Evaluarea polinoamelor: schema lui Horner

Fiind dat un polinom cu coeficienţi reali, de exemplu

$$f = 1 + 4X + 3X^2 - 7X^3 + 3X^4,$$

ne propunem să aflăm valoarea acestuia într-un $a \in \mathbb{R}$ dat, altfel spus să evaluăm expresia aritmetică obţinută prin înlocuirea nedeterminatei[1] X cu numărul a, în cazul nostru

$$f(a) = 1 + 4a + 3a^2 - 7a^3 + 3a^4. \tag{1}$$

Rezolvarea este simplă: evaluăm expresia de la stânga la dreapta, acumulând pe rând termenii sumei într-o variabilă s iniţializată zero şi calculând la fiecare pas puterile lui a prin amplificarea cu a a unei variabile p iniţializată cu unu.

Această rezolvare este implementată în funcţia `eval` din programul următor:

```
#include<iostream>
using namespace std;
const int dim = 100;
double eval(double f[dim], double a) {
    double s = 0;
    double p = 1;
    for (int i = 0; i < dim; i++) {
        s += f[i] * p;
        p *= a;
    }
    return s;
}
int main(void) {
    double f[dim] = { 1, 4, 3,-7, 3 };
    double a = 2;
    cout << eval(f, a) << endl;
    return 0;
}
```

Aici polinomul f este dat prin coeficienţii săi memoraţi într-un tablou alocat static, de dimensiune constantă `dim=100`, iniţializat cu valorile

$$f = [\,1, 4, 3, -7, 3, 0, 0, \ldots, 0\,],$$

[1] Amintim că mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali, $\mathbb{R}[X]$, se defineşte în mod riguros ca fiind mulţimea şirurilor de numere reale care au toţi termenii egali cu zero de la un loc încolo

$$\mathbb{R}[X] = \{f = [f_0, f_1, \ldots, f_n, 0, 0, 0, \ldots], f_i \in \mathbb{R}\}.$$

Adunarea polinoamelor se defineşte pe componente, $(f+g)_k = f_k + g_k$, iar înmulţirea în stil “fiecare cu fiecare”, $(fg)_k = \sum_{i+j=k} f_i g_j$. Cu aceste operaţii $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ devine un inel comutativ cu unitate, în care are loc incluziunea $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[X]$ prin identificarea oricărui număr a cu polinomul $[a, 0, 0, 0, \ldots]$.

“Nedeterminata” X este prin definiţie polinomul $X = [0, 1, 0, 0, 0, \ldots]$ şi se arată că orice polinom $f = [f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, 0, 0, 0, \ldots]$ verifică egalitatea

$$f = f_0 + f_1 X + f_2 X^2 + \cdots + f_n X^n.$$

iar apelul `eval(f,a)` calculează suma

$$1 + 4 \cdot a + 3 \cdot a^2 - 7 \cdot a^3 + 3 \cdot a^4 + 0 \cdot a^5 + \cdots + 0 \cdot a^{99},$$

care este evident egală cu $f(a)$. În această implementare, pentru a nu complica expunerea, nu utilizăm gradul polinomului evaluat, atragem numai atenţia că funcţia `eval` poate fi folosită doar pentru polinoame cu gradul strict mai mic decât constanta `dim`.

Prezentăm acum o altă rezolvare, la fel de simplă ca prima, dar mai eficientă. Mai precis, vom aplica metoda lui Horner[2], metodă care constă, în esenţă, în evaluarea expresiei (1) în ordinea inversă, de la dreapta la stânga, adică în ordinea dată de următoarele paranteze:

$$f(a) = 1 + a \cdot (4 + a \cdot (3 + a \cdot (-7 + a \cdot 3))).$$

Pentru a stabili algoritmul avut în vedere, avem nevoie de operatorul de şiftare la stânga[3] pe $\mathbb{R}[X]$, operator notat în continuare cu $'$. Pentru orice polinom f vom nota cu f' polinomul obţinut prin şiftarea la stânga cu o poziţie a coeficienţilor lui f, vom nota cu f'' şi f''' şiftatul lui f de două, respectiv de trei ori, şi, în general, cu $f^{(k)}$ şiftatul lui f de k ori[4].

