

Șiruri recurente în planul complex

Vom studia, în continuare, comportarea șirurilor definite prin relații de recurență de forma

$$\begin{cases} z_{n+1} = f(z_n), & n = 0, 1, 2, \dots, \\ z_0 = a, \end{cases} \quad (1)$$

cu $f : D \rightarrow D$ o funcție continuă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$.

Șirul (z_n) este definit, deci, de o recurență de ordinul întâi *autonomă*, în care z_{n+1} depinde numai de valoarea termenului precedent z_n , nu și de indicele său n . În consecință, aceste șiruri sunt *fără memorie*: dacă la un moment dat n_0 șirul (z_n) ajunge într-un punct $\tilde{a} \in D$, atunci de la n_0 încolo termenii șirului dat coincid cu cei ai șirului cu data inițială $z_0 = \tilde{a}$, păstrând mereu un decalaj de n_0 unități între ranguri.

Mai mult, aceste șiruri pot fi exprimate cu ajutorul *iteratelor* funcției f , adică cu funcțiile

$$f^{\circ n} = f \circ f \circ \dots \circ f \text{ (de } n \text{ ori)}.$$

Într-adevăr, avem: $z_1 = f(a)$, $z_2 = f(f(a)) = (f \circ f)(a)$, $z_3 = f(f(f(a))) = (f \circ f \circ f)(a)$ ș.a.m.d. Prin urmare,

$$z_n = f^{\circ n}(a),$$

pentru orice $n \geq 1$, adică (z_n) este șirul valorilor în $z = a$ ale iteratelor funcției f .

Continuitatea funcției f implică o proprietate importantă a șirurilor (z_n) definite de (1): dacă $z_n \rightarrow z^*$ atunci, trecând la limită în relația de recurență, obținem că $z^* = f(z^*)$. Altfel spus, limita unui astfel de șir (z_n) , dacă există, este un *punct fix* al funcției f , adică o soluție a ecuației $z = f(z)$.

Deoarece existența punctelor fixe pentru o funcție f oarecare este importantă atât pentru funcții reale cât și pentru funcții complexe, și nu numai, vom prezenta în continuare acest studiu într-un cadru mai general, cel al spațiilor metrice. Amintim că \mathbb{R} și \mathbb{C} , cu distanța uzuală $d(u, v) = |u - v|$, sunt spații metrice complete.

§1. Teorema de punct fix a lui Banach

Teorema de punct fix a lui Banach, cunoscută și sub denumirea de *principiul contractiilor*, a fost formulată și demonstrată în anul 1922 de către Ștefan Banach (1892-1945), fondatorul analizei funcționale.

Definiție. Fie (X, d) un spațiu metric. O funcție $f : X \rightarrow X$ pentru care există $q \geq 0$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

este numită funcție *lipschitziană*. În cazul în care $q < 1$ spunem că f este o *contracție*.

Orice funcție lipschitziană este continuă, reciproca nu are loc în general.

Teoremă (Banach). *Dacă (X, d) este un spațiu metric complet iar funcția $f : X \rightarrow X$ este o contracție, atunci f are un punct fix unic în X . Mai mult, pentru orice punct inițial $x_0 \in X$, șirul aproximațiilor succesive*

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2)$$

este convergent la punctul fix $x^ \in X$ al lui f , viteza de convergență fiind dată de estimarea*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - q} q^n, \quad (3)$$

unde $q \in [0, 1)$ este constanta Lipschitz a lui f .

Demonstrație. Considerăm un punct $x_0 \in X$ fixat arbitrar și definim șirul (x_n) prin relația (2). Vom arăta, pentru început, că (x_n) este un șir Cauchy.

Deoarece f este o contracție, avem, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq qd(x_n, x_{n+1}),$$

de unde rezultă

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_0, x_1),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. De aici obținem imediat, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$ cu $n \leq m$,

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=n}^{m-1} q^i \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - q} q^n. \quad (4)$$

Am folosit majorarea dată de suma seriei geometrice

$$\sum_{i=0}^{m-n-1} q^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1 - q},$$

care este convergentă deoarece constanta Lipschitz q este în intervalul $[0, 1)$.

Fie $\varepsilon > 0$ fixat arbitrar. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_0, x_1)}{1 - q} q^n = 0$ rezultă că există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \geq n_\varepsilon$ implică $\frac{d(x_0, x_1)}{1 - q} q^n < \varepsilon$. Din (4) urmează că, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și $m \geq n_\varepsilon$, avem $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, și deci (x_n) este șir Cauchy. Spațiul metric X fiind complet, rezultă că (x_n) este convergent, adică există $x^* \in X$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

În sfârșit, deoarece f este o contracție, este continuă și, trecând la limită în relația de recurență (2), obținem egalitățile

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x^*),$$

care arată că x^* este punct fix pentru f .

Pentru a demonstra unicitatea punctului fix, fie $x^{**} \in X$, cu $x^* \neq x^{**}$, un alt punct fix al lui f . Atunci $d(x^*, x^{**}) > 0$ și obținem imediat că

$$d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leq qd(x^*, x^{**}) < d(x^*, x^{**}),$$

de unde rezultă o contradicție.

Estimarea (3) se obține din (4) prin trecere la limită cu $m \rightarrow \infty$.

□

Exemplu. Definim $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ prin

$$f(z) = az + i,$$

unde

$$a = \frac{9}{10}(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}).$$

Deoarece

$$|f(u) - f(v)| = |a||u - v| \leq \frac{9}{10}|u - v|,$$

pentru orice u și v din \mathbb{C} , f este o contracție. Unicul său punct fix este soluția ecuației $z = az + i$, adică $z^* = i/(1 - a)$.

