Universitatea "AL. I. Cuza" Iaşi

Note de Curs

Ecuaţii diferenţiale

de

Ioan I. VRABIE

Iaşi 2016

Cuprins

Prefaţă

Aceste note de curs, bazate pe monografiile Vrabie [**17**] şi [**18**], reprezintă o dezvoltare a prelegerilor ţinute de către autor studenţilor anului al II-lea de la Facultatea de Matematică a Universităţii "Al. I. Cuza" din Iaşi la disciplina *Ecuaţii diferenţiale*.

Pe lângă rezultatele fundamentale proprii acestei discipline, în ideea de a scoate în evidenţă forţa aplicativă a acesteia, am prezentat mai multe modele matematice ce descriu evoluţia unor fenomene din diverse domenii din afara matematicii. Am încercat să convingem cititorul cum, din analiza acestor modele prin mijloacele proprii ecuaţiilor diferenţiale, se pot obţine informaţii de substanţă cu privire la evoluţia fenomenelor corespunzătoare. Totodată ne-am străduit să reliefăm o trăsătură de loc neglijabilă a acestei discipline şi anume marea ei putere de abstractizare. Este vorba aici de faptul că numeroase fenomene distincte admit modele diferenţiale formal identice şi drept urmare, din studiul unui singur astfel de model, se pot trage concluzii despre modul de evoluţie a mai multor sisteme reale.

Notele de curs, împărţite în cinci capitole şi un appendix, sunt accesibile oricărui cititor care stăpâneşte noţiunile şi rezultatele de bază de algebră liniară şi de analiză matematică.

În capitolul întâi sunt incluse rezultalele de baza referitoare la ecuaţiilor rezolvabile prin metode elementare şi, aşa cum am menţionat deja, sunt deduse unele modele matematice ale unor fenomene din fizica, biologie, chimie, dinamica populaţiilor ale căror evoluţii sunt descrise de ecuaţii sau sisteme de ecuaţii diferenţiale.

Capitolul al doilea este dedicat prezentării rezultatelor fundamentale referitoare la problema cu date iniţiale, cunoscută şi sub numele de problemă Cauchy. Sunt abordate aici: existenţa locală, existenţa şi unicitatea locală, unicitatea locală şi cea globală, prelungibilitatea soluţiilor, şi continuitatea acestora în raport cu datele iniţiale.

Capitolul al treilea este consacrat studiului unei clase speciale foarte importante de sisteme de ecuaţii diferenţiale, şi anume sistemele diferenţiale de ordinul întâi liniare. Sunt prezentate: existenţa globală, structura algebrică a spaţiului soluţiilor, matricea fundamentală şi wronskianul unui sistem de soluţii, formula variaţiei constantelor, metoda variaţiei constantelor, funcţia exponenţială de matrice şi aplicaţii la studiul ecuaţiei diferenţiale de ordinul n liniară.

Capitolul al patrulea este dedicat prezentării rezultatelor de bază referitoare la una dintre problemele centrale ale teoriei ecuaţiilor diferenţiale, problemă cu profunde implicaţii aplicative: aceea a stabilităţii soluţiilor.

În capitolul al cincilea am introdus şi studiat noţiunea de integrală primă pentru un sistem diferenţial. Tot aici şi-au găsit locul firesc şi câteva consideraţii cu privire la ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasi-liniare.

În Appendix am inclus unele noţiuni şi rezultate care, deşi cu caracter auxiliar, constituie instrumente de bază ale disciplinei şi sunt utilizate frecvent pe parcursul întregii cărţi.

Fiecare capitol conţine câte o secţiune de exerciţii şi probleme propuse spre rezolvare. Din acest motiv, cartea se încheie cu un paragraf amplu consacrat în exclusivitate prezentării soluţiilor detaliate ale tuturor exerciţiilor şi problemelor propuse.

Cartea se încheie cu un indice alfabetic cuprinzând toate noţiunile sau denumirile introduse cu precizarea, la fiecare, a numărului paginii la care aceasta este definită pentru prima dată şi cu o listă de simboluri.

Iaşi, 1 octombrie, 2016 IOAN I. VRABIE

CAPITOLUL 1

Generalităţi

Acest capitol are un rol introductiv. Primul paragraf este dedicat unei pezentări generale a disciplinei. Paragraful al doilea trece în revistă cele mai reprezentative ecuaţii diferenţiale care pot fi rezolvate prin metode elementare. În paragraful al treilea, pentru a ilustra puterea aplicativă a disciplinei, sunt prezentate mai multe modele matematice descrise de ecuaţii diferenţiale. În paragraful al patrulea sunt demonstrate câteva inegalităţi integrale utile pe tot parcursul cărţii, iar în ultimul paragraf sunt incluse mai multe exerciţii şi probleme propuse spre rezolvare.

---

1. Introducere

Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale. Ecuaţiile diferenţiale au apărut şi s-au dezvoltat ca disciplină de sine stătătoare din dorinţa firească de a prezice cu o cât mai mare acurateţe evoluţia în viitor a unui sistem fizic, sociologic, chimic, biologic, etc. Este uşor de realizat că această prezicere va fi cu atât mai apropiată de realitate cu cât vom avea date mai exacte despre starea prezentă a sistemului în chestiune şi, totodată, vom cunoaşte legea după care acesta îşi modifică viteza instantanee de evoluţie în funcţie de starea instantanee. Modelarea matematică este aceea care intervine în acest punct şi pune la îndemâna cercetătorului descrierea în limbaj matematic a acestor legi care, de foarte multe ori, capătă forma unor ecuaţii sau sisteme de ecuaţii diferenţiale.

Denumirea de "equatio differentialis" a fost folosită pentru prima dată de către Gottfried Wilhelm von Leibniz care, în anul 1676, se referea prin aceasta la determinarea unei funcţii care satisface o relaţie dată împreună cu una sau mai multe dintre derivatele sale. Acest concept a apărut ca o necesitate de a cuprinde într-un cadru abstract cât mai general o multitudine de probleme de analiză şi de modelare matematică puse (şi unele dintre ele chiar rezolvate) începând cu mijlocul secolului al XVII-lea. O primă problemă ce aparţine domeniului ecuaţiilor diferenţiale este aşa numita *problemă inversă a tangentelor* care constă în determinarea unei curbe plane cunoscându-se proprietăţile tangentei la curbă în orice punct al său. Cel care a încercat pentru prima dată să reducă acest tip de probleme la cuadraturi[1]

Scopul acestei secţiuni este de a defini conceptele de ecuaţie diferenţială şi de sistem de ecuaţii diferenţiale şi de a prezenta succint cele mai importante probleme care vor fi abordate pe parcursul acestei cărţi. O ecuaţie diferenţială scalară este expresia unei relaţii de dependenţă funcţională între o funcţie cu valori reale, numită funcţie necunoscută, derivatele ei ordinare (parţiale) până la un anumit ordin $n \geq 1$ şi variabila

---

[1]Prin cuadratură înţelegem metoda care constă în reducerea rezolvării unei probleme de analiză matematică la calculul unei integrale definite, sau nedefinite. Denumirea provine de la procedeul de calcul al ariei unei figuri plane, foarte utilizat în antichitate, procedeu numit cuadrare deoarece el consta în construirea cu rigla şi compasul a unui pătrat având aceeaşi arie cu aceea căutată.

independentă (variabilele independente). Ordinul maxim de derivare al funcţiei necunoscute care este efectiv implicat în ecuaţie poartă numele de *ordinul ecuaţiei.* O ecuaţie diferenţială în care funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă reală poartă numele de *ecuaţie diferenţială ordinară*, în timp ce o ecuaţie diferenţială în care funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile reale independente se numeşte *ecuaţie cu derivate parţiale.* De exemplu ecuaţia

$$x'' + x = \sin t$$

cu funcţia necunoscută x de variabila reală t este o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul al doilea, iar ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

cu funcţia necunoscută u, depinzând de variabilele reale independente x şi y, este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi.

În cartea de faţă ne vom ocupa cu precădere de studiul ecuaţiilor diferenţiale ordinare, deşi vom analiza şi unele probleme legate de o clasă specială de ecuaţii cu derivate parţiale al cărei loc de abordare este foarte potrivit acestui cadru.

În general, forma unei ecuaţii diferenţiale ordinare scalare de ordinul n cu funcţia necunoscută x este

$$(\mathcal{E}) \qquad F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

unde F este o funcţie definită pe o submulţime $D(F)$ din $\mathbb{R}^{n+2}$ cu valori în $\mathbb{R}$, neconstantă în raport cu ultima variabilă[2].

În anumite condiţii de regularitate asupra funcţiei F (cerute de aplicabilitatea teoremei funcţiilor definite implicit), $(\mathcal{E})$ poate fi rescrisă sub forma

$$(\mathcal{N}) \qquad x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}),$$

unde f este o funcţie de la o submulţime $D(f)$ din $\mathbb{R}^{n+1}$ în $\mathbb{R}$ care defineşte explicit pe $x^{(n)}$ în funcţie de $t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}$ prin intermediul relaţiei $F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$. O ecuaţie de forma $(\mathcal{N})$ poartă numele de *ecuaţie diferenţială de ordinul n scalară în forma normală.* Cu câteva mici excepţii, în tot ceea ce urmează ne vom ocupa de studiul unor ecuaţii de ordinul întâi sub forma normală, adică de studiul unor ecuaţii diferenţiale de forma

$$(\mathcal{O}) \qquad x' = f(t, x),$$

în care f este o funcţie definită pe o submulţime $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ cu valori în $\mathbb{R}$.

Analog, dacă $g : D(g) \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie dată, $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, unde $D(g)$ este inclusă în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, putem defini un *sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi* cu n funcţii necunoscute: $y_1, y_2, \ldots, y_n$, ca fiind un sistem de forma

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} y_1' = g_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = g_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = g_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$

care, la rândul său, reprezintă scrierea pe componente a unei *ecuaţii diferenţiale vectoriale de ordinul întâi*

$$(\mathcal{V}) \qquad y' = g(t, y).$$

[2]Dacă F nu depinde de "$x^{(n)}$" ecuaţia $(\mathcal{E})$ are ordinul mai mic sau egal cu $n - 1$.

Prin intermediul transformărilor

$$(\mathcal{T})\qquad \begin{cases} y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x,x',\ldots,x^{(n-1)})\\ g(t,y)=(y_2,y_3,\ldots,y_n,\ f(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)),\end{cases}$$

$(\mathcal{N})$ poate fi rescrisă echivalent ca un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu n funcţii necunoscute:

$$\begin{cases} y_1'=y_2\\ y_2'=y_3\\ \vdots\\ y_{n-1}'=y_n\\ y_n'=f(t,y_1,y_2,\ldots,y_n),\end{cases}$$

sau, altfel spus, ca o ecuaţie diferenţială vectorială de ordinul întâi $(\mathcal{V})$, cu g definit în $(\mathcal{T})$. În acest fel, studiul ecuaţiei $(\mathcal{N})$ se reduce la studiul unei ecuaţii de tipul $(\mathcal{V})$ sau, echivalent, la studiul unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Din acest motiv, în tot ceea ce urmează, ne vom ocupa numai de studiul ecuaţiei $(\mathcal{V})$, precizând numai, ori de câte ori este cazul, cum se transcriu rezultatele privitoare la $(\mathcal{V})$ pentru $(\mathcal{N})$ prin intermediul transformărilor $(\mathcal{T})$[3].

Menţionăm că, ori de câte ori funcţia g din $(\mathcal{V})$ nu depinde în mod explicit de t, ecuaţia $(\mathcal{V})$ se numeşte *autonomă*. În aceleaşi condiţii, sistemul $(\mathcal{S})$ se numeşte *autonom*. De exemplu, ecuaţia

$$y'=2y$$

este autonomă, în timp ce ecuaţia

$$y'=2y+t$$

este neautonomă. Precizăm însă că orice ecuaţie neautonomă de forma $(\mathcal{V})$ poate fi rescrisă ca o ecuaţie autonomă

$$(\mathcal{V}')\qquad z'=h(z),$$

în care funcţia necunoscută z are o componentă în plus faţă de funcţia y. Mai precis, punând $z=(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1})=(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ şi definind $h:D(g)\subset\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ prin

$$h(z)=(1,g_1(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1}),\ldots,g_n(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1}))$$

pentru orice $z\in D(g)$, se observă că $(\mathcal{V}')$ reprezintă scrierea echivalentă a ecuaţiei $(\mathcal{V})$. Ca atare, ecuaţia diferenţială scalară $y'=2y+t$ poate fi rescrisă ca o ecuaţie diferenţială vectorială în $\mathbb{R}^2$ de forma $z'=h(z)$, în care $z=(z_1,z_2)=(t,y)$ şi $h(z)=(1,2z_2+z_1)$. Consideraţii analoge au loc şi pentru sistemul $(\mathcal{S})$.