În exemplu nostru, avem:

$$f = [\,1, 4, 3, -7, 3, 0, 0, 0, \ldots\,],$$

$$\begin{aligned}
f' &= [\,4, 3, -7, 3, 0, 0, 0, 0, \ldots\,],\\
f'' &= [\,3, -7, 3, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\,],\\
f''' &= [\,-7, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\,],\\
f^{(4)} &= [\,3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\,],\\
f^{(5)} &= [\,0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\,].
\end{aligned}$$

Observăm că şiftarea la stânga micşorează gradul polinomului cu o unitate, astfel că, de la un loc încolo, repetarea operaţiei produce numai polinomul nul.

Revenind la calculul lui $f(a)$, evaluarea expresiei o vom efectua scoţând factor comun pe a din toţi termenii care îl conţin:

$$f(a) = 1 + 4a + 3a^2 - 7a^3 + 3a^4 = 1 + a(4 + 3a - 7a^2 + 3a^3) = 1 + af'(a).$$

Avem aici ideea de bază a metodei: pentru a evalua un polinom în $X = a$ avem nevoie de valoarea şiftatului său în a. Pentru a o afla, repetăm procedura asupra şiftatului. Dacă repetăm procedura de un număr suficient de ori vom ajunge să evaluăm polinomul nul, care ne va furniza astfel valoarea de start: zero.

In exemplul nostru, avem în contiunare:

$$f'(a) = 4 + af''(a)$$

$$f''(a) = 3 + af'''(a)$$

[2]William George Horner (1786 – 1837), matematician englez.

[3]Adaptarea expresiei *left shift operator*, adică *operatorul de deplasare la stânga.*

[4]Atenţie, utilizăm notaţia de la derivare doar pentru comoditate, nu derivăm nimic!

$$f'''(a) = -7 + af^{(4)}(a)$$
$$f^{(4)}(a) = 3 + af^{(5)}(a))$$
$$f^{(5)}(a) = 0.$$

Prin urmare: plecăm de la $f^{(5)}(a) = 0$, aflăm pe $f^{(4)}(a)$, apoi pe $f'''(a)$ şi tot aşa, până ajungem la $f(a)$.

Dacă organizăm calculele ca în tabelul următor, în care considerăm $a = 2$, obţinem binecunoscuta schemă a lui Horner:

	X^5	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	0	3	-7	3	4	1
$X = 2$	0	$2 \cdot 0 + 3 = 3$	$2 \cdot 3 + (-7) = -1$	$2 \cdot (-1) + 3 = 1$	$2 \cdot 1 + 4 = 6$	$2 \cdot 6 + 1 = 13$

De fapt, în schema lui Horner clasică nu apare coeficientul lui X^5, deoarece polinomul dat are gradul 4 se coboară direct coeficientul lui X^4, dar la fel de bine se poate coborî întotdeauna zero, plecând de la un indice suficient de mare.

Observăm că, în general, pentru un polinom $f = f_0 + f_1X + f_2X^2 + \cdots f_nX^n$ tabelul are forma

	X^{n+1}	X^n	...	X^2	X^1	X^0
	0	f_n	...	f_2	f_1	f_0
$X = a$	$f^{(n+1)}(a) = 0$	$f^{(n)}(a)$	...	$f''(a)$	$f'(a)$	$f(a)$

şi reţinem că pe ultimul rând sunt calculate valorile în a ale iteratelor $f^{(k)}$, pentru $k = n, n-1, \ldots, 0$.

