Studiul oscilatorului liniar

Vom prezenta aici modelul matematic al oscilatorului liniar şi vom studia comportarea soluţiilor acestuia în cazul de rezonanţă. Incepem prin a stabili ecuaţia diferenţială a oscilatorului, ecuaţie care apare atât în dinamica punctului material cât şi în studiul circuitelor electrice, şi care stă la baza analogiei mecano-electrice.

§1. Modelul oscilatorului liniar elastic. Considerăm un punct material M de masă m, suspendat cu ajutorul unui resort elastic de un reazem fix O. Notăm cu $\vec{e}$ versorul verticalei prin O. Studiem mişcarea punctului material în cazul unidimensional, când aceasta are loc pe verticala prin O, şi care este determinată de următoarele condiţii iniţiale: poziţia M_0 este perfect sub reazem, adică $\overrightarrow{OM_0} = y_0\vec{e}$, iar viteza iniţială $\vec{v}_0$ este pe direcţia verticalei, $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}$.

Asupra punctului material acţionează trei forţe, forţa de greutate $\overrightarrow{G} = mg\vec{e}$, forţa elastică $\overrightarrow{E}$ presupusă proporţională cu elongaţia $y = OM$, deci $\overrightarrow{E} = -ky\vec{e}$, $k > 0$, şi forţa de rezistenţă $\overrightarrow{R}$ de forma $\overrightarrow{R} = -R\dot{y}\vec{e}$, cu $R \geq 0$, deci proporţională cu viteza şi de sens contrar mişcării.

Aplicând legea fundamentală a dinamicii punctului material

$$m\vec{a} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{E} + \overrightarrow{G},$$

obţinem ecuaţia

$$m\ddot{y} = -R\dot{y} - ky + mg,$$

care poate fi scrisă sub forma:

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = g, \tag{1}$$

unde $\gamma = R/2m \geq 0$ şi $\omega_0^2 = k/m > 0$. Observăm că ecuaţia (1) admite soluţia staţionară $y_E(t) = g/\omega_0^2$ (constantă). Notăm cu $x = y - y_E$ elongaţia punctului M faţă de poziţia de echilibru, şi obţinem în final ecuaţia oscilatorului liniar:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{2}$$

§2. Modelul circuitului electric RLC. Considerăm un circuit electric format dintr-o rezistenţă R, o bobină L şi un condensator C, cele trei elemente fiind legate în serie.

Incărcăm condensatorul cu o sarcină Q_0 şi apoi închidem circuitul. Prin acest experiment constatăm că pentru valori ale rezistenţei R suficient de mici, în circuit apar oscilaţii electrice amortizate.

Modelul matematic al circuitului RLC îl constituie o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi cu coeficienţi constanţi, ecuaţie pe care o vom stabili în cele ce urmează. Vom arăta că soluţiile ecuaţiei au exact comportamentul observat experimental. Notăm cu $I = I(t)$ intensitatea curentului în circuit şi cu U_1, U_2 şi U_3 tensiunile între bornele corespunzătoare rezistenţei R, bobinei L şi respectiv condensatorului C.

Conform Legilor lui Kirchoff avem:

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0 \tag{3}$$

Notăm cu R rezistenţa, cu L inductanţa bobinei şi cu C capacitatea condensatorului şi obţinem prin aplicarea legilor curentului electric următoarele relaţii:

$$I(t) = C\frac{dU_3(t)}{dt} \tag{4}$$

$$U_2(t) = L\frac{dI(t)}{dt}(\text{Faraday}) \tag{5}$$

$$U_1(t) = RI(t)(\text{Ohm}) \tag{6}$$

Din relaţiile (3), (5) şi (6) avem:

$$L\frac{dI}{dt}(t) + RI(t) + U_3(t) = 0$$

şi utilizând acum relaţia (4) obţinem ecuaţia circuitului RLC:

$$LC\frac{d^2U}{dt}(t) + RC\frac{dU}{dt}(t) + U(t) = 0, \tag{7}$$

unde $U = U_3$. Vom scrie ecuaţia diferenţială (7) sub forma:

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{8}$$

în care apar *factorul de amortizare* $\gamma = R/2L$ şi *pulsaţia proprie* $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

§3. Studiul oscilaţiilor libere. In continuare vom analiza comportarea soluţiilor ecuaţiei

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0, \tag{E.L.O}$$

cu $\gamma \geq 0$ şi $\omega_0 > 0$. Deoarece (E.L.O) este o ecuaţie diferenţială liniară omogenă cu coeficienţi constanţi, vom afla soluţiile ei cu ajutorul ecuaţiei caracteristice ataşate

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

În funcţie de valorile lui $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$, avem următoarele cazuri:

Cazul I. $\Delta > 0 \Leftrightarrow \gamma > \omega_0 > 0$. Rădăcinile $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ sunt reale, distincte şi negative. Soluţia generală are forma:

$$x_{SGO}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \forall t \in R$$

cu c_1 şi c_2 constante arbitrare. Soluţiile au graficul din Figura 1.

Observăm că

$$\lim_{t\to\infty} x_{SGO}(t) = 0,$$

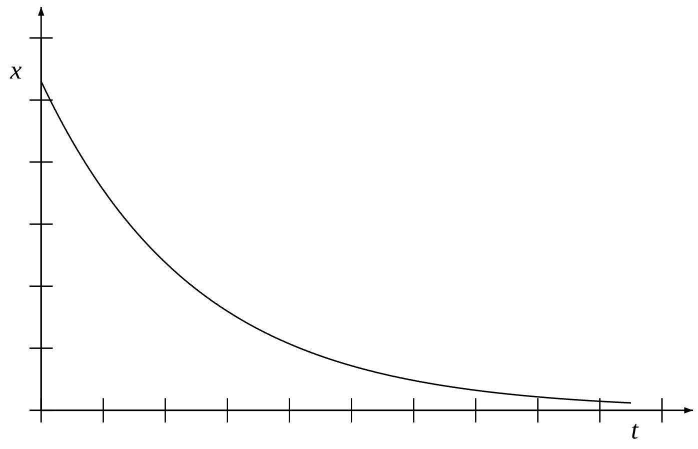

Figura 1: $\Delta > 0$

pentru că $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Sistemul este puternic amortizat şi nu au loc oscilaţii (forţa de rezistenţa este prea mare).

Cazul II. $\Delta = 0 \Leftrightarrow \gamma = \omega_0 > 0$. Cele două rădăcini caracteristice sunt egale, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$. In acest caz soluţia generală va fi de forma:

$$x_{SGO}(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t}.$$

Soluţiile au graficul din Figura 2. Observăm că şi în acest caz $\lim\limits_{t \to \infty} x_{SGO}(t) = 0$.

Deoarece pe intervalul $(-c_1/c_2, +\infty)$, $x_{SGO}(t)$ are semn constant deducem că nici în acest caz nu au loc oscilaţii.