Următorul program reprezintă grafic, pentru funcția f de mai sus, comportarea șirului aproximațiilor succesive pentru diverse valori ale datei inițiale:

```
import ComplexPygame as C
import Color
import math

def Banach():
    a = C.fromRhoTheta(0.9, math.pi / 7)

    def f(z):
        return a * z + 1j

    def transformaSiTraseaza(fig):
        for k in range(len(fig)):
            z = fig[k]
            zprim = f(z)
            C.drawLine(z, zprim, Color.Index(100 * k))
            fig[k] = zprim

    C.setXminXmaxYminYmax(-5.1, 2.1, -2.1, 5.1)
    C.fillScreen()
    C.setAxis()
    fig = [-1 - 1j, -0.6 - 1j, -0.2 - 1j, 0.2 - 1j, 0.6 - 1j, 1 - 1j]
    nrEtape = 100
    for _ in range(nrEtape):
        transformaSiTraseaza(fig)
    if C.mustClose():
```

```

return

if __name__ == '__main__':
    C.initPygame()
    C.run(Banach)

```

Rezultatul este dat în Figura 1, în care vârfurile celor șase linii poligonale reprezintă punctele succesive ale șirului $z_{n+1} = f(z_n)$, pentru șase valori inițiale diferite ale lui z_0 .

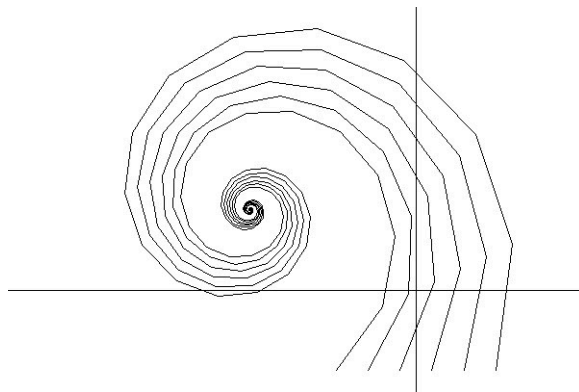


FIGURA 1. Iterații trasate de funcția `Banach()`.

Găsirea unei contracții potrivite pentru rezolvarea unei anumite ecuații este, în general, o chestiune dificilă, de multe ori următoarea *variantă locală* este salvatoare: dacă știm că o aplicație $f : X \rightarrow X$ are un punct fix x^* undeva în spațiul metric complet (X, d) , și dacă reușim să arătăm că există $r_0 > 0$ și $q \in [0, 1)$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$$

pentru orice x și y din $\overline{S}(x^*, r_0) = \{x \mid d(x, x^*) \leq r_0\}$, atunci rezultă mediat că f este o contracție pe $X_0 = \overline{S}(x^*, r_0)$ și, prin urmare, pentru orice x_0 suficient de aproape de x^* (adică $x_0 \in X_0$) șirul valorilor în x_0 ale iteratelor lui f este convergent la x^* .

În cazurile numerice $X = \mathbb{R}$ sau $X = \mathbb{C}$ avem chiar un rezultat mai precis:

Teoremă. Fie x^* un punct fix al funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (sau $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$) derivabilă cu derivata continuă (respectiv olomorfă). Dacă

$$|f'(x^*)| < 1,$$

atunci există $r_0 > 0$ astfel încât, pentru orice x_0 cu $|x_0 - x^*| \leq r_0$ avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x_0) = x^*.$$

Demonstrație. Fixăm o constantă q astfel încât $|f'(x^*)| < q < 1$. Din continuitatea derivatei în x^* , rezultă că există $r_0 > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq q$ pentru orice $x \in \overline{S}(x^*, r_0)$.

Pentru orice x și y din $\overline{S}(x^*, r_0)$, calculând integrala derivatei pe segmentul cu capetele x și y , obținem

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_{[x,y]} f'(z) dz \right| \leq q|x - y|,$$

și aplicăm în continuare varianta locală a principiului contracțiilor. \square

În cazul unei contracții $f : X \rightarrow X$, spunem că punctul să fix, $x^* \in X$, este un *atractor global*, deoarece are proprietatea că pentru orice $x_0 \in X$ șirul iteratelor $(f^{on}(x_0))$ converge la x^* . Se mai spune că x^* este *atractorul* contracției f .

În cazul ultimei teoreme, spunem că punctul fix x^* este un *atractor local*, deoarece convergența lui $(f^{on}(x_0))$ la x^* este asigurată numai pentru x_0 dintr-o vecinătate a punctului fix. Tot în cazul funcțiilor numerice, un punct fix x^* este numit *repulsor* dacă $|f'(x^*)| > 1$ și *neutru* dacă $|f'(x^*)| = 1$. În cazul când x^* este repulsor se poate arăta că pentru orice $x \neq x^*$ dar suficient de apropiat de acesta, $d(x, x^*) < d(f(x), x^*)$, și, prin urmare, un șir de iterate $x_n = f^{on}(x_0)$ poate să convergă la x^* numai dacă $x_n = x^*$ de la un loc încolo.

§2. Recurențe definite de metoda lui Newton

Vom prezenta în continuare o problemă formulată în anul 1879 de Arthur Cayley (1821 – 1895) privind convergența metodei lui Newton de aproximare a rădăcinilor polinoamelor în mulțimea numerelor complexe. Problema s-a dovedit a fi foarte dificilă, rezolvarea ei completă fiind dată 40 de ani mai târziu de către Gaston Julia (1893 – 1978) și Pierre Fatou (1878 – 1929).