Tipuri de soluţii. Aşa cum a fost definită până acum, oarecum descriptiv şi evident neriguros, noţiunea de ecuaţie diferenţială este ambiguă doarece nu s-a precizat accepţiunea în care trebuie înţeleasă egalitatea $(\mathcal{E})$[4]. Mai precis, să observăm de la bun început că oricare dintre egalităţile formale $(\mathcal{E})$, sau $(\mathcal{N})$ pot fi gândite ca având loc în cel puţin una dintre cele trei accepţiuni descrise mai jos:

(i) pentru orice t din domeniul $\mathbb{I}_x$ al funcţiei x;

(ii) pentru toţi t din $\mathbb{I}_x\setminus\mathbb{E}$, unde $\mathbb{E}$ este o mulţime de excepţie (finită, numărabilă, de măsură nulă, etc.);

[3] Transformări propuse de către JEAN LE ROND D'ALEMBERT.

[4] De fapt s-a indicat numai un tip de relaţie care ar putea defini un predicat (ecuaţia diferenţială), fără a i se preciza câmpul pe care acţionează (pe care este definit).

(iii) într-un sens generalizat care nu pretinde egalitatea obişnuită în nici un punct.

Este acum clar că o problemă importantă care se pune de la bun început este aceea de a defini conceptul de soluţie pentru $(\mathcal{E})$ precizând care este semnificaţia egalităţii $(\mathcal{E})$. Pentru a înţelege mai bine importanţa acestui demers să analizăm următoarele exemple.

EXEMPLUL 1.1.1. Să considerăm aşa numita *ecuaţie eikonală*

$$|x'| = 1. \tag{1.1.1}$$

Este uşor de constatat că singurele funcţii de clasă C^1, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică (1.1.1) pentru orice $t \in \mathbb{R}$ sunt de forma $x(t) = t + c$, sau $x(t) = -t + c$, cu $c \in \mathbb{R}$ şi reciproc. Pe de altă parte, dacă acceptăm ca (1.1.1) să fie verificată pentru orice $t \in \mathbb{R}$ exceptând eventual un număr finit de puncte, pe lângă funcţiile precizate mai sus, constatăm că şi orice funcţie având graficul ca în Figura 1.1.1 de mai jos, este o soluţie a ecuaţiei (1.1.1) în această nouă accepţie.

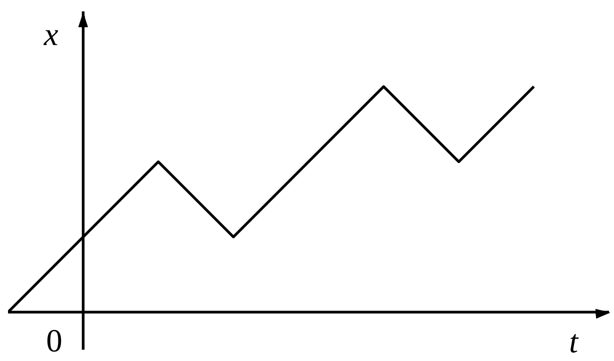

FIGURA 1.1.1

EXEMPLUL 1.1.2. Să considerăm acum ecuaţia diferenţială

$$x' = h$$

unde $h : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată. Este evident că dacă h este continuă x este de clasă C^1, în timp ce dacă h este discontinuă, ecuaţia de mai sus nu poate avea soluţii de clasă C^1.

Aceste exemple subliniază importanţa deosebită pe care o are clasa de funcţii în care ne propunem să acceptăm candidaţii la titlul de soluţie pentru o ecuaţie diferenţială dată. Astfel, dacă această clasă este prea restrânsă, şansele de a avea asigurată existenţa unei soluţii sunt foarte mici, în timp ce, dacă această clasă este foarte largă, aceste şanse cresc cu preţul pierderii unor proprietăţi de regularitate a soluţiilor. De aceea, conceptul de soluţie pentru o ecuaţie diferenţială trebuie definit având în vedere realizarea unui compromis ca, pe de o parte, să avem asigurată existenţa a cel puţin unei soluţii şi, pe de o altă parte, toate soluţiile să aibă suficiente proprietăţi de regularitate pentru a putea fi utilizate eficient. Din exemplele analizate anterior, este uşor de constatat că definirea acestui concept trebuie făcută ţinând cont, în primul rând de proprietăţile de regularitate ale funcţiei F. Din acest motiv, presupunând că F este de clasă C^n, este natural să adoptăm:

DEFINIŢIA 1.1.1. O *soluţie* a ecuaţiei diferenţiale ordinare scalare de ordinul n $(\mathcal{E})$ este o funcţie $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ de clasă C^n pe intervalul cu interior nevid $\mathbb{I}_x$, care satisface $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in D(F)$ şi verifică $(\mathcal{E})$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$.

DEFINIŢIA 1.1.2. O *soluţie* a ecuaţiei diferenţiale ordinare scalare de ordinul n în forma normală $(\mathcal{N})$ este o funcţie $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ de clasă C^n pe intervalul cu interior nevid $\mathbb{I}_x$, care satisface $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in D(f)$ şi verifică $(\mathcal{N})$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$.

DEFINIŢIA 1.1.3. O *soluţie* a sistemului de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi $(\mathcal{S})$ este o n-uplă de funcţii $(y_1, y_2, \dots, y_n) : \mathbb{I}_y \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^1 pe intervalul cu interior nevid $\mathbb{I}_y$, care satisface $(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in D(g)$ şi verifică $(\mathcal{S})$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_y$. *Traiectoria* corespunzătoare soluţiei $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ este mulţimea

$$\tau(y) = \{y(t);\ t \in \mathbb{I}_y\}.$$

DEFINIŢIA 1.1.4. O *soluţie* a ecuaţiei diferenţiale ordinare vectoriale de ordinul întâi $(\mathcal{V})$ este o funcţie $y : \mathbb{I}_y \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^1 pe intervalul cu interior nevid $\mathbb{I}_y$, care satisface $(t, y(t)) \in D(g)$ şi verifică $(\mathcal{V})$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_y$. *Traiectoria* corespunzătoare soluţiei y este mulţimea

$$\tau(y) = \{y(t);\ t \in \mathbb{I}_y\}.$$

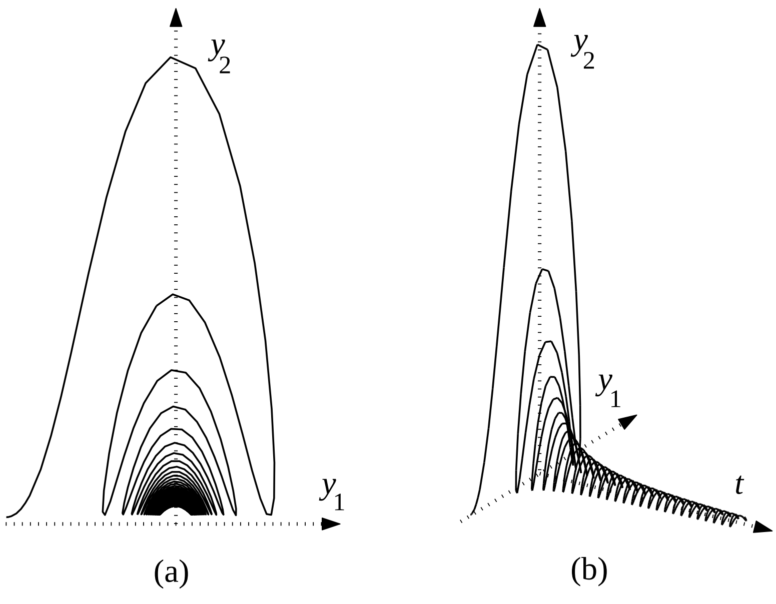

FIGURA 1.1.2

În Figura 1.1.2 (a) este ilustrată traiectoria corespunzătoare soluţiei unui sistem în $\mathbb{R}^2$ iar în Figura 1.1.2 (b) graficul acestei soluţii. Să observăm că problema determinării primitivelor unei funcţii continue h pe un interval $\mathbb{I}$ poate fi înglobată într-o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de forma $x' = h$ pentru care, din mulţimea soluţiilor date de Definiţia 1.1.1, le reţinem numai pe cele definite pe $\mathbb{I}$, domeniul maxim al funcţiei h.

DEFINIŢIA 1.1.5. O familie de funcţii $\{x(\cdot, c) : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R};\ c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n\}$, definite implicit de o relaţie de forma

$$(\mathcal{G}) \qquad G(t, x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

în care $G : D(G) \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, este o funcţie de clasă C^n în raport cu primele 2 variabile, cu proprietatea că, prin eliminarea celor n constante $c_1, c_2, \ldots, c_n$ din sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[G(\cdot, x(\cdot), c_1, c_2, \ldots, c_n)\right](t) = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\left[G(\cdot, x(\cdot), c_1, c_2, \ldots, c_n)\right](t) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{d^n}{dt^n}\left[G(\cdot, x(\cdot), c_1, c_2, \ldots, c_n)\right](t) = 0, \end{cases}$$

şi înlocuirea acestora în $(\mathcal{G})$ se obţine tocmai $(\mathcal{E})$, poartă numele de *integrala, sau soluţia generală* a $(\mathcal{E})$.

EXEMPLUL 1.1.3. Pentru ecuaţia

$$x'' + a^2 x = 0,$$

cu $a > 0$, integrala generală este $\{x(\cdot, c_1, c_2);\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\}$, unde

$$x(t, c_1, c_2) = c_1 \sin at + c_2 \cos at$$

pentru $t \in \mathbb{I}_x$[5] şi se obţine prin eliminarea constantelor c_1, c_2 din sistemul

$$\begin{cases} (x - c_1 \sin at - c_2 \cos at)' = 0 \\ (x - c_1 \sin at - c_2 \cos at)'' = 0. \end{cases}$$

În acest caz, $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$G(t, x, c_1, c_2) = x - c_1 \sin at - c_2 \cos at$$

pentru orice $(t, x, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, iar $(\mathcal{G})$ poate fi scrisă echivalent sub forma

$$x = c_1 \sin at + c_2 \cos at,$$

relaţie care exprimă în mod explicit integrala generală. După cum vom constata, şi în alte situaţii, în care din $(\mathcal{G})$ vom putea explicita efectiv pe x în funcţie de $t, c_1, c_2, \ldots, c_n$, integrala generală a $(\mathcal{E})$ va putea fi dată sub forma explicită

$$x(t, c_1, c_2, \ldots, c_n) = H(t, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

cu $H : D(H) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^n.

[5]Facem menţiunea că, în acest caz, integrala generală conţine şi funcţii definite pe întreaga mulţime $\mathbb{R}$, adică pentru care $\mathbb{I}_x = \mathbb{R}$.

2. Ecuaţii rezolvabile prin cuadraturi

În această secţiune vom prezenta mai multe tipuri de ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii pot fi determinate prin operaţii de integrare a unor funcţii cunoscute. Cum integrarea funcţiilor reale de variabilă reală este numită şi *cuadrare*, aceste ecuaţii poartă numele de *ecuaţii rezolvabile prin cuadraturi.*

Ecuaţia cu variabile separabile. O *ecuaţie cu variabile separabile* este o ecuaţie de forma

$$x'(t) = f(t)g(x(t)), \tag{1.2.1}$$

unde $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue cu $g(y) \neq 0$ pentru orice $y \in \mathbb{J}$.

Teorema 1.2.1. *Fie $\mathbb{I}$ şi $\mathbb{J}$ două intervale deschise nevide din $\mathbb{R}$ şi fie $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu $g(y) \neq 0$ pentru orice $y \in \mathbb{J}$. Atunci, soluţia generală a ecuaţiei* (1.2.1) *este dată de*

$$x(t) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right) \tag{1.2.2}$$

pentru orice $t \in \mathrm{Dom}(x)$, unde t_0 este un punct fixat în $\mathbb{I}$, iar $G : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$G(y) = \int_{\xi}^{y} \frac{d\tau}{g(\tau)}$$

pentru orice $y \in \mathbb{J}$, cu $\xi \in \mathbb{J}$.

