

Punctul Fermat-Torricelli

Prezentăm aici o problemă celebră de geometrie plană, și anume cea propusă spre rezolvare, pe la 1650, de Pierre de Fermat lui Evangelista Torricelli, care a rezolvat-o prin mai multe metode.

Problema lui Fermat. *Fiind dat un triunghi ΔABC într-un plan π , să se determine un punct Q în plan pentru care suma distanțelor la vârfurile triunghiului este minimă:*

$$QA + QB + QC = \min_{P \in \pi} \{PA + PB + PC\}.$$

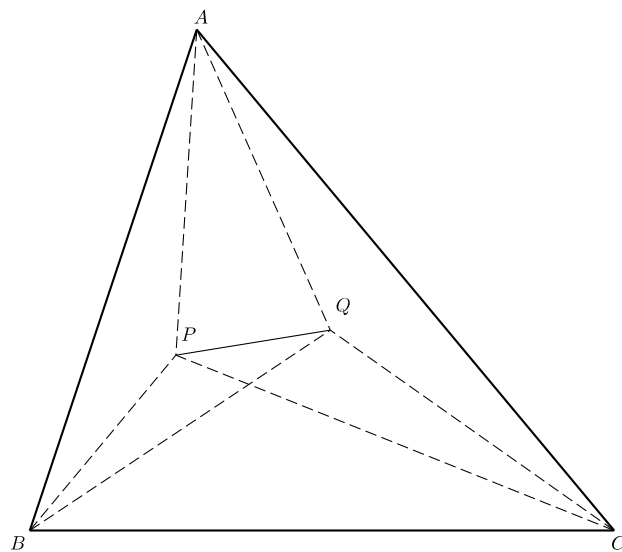


Figure 1: Punctul lui Fermat

Soluție. Vom da o rezolvare folosind numere complexe. Amintim definiția și proprietățile produsului scalar în \mathbb{C} : dacă $z_1 = x_1 + iy_1$ și $z_2 = x_2 + iy_2$, atunci

$$\langle z_1, z_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = \operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 = \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = |z_1||z_2|\cos \widehat{z_1Oz_2}.$$

Pentru orice $z \neq 0$ vom nota cu u_z versorul său, dat de relația

$$u_z = \frac{1}{|z|}z.$$

Este evident că u_z este un număr complex de modul unu, fiind chiar punctul de intersecție al razei vectoare Oz cu cercul trigonometric. Din definiție avem $z = |z|u_z$, prin urmare

$$\langle z, u_z \rangle = \langle |z|u_z, u_z \rangle = |z| \langle u_z, u_z \rangle = |z| |u_z|^2 = |z|.$$

Fie P și Q două puncte oarecare în plan, cu afixele notate z_P și z_Q . Notăm cu u_{QA} versorul diferenței $z_A - z_Q$. Avem

$$\begin{aligned} QA = |z_A - z_Q| &= \langle z_A - z_Q, u_{QA} \rangle = \langle z_A - z_P, u_{QA} \rangle + \langle z_P - z_Q, u_{QA} \rangle \\ &\leq |z_A - z_P| |u_{QA}| + \langle z_P - z_Q, u_{QA} \rangle \end{aligned}$$

Am arătat că

$$QA \leq PA + \langle z_P - z_Q, u_{QA} \rangle$$

și, analog pentru celelalte vârfuri, avem

$$QB \leq PB + \langle z_P - z_Q, u_{QB} \rangle$$

$$QC \leq PC + \langle z_P - z_Q, u_{QC} \rangle.$$

Așadar, pentru un Q fixat arbitrar, avem inegalitatea

$$QA + QB + QC \leq PA + PB + PC + \langle z_P - z_Q, u_{QA} + u_{QB} + u_{QC} \rangle,$$

pentru orice P din plan. Este clar că, dacă

$$u_{QA} + u_{QB} + u_{QC} = 0,$$

atunci

$$QA + QB + QC = \min_{P \in \pi} \{PA + PB + PC\}.$$

Este ușor de văzut că suma a trei numere complexe de modul unu este zero numai dacă împart cercul trigonometric în trei arce de 120° , rezultă că versorii segmentelor QA , QB și QC fac între ei unghiuri de 120° , prin urmare am demonstrat că punctul de minim căutat, *punctul lui Fermat*, este chiar *centrul izogonal* al triunghiului, adică punctul Q cu proprietatea