Începem prin a prezenta *metoda lui Newton* (numită și *metoda tangentei*). Fie $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție polinomială (un polinom) de grad $n \geq 1$. Ne propunem să îi aflăm rădăcinile prin transformarea ecuației

$$p(z) = 0, \tag{5}$$

într-o problemă de punct fix, adică într-o ecuație de forma

$$f(z) = z. \tag{6}$$

Fie $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție care nu ia niciodată valoarea zero. Folosind echivalența

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow z + \alpha(z)p(z) = z,$$

vom considera funcții f de forma $f(z) = z + \alpha(z)p(z)$. Rădăcinile $z = z^*$ ale lui p coincid deci cu punctele fixe ale lui f , mai trebuie să alegem funcția α astfel încât aceste puncte fixe să fie atractori, măcar de tip local. Cerem așadar ca $f'(z^*) = 0$, și obținem:

$$1 + \alpha'(z^*)p(z^*) + \alpha(z^*)p'(z^*) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha(z^*)p'(z^*) = 0 \Leftrightarrow \alpha(z^*) = -\frac{1}{p'(z^*)},$$

dacă $p'(z^*) \neq 0$. Ne vom restrânge prin urmare la cazul rădăcinilor simple.

Reciproc, fie acum $z^* \in \mathbb{C}$ o rădăcină simplă a lui p , adică $p(z^*) = 0$ și $p'(z^*) \neq 0$. Din continuitatea derivatei lui p rezultă că există o vecinătate V_0 a lui z^* pe care p' nu se anulează, și unde putem defini $f : V_0 \rightarrow \mathbb{C}$ prin

$$f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}. \quad (7)$$

Deoarece

$$f'(z^*) = \frac{p(z^*)p''(z^*)}{p'^2(z^*)} = 0,$$

rezultă că f este o contracție pe o vecinătate $\tilde{V}_0 \subset V_0$ a lui z^* , și aplicând Teorema de punct fix a lui Banach, obținem următorul rezultat:

Teoremă (Metoda lui Newton). *Fie $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție polinomială și z^* o rădăcină simplă a sa. Atunci există $r > 0$ astfel încât pentru orice $z_0 \in S(z^*, r)$ șirul definit de relația*

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \quad (8)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, este convergent la z^ .*

Demonstrație. Șirul definit de (8) este șirul aproximațiilor succesive atașat lui f

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad (9)$$

adică șirul $(f^{on}(z_0))$ al valorilor în z_0 ale iteratelor funcției f asociată lui p prin relația (7), care, după cum am argumentat deja, este o contracție pe $S(z^*, r)$ al cărei atractor este chiar rădăcina z^* a lui p . \square

Să aplicăm metoda lui Newton în câteva cazuri simple.

Începem cu $p(z) = z - 1$ care are numai rădăcina $z^* = 1$. Funcția f asociată are forma $f(z) = 1$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, și deci șirul (9) este șirul constant $z_n = 1$, pentru orice $n \geq 1$. Rezultatul este corect dar banal.

Considerăm acum ecuația

$$z^2 - 1 = 0$$

care are două soluii, $z_1^* = 1$ și $z_2^* = -1$. Funcția f dată de (7) poate fi pusă sub forma

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (10)$$

și, prin urmare, șirul aproximațiilor succesive este dat de relația

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right), \quad (11)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Se observă imediat că dacă data inițială este reală atunci tot șirul rămâne în \mathbb{R} și are următorul comortament: pentru orice $\alpha > 0$, dacă $z_0 = \alpha > 0$, șirul converge la punctul fix $z_1^* = 1$ iar dacă $z_0 = -\alpha < 0$ atunci (z_n) tinde la $z_2^* = -1$.

Această comportare simetrică este mai generală: deoarece $f(-z) = -f(z)$, pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, rezultă că șirul (\tilde{z}_n) care pleacă din $\tilde{z}_0 = -z_0$ va avea

termenii $\tilde{z}_n = -z_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Studiul convergenței șirului (z_n) în funcție de data sa inițială poate fi redus astfel numai la cazul $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$, de exemplu. Mai mult, deoarece

$$f(i\beta) = \frac{i}{2} \left(\beta - \frac{1}{\beta} \right),$$

rezultă că dacă data inițială $z_0 = i\beta$, cu $\beta \in \mathbb{R}^*$, este de pe axa pur imaginară $\operatorname{Re} z = 0$, atunci întregul șir rămâne pe această axă și deci este divergent (dacă ar fi convergent ar trebui să tindă la unul dintre cele două punctele fixe, z_1^* sau z_2^*).

Deoarece se poate întâmpla ca pentru un $n_0 \in \mathbb{N}$ să avem $z_{n_0} = 0$ și atunci z_{n_0+1} să nu mai fie bine definit, pentru un studiu unitar se preferă extinderea mulțimii \mathbb{C} la $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ și prelungirea funcției f dată de (10) la $\overline{\mathbb{C}}$, adăugând la definiție $f(0) = \infty$ și $f(\infty) = \infty$.