Demonstraţie. Cum g nu se anulează pe $\mathbb{J}$ şi este continuă, ea păstrează semn constant pe $\mathbb{J}$. Schimbând semnul funcţiei f dacă este cazul, putem presupune că $g(y) > 0$ pentru orice $y \in \mathbb{J}$. Atunci, funcţia G este bine definită şi strict crescătoare pe $\mathbb{J}$.

Începem prin a observa că funcţia x definită prin intermediul relaţiei (1.2.2) este o soluţie a ecuaţie (1.2.1) care satisface $x(t_0) = \xi$. Într-adevăr,

$$x'(t) = \left[G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right)\right]' = \frac{1}{G'\left(G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\right)\right)} f(t) = g(x(t))f(t)$$

pentru orice t din domeniul funcţiei x. În plus, din modul în care a fost definită funcţia G, rezultă $x(t_0) = \xi$.

Pentru a încheia demonstraţia este suficient să arătăm că orice soluţie a ecuaţiei (1.2.1) este de forma (1.2.2). În acest scop, fie $x : \mathrm{Dom}(x) \to \mathbb{J}$ o soluţie a ecuaţiei (1.2.1) şi să observăm că aceasta poate fi rescrisă echivalent sub forma

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t)$$

pentru orice $t \in \mathrm{Dom}(x)$. Integrând această egalitate membru cu membru de la t_0 la t obţinem

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)\,ds}{g(x(s))} = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$

pentru orice $t \in \mathrm{Dom}(x)$. Ca atare avem

$$G(x(t)) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds,$$

unde G este definită ca mai sus cu $\xi = x(t_0)$. Reamintind că G este strict crescătoare pe $\mathbb{J}$, ea este inversabilă de la imaginea ei $G(\mathbb{J})$ în $\mathbb{J}$. Din această observaţie şi din ultima egalitate deducem (1.2.2). $\square$

Ecuaţia liniară. O *ecuaţie liniară* este o ecuaţie de forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \tag{1.2.3}$$

unde $a, b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$. Dacă $b \equiv 0$ pe $\mathbb{I}$ ecuaţia se numeşte *liniară şi omogenă*, iar în caz contrar *liniară şi neomogenă*

TEOREMA 1.2.2. *Dacă a şi b sunt continue pe $\mathbb{I}$ atunci soluţia generală a ecuaţiei* (1.2.3) *este dată de aşa numita formulă a variaţiei constantelor*

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\xi + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau\right) b(s)\,ds \tag{1.2.4}$$

pentru orice $t \in \mathrm{Dom}(x)$, unde $t_0 \in \mathrm{Dom}(x)$ este fixat, iar ξ parcurge $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Un simplu calcul arată că x definit prin (1.2.4) este o soluţie a ecuaţiei (1.2.3) care satisface $x(t_0) = \xi$. Rămâne să demonstrăm că orice soluţie a ecuaţiei (1.2.3) este de forma (1.2.4) pe intervalul ei de definiţie. Pentru aceasta, fie $x : \mathbb{I}_0 \to \mathbb{R}$ o soluţie a ecuaţiei (1.2.3), unde $\mathbb{I}_0$ este un interval cu interior nevid inclus în $\mathbb{I}$. Să fixăm $t_0 \in \mathbb{I}_0$ şi să înmulţim ambii membri ai ecuaţiei (1.2.3) în care am trecut t în s cu

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau\right)$$

unde $s \in \mathbb{I}_0$. Trecînd primul termen astfel obţinut din membrul al doilea în membrul întâi obţinem

$$\frac{d}{ds}\left(x(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau\right)\right) = b(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a(\tau)\,d\tau\right)$$

pentru orice $s \in \mathbb{I}_0$. Integrând această egalitate în ambii membri de la t_0 la $t \in \mathbb{I}_0$ şi înmulţind egalitatea astfel obţinută cu

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right)$$

deducem (1.2.4). Demonstraţia este încheiată. $\square$

OBSERVAŢIA 1.2.1. Din (1.2.4) rezultă că orice soluţie a ecuaţiei (1.2.3) poate fi prelungită ca soluţie a aceleiaşi ecuaţii la întregul interval $\mathbb{I}$.

Ecuaţia omogenă. O *ecuaţie omogenă* este o ecuaţie de forma

$$x'(t) = h\left(\frac{x(t)}{t}\right) \tag{1.2.5}$$

unde $h : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este continuă şi $h(r) \neq r$ pentru orice $r \in \mathbb{I}$.

TEOREMA 1.2.3. *Dacă $h : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este continuă şi $h(r) \neq r$ pentru orice $r \in \mathbb{I}$, atunci soluţia generală a ecuaţiei* (1.2.5) *este dată de*

$$x(t) = tu(t)$$

pentru $t \neq 0$, unde u este soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile

$$u'(t) = \frac{1}{t}\left(h(u(t)) - u(t)\right).$$

Demonstraţie. Se exprimă x' prin intermediul funcţiei u şi se pune condiţia ca x să fie soluţie a ecuaţiei (1.2.5). □

O clasă importantă de ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţiile precedente este

$$x'(t) = \frac{a_{11}x(t) + a_{12}t + b_1}{a_{21}x(t) + a_{22}t + b_2}, \tag{1.2.6}$$

unde a_{ij} şi b_i, $i, j = 1, 2$ sunt constante şi

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 + b_1^2 > 0 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + b_2^2 > 0. \end{cases}$$

În funcţie de compatibilitatea sistemului

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}t + b_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}t + b_2 = 0 \end{cases} \tag{$\mathcal{E}$}$$

distingem trei cazuri. Mai precis avem:
Cazul I. Dacă sistemul $(\mathcal{E})$ este compatibil determinat cu soluţia (ξ, η), atunci prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = y + \xi \\ t = s + \eta \end{cases}$$

(1.2.6) poate fi rescrisă echivalent sub forma ecuaţiei omogene

$$y'(s) = \frac{a_{11}\dfrac{y(s)}{s} + a_{12}}{a_{21}\dfrac{y(s)}{s} + a_{22}};$$

Cazul II. Dacă sistemul $(\mathcal{E})$ este compatibil nedeterminat atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât

$$(a_{11}, a_{12}, b_1) = \lambda\,(a_{21}, a_{22}, b_2)$$

şi ca atare (1.2.6) se reduce la $x'(t) = \lambda$;
Cazul III. Dacă sistemul $(\mathcal{E})$ este incompatibil atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât

$$\begin{cases} (a_{11}, a_{12}) = \lambda\,(a_{21}, a_{22}) \\ (a_{11}, a_{12}, b_1) \neq \lambda\,(a_{21}, a_{22}, b_2) \end{cases}$$

şi ecuaţia se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile.

Ecuaţia Bernoulli. O ecuaţie de forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^{\alpha}(t), \tag{1.2.7}$$

unde $a, b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue neidentic nule şi neproporţionale pe $\mathbb{I}$, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, poartă numele de *ecuaţie* BERNOULLI.

OBSERVAŢIA 1.2.2. Restricţiile impuse asupra datelor a, b şi α se explică prin aceea că: dacă $a \equiv 0$ atunci (1.2.7) este cu variabile separabile; dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $a(t) = \lambda b(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, (1.2.7) este de asemenea cu variabile separabile; dacă $b \equiv 0$ atunci (1.2.7) este liniară şi omogenă; dacă $\alpha = 0$ atunci (1.2.7) este liniară; dacă $\alpha = 1$ atunci (1.2.7) este liniară şi omogenă.

TEOREMA 1.2.4. *Dacă* $a, b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ *sunt continue şi neidentic nule pe* $\mathbb{I}$ *şi* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *atunci* x *este soluţie pozitivă a ecuaţiei* (1.2.7) *dacă şi numai dacă funcţia* y, *definită prin*

$$y(t) = x^{1-\alpha}(t) \tag{1.2.8}$$

pentru orice $t \in \mathrm{Dom}(x)$, *este o soluţie pozitivă a ecuaţiei liniare şi neomogene*

$$y'(t) = (1-\alpha)a(t)y(t) + (1-\alpha)b(t). \tag{1.2.9}$$

Demonstraţie. Fie x o soluţie pozitivă a ecuaţiei (1.2.7). Calculând x' în funcţie de y şi y' şi scriind că x verifică ecuaţia (1.2.7) deducem că y este soluţie pozitivă a ecuaţiei (1.2.9). Un calcul asemănător arată că dacă y este o soluţie pozitivă a ecuaţiei (1.2.9), atunci x dat de (1.2.8) este soluţie pozitivă a ecuaţiei (1.2.7). Demonstraţia este încheiată. □

Ecuaţia Riccati. O ecuaţie de forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t), \tag{1.2.10}$$

unde $a, b, c : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu b şi c neidentic nule pe $\mathbb{I}$ se numeşte *ecuaţie* RICCATI.

Prin definiţie s-au exclus cazurile $b \equiv 0$ când (1.2.10) este liniară şi $c \equiv 0$ când (1.2.10) este o ecuaţie BERNOULLI cu $\alpha = 2$.

OBSERVAŢIA 1.2.3. În general, nu se cunosc metode de determinare a soluţiei generale a ecuaţiei RICCATI cu excepţia cazului când se poate pune în evidenţă o soluţie particulară a sa. Acest caz face obiectul teoremei de mai jos.

TEOREMA 1.2.5. *Fie* $a, b, c : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ *funcţii continue cu* b *şi* c *neidentic nule pe* $\mathbb{I}$. *Dacă* $\varphi : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ *este o soluţie a ecuaţiei* (1.2.10), *atunci soluţia generală a ecuaţiei* (1.2.10) *pe* $\mathbb{J}$ *este dată de*

$$x(t) = y(t) + \varphi(t),$$

unde y *este soluţia generală a ecuaţiei* BERNOULLI

$$y'(t) = (a(t) + 2\varphi(t))y(t) + b(t)y^2(t).$$

Demonstraţie. Se constată prin calcul direct că $x = y + \varphi$ este soluţie a ecuaţiei (1.2.10) dacă şi numai dacă $y = x - \varphi$ este soluţie a ecuaţiei BERNOULLI de mai sus. □

Ecuaţii cu diferenţiale exacte Fie D o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^2$ şi fie $g, h : D \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 pe D, cu $h(t, x) \neq 0$ pe D. O ecuaţie de forma

$$x'(t) = \frac{g(t, x(t))}{h(t, x(t))} \tag{1.2.11}$$

se numeşte *cu diferenţială exactă* dacă există o funcţie de clasă C^2, $F : D \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t, x) = -g(t, x) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x}(t, x) = h(t, x) \end{cases} \tag{1.2.12}$$

Condiţia de mai sus arată că $-g(t, x)\,dt + h(t, x)\,dx$ este diferenţiala dF a funcţiei F în punctul $(t, x) \in D$.

TEOREMA 1.2.6. *Dacă* (1.2.11) *este o ecuaţie cu difernţială exactă, atunci soluţia ei generală este definită implicit de*

$$F(t, x(t)) = c, \tag{1.2.13}$$

unde $F : D \to \mathbb{R}$ *verifică sistemul* (1.2.12), *iar* c *parcurge* $F(D)$.

Demonstraţie. Dacă (1.2.11) este o ecuaţie cu diferenţială exactă atunci x este soluţie a ecuaţiei dacă şi numai dacă

$$-g(t, x(t))\, dt + h(t, x(t))\, dx(t) = 0$$

pentru $t \in \mathrm{Dom}(x)$, egalitate care, în virtutea faptului că F satisface (1.2.12) este echivalentă cu

$$dF(t, x(t)) = 0$$

pentru orice $t \in \mathrm{Dom}(x)$. Cum această din urmă egalitate este, la rândul ei, echivalentă cu (1.2.13), demonstraţia este încheiată. □

TEOREMA 1.2.7. *Dacă D este un domeniu simplu conex, atunci, o condiţie necesară şi suficientă ca ecuaţia* (1.2.11) *să fie cu diferenţială exactă este ca*

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = -\frac{\partial g}{\partial x}(t, x),$$

pentru orice $(t, x) \in D$.

Pentru demonstraţie vezi Teorema 5 din M. NICOLESCU et al [**11**], p. 187.

