Tema 12. Teoria stabiltăţii

Exerciţiul 1. *Studiaţi stabilitatea soluţiei nule a următoarelor ecuaţii diferenţiale*:

(1) $x' = x.$	(2) $x' = 0$	(3) $x' = -x$
(4) $x' = -2x + \sin x.$	(5) $x' = x^2$	(6) $x' = -x^2$
(7) $x' = -\operatorname{tg} x$	(8) $x' = -\sin x$	(9) $x' = -x + x^2$

Exerciţiul 2. *Studiaţi stabilitatea următoarelor sisteme diferenţiale liniare*:

$$(1)\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} x_1' = x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2. \end{cases} \quad (5)\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad (6)\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$(7)\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_1 \end{cases} \quad (8)\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_3 + x_1 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (9)\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 \\ x_2' = x_3 - x_1 \\ x_3' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Exerciţiul 3. *Studiaţi stabilitatea soluţiei nule a următoarelor sisteme diferenţiale*:

$$(1)\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2^2 \\ x_2' = -x_1^3 - 2x_2 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2^5 \\ x_2' = -x_1^4 - 4x_2 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} x_1' = -\sin x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -x_1^3 - x_2 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2^2 \\ x_2' = x_1x_2 - x_2 \end{cases} \quad (5)\begin{cases} x_1' = -\sin x_1 + x_2^2 \\ x_2' = -4x_1 - 5x_2 \end{cases} \quad (6)\begin{cases} x_1' = 2\operatorname{sh} x_2 \\ x_2' = -x_1^2 - 3x_2 \end{cases}$$

Problema 1. *Discutaţi stabilitatea soluţiei nule a sistemului*:

$$\begin{cases} x' = -y + \alpha(x^3 + xy^2) \\ y' = x + \alpha(y^3 + x^2y) \end{cases}$$

Rezolvare. Încercăm să aplicăm metoda primei aproximaţii. Matricea jacobiană asociată sistemului este

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(3x^2 + y^2) & -1 + 2\alpha xy \\ 1 + 2\alpha xy & \alpha(3y^2 + x^2) \end{pmatrix}.$$

Observăm că matricea

$$A = J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nu depinde de parametrul α şi are polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

cu rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm i$. Suntem în cazul de dubiu al metodei primei aproximaţii.

Observăm că în cazul $\alpha = 0$ sistemul se reduce la sistemul liniar

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

care, cu substituţia $x = y'$ se reduce la ecuaţia

$$y'' + y = 0,$$

cu soluţia generală

$$y = c_1 \sin t + c_2 \cos t = a \sin(t + \theta)$$

$$x = y' = a \cos(t + \theta).$$

Traiectoriile sistemului sunt cercuri centrate în origine, parcurse în sens trigonometric, prin urmare în acest caz originea este un punct staţionar simplu stabil.

Pentru a decide şi în celelalte cazuri, amplificăm prima ecuaţie cu $2x$, a doua cu $2y$ şi le adunăm. Obţinem

$$2xx' + 2yy' = 2\alpha(x^4 + 2x^2y^2 + y^4).$$

Am găsit astfel, pentru funcţia

$$\rho = \rho(t) = x^2(t) + y^2(t),$$

problema Cauchy

$$\begin{cases} \rho' = 2\alpha\rho^2, \\ \rho(0) = \rho_0 > 0, \end{cases}$$

care se rezolvă uşor şi are soluţia

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{1 - 2\rho_0\alpha t}.$$

În final, avem următoarea discuţie.

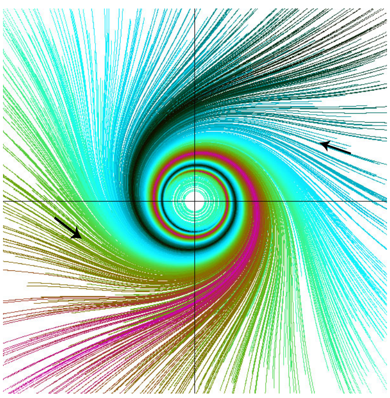

Figura 1: Problema 1. Cazul $\alpha = -0,5$.

Cazul $\alpha < 0$. Pentru orice dată iniţială $\rho_0 > 0$ soluţia $\rho = \rho(t)$ este definită pe întreaga semiaxă $[0, +\infty)$ şi este strict descrescătoare cu

$$\lim_{t \to +\infty} \rho = 0.$$

Traiectoriile sunt spirale înfăşurate în jurul originii, parcurse înspre origine. Prin urmare, în acest caz, originea este punct staţionar asimptotic stabil.

Cazul $\alpha > 0$. Pentru fiecare $\rho_0 > 0$ soluţia $\rho = \rho(t)$ este definită pe un interval de lungime finită $[0, T_0)$, unde

$$T_0 = \frac{1}{2\rho_o \alpha},$$

şi este strict crescătoare cu

$$\lim_{t \nearrow T_0} \rho = +\infty.$$

Toate soluţiile sistemului se îndepărtează oricât de mult de punctul $O(0,0)$, acesta fiind acum un punct staţionar instabil.