Din varianta locală a principiului contractiilor avem următorul rezultat parțial: dacă data inițială z_0 este suficient de aproape de unul dintre punctele fixe, atunci șirul converge către acel punct fix. Studiul complet a fost dat de Cayley, care a stabilit următoarele:

Teoremă (Cayley). *Fie z_n șirul dat de relația (11). Dacă $\operatorname{Re} z_0 > 0$ atunci $z_n \rightarrow +1$, dacă $\operatorname{Re} z_0 < 0$, $z_n \rightarrow -1$ iar dacă $\operatorname{Re} z_0 = 0$ șirul rămâne pe axa imaginară reunită cu punctul de la infinit, având una din comportările următoare: sau $z_n = \infty$ de la un loc încolo, sau este periodic de la un loc încolo, sau “vagabondează” la nesfârșit pe axa imaginară fără să aibă vreo limită.*

Demonstrație. Scriind relația (11) sub forma

$$z_{n+1} = \frac{z_n^2 + 1}{2z_n},$$

obținem imediat că

$$\frac{z_{n+1} - 1}{z_{n+1} + 1} = \frac{(z_n - 1)^2}{(z_n + 1)^2},$$

de unde, cu substituția

$$u_n = \frac{z_n - 1}{z_n + 1}, \tag{12}$$

obținem relația de recurență

$$u_{n+1} = u_n^2,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Termenul general al șirului (u_n) este

$$u_n = u_0^{2^n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și, inversând substituția (12), obținem

$$z_n = \frac{1 + u_n}{1 - u_n} = \frac{1 + u_0^{2^n}}{1 - u_0^{2^n}},$$

pentru orice n , de unde urmează că $z_n \rightarrow +1$ dacă $|u_0| < 1$ și $z_n \rightarrow -1$ dacă $|u_0| > 1$. Dar $|u_0| < 1$ înseamnă $|z_0 - 1| < |z_0 + 1|$, echivalentă cu $\operatorname{Re} z_0 > 0$. \square

Să observăm că pentru funcția extinsă $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, punctul de la infinit este punct fix dar, spre deosebire de z_1^* și z_2^* care sunt atractori locali, punctul de la infinit este repulsor, deoarece în orice vecinătate a lui există date inițiale z_0 din care plecând, șirul (z_n) părăsește definitiv la un moment dat acea vecinătate.

Următoarea funcție colorează cu roșu *bazinul de atracție* al atracteurului z_1^* , format din punctele z_0 din care șirul converge la $z_1^* = +1$ și colorează cu albastru bazinul lui $z_2^* = -1$. Celelalte puncte sunt lăsate negre. Peste desen sunt trasate în final, cu alb, axele de coordonate.

```
def Newton2():
    zStar1 = 1
    zStar2 = -1

    def f(z): # f(z)=0.5*(z+1/z)
        if z == 0:
            return 1.0e100
        else:
            return 0.5 * (z + 1 / z)

    C.setXminXmaxYminYmax(-1.5, 1.5, -1.5, 1.5)
    nrIter = 300
    for coloana in C.screenColumns():
        for zeta in coloana:
            col = Color.Black
            z = zeta
            for _ in range(nrIter):
                if C.rho(z - zStar1) < 0.1:
                    col = Color.Red
                    break
                if C.rho(z - zStar2) < 0.1:
                    col = Color.Blue
                    break
                z = f(z)
            C.setPixel(zeta, col)
    if C.mustClose():
        return
    C.setAxis()
    C.refreshScreen()
```

Rezultatul este arătat în Figura 2 și confirmă categoric studiul anterior.

Un desen mai diversificat se obține când ilustrăm *viteza de convergență* a șirului (z_n) în raport cu data sa inițială. În acest scop, funcția Python `Newton2ETA` listată mai jos colorează punctele z_0 pe baza “timpului de scăpare”, utilizând așa numitul *Escape Time Algorithm*: culoarea lui z_0 este stabilită în funcție de

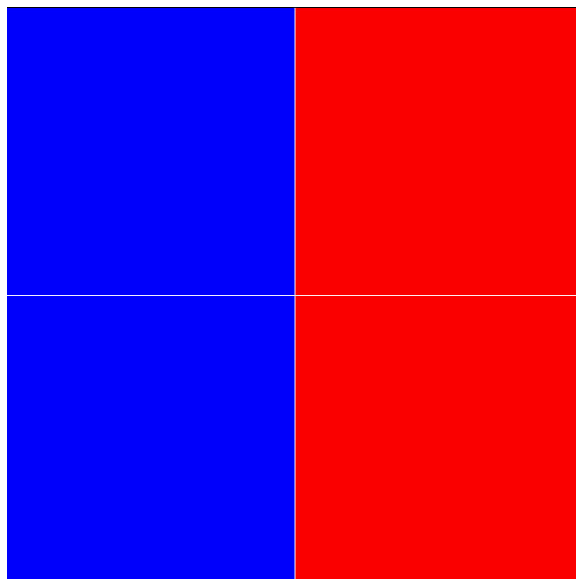


FIGURA 2. Class Newton2

numărul de iterații efectuate până la luarea unei decizii privind comportamentul șirului generat de el (adică până când z_n ajunge într-o vecinătate prestabilită a limitei sale, sau până este atins un număr maxim de iterații).

