul.

8. Să se găsească toate numerele complexe ale căror pătrate să fie:

a) i; b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; c) $-i$; d) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

9. Să se reprezinte în plan numerele complexe:

a) $3 + 5i$; b) $4 - i$; c) $-2 - 2i$; d) $-4i$; e) $5i$; f) $-5 - 5i$.

10. Să se dea interpretarea geometrică a formulelor:

$$(1 + 3i) + (1 - 3i) = 2;$$
$$(3 - 5i) + (-1 + 3i) = 2 - 2i.$$

11. Să se descompună în factori de gradul întîi trinoamele:

a) $X^2 - 2X + 2$; b) $4X^2 + 4X + 5$; c) $X^2 - 14X + 74$.

12. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 45; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ xy = 1. \end{cases}$

13. Să se simplifice fracţiile:

a) $\dfrac{15X^2 - 8mX + m^2}{12X^2 - mX - m^2}$; b) $\dfrac{12X^2 - X - 1}{3X^2 + 5X - 2}$; c) $\dfrac{X^3 - 2X^2 - X + 2}{X^3 - 3X^2 + 2X}$;

d) $\dfrac{X^4 + 1}{X^2 + X\sqrt{2} + 1}$; e) $\dfrac{X^2 - X + 1}{X^4 + X^2 + 1}$; f) $\dfrac{X^2 + 3iX - 2}{X^2 + iX + 2}$.

14. Să se găsească ecuaţiile de gradul al doilea cu coeficienţi reali, astfel încît una dintre rădăcini să fie:

a) $(3 - i)(2i - 4)$; b) $\dfrac{32 - i}{1 - 3i}$; c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}\,i$ (a, b fiind numere reale şi pozitive).

15. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^3 = 27$; b) $x^3 = -27$; c) $3x^3 = 2$; d) $x^3 = -5$; e) $x^4 = 16$; f) $x^4 = -16$;

g) $x^4 = -3$; h) $3x^4 = 5$.

16. Să se găsească suma tuturor rădăcinilor ecuaţiilor:

a) $x^3 = -4$; b) $x^4 = 4$.

17. Să se găsească produsul tuturor rădăcinilor ecuaţiilor:

a) $x^3 = 6$; b) $x^4 = -7$.

18. Să se arate că pătratul unui număr complex $z = a + bi$ este real dacă şi numai dacă ori $a = 0$, ori $b = 0$.

19. Să se găsească numerele reale x şi y astfel încît

a) $(xi - y)^2 = 6 - 8i + (x + yi)^2$;

b) $\dfrac{i}{x} + \dfrac{i}{y} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{bi}{y}$ (a şi b fiind numerele reale cu $a \neq 0$).

20. Să se determine perechile (x, y) din plan pentru care:

a) $|\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y - 4}\,i| = \sqrt{10}$; $y \geqslant 4$

b) $|\sqrt{2x + y} + \sqrt{x + 2y}\,i| = \sqrt{3}$; $2x + y \geqslant 0$, $x + 2y \geqslant 0$.

21. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5 \\ xy^2 = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 - xy = 28 \\ y^2 - xy = -12. \end{cases}$

22. Dacă $a + bi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z = x + iy$, astfel încît $z^2 = a + bi$.

23. Să se determine numerele complexe z, care verifică relația:

$$z^4 + 3 - 4i = 0.$$

24. Să se arate că pentru ecuația de gradul al doilea $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, cu coeficienți complecși, rădăcinile sale sînt date de aceeași formulă ca și în cazul ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali.

CAPITOLUL VII

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Dacă x și y satisfac relația $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, să se determine $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$.

2. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare, să se arate că ecuația $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ nu are rădăcini reale.

3. Să se determine valorile parametrului m, astfel încît ecuația $x^2 - 6x + m = 0$ să aibă două rădăcini reale dintre care una să fie dublul celeilalte.

4. Să se determine două numere nenule, astfel încît suma, produsul și diferența pătratelor lor să fie egale.

5. Să se determine legătura dintre rădăcinile ecuațiilor: $ax^2 + bx + c = 0$ și $cx^2 + bx + a = 0$.

6. Fără a rezolva ecuația, să se găsească suma pătratelor rădăcinilor ecuației:

$$(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0.$$

Indicație. Se notează $y = x^2 + 2x$.

7. Să se determine mulțimile A și B și numerele reale p și q știind că:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x + p = 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + qx - 4 = 0\},$$
$$A \cup B = \{-2, -1, 1, 4\}.$$

Indicație. Se folosesc relațiile dintre rădăcini și coeficienți.

8. Să se determine parametrul real m, astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + (m-1)x + m + 2 = 0\} \cap [0, 1] \neq \emptyset.$$

Indicație. Punem $z = \frac{x-1}{x-0}$, unde 0 și 1 sînt capetele intervalului; obținem ecuația în z: $(m + 2)z^2 - 3(m + 1)z + 3m + 1 = 0$. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației în x și z_1, z_2 rădăcinile ecuației în z. Avem: a) $x_i \in (0, 1)$ dacă și numai dacă $z_i < 0$, $i = 1, 2$. b) $x_i \notin (0, 1)$ dacă și numai dacă $z_i > 0$, $i = 1, 2$.
Deci problema se reduce la studiul semnelor rădăcinilor ecuației în z.