Problema 2. *Determinaţi valorile parametrului real α pentru care ecuaţia*

$$u'' - \alpha u u' + u^2 - 1 = 0$$

are cel puţin o soluţie staţionară stabilă.

Rezolvare. Notăm $x = u$, $y = u'$ şi transformăm ecuaţia de ordinul doi dată în următorul sistem diferenţial de ordinul întâi

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \alpha x y + 1 - x^2. \end{cases}$$

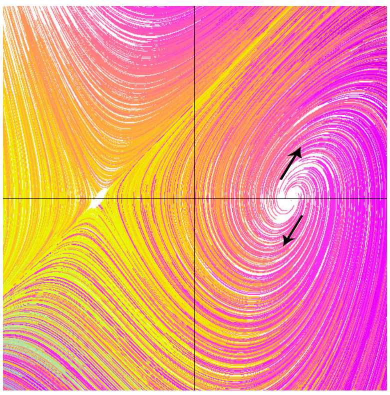

Figura 2: Problema 2. Cazul $\alpha = 1$.

Observăm că sistemul obţinut este autonom şi are numai două puncte staţionare: $(x = -1, y = 0)$ şi $(x = 1, y = 0)$. Matricea jacobiană asociată sistemului este

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha y - 2x & \alpha x \end{pmatrix}.$$

Pentru $(x = -1, y = 0)$ avem matricea

$$A = J(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

cu polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \alpha\lambda - 2.$$

Deoarece $\lambda_1\lambda_2 = -2 < 0$ rezultă că rădăcinile caracteristice sunt reale şi de semn contrar, prin urmare această soluţie staţionară este instabilă, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pentru $(x = 1, y = 0)$ avem

$$A = J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

cu polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \alpha\lambda + 2.$$

În acest caz avem

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \alpha \\ \lambda_1\lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Dacă $\Delta = \alpha^2 - 8 \geq 0$, rădăcinile sunt reale, nenule şi de acelaşi semn cu α. Punctul staţionar este asimptotic stabil pentru $\alpha \in (-\infty, -2\sqrt{2}\,]$ şi instabil pentru $\alpha \in [\,2\sqrt{2}, +\infty)$.

Dacă $\Delta = \alpha^2 - 8 < 0$, rădăcinile sunt complexe cu $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = \frac{\alpha}{2}$, deci pentru $\alpha \in (-2\sqrt{2}, 0)$ soluţia studiată este stabilă, iar pentru $\alpha \in (0, 2\sqrt{2})$ este instabilă.

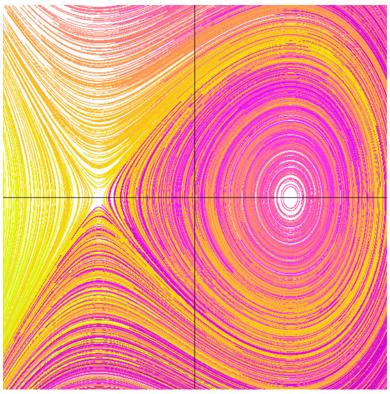

Figura 3: Problema 2. Cazul $\alpha = 0$.

Pentru $\alpha = 0$ avem $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, metoda primei aproximaţii este în cazul de dubiu. Continuăm investigaţia numai pentru $\alpha = 0$, translatând punctul de echilibru $(x = 1, y = 0)$ în origine, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 1 \\ \tilde{y} = y - 0. \end{cases}$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \tilde{y} \\ \tilde{y}' = -2\tilde{x} - \tilde{x}^2, \end{cases}$$

pe care îl scriem în continuare renunţând la simbolul tilda.

Avem de studiat, prin urmare, stabilitatea soluţiei nule a sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - x^2. \end{cases}$$

Împărţim, prin calcul formal, ecuaţiile sistemului şi obţinem ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{2x + x^2},$$

care, rezolvată, conduce la următoarea familie de curbe integrale

$$x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Observăm că funcţia $\varphi(x) = x^2 + \frac{1}{3}x^3 = x^2(1 + \frac{1}{3}x)$ este pozitivă pentru $x \in (-3, +\infty)$ şi are un punct de minim local strict în $\varphi(0) = 0$, analog funcţia $\psi(y) = \frac{1}{2}y^2$ este pozitivă pentru orice y şi are un punct de minim global strict în $\psi(0) = 0$. Deducem de aici că, în vecinătatea originii, pentru C suficient de mic, curbele

$$\varphi(x) + \psi(y) = C$$

formează o familie de curbe închise în jurul originii, aceasta fiind, prin urmare, o soluţie stabilă, fără să fie asimptotic stabilă.

În concluzie, ecuaţia

$$u'' - \alpha u u' + u^2 - 1 = 0$$

are o soluţie staţionară stabilă numai pentru $\alpha \in (-\infty, 0\,]$.