Benzile colorate din Figura 3 sunt formate din puncte care ajung în același timp la o distanță față de limitele lor mai mică decât 0.1.

```
def Newton2ETA():
    zStar1 = 1
    zStar2 = -1

    def f(z): # f(z)=0.5*(z+1/z)
        if z == 0:
            return 1.0e100
        else:
            return 0.5 * (z + 1 / z)

    C.setXminXmaxYminYmax(-1.5, 1.5, -1.5, 1.5)
    nrIter = 300
    for coloana in C.screenColumns():
        for zeta in coloana:
            z = zeta
            for k in range(nrIter):
                if C.rho(z - zStar1) < 0.1 or C.rho(z - zStar2) < 0.1:
                    break
                z = f(z)
            C.setPixel(zeta, Color.Index(k * 50))
        if C.mustClose(): return
    C.refreshScreen()
```

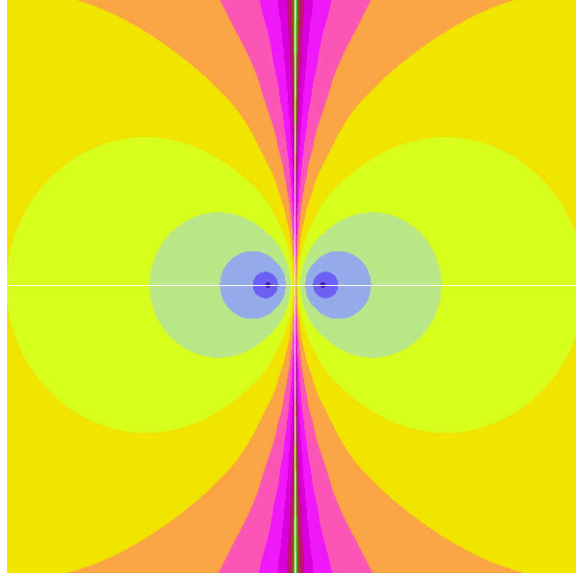


FIGURA 3. Newton2ETA()

§3. Problema lui Cayley

Am ajuns, în sfârșit, la problema formulată de Arthur Cayley: să se stabilească bazinele celor trei atractori locali ai funcției f asociate polinomului $p(z) = z^3 - 1$.

După cum este bine știut, ecuația

$$z^3 - 1 = 0, \quad (13)$$

are ca soluții rădăcinile de ordin trei ale unității:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \omega^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\ \varepsilon_1 &= \omega^1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon_2 &= \omega^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

care sunt rădăcini simple, polinomul având descompunerea

$$p(z) = (z - \varepsilon_0)(z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_2).$$

Aceste rădăcini sunt punctele fixe ale funcției f dată de (7), pe care o scriem sub forma

$$f(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2},$$

pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. La fel ca în cazul precedent, extindem funcția f la $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ adăugând cazurile $f(0) = \infty$ și $f(\infty) = \infty$.

Să notăm cu B_0 , B_1 și B_2 cele trei bazine de atracție ale punctelor fixe ε_0 , ε_1 și ε_2 , adică

$$B_i = \{z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \mid f^{on}(z_0) \rightarrow \varepsilon_i\},$$

pentru $i = 1, 2, 3$.

Să stabilim mai întâi o proprietate geometrică: din $\omega^3 = 1$ rezultă imediat că $f(\omega z) = \omega f(z)$, pentru orice z , și prin urmare, dacă șirul (\tilde{z}_n) pleacă din $\tilde{z}_0 = \omega z_0$ atunci $\tilde{z}_1 = f(\omega z_0) = \omega f(z_0) = \omega z_1$, de unde urmează că $\tilde{z}_n = \omega z_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă $z_n \rightarrow \varepsilon_0$ atunci $\tilde{z}_n \rightarrow \omega \varepsilon_0 = \varepsilon_1$, adică $z_0 \in B_0$ implică $\omega z_0 \in B_1$. Analog se pot obține toate celelalte implicații pentru a stabili că bazinul B_1 este B_0 rotit cu 120° în jurul originii, iar B_2 este B_1 rotit cu același unghi.

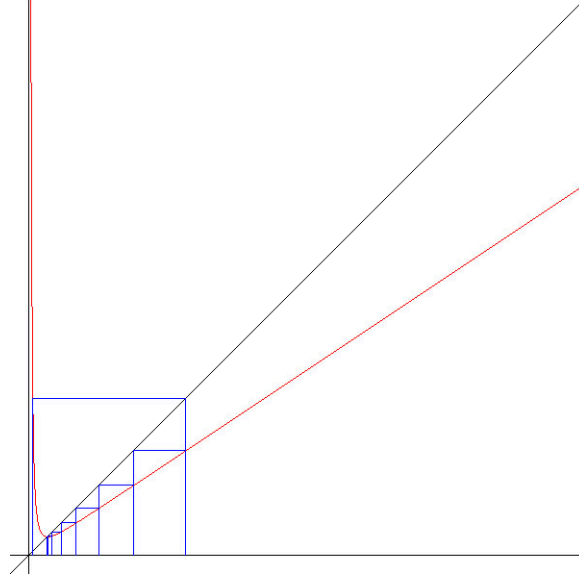


FIGURA 4. Șirul (z_n) pentru $z_0 = 0.2 \in \mathbb{R}_+^*$

Vom arăta acum că mulțimile B_0 , B_1 și B_2 sunt *deschise*. Deoarece ε_0 este un atractor local, știm că există $r > 0$ astfel încât $z_0 \in S(\varepsilon_0, r)$ implică $f^{on}(z_0) \rightarrow \varepsilon_0$. Notăm $S_0 = S(\varepsilon_0, r)$ și avem, deci, $S_0 \subset B_0$. Definim

$$S_1 = f^{-1}(S_0) = \{z \mid f(z) \in S_0\},$$

și avem imediat că $z_0 \in S_1$ implică $z_1 \in S_0$ și deci $f^{on}(z_0) \rightarrow \varepsilon_0$, adică $S_1 \subset B_0$. Să observăm că S_1 este mulțime deschisă, fiind contraimaginea printr-o funcție continuă a unei mulțimi deschise.