Ecuaţii reductibile la ecuaţii cu diferenţiale exacte. În general, dacă sistemul (1.2.12) nu admite soluţii, metoda de determinare a soluţiei generale a ecuaţiei (1.2.11) descrisă mai sus nu mai este aplicabilă. Există totuşi unele cazuri în care, deşi (1.2.12) nu are soluţii, (1.2.11) poate fi redusă la o ecuaţie care să fie cu diferenţială exactă. Descriem mai jos o astfel de metodă de reducere care poartă numele de *metoda factorului integrant.* Mai precis, dacă (1.2.11) nu este cu diferenţială exactă, căutăm o funcţie $\rho : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 cu $\rho(t, x) \neq 0$ pentru orice $(t, x) \in D$ astfel încât

$$-\rho(t, x)g(t, x)\, dt + \rho(t, x)h(t, x)\, dx$$

să fie diferenţiala unei funcţii $F : D \to \mathbb{R}$. Din Teorema 1.2.7 rezultă că, o condiţie necesară şi suficientă pentru aceasta este

$$h(t, x)\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + g(t, x)\frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial h}{\partial t}(t, x)\right)\rho(t, x) = 0$$

pentru orice $(t, x) \in D$. Aceasta este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cu ρ funcţie necunoscută. Vom studia posibilităţile de rezolvare a acestui tip de ecuaţii în Capitolul 6. Până atunci să observăm că, dacă

$$\frac{1}{h(t, x)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial h}{\partial t}(t, x)\right) = f(t)$$

este independentă de variabila x, putem căuta soluţia ρ ca o funcţie, de asemenea, independentă de variabila x. Această funcţie ρ este soluţie a ecuaţiei liniare şi omogene

$$\rho'(t) = -f(t)\rho(t).$$

Analog, dacă $g(t, x) \neq 0$ pentru $(t, x) \in D$ şi

$$\frac{1}{g(t, x)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial h}{\partial t}(t, x)\right) = k(x),$$

este independentă de variabila t, putem căuta soluţia ρ ca o funcţie, de asemenea, independentă de variabila t. Cazul când nici una dintre condiţiile de mai sus nu este verificată va fi studiat în capitolul 5.

Ecuaţia Lagrange. O ecuaţie diferenţială de forma (nenormală)

$$x(t) = t\varphi(x'(t)) + \psi(x'(t))$$

în care φ şi ψ sunt funcţii de clasă C^1 de la $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$ şi $\varphi(r) \neq r$ pentru orice $r \in \mathbb{R}$ poartă numele de *ecuaţie* LAGRANGE. Acest tip de ecuaţie se poate integra utilizând aşa numita *metodă a parametrului.* Această metodă constă în determinarea soluţiile de clasă C^2 nu sub forma explicită $x = x(t)$ ci sub forma parametrică

$$\begin{cases} t = t(p) \\ x = x(p), \quad p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mai precis, fie x o soluţie de clasă C^2 a ecuaţiei LAGRANGE. Derivând ecuaţia membru cu membru obţinem

$$x'(t) = \varphi(x'(t)) + t\varphi'(x'(t))\, x''(t) + \psi'(x'(t))\, x''(t).$$

Notând $x'(t) = p(t)$ avem $x''(t) = p'(t)$ şi în consecinţă

$$\frac{dp}{dt}(t) = -\frac{\varphi(p(t)) - p(t)}{t\varphi'(p(t)) + \psi'(p(t))}.$$

Presupunând acum că p este inversabilă şi notând inversa ei cu $t = t(p)$, ecuaţia de mai sus se rescrie echivalent sub forma

$$\frac{dt}{dp}(p) = -\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\, t(p) - \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}.$$

Dar ecuaţia de mai sus este o ecuaţie liniară care poate fi integrată prin metoda variaţiei constantelor. Vom găsi atunci $t = \theta(p, c)$ pentru $p \in \mathbb{R}$ şi c constantă de unde, folosind ecuaţia iniţială, deducem

$$\begin{cases} t = \theta(p, c) \\ x = \theta(p, c)\varphi(p) + \psi(p), \quad p \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

care reprezintă ecuaţiile parametrice ale soluţiei generale ale ecuaţiei LAGRANGE.

Ecuaţia Clairaut. O ecuaţie de forma

$$x(t) = tx'(t) + \psi(x'(t)),$$

unde $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1 se numeşte *ecuaţie* CLAIRAUT. Aceasta se rezolvă prin aceeaşi metodă a parametrului. Mai precis, fie x o soluţie de clasă C^2 a ecuaţiei. Derivând ecuaţia în ambii membri obţinem

$$x''(t)(t + \psi'(x'(t))) = 0.$$

Notând $p(t) = x'(t)$, ecuaţia de mai sus este echivalentă cu

$$p'(t)(t + \psi'(p(t))) = 0.$$

Dacă $p'(t) = 0$ rezultă $x(t) = ct + d$ cu $c, d \in \mathbb{R}$, de unde, punând condiţia ca x să verifice ecuaţia, deducem

$$x(t) = ct + \psi(c)$$

pentru $t \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}$, numită *soluţia generală a ecuaţiei* CLAIRAUT care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie de drepte. Dacă $t + \psi'(p(t)) = 0$ deducem

$$\begin{cases} t = -\psi'(p) \\ x = -p\psi'(p) + \psi(p), \quad p \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

sistem care defineşte parametric o curbă plană numită *soluţia singulară a ecuaţiei* CLAIRAUT şi care, nu este altceva decât înfăşurătoarea familiei de drepte. Reamintim că *înfăşurătoarea unei familii de drepte* este o curbă cu proprietatea că familia de drepte coincide cu familia tuturor tangentelor la curbă.

OBSERVAŢIA 1.2.4. În general, ecuaţia CLAIRAUT admite şi soluţii care sunt numai de clasă C^1. O astfel de soluţie se obţine continuând un arc de curbă corespunzător soluţiei singulare cu acea porţiune din tangenta la unul dintre capetele arcului astfel încât curba obţinută să fie de clasă C^1. Vezi soluţiile Problemelor 1.11 şi 1.12.

Ecuaţii diferenţiale de ordin superior. Vom prezenta în continuare două clase de ecuaţii diferenţiale scalare de ordinul n care, chiar dacă nu pot fi rezolvate prin metode elementare, pot fi reduse la ecuaţii de ordin strict mai mic decât n. Să considerăm pentru început ecuaţia diferenţială de ordinul n "incompletă"

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.2.14}$$

unde $0 < k < n$ şi $F : D(F) \subset \mathbb{R}^{n-k+2} \to \mathbb{R}$. Substituţia $y = x^{(k)}$ reduce această ecuaţie diferenţială una de ordinul $n - k$ cu funcţia necunoscută y

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n-k)}) = 0.$$

Să presupunem acum că putem determina soluţia generală $y = y(t, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k})$ a acestei din urmă ecuaţii. În aceste condiţii, soluţia generală $x(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ a ecuaţiei (1.2.14) se obţine integrând de k ori identitatea $x^{(k)} = y$. Mai precis, pentru $a \in \mathbb{R}$ convenabil ales, avem

$$x(t, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-s)^{k-1} y(s, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k})\, ds + \sum_{i=1}^{k} c_{n-k+i} \frac{(t-a)^{i-1}}{(i-1)!},$$

unde $c_{n-k+1}, c_{n-k+2}, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ sunt constante provenite în urma celor k operaţii de integrare.

EXEMPLUL 1.2.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''' = -\frac{1}{t} x'' + 3t, \quad t > 0.$$

Substituţia $x'' = y$ conduce la ecuaţia diferenţială liniară

$$y' = -\frac{1}{t} y + 3t, \quad t > 0$$

a cărei soluţie generală este

$$y(t, c_1) = t^2 + \frac{c_1}{t}$$

pentru $t > 0$. Atunci, integrând de două ori identitatea $x'' = y$ obţinem

$$x(t, c_1, c_2, c_3) = \frac{t^4}{12} + c_1(t \ln t - t) + c_2 t + c_3.$$

O a doua clasă de ecuaţii diferenţiale care pot fi reduse la ecuaţii de ordin mai mic decât cel iniţial este clasa ecuaţiilor de ordinul n autonome. Fie deci ecuaţia

$$F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0,$$

unde $F : D(F) \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Să notăm cu $p = x'$ şi să-l exprimăm pe p în funcţie de x. În acest scop să notăm că

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dp}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dp}{dx}p, \\[2ex] x''' = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dp}{dx}p\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dp}{dx}p\right)p, \\ \vdots \\ x^{(n)} = \dots \qquad . \end{cases}$$

În acest mod, pentru fiecare $k = 1, 2, \dots, n$, $x^{(k)}$ se exprimă în funcţie de p, $\frac{dp}{dx}, \dots, \frac{dp^{k-1}}{dx^{k-1}}$. Înlocuind în (3.15) derivatele funcţiei x în funcţie de p, $\frac{dp}{dx}, \dots, \frac{dp^{n-1}}{dx^{n-1}}$ obţinem o ecuaţie diferenţială de ordinul $n - 1$.

EXEMPLUL 1.2.2. Ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea

$$x'' + \frac{g}{\ell}\sin x = 0,$$

cunoscută sub numele de *ecuaţia pendulului*, se reduce prin metoda precizată anterior la ecuaţia de ordinul întâi (cu variabile separabile)

$$p\frac{dp}{dx} = \frac{g}{\ell}\sin x$$

având drept funcţie necunoscută $p = p(x)$.

3. Modele matematice descrise de ecuaţii diferenţiale

În această secţiune vom prezenta câteva fenomene din fizică, biologie, chimie, demografie ale căror evoluţii pot fi descrise, cu un grad înalt de acurateţe, prin intermediul unor ecuaţii sau sisteme de ecuaţii diferenţiale. Începem cu un exemplu din fizică, devenit foarte cunoscut pentru utilizarea lui în arheologie ca instrument de datare a obiectelor vechi. Subliniem că, atât în acest exemplu, cât şi în altele care vor urma, vom înlocui modelul matematic discret, care este cel mai realist, printr-unul continuu diferenţiabil şi aceasta din raţiuni pur matematice. Mai precis, din dorinţa de a beneficia de conceptele şi rezultatele analizei matematice, vom presupune că orice funcţie necunoscută care descrie evoluţia în timp a unei anumite entităţi: număr de indivizi dintr-o specie, număr de molecule dintr-o substanţă, etc., este de clasă C^1 pe intervalul ei de definiţie, deşi în realitate aceasta ia valori într-o mulţime finită. Din punct de vedere matematic aceasta revine la a înlocui funcţia discontinuă x_r al cărei grafic este ilustrat în Figura 1.3.1 ca o reuniune de segmente paralele cu axa Ox (vezi curba punctată) cu funcţia x al cărei grafic este o curbă de clasă C^1.

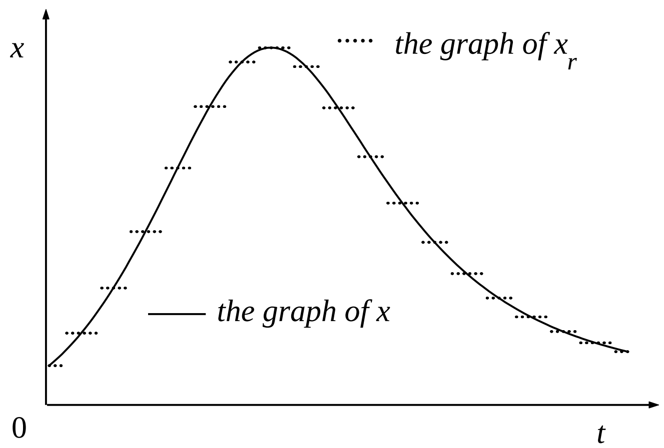

FIGURA 1.3.1

Dezintegrarea unei substanţe radioactive. În anul 1902 ERNEST RUTHERFORD Lord of Nelson[6] şi Sir FREDERICK SODDY[7] au formulat *legea dezintegrării atomilor radioactivi* care afirmă că viteza instantanee de dezintegrare a unui element radioactiv este proporţională cu numărul de atomi radioactivi existenţi la momentul considerat şi nu depinde de alţi factori externi. Cu alte cuvinte, notând cu $x(t)$ numărul de atomi nedezintegraţi la momentul t şi presupunând că x este o funcţie de clasă C^1 pe $[0,+\infty)$, conform legii enunţate anterior, deducem că

$$-x' = ax$$

pentru orice $t \geq 0$, unde $a > 0$ este o constantă specifică elementului respectiv, denumită *constantă de dezintegrare* şi care poate fi determinată experimental cu o precizie suficient de bună. Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară şi omogenă, a cărei soluţie generală este dată de

$$x(t) = ce^{-at} = x(0)e^{-at}$$

pentru $t \geq 0$, cu $c \in \mathbb{R}_+$. Subliniem că pe acest model simplu se bazează metoda de datare cu izotopul de carbon 14 radioactiv. Alegerea izotopului de carbon 14 a fost dictată de simpla observaţie că toate substanţele organice îl conţin. Metoda constă în determinarea la un moment dat $T > 0$ a numărului de atomi $x(T)$ a acestui izotop dintr-un obiect de origine organică. Din cele precizate anterior rezultă că

$$x(T) = x(0)e^{-aT}$$

unde $x(0) > 0$ este numărul de atomi de izotop carbon 14 la momentul iniţial, care este practic cunoscută. În relaţia de mai sus atât $x(0)$ cât şi $x(T)$ sunt cunoscute aşa încât putem determina vechimea obiectului reprezentată prin T. Avem

$$T = \frac{1}{a}\ln\frac{x(0)}{x(T)}.$$

[6]Fizician englez de origine neo-zeelandeză care a trăit între anii 1871-1937. Laureat al Premiului NOBEL pentru chimie în anul 1908, a reuşit în 1919 prima transmutaţie provocată: azotul în oxigen cu ajutorul radiaţiilor alfa. A propus modelul atomic care îi poartă numele.