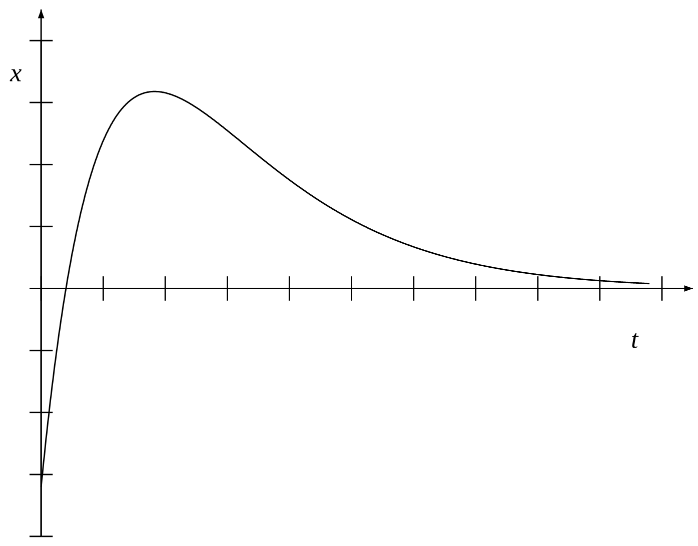

Figura 2: $\Delta = 0$

Cazul III. $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 \leq \gamma < \omega_0$. Rădăcinile caracteristice sunt complex conjugate, $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, iar soluţia generală este de forma:

$$x_{SGO}(t) = e^{-\gamma t}(c_1 \cos\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t + c_2 \sin\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t)$$

Comportarea soluţiilor diferă după cum $\gamma \geq 0$ este nul sau nenul.

In cazul $\gamma = 0$, ecuaţia (E.L.O) devine

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \tag{9}$$

şi are soluţia generală

$$x_{SGO}(t) = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t = A\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Deoarece orice soluţie a ei este o sinusoidă, ecuaţia (9) este numită *ecuaţia oscilatorului liniar armonic.*

In cazul $\gamma > 0$, avem $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\gamma t} = 0$ şi deci $\lim\limits_{t\to\infty} x_{SGO}(t) = 0$ dar, spre deosebire de cazurile I şi II, soluţiile au un comportament oscilatoriu deoarece funcţia din paranteză este periodică de perioadă $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$ şi deci, în fiecare interval de lungime T, $x_{SGO}(t)$ îşi schimbă semnul de câte două ori.

Graficul oricărei soluţii nenule va avea formă arătată în Figura 3 şi reprezintă

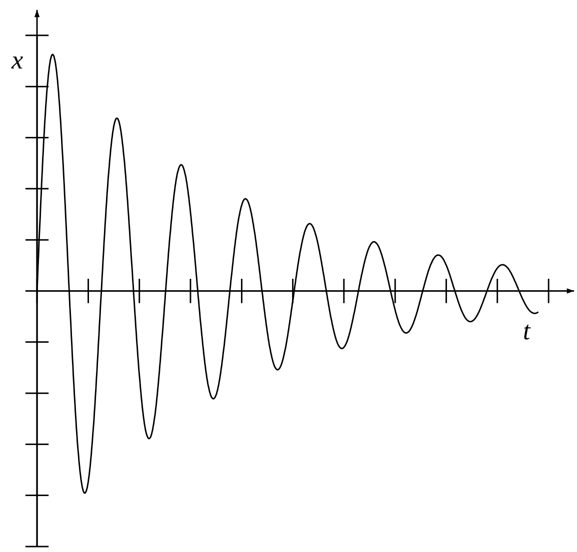

Figura 3: $\Delta < 0$

o oscilaţie amortizată. Din acest motiv, ecuaţia (E.L.O) cu $\omega_0 > \gamma > 0$ este numită *ecuaţia oscilatorului liniar amortizat.*

§3. Studiul oscilaţiilor forţate. Studiem cazul când în sistem apare o forţă exterioară periodică. Mai precis vom studia ecuaţia liniară neomogenă:

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos\omega t \tag{E.L.N}$$

în cazul $\omega_0 > \gamma \geq 0$.

Termenul liber al ecuaţiei are forma unui cvasipolinom şi, pentru a determina o soluţie particulară, vom aplica metoda specifică acestui caz. Numărul complex asociat cvasipolinomului este $\lambda = i\omega$ şi el poate fi rădăcină pentru ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

numai dacă $(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i = 0$, adică pentru $\gamma = 0$ şi $\omega = \omega_0$. Distingem astfel două situaţii: $\gamma = 0$ (oscilatorul armonic) şi $\gamma > 0$ (oscilatorul amortizat).