Definim în mod recurent

$$S_{n+1} = f^{-1}(S_n),$$

pentru orice $n \geq 0$, și obținem astfel un șir de mulțimi deschise incluse în B_0 . Avem deci

$$\bigcup_n S_n \subset B_0.$$

Pentru a stabili incluziunea inversă, fixăm arbitrar un z_0 în B_0 și considerăm șirul $z_n = f^{on}(z_0)$. Din $z_n \rightarrow \varepsilon_0$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $z_n \in$

$S_0 = S(\varepsilon_0, r)$, pentru orice $n \geq n_0$. Dar $z_{n_0} = f(z_{n_0-1}) \in S_0$ înseamnă $z_{n_0-1} \in f^{-1}(S_0) = S_1$, și, din aproape în aproape, obținem $z_0 \in S_{n_0}$. Am arătat astfel că

$$\bigcup_n S_n = B_0,$$

de unde urmează că mulțimea B_0 este deschisă, ca reuniune de mulțimi deschise.

Să observăm că în raționamentul precedent am utilizat numai continuitatea lui f , am arătat astfel că pentru orice funcție continuă, bazinul de atracție al unui atractor local este o mulțime deschisă.

Să analizăm acum cazul $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Este ușor de văzut că șirul (z_n) rămâne pe semiaxa \mathbb{R}_+^* și că tinde la 1 pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$. Vezi Figura 4 în care este trasat, cu roșu, graficul restricției lui f la \mathbb{R}_+^* .

Rezultă ca întreagă semiaxă \mathbb{R}_+^* este inclusă în bazinul B_0 și, prin urmare, și celelalte două semiaxe obținute prin rotații de 120° în jurul originii sunt incluse în B_1 , respectiv în B_2 . De aici deducem că originea se află pe frontiera fiecăruia dintre cele trei bazine.

Pe baza informațiilor strânse până acum bazinele de atracție, colorate în albastru, galben și roșu, ar putea arăta ca în Figura 5

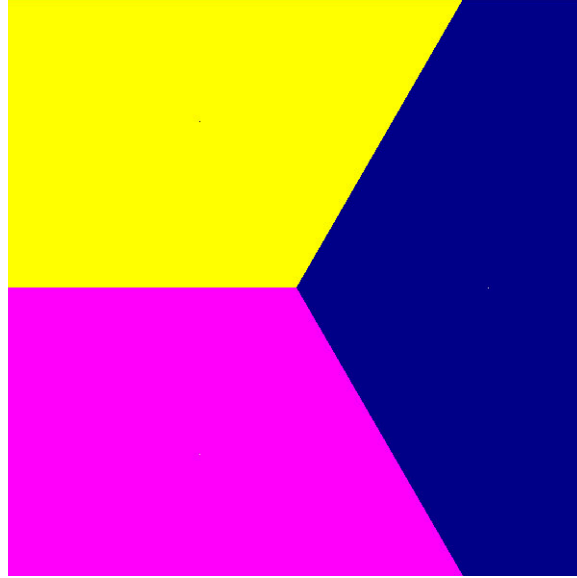


FIGURA 5. O încercare de trasare a bazinelor B_0 , B_1 și B_2 .

Dar rezolvarea nu este așa de simplă. Să considerăm, de exemplu, *predecesorii lui zero*, adică acele puncte z_0 pentru care există $n_0 \geq 1$ astfel încât $z_{n_0} = f^{n_0}(z_0) = 0$. Notăm $Z_0 = \{0\}$ și definim $Z_1 = f^{-1}(Z_0)$, $Z_2 = f^{-1}(Z_1)$, și așa mai departe. Mulțimea predecesorilor lui zero este, prin urmare,

$$Z = \bigcup_n Z_n. \quad (14)$$

Să observăm că Z_1 are trei elemente, și anume soluțiile ecuației $f(z) = 0$, care sunt

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \\ \zeta_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right), \\ \zeta_2 &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).\end{aligned}$$

Z_2 are nouă elemente, soluțiile ecuațiilor $f(z) = \zeta_0$, $f(z) = \zeta_1$ și $f(z) = \zeta_2$, și așa mai departe.

Știm că punctul zero se află în același timp pe frontiera fiecăruia dintre cele trei bazine, vom arăta că fiecare predecesor al său are exact aceeași proprietate! Fie, de exemplu, $a_3 \in Z_3$ un predecesor de ordin 3 al lui zero. Notăm $a_2 = f(a_3)$ și $a_1 = f(a_2)$. Din $a_3 \in Z_3$ rezultă $a_2 \in Z_2$ și, în continuare, $a_1 \in Z_1$, de unde urmează că

$$(f \circ f \circ f)(a_3) = f(f(f(a_3))) = f(f(a_2)) = f(a_1) = 0$$

și

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)'(a_3) &= f'(f(f(a_3)))f'(f(a_3))f'(a_3) \\ &= f'(a_1)f'(a_2)f'(a_3) \neq 0,\end{aligned}$$

deoarece derivata f' se anulează numai în punctele fixe ε_0 , ε_1 și ε_2 , care evident nu sunt predecesori ai lui zero. Urmează că aplicația $f^{\circ 3} = f \circ f \circ f$ este local inversabilă cu inversa g derivabilă (este un difeomorfism local) și deci păstrează frontierele. Bazinele B_i fiind invariante prin $f^{\circ 3}$, din

$$f^{\circ 3}(a_3) = 0 \in \partial B_0 \cap \partial B_1 \cap \partial B_2$$

obținem că

$$a_3 = g(0) \in \partial g(B_0) \cap \partial g(B_1) \cap \partial g(B_2) = \partial B_0 \cap \partial B_1 \cap \partial B_2,$$

și deci în orice vecinătate a lui a_3 se găsesc puncte și din B_0 , și din B_1 , și din B_2 .