$$\widehat{BQC} = \widehat{CQA} = \widehat{AQB} = 120^\circ.$$

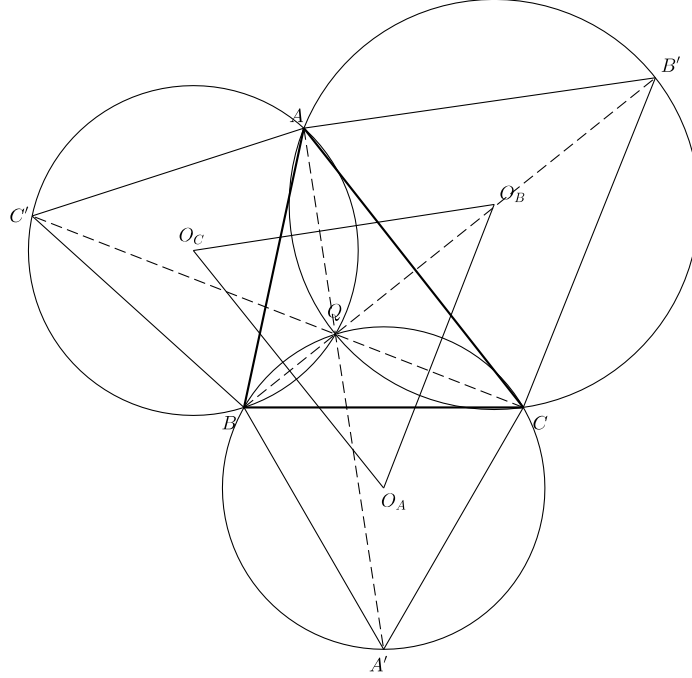


Figure 2: Punctul lui Torricelli.

Existența centrului izogonal este stabilită de următoarea problemă:

Problema lui Torricelli. *Fiind dat un triunghi $\triangle ABC$, se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale $\triangle AC'B$, $\triangle BA'C$ și $\triangle CB'A$. Arătați că dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente într-un punct (numit punctul lui Torricelli) care este chiar centrul izogonal al triunghiului dat.*

Soluție. Vom da, pentru eleganța ei, o rezolvare geometrică. Notăm cu $\mathcal{C}(\triangle AC'B)$, $\mathcal{C}(\triangle BA'C)$ și $\mathcal{C}(\triangle CB'A)$ cercurile circumscrise celor trei triunghiuri echilaterale, și notăm cu O_C , O_A și, respectiv, O_B centrele lor.

Cercurile $\mathcal{C}(\triangle AC'B)$ și $\mathcal{C}(\triangle CB'A)$ se intersectează în două puncte, unul este A iar pe celălalt îl notăm cu Q . Vom arăta, pentru început, că punctul Q , astfel definit, este centrul izogonal.

Patrulaterul $AC'BQ$ este inscriptibil cu $\widehat{C'} = 60^\circ$, rezultă că $\widehat{AQB} = 120^\circ$. Analog, din patrulaterul inscriptibil $AB'CQ$ rezultă $\widehat{AQC} = 120^\circ$. Prin urmare $\widehat{BQC} = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$, deci

$$\widehat{BQC} = \widehat{CQA} = \widehat{AQB} = 120^\circ.$$

Mai mult, să observăm că $\widehat{BQC} + \widehat{BA'C} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, deci și

patrulaterul $BA'CQ$ este inscriptibil, prin urmare Q aparține și cercului $\mathcal{C}(\Delta BCA')$.

Vom arăta acum că punctele A , Q și A' sunt coliniare. Pentru aceasta este suficient să observăm că

$$\widehat{AQ A'} = \widehat{AQ B} + \widehat{BQ A'} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Aici am folosit faptul că Q se află pe cercul circumscris triunghiului echilateral $\Delta BCA'$

Analog se arată și coliniaritățile $B - Q - B'$ și $C - Q - C'$.

Observație. Este ușor de văzut că triunghiul $\Delta A'BA$, rotit cu 60° în jurul lui B , se suprapune peste $\Delta CBC'$. Urmează că segmentele AA' și CC' au aceeași lungime, egală și cu lungimea lui BB' , desigur.

În final, să rezolvăm și

Problema lui Napoleon. *Arătați că triunghiul $\Delta O_A O_B O_C$, format de centrele celor trei triunghiuri echilaterale, este la rândul său un triunghi echilateral.*

Soluție. Rezolvarea este imediată¹: latura $O_A O_B$, de exemplu, este *linia centrelor* cercurilor $\mathcal{C}(\Delta BA'C)$ și $\mathcal{C}(\Delta CB'A)$, iar linia centrelor este perpendiculară pe secanta comună, CQ . Am arătat astfel că laturile triunghiului $\Delta O_A O_B O_C$ sunt perpendiculare pe dreptele QA , QB , și QC , iar cum acestea fac între ele unghiuri de 120° urmează că laturile lui $\Delta O_A O_B O_C$ fac între ele unghiuri de 60° .

¹cu numere complexe: https://ro.wikipedia.org/wiki/Teorema_lui_Napoleon