[7]Chimist britanic care a trăit între 1877-1956. Laureat al Premiului NOBEL pentru chimie în anul 1921.

Este interesant de subliniat că această metodă este destul de precisă pentru intervale de timp de până la 10.000 de ani.

Oscilatorul armonic. Să considerăm o particulă materială de masă m care se mişcă pe o dreaptă sub acţiunea unei forţe elastice. Să notăm cu $x(t)$ abscisa punctului la momentul t şi cu $F(x)$ forţa exercitată asupra particulei aflată în punctul de abscisă x. Cum forţa este elastică, $F(x) = -kx$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $k > 0$. Pe de altă parte, în conformitate cu cea de-a doua lege a lui NEWTON, mişcarea particulei va decurge astfel încât $F(x(t)) = ma(t)$, unde $a(t)$ este acceleraţia particulei la momentul t. Dar $a(t) = x''(t)$ şi notând cu $\omega^2 = k/m$, din consideraţiile anterioare, rezultă că x trebuie să verifice ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea:

$$x'' + \omega^2 x = 0,$$

numită *ecuaţia oscilatorului armonic*. După cum am văzut în Exemplul 1.1.3, soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$x(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$$

pentru $t \in \mathbb{R}$.

Pendulul matematic. Să considerăm un pendul de lungime ℓ şi să notăm cu $s(t)$ spaţiul parcurs de extremitatea liberă a pendulului la momentul t. Avem $s(t) = \ell x(t)$, unde $x(t)$ reprezintă măsura în radiani a unghiului făcut de pendul la momentul t cu axa verticală Oy. Vezi Figura 1.3.2. Forţa care acţionează asupra pendulului este $F = mg$, unde g este acceleraţia gravitaţională. Această forţă se descompune după două componente una având direcţia firului, iar cea de-a doua având direcţia tangentei la arcul de cerc descris de capătul pendulului. Vezi Figura 1.3.2. Componenta pe direcţia firului este anulată de rezistenţa acestuia, aşa încât mişcarea va avea loc numai sub acţiunea componentei $-mg \sin x(t)$. Conform legii a doua a lui NEWTON x, trebuie să verifice ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea

$$m\ell x'' = -mg \sin x,$$

sau, echivalent

$$x'' + \frac{g}{\ell} \sin x = 0,$$

ecuaţie neliniară numită *ecuaţia pendulului matematic* cunoscut şi sub numele de *pendul gravitaţional*

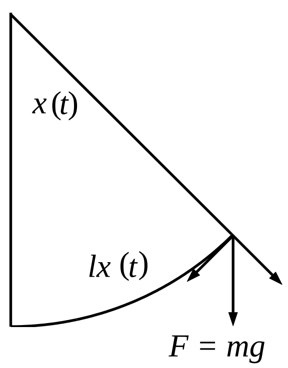

FIGURA 1.3.2

Dacă dorim să studiem numai oscilaţiile mici atunci putem aproxima $\sin x$ prin x şi obţinem *ecuaţia micilor oscilaţii ale pendului*

$$x'' + \frac{g}{\ell} x = 0,$$

ecuaţie de ordinul al doilea liniară. Pentru această ecuaţie, care este de acelaşi tip cu cea a oscilatorului armonic, putem pune în evidenţă soluţia generală

$$x(t) = c_1 \sin \sqrt{\frac{g}{\ell}} t + c_2 \cos \sqrt{\frac{g}{\ell}} t$$

pentru $t \in \mathbb{R}$, unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Un model demografic. Primul model matematic al creşterii populaţiei a fost propus în 1798 de către THOMAS ROBERT MALTHUS.[8] Mai precis, dacă notăm cu $x(t)$ numărul de indivizi de pe glob la momentul t şi cu $y(t)$ cantitatea de resurse utilizate pentru supravieţuire, după MALTHUS, viteza instantanee de creştere al numărului de indivizi la momentul t este direct proporţională cu $x(t)$, în timp ce, viteza instantanee de creştere a resurselor este constantă. Avem atunci următorul model matematic exprimat printr-un sistem de ecuaţii diferenţiale de forma

$$\begin{cases} x' = cx \\ y' = k, \end{cases}$$

în care c şi k sunt constante strict pozitive. Acest sistem, format din două ecuaţii decuplate (în sensul că fiecare ecuaţie nu conţine decât o singură funcţie necunoscută), poate fi rezolvat explicit. Soluţia sa generală este dată de

$$\begin{cases} x(t,\xi) = \xi e^{ct} \\ y(t,\eta) = \eta + kt \end{cases}$$

pentru $t \geq 0$, unde ξ şi η reprezintă numărul de indivizi şi, respectiv, cantitatea de resurse la momentul $t = 0$. Se constată că acest model descrie relativ bine fenomenul real numai pe intervale de timp foarte scurte. Din acest motiv, au fost propuse alte modele, mai rafinate şi, în acelaşi timp, mai realiste care pornesc de la observaţia că numărul de indivizi la un moment dat nu poate depăşi un anumit prag critic care depinde de resursele din acel moment. Astfel, dacă notăm cu $h > 0$ cantitatea de hrană necesară unui individ pentru a supravieţui momentului t, putem presupune că x şi y verifică un sistem de forma

$$\begin{cases} x' = cx\left(\dfrac{y}{h} - x\right) \\ y' = k, \end{cases}$$

care exprimă o legătură mai firească dintre evoluţia resurselor şi creşterea sau descreşterea populaţiei. În unele modele, precum cel propus de VERHULST în 1845, pentru simplitate, se consideră $k = 0$, ceea ce exprimă matematic faptul că resursele sunt presupuse constante în timp ($y(t) = \eta$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$), ajungându-se la o ecuaţie diferenţială de forma

$$x' = cx(b - x),$$

[8]Economist englez care a trăit între anii 1766 şi 1834, autor al lucrării *An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society* (1798) în care a enunţat principiul conform căruia o populaţie, necontrolată din punct de vedere demografic, creşte în progresie geometrică, în timp ce resursele urmează o lege de creştere în progresie aritmetică. Acest principiu, care statua de fapt necesitatea controlului natalităţii, a influenţat profund gândirea economică, până în secolul XX.

pentru $t \geq 0$, unde $b = \eta/h > 0$. Această ecuaţie, cunoscută sub numele de *ecuaţia logistică* este cu variabile separabile şi poate fi integrată. Obţinem soluţia generală

$$x(t,\eta) = \frac{b\eta e^{cbt}}{1+\eta e^{cbt}}$$

pentru $t \geq 0$, unde $\eta \geq 0$ este o constantă, la care mai trebuie să adaugăm soluţia singulară $x = b$, eliminată în cadrul procesului de integrare. Pentru a individualiza o anumită soluţie din soluţia generală trebuie să determinăm constanta corespunzătoare η. Acest lucru se face, de obicei, impunând condiţia iniţială

$$\frac{b\eta}{1+\eta} = \xi,$$

unde ξ reprezintă numărul de indivizi la momentul $t = 0$, număr presupus cunoscut. Deducem astfel că soluţia $x(\cdot,\xi)$ a ecuaţiei logistice care satisface condiţia $x(0,\xi) = \xi$ este

$$x(t,\xi) = \frac{b\xi e^{cbt}}{b+\xi(e^{cbt}-1)}$$

pentru orice $t \geq 0$.

Toate modelele descrise mai sus pot fi puse sub forma generală

$$x' = d(t,x),$$

unde $d(t,x)$ reprezintă diferenţa dintre rata natalităţii şi rata mortalităţii pentru o populaţie cu x indivizi, la momentul t.

Modelul pradă-răpitor. Imediat după terminarea primului război mondial s-a constatat că rezerva de peşti din Marea Adriatică a fost drastic diminuată comparativ cu perioada de dinainte de începerea războiului şi aceasta, în pofida faptului că majoritatea pescarilor din zonă, înrolaţi fiind, nu şi-au mai putut practica meseria pe o perioadă destul de lungă. În încercarea de a explica acest fenomen, straniu la prima vedere, VITO VOLTERRA[9] a propus un model matematic care descrie evoluţia a două specii care convieţuiesc în acelaşi areal, dar se află în competiţie. Mai precis, el a considerat două specii de animale care trăiesc în aceeaşi regiune, prima având la dispoziţie resurse nelimitate de subzistenţă, specie numită pradă, iar cea de-a doua, numită prădător, având drept unică sursă de hrană indivizii din specia pradă. Notând cu $x(t)$ şi respectiv cu $y(t)$ numărul de indivizi din specia pradă, respectiv prădător la momentul t şi presupunând că atât x cât şi y sunt funcţii de clasă C^1, deducem că x şi y trebuie să satisfacă sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x' = (a-ky)x \\ y' = -(b-hx)y, \end{cases}$$

unde a, b, k, h sunt constante pozitive. Prima ecuaţie exprimă în limbaj matematic faptul că viteza de "creştere" a numărului de indivizi pradă este proporţională cu numărul de indivizi din specie la momentul considerat ($x' = ax - \dots$) şi scade cu numărul de întâlniri dintre indivizii celor două specii ($x' = \cdots - kyx$). Analog, cea de-a doua ecuaţie exprimă faptul că viteza instantanee de creştere a numărului de indivizi din specia prădător la momentul t scade proporţional cu numărul lor la acel moment t ($y' = -by \dots$) şi creşte proporţional cu numărul de întâlniri dintre indivizii celor două specii.

[9]Matematician italian care a trăit între anii 1860-1940 având contribuţii notabile în analiza funcţională şi în aplicaţiile matematicii în fizică şi biologie.

După cum vom constata mai târziu[10] toate soluţiile sistemului care pleacă din primul cadran rămân acolo, iar cele care pleacă din primul cadran mai puţin cele două semiaxe sunt şi periodice cu perioada depinzând de datele iniţiale. Din acest motiv şi funcţia $t \mapsto x(t) + y(t)$, care reprezintă numărul total de indivizi din ambele specii la momentul t, este periodică. Ca atare ea posedă o infinitate de puncte de minim local. În aceste condiţii a fost uşor de constatat că aparent inexplicabila diminuare a rezervei de peşte din Marea Adriatică imediat după război este o simplă consecinţă a faptului că momentul respectiv s-a situat "foarte aproape" de un minim local al funcţiei de mai sus.

În sfârşit, să mai remarcăm că sistemul de mai sus are două soluţii constante, numite şi *soluţii staţionare*: $(0, 0)$ şi $(b/h, a/k)$. Dintre acestea, prima are proprietatea că, există soluţii ale sistemului care pleacă din puncte oricât de apropiate de $(0, 0)$, dar care se îndepărtează de aceasta pentru t tinzând la infinit. Într-adevăr, dacă la un moment dat populaţia prădător este absentă ea rămâne absentă pe toată durata evoluţiei, în timp ce populaţia pradă evoluează după legea lui Malthus. Mai precis, soluţia care pleacă din punctul $(\xi, 0)$ cu $\xi > 0$ este $(x(t), y(t)) = (\xi e^{at}, 0)$ pentru $t \geq 0$, şi aceasta, evident, se îndepărtează de $(0, 0)$ pentru t tinzând la infinit. Din acest motiv spunem că $(0, 0)$ este *instabilă* la perturbări. Vom vedea mai târziu că cea de-a doua soluţie staţionară este stabilă. Definiţia precisă a acestui concept o vom da în Secţiunea 1 a capitolului 5. Vezi Definiţia 4.1.1.