Privind Figura 5, înțelegem că frontierele bazinelor nu sunt așa simple cum le-am trasat noi, niște semidrepte plecând din origine. Punctul ζ_0 , de exemplu, se află pe semiaxa trasată de noi între B_0 și B_1 , și în el trebuie să se întâlnească toate cele trei culori. De fapt situația este mult mai gravă: în orice punct în care se întâlnesc două culori trebuie să se întâlnească și a treia, înțelegând prin aceasta că frontierele celor trei bazine coincid. Studiul complet este dat de următoarea teoremă, pe care o prezentăm fără demonstrație:

Teoremă (Julia). *Fie $J_f = \overline{\mathbb{C}} \setminus (B_0 \cup B_1 \cup B_2)$. Mulțimea J_f este infinită, nemărginită, închisă, nu are puncte izolate și nici puncte interioare. J_f este închiderea mulțimii predecesorilor lui zero și, în același timp, este frontiera fiecăruia dintre cele trei bazine de atracție, adică*

$$J_f = \partial B_0 = \partial B_1 = \partial B_2.$$

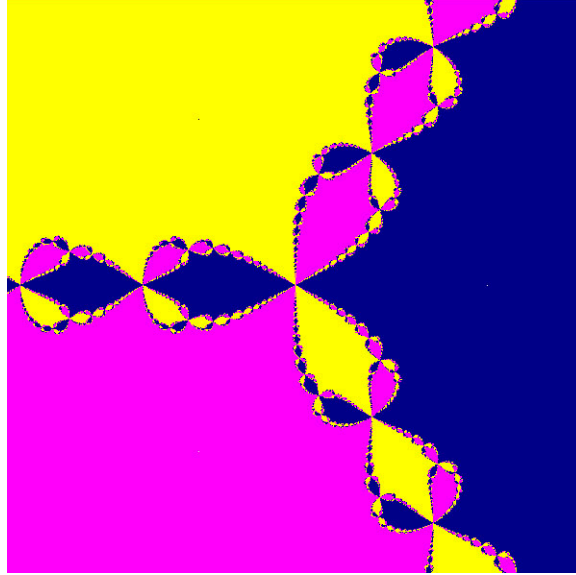


FIGURA 6. Newton3()

Următoarea funcție Python colorează cele trei bazine cu albastru, galben și roșu. Mulțimea J_f , pe care o vom numi *mulțimea Julia* asociată funcției f , ar trebui să apară colorată în negru, dar datorită discretizării planului în pixeli, punctele ei sunt cele aflate între doi pixeli vecini de culori diferite (lângă un asemenea punct mai trebuie să mai fie și un al treilea pixel cu a treia culoare). Vezi Figura 6.

```
def Newton3():
    eps0 = C.fromRhoTheta(1.0, 0.0 * math.pi / 3.0)
    eps1 = C.fromRhoTheta(1.0, 2.0 * math.pi / 3.0)
    eps2 = C.fromRhoTheta(1.0, 4.0 * math.pi / 3.0)

    def f(z): # f(z)=0.5*(z+1/z)
        if z == 0:
            return 1.0e100
        else:
            return (2 * z * z * z + 1) / (3 * z * z)

    C.setXminXmaxYminYmax(-1.5, 1.5, -1.5, 1.5)
    nrIter = 300
    for coloana in C.screenColumns():
        for zeta in coloana:
            col = Color.Black
            z = zeta
            for _ in range(nrIter):
                if C.rho(z - eps0) < 0.1:
                    col = Color.Darkblue
                    break
```

```

        if C.rho(z - eps1) < 0.1:
            col = Color.Yellow
            break
        if C.rho(z - eps2) < 0.1:
            col = Color.Fuchsia
            break
        z = f(z)
        C.setPixel(zeta, col)
    if C.mustClose(): return
C.setAxis(Color.White)
C.refreshScreen()

```

O reprezentare mai sugestivă a mulțimii J_f este obținută în Figura 7, pe baza metodei timpului de scăpare, ETA.

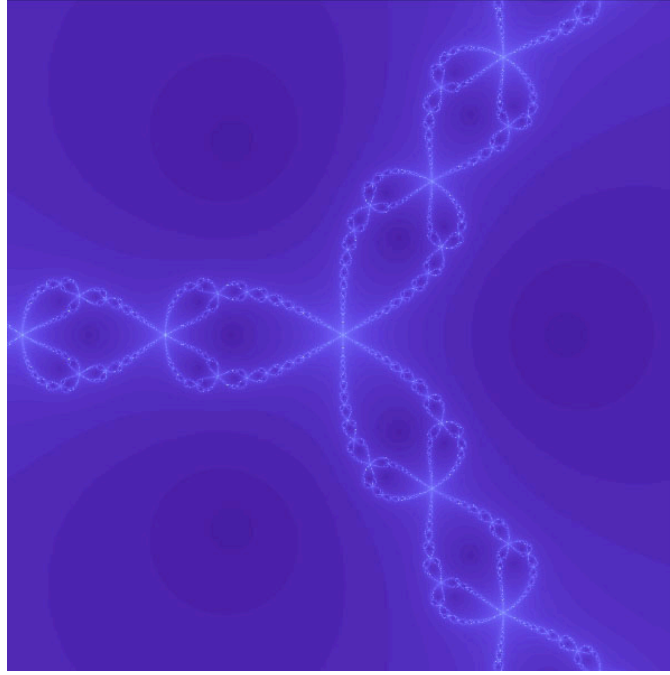


FIGURA 7. `Newton3ETA()`

În final, să remarcăm faptul că metoda lui Newton, care a fost stabilită pentru rădăcini simple, funcționează și în cazul rădăcinilor multiple. Să considerăm, spre exemplificare, un polinom p cu trei rădăcini distincte a_1 , a_2 și a_3 , având multiplicitățile k_1 , k_2 și, respectiv, k_3 , adică

$$p(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2}(z - a_3)^{k_3}. \quad (15)$$