Pentru a stabili relaţia de recurenţă necesară în calcule, să observăm mai întâi că pentru orice polinom

$$h = h_0 + h_1X + h_2X^2 + \cdots + h_nX^n$$

avem egalităţile

$$h_0 = h(0),\ h_1 = h'(0),\ h_2 = h''(0), \ldots, h_k = h^{(k)}(0), \ldots,$$

altfel spus orice polinom h poate fi scris sub forma

$$h = h(0) + h'(0)X + h''(0)X^2 + \cdots + h^{(n)}(0)X^n. \tag{2}$$

Să mai stabilim şi relaţia

$$h = h_0 + X(h_1 + h_2X + \cdots + h_nX^{n-1}) = h_0 + Xh', \tag{3}$$

care arată că înmulţirea cu X este operaţia inversă şiftării la stânga. Această egalitate polinomială, evaluată în $X = a$, devine

$$h(a) = h_0 + ah'(a)$$

şi capătă forma

$$h(a) = h(0) + ah'(a),$$

iar aceasta, scrisă pentru $h = f^{(k)}$, devine

$$f^{(k)}(a) = f^{(k)}(0) + af^{(k+1)}(a) \tag{4}$$

şi conduce la

$$f^{(k)}(a) = f_k + af^{(k+1)}(a),$$

pentru orice $k \geq 0$.

Am stabilit astfel relaţia de recurenţă utilizată în schema lui Horner:

	X^{n+1}	X^n	$\cdots$	X^{k+1}	X^k	X^{k-1}	$\cdots$
	0	f_n	$\cdots$	f_{k+1}	f_k	f_{k-1}	$\cdots$
$X=a$	$f^{(n+1)}(a)=0$	$f^{(n)}(a)$	$\cdots$	$f^{(k+1)}(a)$	$f^{(k)}(a)=f_k+af^{(k+1)}(a)$	$\cdots$	$\cdots$

Evaluarea unui polinom cu schema lui Horner este implementată în funcţia următoare, în care valorile şirului $f^{(k)}(a)$, $k=n,n-1,\dots,0$, sunt calculate pe loc în variabila `val`, pornind de la $f^{(n+1)}(a)=0$.

```
double horner(double f[dim], double a) {
    double val = 0;
    for (int k = dim - 1; k >= 0; k--) {
        val = f[k] + a * val;
    }
    return val;
}
```

Înainte de a încheia, vom arăta că prin schema lui Horner se calculează de fapt câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X-a$.

Notăm cu q polinomul cu coeficienţii daţi de ultimul rând al tabelului:

$$q=f(a)+f'(a)X+f''(a)X^2+\cdots$$

şi calculăm produsul $(X-a)q'=Xq'-aq'$.

Din relaţia (3), scrisă pentru $h=q$, avem $q=q_0+Xq'=q(0)+Xq'=f(a)+Xq'$, deci

$$Xq'=q-f(a).$$

Calculăm acum produsul aq' şi, utilizând relaţiile (4) şi (2), obţinem

$$aq'=a(f'(a)+f''(a)X+f'''(a)X^2+\cdots)=$$
$$=af'(a)+af''(a)X+af'''(a)X^2+\cdots=$$
$$=(f(a)-f(0))+(f'(a)-f'(0))X+(f''(a)-f''(0))X^2+\cdots=$$
$$=(f(a)+f'(a)X+f''(a)X^2+\cdots)-(f(0)+f'(0)X+(f''(0)X^2+\cdots)=$$
$$=q-f.$$

Prin urmare,

$$(X-a)q'=Xq'-aq'=(q-f(a))-(q-f)=f-f(a),$$

de unde obţinem

$$f=(X-a)q'+f(a).$$

Am demonstrat că la împărţirea lui f la $X-a$ câtul este polinomul

$$q'=f'(a)+f''(a)X+f''(a)X^2+\cdots$$

iar restul este $f(a)$.

Revenind la exemplul nostru cu $f=1+4X+3X^2-7X^3+3X^4$ şi $a=2$, din tabelul schemei lui Horner

	X^5	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	0	3	-7	3	4	1
$X=2$	0	3	-1	1	6	13

aflăm aşadar că $f=(X-2)(3X^3-X^2+X+6)+13$.