Un model de răspândire a epidemiilor. A. Lajmanovich şi J. Yorke au propus în 1976 un model de răspândire a unei epidemii care este sub forma unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Pentru simplitate, ne vom mărgini aici la descrierea unei variante particulare. Mai precis, să considerăm o boală care poate afecta o anumită populaţie şi care nu conferă imunitate, ceea ce revine la a considera că orice individ care nu are boala la un moment dat este susceptibil de a se îmbolnăvi, chiar dacă el a mai fost bolnav în trecut. Să notăm cu p numărul total de indivizi presupus constant (ceea ce se verifică de exemplu dacă în rândul populaţiei nu au loc nici naşteri, dar nici decese) şi cu x numărul de indivizi infectaţi din populaţia considerată. Aşa cum am precizat deja la începutul acestei secţiuni, vom presupune că x este o funcţie continuu diferenţiabilă de variabila timp t cu valori reale şi pozitive. Ca atare şi $p - x$ este o funcţie continuu diferenţiabilă. Evident, pentru orice $t \geq 0$, $p - x(t)$ reprezintă numărul de indivizi susceptibili de a fi infectaţi la momentul t. Atunci, dacă presupunem că viteza de variaţie a numărului de indivizi bolnavi este proporţională la momentul t cu numărul de întâlniri posibile dintre indivizii bolnavi şi cei susceptibili de a se îmbolnăvi, număr care este evident egal cu $x(t)(p - x(t))$, deducem că x trebuie să verifice următoarea ecuaţie diferenţială

$$x' = ax(p - x),$$

unde $a > 0$ este o constantă de proporţionalitate. Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile, de aceeaşi formă cu cea descrisă la modelul lui Verhulst, a cărei soluţie generală este

$$x(t, \eta) = \frac{p\eta e^{apt}}{1 + \eta e^{apt}},$$

unde η este o constantă reală pozitivă. La această soluţie mai trebuie adăugată şi soluţia singulară

$$x(t) = p,$$

[10]Vezi Problemele 5.1, 5.3 şi 5.4.

eliminată pe parcursul procesului de integrare.

La fel ca şi în cazul ecuaţiei logistice, soluţia soluţia $x(\cdot,\xi)$ a ecuaţiei de mai sus care satisface condiţia $x(0,\xi)=\xi$ este

$$x(t,\xi)=\frac{p\xi e^{apt}}{p+\xi(e^{apt}-1)}$$

pentru orice $t\geq 0$. Este interesant de observat că, pentru orice $\xi>0$, avem

$$\lim_{t\to+\infty} x(t,\xi)=p,$$

relaţie care arată că, în lipsa unei intervenţii externe, o populaţie care are la un moment dat un număr strict pozitiv de indivizi infectaţi, tinde să se îmbolnăvească în totalitate.

Un model de sinteză autocatalitică. Să considerăm un reactor conţinând o substanţă X având concentraţia $x(t)$ la momentul t şi o alta A a cărei concentraţie $a>0$ este menţinută constantă şi să presupunem că în reactor au loc următoarele reacţii chimice reversibile:

$$\begin{cases} A+X \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} 2X \\ X \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} B, \end{cases}$$

în care B este un produs rezidual a cărui concentraţie la momentul t este $b(t)$.[11]

Aici $k_i\geq 0$, $i=\pm1,\pm2$ sunt constantele de viteză ale celor patru reacţii. Modelul matematic ce descrie evoluţia acestui sistem chimic este

$$\begin{cases} x'=k_1ax-k_{-1}x^2-k_2x+k_{-2}b \\ b'=k_2x-k_{-2}b. \end{cases}$$

Dacă cea de-a doua reacţie nu are loc, situaţie descrisă din punct de vedere matematic prin $k_2=k_{-2}=0$, atunci sistemul de mai sus se reduce la

$$x'=k_1ax-k_{-1}x^2.$$

Să remarcăm asemănarea frapantă a acestei ecuaţii atât cu ecuaţia logistică din modelul lui VERHULST cât şi cu ecuaţia care descrie răspândirea unei epidemii.

Modelul unui circuit RLC. Să considerăm un circuit electric format dintr-o rezistenţă R, o inductanţă L şi un condensator C în care sensurile curenţilor pe cele trei porţiuni din circuit sunt precizate în Figura 1.3.3.
Să notăm cu $i(t)=(i_R(t),i_L(t),i_C(t))$ starea curentului din circuit la momentul t. Aici i_R, i_L, i_C reprezintă curenţii din porţiunile de circuit care conţin rezistenţa R, inductanţa L şi respectiv condensatorul C. Analog, fie $v(t)=(v_R(t),v_L(t),v_C(t))$ starea tensiunilor din circuit la momentul t. Din legile lui KIRCHHOFF deducem

$$\begin{cases} i_R(t)=i_L(t)=-i_C(t) \\ v_R(t)+v_L(t)-v_C(t)=0, \end{cases}$$

iar din legea lui OHM generalizată

$$g(i_R(t))=v_R(t)$$

[11] Acesta este primul model de reacţie autocatalitică izotermă propus de SCHLÖGL în 1971.

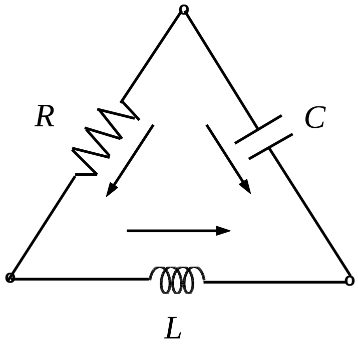

FIGURA 1.3.3

pentru orice $t \geq 0$. În sfârşit, din legea lui FARADAY, obţinem

$$\begin{cases} \mathcal{L}\dfrac{di_L}{dt} = v_L \\[2ex] \mathcal{C}\dfrac{dv_C}{dt} = i_C \end{cases}$$

pentru orice $t \geq 0$, unde $\mathcal{L} > 0$ şi $\mathcal{C} > 0$ sunt *inductanţa* bobinei L şi respectiv *capacitatea* condensatorului C. Din aceste relaţii observăm că i_L şi v_C satisfac sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} \mathcal{L}\dfrac{di_L}{dt} = v_C - g(i_L) \\[2ex] \mathcal{C}\dfrac{dv_C}{dt} = -i_L \end{cases}$$

pentru $t \geq 0$.

Să presupunem acum, pentru simplitate, că $\mathcal{L} = 1$ şi $\mathcal{C} = 1$ şi să notăm $x = i_L$ şi $y = v_C$. Atunci sistemul anterior se rescrie sub forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - g(x) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

pentru $t \geq 0$. În sfârşit, presupunând în plus că g este de clasă C^1, derivând prima ecuaţie membru cu membru şi utilizând-o pe cea de-a doua pentru al elimina pe y, găsim

$$x'' + g'(x)x' + x = 0$$

pentru $t \geq 0$. Aceasta este *ecuaţia lui* LIÉNARD. În cazul în care $g(x) = x^3 - x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ecuaţia de mai sus are forma

$$x'' + (3x^2 - 1)x' + x = 0$$

pentru $t \geq 0$ şi poartă numele de *ecuaţie a lui* VAN DER POL.

4. Inegalităţi integrale

În această secţiune vom stabili mai multe inegalităţi utile în demonstrarea mărginirii soluţiilor unor sisteme de ecuaţii diferenţiale. Începem cu următoarea inegalitate integrală neliniară.

LEMA 1.4.1. (BIHARI) *Fie* $x : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}_+$, $k : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}_+$ *şi* $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ *trei funcţii continue cu* ω *crescătoare pe* $\mathbb{R}_+$ *şi fie* $m \geq 0$. *Dacă*

$$x(t) \leq m + \int_a^t k(s)\,\omega(x(s))\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$, *atunci*

$$x(t) \leq \Phi^{-1}\left(\int_a^t k(s)\,ds\right)$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$, *unde* $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *este definită prin*

$$\Phi(u) = \int_m^u \frac{d\eta}{\omega(\eta)}$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}_+$.

Demonstraţie. Să observăm că este suficient să demonstrăm lema în cazul în care $m > 0$ deoarece cazul $m = 0$ se obţine din precedentul trecând la limită pentru m tinzând la 0. Fie deci $m > 0$ şi fie funcţia $y : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}_+^*$ definită prin

$$y(t) = m + \int_a^t k(s)\,\omega(x(s))\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$. Evident y este de clasă C^1 pe $[\,a, b\,]$. În plus, din faptul că $x(t) \leq y(t)$ pentru $t \in [\,a, b\,]$ şi ω este crescătoare, rezultă

$$y'(t) = k(t)\,\omega(x(t)) \leq k(t)\,\omega(y(t))$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$. Relaţia de mai sus se mai poate scrie sub forma

$$\frac{y'(s)}{\omega(y(s))} \leq k(s)$$

pentru orice $s \in [\,a, b\,]$. Integrând ultima inegalitate în ambii membri de la a la t obţinem

$$\Phi(y(t)) \leq \int_a^t k(s)\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$. Cum Φ este strict crescătoare ea este inversabilă cu inversa strict crescătoare. Din ultima inegalitate rezultă atunci

$$y(t) \leq \Phi^{-1}\left(\int_a^t k(s)\,ds\right),$$

relaţie care, împreună cu $x(t) \leq y(t)$ pentru $t \in [\,a, b\,]$, încheie demonstraţia. $\square$

Următoarele două consecinţe ale lemei 1.4.1 sunt foarte utile în aplicaţii.

LEMA 1.4.2. (GRONWALL) *Fie* $x : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}_+$ *şi* $k : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}_+$ *două funcţii continue şi fie* $m \geq 0$. *Dacă*

$$x(t) \leq m + \int_a^t k(s)\,x(s)\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a,b\,]$, *atunci*

$$x(t) \leq m \exp\left(\int_a^t k(s)\,ds\right)$$

pentru orice $t \in [\,a,b\,]$.

Demonstraţie. Să remarcăm că, pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$x(t) \leq m + \int_a^t k(s)(x(s) + \varepsilon)\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a,b\,]$. Luând $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ definită prin $\omega(r) = r + \varepsilon$ pentru orice $r \in \mathbb{R}_+$ în Lema 1.4.1 obţinem

$$x(t) \leq (m + \varepsilon) \exp\left(\int_a^t k(s)\,ds\right) - \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $t \in [\,a,b\,]$. Trecând la limită pentru ε tinzând la 0 în această inegalitate obţinem concluzia lemei. Demonstraţia este completă. $\square$

O generalizare a inegalităţii lui GRONWALL este enunţată în Secţiunea 6. Vezi Problema 1.16.

LEMA 1.4.3. (BRÉZIS) *Fie* $x : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}_+$ *şi* $k : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}_+$ *două funcţii continue şi fie* $m \geq 0$. *Dacă*

$$x^2(t) \leq m^2 + 2\int_a^t k(s)\,x(s)\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a,b\,]$, *atunci*

$$x(t) \leq m + \int_a^t k(s)\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a,b\,]$.

Demonstraţie. La fel ca în demonstraţia lemei 1.4.2, să observăm că, pentru orice $\varepsilon > 0$, avem

$$x^2(t) \leq m^2 + 2\int_a^t k(s)\sqrt{x^2(s) + \varepsilon}\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a,b\,]$. Din această inegalitate şi din Lema 1.4.1 cu $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ definită prin

$$\omega(r) = 2\sqrt{r + \varepsilon}$$

pentru orice $r \in \mathbb{R}_+$, deducem

$$x^2 \leq \left(\sqrt{m^2 + \varepsilon} + \int_a^t k(s)\,ds\right)^2 - \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $t \in [\,a,b\,]$. Demonstraţia se încheie trecând la limită pentru ε tinzând la 0 în această inegalitate şi extrăgând rădăcina pătrată în ambii membri ai inegalităţii astfel obţinute. $\square$

Pentru o generalizare a acestei inegalităţi a se vedea Problema 1.13.

5. Exerciţii şi probleme propuse spre rezolvare

PROBLEMA 1.1. *Să se determine o curbă plană pentru care raportul dintre ordonată şi subtangentă*[12] *este egal cu raportul dintre un număr pozitiv dat k şi diferenţa dintre ordonată şi abscisă.*[13] (A. HALANAY [**7**], p. 7).