Atunci

$$\begin{aligned}
 p'(z) &= k_1(z - a_1)^{k_1-1}(z - a_2)^{k_2}(z - a_3)^{k_3} \\
 &+ k_2(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2-1}(z - a_3)^{k_3} + k_3(z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2}(z - a_3)^{k_3-1},
 \end{aligned}$$

deci

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{k_1}{z - a_1} + \frac{k_2}{z - a_2} + \frac{k_3}{z - a_3}.$$

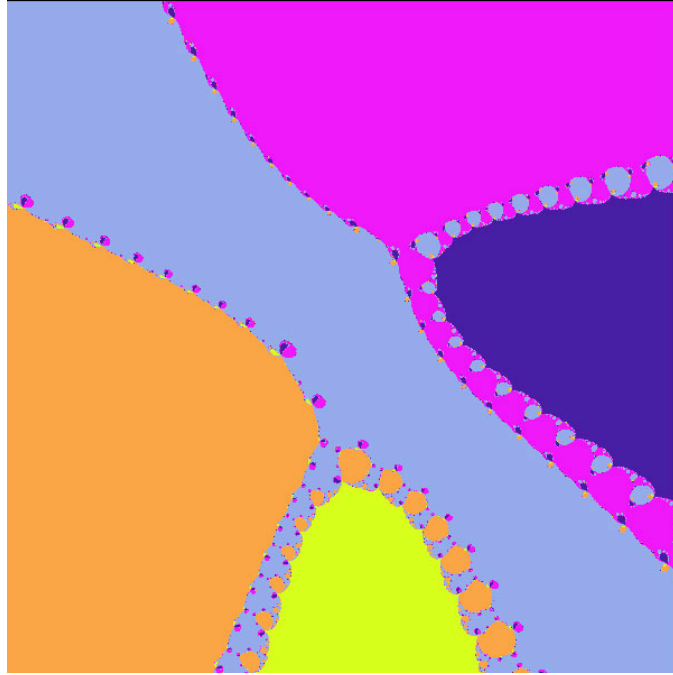


FIGURA 8. Newtonk()

Obținem pentru funcția f dată de relația (7) următoarea formă

$$f(z) = z - \frac{1}{\frac{k_1}{z - a_1} + \frac{k_2}{z - a_2} + \frac{k_3}{z - a_3}}.$$

Derivăm

$$\begin{aligned} f'(z) &= 1 - \frac{1}{\left(\frac{k_1}{z - a_1} + \frac{k_2}{z - a_2} + \frac{k_3}{z - a_3}\right)^2} \left(\frac{k_1}{(z - a_1)^2} + \frac{k_2}{(z - a_2)^2} + \frac{k_3}{(z - a_3)^2} \right) \\ &= 1 - \frac{k_1(z - a_2)^2(z - a_3)^2 + k_2(z - a_1)^2(z - a_3)^2 + k_3(z - a_1)^2(z - a_2)^2}{\left(k_1(z - a_2)(z - a_3) + k_2(z - a_1)(z - a_3) + k_3(z - a_1)(z - a_2)\right)^2}, \end{aligned}$$

și obținem:

$$0 \leq f'(a_1) = 1 - \frac{1}{k_1} < 1,$$

pentru orice $k_1 \in \mathbb{N}^*$. Punctul fix a_1 este un atractor local, dar cu $f'(a_1) \neq 0$ pentru $k_1 > 1$.

De fapt metoda este valabilă și pentru funcții p de forma (15) în care exponenții k_i , $i = 1, 2, 3$, sunt chiar numere complexe, atât timp cât este îndeplinită condiția:

$$|f'(a_i)| = \left|1 - \frac{1}{k_i}\right| < 1,$$

pentru orice $i \in \{1, 2, 3\}$.

Următorul program ilustrează un astfel de caz.

```
def Newtonk():
    a0 = complex(0.3, 1.5)
    a1 = complex(1.1, 0.6)
    a2 = complex(-0.1, 0.6)
    a3 = complex(0.1, -1.6)
    a4 = complex(-1.1, -0.6)
    k0 = C.fromRhoTheta(2.3, 0.1)
    k1 = C.fromRhoTheta(1.2, 0.1)
    k2 = C.fromRhoTheta(1.3, 0.2)
    k3 = C.fromRhoTheta(1.0, 0.1)
    k4 = C.fromRhoTheta(2.1, 0.05)

    alist = [a0, a1, a2, a3, a4]
    klist = [k0, k1, k2, k3, k4]

    def f(z):
        if z in alist:
            return z
        else:
            w = [klist[h] / (z - alist[h]) for h in range(5)]
            return z - 1 / sum(w)

    C.setXminXmaxYminYmax(-3, 3, -3, 3)
    nrIter = 300
    for coloana in C.screenColumns():
        for zeta in coloana:
            z = zeta
            for _ in range(nrIter):
                amAjuns = False
                kol = 0
                for ak in alist:
                    kol += 100
                    if C.rho(z - ak) < 0.01:
                        amAjuns = True
                        break
                if amAjuns:
                    break
            z = f(z)
            C.setPixel(zeta, Color.Index(kol))
    if C.mustClose(): return
```