Studiem pentru început cazul oscilatorului armonic, atunci când $\gamma = 0$. Dacă $\omega \neq \omega_0$, căutăm o soluţie particulară de forma $\tilde{x}_{SPN}(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ care introdusă în ecuaţie conduce la $\beta = 0$ şi $\alpha = 1/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Soluţia generală va fi

$$x_{SGN} = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

şi reprezintă o suprapunere de două sinusoide de pulsaţii ω_0 şi ω.

Când $\omega \to \omega_0$ amplitudinea soluţiei particulare $x = \tilde{x}_{SPN}(t)$ creşte oricât de mult iar comportarea soluţiei $x = \tilde{x}_{SGN}(t)$ este caracterizată de apariţia *bătăilor*. Vezi Figura 4.

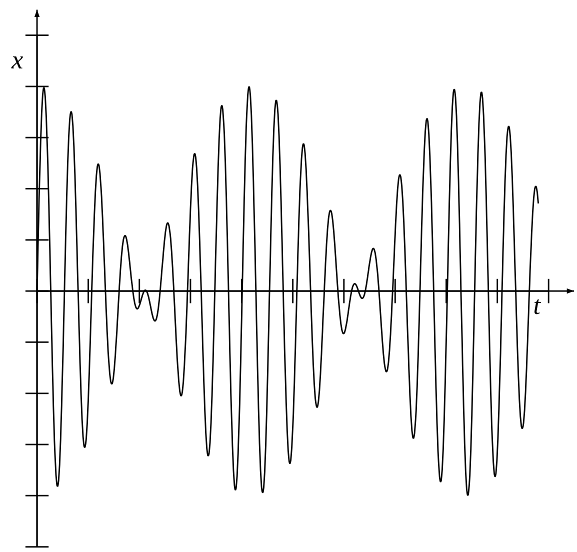

Figura 4: Oscilatorul liniar armonic

In cazul $\omega = \omega_0$, deoarece acum $\lambda = i\omega$ este rădăcină caracteristică simplă, căutăm o soluţie particulară de forma $\tilde{x}_{SPN}(t) = t(\alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t)$. Introducând în ecuaţie şi identificând coeficienţii obţinem $\alpha = 0$ şi $\beta = f_0/2\omega_0$.

Soluţia generală va fi

$$x_{SGN} = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Comportamentul soluţiei generale în acest caz este ilustrat în Figura 5 şi este caracterizat de oscilaţii cu amplitudini oricât de mari pentru $t \to \infty$. Acesta este *fenomenul de rezonanţă în cazul ideal*, când o forţă exterioară mărginită provoacă în sistem oscilaţii nemărginite, comportament datorat faptului că forţa

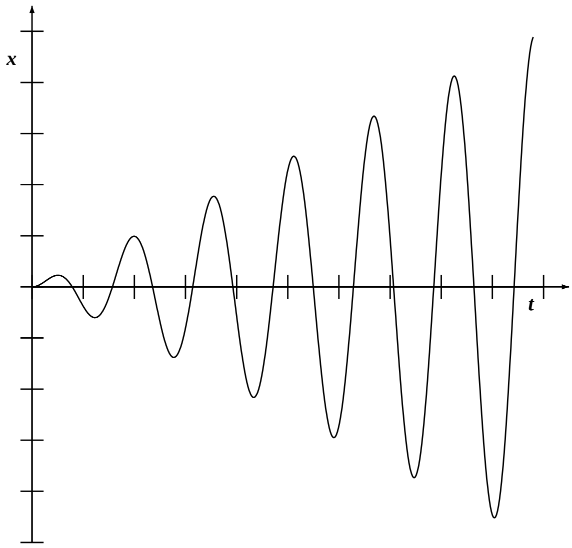

Figura 5: $\gamma = 0$

de amortizare a fost presupusă egală cu zero, şi prin urmare sistemul funcţionează fără disipare de energie.