PROBLEMA 1.2. *Să se determine o curbă plană care trece prin punctul de coordonate* $(3, 2)$ *cu proprietatea că segmentul determinat de axele de coordonate pe tangenta la curbă într-un punct curent al ei este împărţit de punctul curent în părţi egale.* (B. DEMIDOVICH [**5**], p. 329).

EXERCIŢIUL 1.1. *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile sau reductibile la acestea.*

(1) $x' \cos^2 t \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} t \sin^2 x = 0$. (2) $tx' = x + x^2$.
(3) $tx'x = 1 - t^2$. (4) $x' = (t + x)^2$.
(5) $x' = (8t + 2x + 1)^2$. (6) $x'(4t + 6x - 5) = -(2t + 3x + 1)$.
(7) $x'(4t - 2x + 3) = -(2t - x)$. (8) $x'(t^2 x - x) + tx^2 + t = 0$.

PROBLEMA 1.3. *Să se determine o curbă plană care trece prin punctul de coordonate* $(1, 2)$ *cu proprietatea că segmentul determinat de axele de coordonate pe normala la curbă într-un punct curent al ei este împărţit de punctul curent în părţi egale.* (B. DEMIDOVICH [**5**], 2758, p. 330). *Vezi figura* 1.P.1 (b).

PROBLEMA 1.4. *Să se determine o curbă plană cu proprietatea că subtangenta este o constantă dată a.* (B. DEMIDOVICH [**5**], 2759, p. 330).

PROBLEMA 1.5. *Să determine o curbă situată în primul cadran, cu proprietatea că subtangenta în orice punct al ei este egală cu dublul abscisei punctului de tangenţă.* (B. DEMIDOVICH [**5**], 2760, p. 330).

EXERCIŢIUL 1.2. *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale omogene sau reductibile la acestea.*

(1) $tx' = x - t$. (2) $tx' = -(t + x)$.
(3) $t^2 x' = x(t - x)$ (4) $2txx' = t^2 + x^2$.
(5) $(2\sqrt{tx} - t)x' = -x$. (6) $tx' = x + \sqrt{t^2 + x^2}$.
(7) $(4x^2 + 3tx + t^2)x' = -(x^2 + 3tx + 4t^2)$. (8) $2txx' = 3x^2 - t^2$.

PROBLEMA 1.6. *Să se determine ecuaţia unei curbe plane care trece prin punctul* $(1, 0)$ *având proprietatea că segmentul tăiat de tangentă la curbă în punctul curent P pe axa Ot are lungimea egală cu lungimea segmentului OP.* (B. DEMIDOVICH [**5**], 2779, p. 331).

PROBLEMA 1.7. *Fie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că există un număr real m astfel încât $f(\lambda t, \lambda^m x) = \lambda^{m-1} f(t, x)$ pentru orice $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ şi orice $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Să se arate că, prin schimbarea de funcţie necunoscută $x(t) = t^m y(t)$, ecuaţia diferenţială, numită cvasi-omogenă, $x' = f(t, x)$ se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile. Să se demonstreze că ecuaţia*

$$x' = x^2 - \frac{2}{t^2}$$

este cvasi-omogenă şi apoi să se rezolve. (V. GLAVAN ET AL. [**6**], p. 34).

---

[12] Reamintim că subtangenta la o curbă de ecuaţie $x = x(t)$, $t \in [a, b]$ într-un punct $(t, x(t))$ al ei este egală cu $x(t)/x'(t)$.

[13] Această problemă, considerată drept prima din domeniul ecuaţiilor diferenţiale, a fost formulată de către DEBEAUNE şi transmisă de către MERSENNE lui DESCARTES în anul 1638. Acesta din urmă a recunoscut atât importanţa problemei cât şi imposibilitatea rezolvării ei prin metodele cunoscute la acea vreme.

EXERCIŢIUL 1.3. *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale liniare sau reductibile la acestea.*

(1) $tx' = x + tx$.	(2) $tx' = -2x + t^4$.
(3) $tx' = -x + e^t$.	(4) $(x^2 - 3t^2)x' + 2tx = 0$.
(5) $tx' = -x - tx^2$.	(6) $2txx' = x^2 - t$.
(7) $(2t - t^2x)x' = -x$.	(8) $tx' = -2x(1 - tx)$.

PROBLEMA 1.8. *Fie x, x_1 şi x_2 trei soluţii ale ecuaţiei liniare*

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t),$$

unde a, b sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$. Să se demonstreze că raportul

$$R(t) = \frac{x_2(t) - x(t)}{x(t) - x_1(t)}$$

este constant pe $\mathbb{I}$. Care este interpretarea geometrică a acestui rezultat?

PROBLEMA 1.9. *Fie x_1 şi x_2 două soluţii ale ecuaţiei* BERNOULLI

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t),$$

unde a, b sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$. Să se demonstreze că, dacă $x_1(t) \neq 0$ şi $x_2(t) \neq 0$ pe $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$, atunci funcţia y, definită prin

$$y(t) = \frac{x_1(t)}{x_2(t)}$$

pentru orice $t \in \mathbb{J}$, verifică ecuaţia liniară

$$y'(t) = b(t)[x_1(t) - x_2(t)]y(t).$$

PROBLEMA 1.10. *Fie x, x_1, x_2, x_3 soluţii ale ecuaţiei* RICCATI

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t),$$

unde a, b, c sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$. Să se demonstreze că biraportul

$$B(t) = \frac{x_2(t) - x(t)}{x_2(t) - x_1(t)} : \frac{x_3(t) - x(t)}{x_3(t) - x_1(t)}$$

este constant pe $\mathbb{I}$.

EXERCIŢIUL 1.4. *Să se integreze următoarele ecuaţii cu diferenţiale exacte sau reductibile la acestea prin metoda factorului integrant.*

(1) $(t + 2x)x' + t + x = 0$.	(2) $2tx' + t^2 + 2x + 2t = 0$.
(3) $(3t^2x - x^2)x' - t^2 + 3tx^2 - 2 = 0$.	(4) $(t^2x + x^3 + t)x' - t^3 + tx^2 + x = 0$.
(5) $(x^2 - 3t^2)x' + 2tx = 0$.	(6) $2txx' - (t + x^2) = 0$.
(7) $tx' - x(1 + tx) = 0$.	(8) $t(x^3 + \ln t)x' + x = 0$.

EXERCIŢIUL 1.5. *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de tip* LAGRANGE *sau* CLAIRAUT, *folosind metoda parametrului.*

(1) $x = \frac{1}{2}tx' + x'^3$.	(2) $x = x' + \sqrt{1 - x'^2}$.
(3) $x = (1 + x')t + x'^2$.	(4) $x = -\frac{1}{2}x'(2t + x')$.
(5) $x = tx' + x'^2$.	(6) $x = tx' + x'$.
(7) $x = tx' + \sqrt{1 + x'^2}$.	(8) $x = tx' + \frac{1}{x'}$.

PROBLEMA 1.11. *Să se determine o curbă plană pentru care distanţa de la un punct fix la tangenta la curbă într-un punct curent este constantă.* (B. DEMIDOVICH [**5**], 2831, p. 340).

PROBLEMA 1.12. *Să se determine o curbă plană cu proprietatea că aria triunghiului cu laturile pe tangenta la curbă în punctul curent şi pe axele de coordonate este constantă.* (B. DEMIDOVICH [**5**], 2830, p. 340). *Vezi figura* 1.P.2 (b).

PROBLEMA 1.13. *Se consideră un lichid care se roteşte într-un bazin cilindric circular drept în jurul axei de simetrie care are direcţia verticală. Se se demonstreze că suprafaţa superioară a lichidulului este situată pe un paraboloid de revoluţie.* (B. DEMIDOVICH [**5**], 2898, p. 344).

PROBLEMA 1.14. *Să se determine relaţia dintre presiunea atmosferică şi altitudine ştiind că presiunea este de* $1kgf$ *pe* cm^2 *la nivelul mării şi de* $0,92kgf$ *pe* cm^2 *la o altitudine de* $500m$. (B. DEMIDOVICH [**5**], 2899, p. 344)

PROBLEMA 1.15. *Conform legii lui* HOOKE *o bandă elastică de lungime* l *supusă unei forţe de întindere de mărime* F *creşte în lungime cu* klF *(*k*=constant). Cu cât va creşte banda în lungime sub acţiunea propriei greutăţi* W *dacă este suspendată de unul din capete?* (*Se consideră că banda are lungimea iniţială* l). (B. DEMIDOVICH [**5**], p. 344).

PROBLEMA 1.16. (INEGALITATEA LUI BELLMAN) *Fie* $x : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *şi* $k : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *trei funcţii continue. Dacă*

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t k(s)\, x(s)\, ds$$

pentru orice $t \in [a,b]$, *atunci*

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t k(s)\, h(s) \exp\left(\int_s^t k(\tau)\, d\tau\right) ds$$

pentru orice $t \in [a,b]$.

PROBLEMA 1.17. *Fie* $x : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ *şi* $k : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *trei funcţii continue şi* $\xi \in \mathbb{R}$. *Dacă*

$$x(t) \leq \xi + \int_a^t [k(s)\, x(s) + v(s)]\, ds$$

pentru orice $t \in [a,b]$, *atunci*

$$x(t) \leq \xi \exp\left(\int_a^t k(s)\, ds\right) + \int_a^t v(s) \exp\left(\int_s^\tau k(\tau)\, d\tau\right) ds$$

pentru orice $t \in [a,b]$. (A. HALANAY [**7**], p. 196)

PROBLEMA 1.18. *Dacă* $x : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *şi* $k : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *sunt continue şi*

$$x^p(t) \leq m^p + p \int_a^t k(s)\, x^{(p-1)}(s)\, ds$$

pentru orice $t \in [a,b]$, *unde* $m \geq 0$ *şi* $p > 1$, *atunci*

$$x(t) \leq m + \int_a^t k(s)\, ds$$

pentru orice $t \in [a,b]$.

PROBLEMA 1.19. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *crescătoare şi* $x, y : [0,T] \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^1. *Dacă*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) + f(x(t)) \leq \dfrac{dy}{dt}(t) + f(y(t)) \\[2ex] x(0) \leq y(0) \end{cases}$$

pentru orice $t \in [0,T]$, *atunci* $x(t) \leq y(t)$ *pentru orice* $t \in [0,T]$.

CAPITOLUL 2

Problema Cauchy

Acest capitol este dedicat în exclusivitate definirii şi studierii noţiunilor fundamentale referitoare la problema centrală care face obiectul acestei cărţi, problema CAUCHY sau problema cu date iniţiale. În primul paragraf este definită problema CAUCHY pentru o ecuaţie diferenţială dată, cât şi conceptele de bază referitoare la aceasta: soluţie locală, soluţie saturată, soluţie globală, etc. În paragraful al doilea este menţionată o condiţie suficientă de existenţă locală pentru o problemă CAUCHY. În paragraful al treilea este demonstrată Teorema lui Picard de existenţă şi unicitate locală, iar în paragraful al patrulea s-au pus în evidenţă mai multe situaţii în care orice două soluţii ale aceleiaşi probleme CAUCHY coincid pe partea comună a domeniilor lor de definiţie. Existenţa soluţiilor saturate cât şi a celor globale este studiată în paragraful al cincilea. În paragraful al şaselea sunt incluse două rezultate referitoare la dependenţa continuă a soluţiilor de date. Paragraful al şaptelea reia toate problemele studiate anterior în cazul ecuaţiei diferenţiale de ordinul n. Capitolul se încheie cu un set de probleme menite să ilustreze aspectele mai delicate din cadrul teoriei abstracte prezentate.

---

1. Prezentare generală

Să considerăm $\mathbb{I}$ un interval nevid şi deschis din $\mathbb{R}$, Ω o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie, $a \in \mathbb{I}$ şi $\xi \in \Omega$.