Analizăm acum fenomenul de rezonanţă aşa cum apare el în lumea reală, adică în cazul oscilatorului liniar amortizat, când $\gamma > 0$. Tinând cont de formula soluţiei generale a ecuaţiei liniare neomogene

$$x_{SGN} = x_{SGO} + \tilde{x}_{SPN},$$

deoarece în acest caz $\lim_{t\to\infty} x_{SGO}(t) = 0$, vom avea

$$x_{SGN}(t) \simeq \tilde{x}_{SPN}(t),$$

pentru t suficient de mare, ceea ce înseamnă că *oscilaţiile libere* (soluţiile ecuaţiei omogene) caracterizează regimul tranzitoriu iar *oscilaţia forţată* (soluţia particulară a ecuaţiei neomogene) caracterizează regimul permanent de lucru al sistemului fizic.

Deoarece numărul complex $\lambda = i\omega$ nu este rădăcină caracteristică, vom căuta soluţia particulară sub forma

$$\tilde{x}(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t.$$

Avem

$$\tilde{x}'(t) = -\omega\alpha \sin \omega t + \omega\beta \cos \omega t,$$
$$\tilde{x}''(t) = -\omega^2\alpha \cos \omega t - \omega^2\beta \sin \omega t,$$

şi introducând în ecuaţie obţinem

$$f_0 \cos \omega t \equiv [\alpha\omega_0^2 + 2\gamma\omega\beta - \omega^2\alpha] \cos \omega t + [\omega_0^2\beta - 2\gamma\omega\alpha - \omega^2\beta] \sin \omega t.$$

Identificând coeficienţii celor două cvasipolinoame de mai sus, obţinem sistemul liniar algebric în necunoscutele α şi β

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)\alpha + 2\gamma\omega\beta = f_0 \\ -2\gamma\omega\alpha + (\omega_0^2 - \omega^2)\beta = 0 \end{cases}$$

pe care îl rezolvăm cu regula lui Cramer. Avem

$$\Delta = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \neq 0$$

$$\Delta_\alpha = f_0(\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$\Delta_\beta = 2\gamma\omega f_0$$

şi deci

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\ \beta = f_0 \dfrac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \end{cases}$$

Am găsit soluţia particulară căutată, $x = \tilde{x}(t)$ (soluţia forţată) sub forma

$$\tilde{x}(t) = f_0 \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cos\omega t + \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \sin\omega t \right].$$

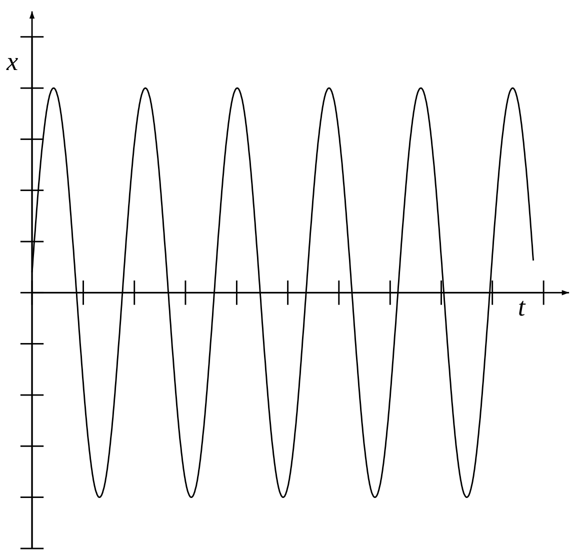

Figura 6: $\tilde{x} = \tilde{x}_{SPN}(t)$

Observăm că $x = \tilde{x}(t)$ este o oscilaţie sinusoidală care poate fi scrisă şi sub forma

$$\tilde{x}(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, în care amplitudinea A este dată de relaţia

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

iar defazajul φ se obţine din

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}.$$

Mişcarea este periodică, cu perioadă principală $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (vezi Figura 6).

Observăm că în cazul $\omega = \omega_0$ (ω_0 se numeşte *pulsaţia proprie*) avem

$$\alpha = \alpha(\omega_0) = 0$$

$$\beta = \beta(\omega_0) = f_0 \frac{2\gamma\omega_0}{4\gamma^2\omega_0^2} = \frac{f_0}{2\gamma\omega_0},$$

şi, prin urmare, în acest caz în care frecvenţa forţei exterioare este egală cu *frecvenţa proprie* a sistemului, soluţia $x = \tilde{x}(t)$ are forma

$$\tilde{x}(t) = f_0 \frac{1}{2\gamma\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

iar dacă γ este suficient de mic ($|\gamma| < \varepsilon$, forţa de rezistenţă e mică) atunci amplitudinea mişcării este oricât de mare. Acesta este *fenomenul de rezonanţă real*, al oscilatorului amortizat.

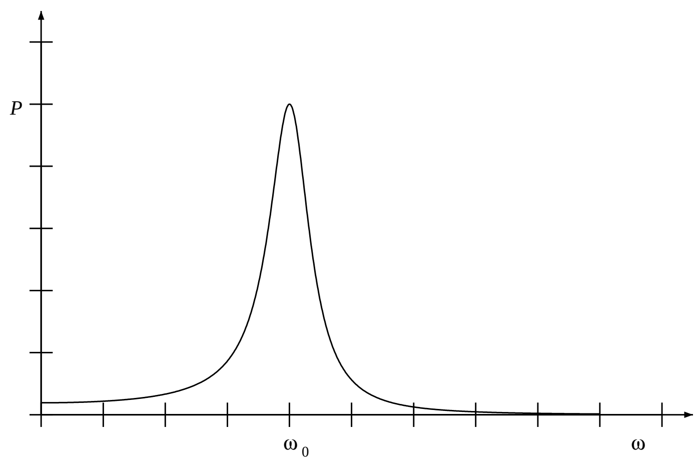

Figura 7: $P = P(\omega)$

Pentru a pune mai bine în evidenţă fenomenul de rezonanţă, vom calcula puterea medie absorbită de sistem de la forţa exterioară:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T F(t) d\tilde{x}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\tilde{x}'(t) dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f_0 \cos\omega t(-\alpha\omega \sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t) dt =$$

$$= \frac{\omega f_0}{T}(\alpha \int_0^T \cos\omega t \sin\omega t dt + \beta \int_0^T \cos^2\omega t dt).$$

Efectuând calculele, obţinem

$$P = \frac{1}{2}\omega f_0 \beta = f_0^2 \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

Notăm cu P_0 puterea medie absorbită pentru $\omega = \omega_0$, adică

$$P_0 = f_0^2 \frac{\gamma \omega_0^2}{4\gamma^2 \omega_0^2} = \frac{f_0^2}{2\gamma}$$

şi observăm că

$$P = P_0 \frac{4\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \leq P_0$$

Graficul lui P în funcţie de ω este reprezentat în Figura 7.

În concluzie: puterea medie absorbită de oscilatorul amortizat este maximă în cazul în care pulsaţia ω a forţei exterioare coincide cu pulsaţia proprie ω_0, adică la rezonanţă.

Dacă ω este suficient de departe de ω_0 puterea absorbită este practic nulă, sistemul nu reacţionează la forţa exterioară. Dacă forţa exterioară este o sumă de oscilaţii cu pulsaţii diferite, ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n, datorită liniarităţii răspunsul sistemului va fi suma răspunsurilor pentru fiecare pulsaţie ω_i în parte, şi prin urmare forţa exterioară cu pulsaţia cea mai apropiată de pulsaţia proprie ω_0 va dicta practic răspunsul. Se spune că sistemul este *selectiv* şi pe această proprietate se bazează, de exemplu, selectarea posturilor de radio de către circuitul RLC de intrare.