Problema CAUCHY pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu datele $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ constă în găsirea unei funcţii de clasă C^1, $x : \mathbb{J} \to \Omega$, unde $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ este un interval cu interior nevid, $a \in \mathbb{J}$, satisfăcând $x'(t) = f(t, x(t))$ pentru orice $t \in \mathbb{J}$ şi $x(a) = \xi$. Vom nota o astfel de problemă prin

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

O funcţie $x : \mathbb{J} \to \Omega$ cu proprietăţile menţionate mai sus se numeşte *soluţie* pentru $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. Distingem mai multe tipuri de soluţii pentru $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. Astfel, dacă $\mathbb{J} = \mathbb{I}$, soluţia x se numeşte *globală*, iar în caz contrar *locală*. Dacă $\mathbb{J} = [\,a, b)$, sau $\mathbb{J} = [\,a, b\,]$, atunci x se numeşte *soluţie la dreapta*. În mod analog, dacă $\mathbb{J} = (c, a\,]$, sau $\mathbb{J} = [\,c, a\,]$, x se numeşte *soluţie la stânga*, în timp ce dacă $\inf \mathbb{J} < a < \sup \mathbb{J}$, x se numeşte *soluţie bilaterală*. O soluţie la dreapta (stânga) $x : \mathbb{J} \to \Omega$ se numeşte *soluţie la dreapta* (*stânga*) *globală* dacă $\mathbb{J} = \{t \in \mathbb{I};\ t \geq a\}$ ($\mathbb{J} = \{t \in \mathbb{I};\ t \leq a\}$). Soluţia $x : \mathbb{J} \to \Omega$ se numeşte *continuabilă la dreapta* (*la stânga*) dacă există o altă soluţie la dreapta (stânga) $y : \mathbb{K} \to \Omega$ cu $\sup \mathbb{J} < \sup \mathbb{K}$ ($\inf \mathbb{J} > \inf \mathbb{K}$) şi astfel încât $x(t) = y(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{J} \cap \mathbb{K}$. Soluţia $x : \mathbb{J} \to \Omega$ se numeşte *saturată la dreapta* (*stânga*) dacă ea nu este continuabilă la dreapta (la stânga). Evident, orice soluţie globală la dreapta (stânga) este saturată la dreapta (stânga), dar nu şi reciproc, după cum putem constata din exemplul următor.

EXEMPLUL 2.1.1. Să luăm $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, x) = -x^2$ pentru orice $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $a = 0$ şi $\xi = -1$. Este clar că $x : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}, x(t) = (t - 1)^{-1}$, pentru orice $t \in (-\infty, 1)$, este o soluţie a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ saturată la dreapta, dar nu este o soluţie globală la dreapta. Totuşi, x este o soluţie globală la stânga a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. Mai mult, $x|_{(-\infty,1/2)}$ este continuabilă la dreapta dar nu la stânga, în timp ce $x|_{(-1,1)}$ este continuabilă la stânga, dar nu la dreapta.

Acest exemplu este instructiv deoarece el ne arată că, chiar şi în cazul în care f nu depinde de t, indiferent de cât de regulată este în raport cu x din Ω, $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ poate să nu aibă soluţii globale.

OBSERVAŢIA 2.1.1. Întrucât toate consideraţiile referitoare la soluţiile la stânga ale $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ sunt cu totul similare celor referitoare la soluţiile la dreapta şi întrucât studiul soluţiilor bilaterale se reduce la studiul celor două tipuri de soluţii amintite mai sus, în tot ceea ce urmează ne vom referi cu precădere la soluţii la dreapta. In plus, ori de câte ori nu va exista vreun pericol de confuzie, vom elimina precizarea "la dreapta" şi vom vorbi despre "soluţii" în loc de "soluţii la dreapta".

La fel ca în cazul sistemelor diferenţiale de ordinul întâi, putem formula problema CAUCHY pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul n în forma normală. Mai precis, fie $\mathbb{I}$ un interval nevid şi deschis din $\mathbb{R}$, Ω o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie, $a \in \mathbb{I}$ şi $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Omega$.

Problema CAUCHY pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul n în forma normală cu datele $\mathcal{D}' = (\mathbb{I}, \Omega, g, a, \xi)$ constă în determinarea unei funcţii de clasă C^n, $y : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ este un interval cu interior nevid cu $a \in \mathbb{J}$ şi $(y(t), y'(t), \ldots, y^{n-1}(t)) \in \Omega$, funcţie satisfăcând egalitatea $y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$ pentru orice $t \in \mathbb{J}$ şi condiţiile iniţiale $y(a) = \xi_1$, $y'(a) = \xi_2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \xi_n$. Vom nota această problemă prin

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}') \qquad \begin{cases} y^{(n)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(a) = \xi_1, \ y'(a) = \xi_2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \xi_n. \end{cases}$$

Prin intermediul transformărilor

$$(\mathcal{T}) \qquad \begin{cases} x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ f(t, x) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)), \end{cases}$$

$\mathcal{PC}(\mathcal{D}')$ se reformulează ca o problemă CAUCHY pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ x_1(a) = \xi_1, \ x_2(a) = \xi_2, \ldots x_n(a) = \xi_n, \end{cases}$$

care, la rândul ei poate fi rescrisă ca o problemă de forma $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$, unde $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$, cu f definită ca mai sus. În acest fel, cele două probleme CAUCHY sunt echivalente din punctul de vedere al existenţei şi unicităţii soluţiei.

O dată făcută această observaţie, este clar de ce, în continuare, ne vom mărgini numai la studiul problemei CAUCHY pentru un sistem diferenţial de ordinul întâi.

Începem prin a demonstra două rezultate simple şi utile, la care vom face apel frecvent în cele ce urmează.

PROPOZIŢIA 2.1.1. *Fie* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă şi* $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ *un interval cu interior nevid astfel încât* $a \in \mathbb{J}$. *Atunci, o funcţie* $x : \mathbb{J} \to \Omega$ *este o soluţie a* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ *dacă şi numai dacă* x *este continuă pe* $\mathbb{J}$ *şi satisface ecuaţia integrală*

$$x(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau \tag{$\mathcal{EI}$}$$

pentru orice $t \in \mathbb{J}$.

Demonstraţie. Dacă x este o soluţie a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$, ea este continuă (fiind de clasă C^1) şi atunci, $\tau \mapsto f(\tau, x(\tau))$ este de asemenea continuă pe $\mathbb{J}$. În consecinţă, putem integra ambii membri ai egalităţii

$$x'(\tau) = f(\tau, x(\tau))$$

de la a la t. Ţinând cont că $x(a) = \xi$, obţinem $(\mathcal{EI})$.

Reciproc, dacă x este continuă pe $\mathbb{J}$ şi satisface $(\mathcal{EI})$, atunci $\tau \mapsto f(\tau, x(\tau))$ este de asemenea continuă pe $\mathbb{J}$. Atunci, din $(\mathcal{EI})$, rezultă că x este de clasă C^1 pe $\mathbb{J}$. Derivând în ambii membri $(\mathcal{EI})$ deducem $x'(t) = f(t, x(t))$, pentru orice $t \in \mathbb{J}$, în timp ce punând $t = a$ în $(\mathcal{E}I)$ obţinem $x(a) = \xi$. Deci x este o soluţie a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ şi demonstraţia este completă. □

PROPOZIŢIA 2.1.2. (PRINCIPIUL CONCATENĂRII). *Fie* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă pe* $\mathbb{I} \times \Omega$, $a, b, c \in \mathbb{I}$ *cu* $a < b < c$ *şi* $\xi \in \Omega$. *Fie* $x : [\,a, b\,] \to \Omega$ *o soluţie a* $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ *şi* $y : [\,b, c\,] \to \Omega$ *o soluţie a* $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, b, x(b))$. *Atunci,* $z : [\,a, c\,] \to \Omega$, *obţinută prin concatenarea funcţiilor* x *şi* y,

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & \text{pentru } t \in [\,a, b\,] \\ y(t), & \text{pentru } t \in (b, c\,], \end{cases}$$

este o soluţie a $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, f, \Omega, a, \xi)$.

Demonstraţie. Evident z este continuă pe $[\,a, c\,]$. În virtutea Propoziţiei 2.1.1, este atunci suficient să arătăm că z satisface

$$z(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, z(\tau))\, d\tau \tag{2.1.1}$$

pentru orice $t \in [\,a, c\,]$.

Dacă $t \in [\,a, b\,]$, această relaţie este verificată deoarece $z(t) = x(t)$ şi x satisface $(\mathcal{EI})$. Fie $t \in (b, c\,]$ şi să observăm că, din Propoziţia 2.1.1, avem

$$z(t) = y(t) = x(b) + \int_b^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau = x(b) + \int_b^t f(\tau, z(\tau))\, d\tau.$$

Substituind

$$x(b) = \xi + \int_a^b f(\tau, x(\tau))\, d\tau = \xi + \int_a^b f(\tau, z(\tau))\, d\tau,$$

în egalitatea precedentă, obţinem (2.1.1) şi demonstraţia este încheiată. □

OBSERVAŢIA 2.1.2. Proprietăţile de regularitate ale soluţiilor $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ depind de proprietăţile de regularitate ale funcţiei f. Mai precis, putem verifica cu uşurinţă că, dacă f este de clasă C^{k-1} pe $\mathbb{I} \times \Omega$ $(k \geq 1)$, orice soluţie a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ este de clasă C^k pe domeniul său. Astfel, dacă f este o funcţie de clasă C^∞pe $\mathbb{I} \times \Omega$, atunci orice soluţie a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ este de clasă C^∞ pe domeniul său. Mai mult, dacă f este analitică pe $\mathbb{I} \times \Omega$, orice soluţie a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ este analitică pe domeniul ei. Vom demonstra mai târziu acest rezultat important datorat lui CAUCHY.

Încheiem această secţiune cu unele consideraţii simple referitoare la cazul autonom. Reamintim că o ecuaţie diferenţială de forma $x' = f(x)$, unde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, se numeşte autonomă. Altfel spus, o ecuaţie autonomă este o ecuaţie al cărei membru drept este o funcţie ce nu depinde în mod explicit de variabila t. Fie deci problema CAUCHY autonomă

$$\mathcal{PCO}(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x' = f(x) \\ x(a) = \xi, \end{cases}$$

unde $\mathcal{D} = (\Omega, f, a, \xi)$.

PROPOZIŢIA 2.1.3. *O funcţie $x : \mathbb{I}_x \to \Omega$ este soluţie a $\mathcal{PCO}(\Omega, f, a, \xi)$ dacă şi numai dacă funcţia $x_a : \mathbb{I}_{x_a} \to \Omega$ definită prin $x_a(t) = x(t + a)$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_{x_a}$, unde $\mathbb{I}_{x_a} = \{t \in \mathbb{R};\ t + a \in \mathbb{I}_x\}$, este o soluţie a $\mathcal{PCO}(\Omega, f, 0, \xi)$.*

Demonstraţie. Evident x este de clasă C^1 dacă şi numai dacă x_a este de clasă C^1. În plus, $x(a) = \xi$ dacă şi numai dacă $x_a(0) = \xi$ şi $x_a'(t) = x'(t+a) = f(x(t+a)) = f(x_a(t))$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_{x_a}$ dacă şi numai dacă $x'(s) = f(x(s))$ pentru orice $s \in \mathbb{I}_x$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Propoziţia 2.1.3 explică de ce, în tot ceea ce urmează, pentru sistemele autonome ne vom referi numai la problema CAUCHY cu condiţia iniţială $x(0) = \xi$.

2. Problema existenţei locale

În general nu orice problemă CAUCHY admite soluţie. Pentru a ne convinge de acest lucru să analizăm următorul exemplu concret.

EXEMPLUL 2.2.1. Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(t, x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă} \ \ t \in \mathbb{R} \ \ \text{şi} \ \ x \geq 0 \\ \ \ 1 & \text{dacă} \ \ t \in \mathbb{R} \ \ \text{şi} \ \ x < 0. \end{cases}$$

Atunci problema CAUCHY

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

nu admite nici o soluţie locală la dreapta. Într-adevăr, dacă presupunem că $x : [\,0, \delta) \to \mathbb{R}$ este o soluţie a problemei de mai sus, atunci x este de clasă C^1 şi $x'(0) = -1$. Ca atare, pe o întreagă vecinătate la dreapta lui 0, x' va păstra semnul lui -1. Putem presupune fără a restrânge generalitatea (micşorându-l pe δ dacă este cazul) că $x'(t) < 0$ pentru orice $t \in [\,0, \delta)$. Rezultă atunci că x este strict descrescătoare pe $[\,0, \delta)$ şi, în consecinţă, $x(t) < x(0) = 0$ pentru orice $t \in (0, \delta)$. Avem atunci $x'(t) = f(x(t)) = 1$ pentru orice $t \in (0, \delta)$ şi $x'(0) = -1$, ceea ce arată că x', care este de clasă C^1, este discontinuă în $t = 0$. Această contradicţie poate fi eliminată numai dacă problema CAUCHY considerată nu are nici o soluţie locală la dreapta. Acest fenomen de inexistenţă este, după cum vom vedea în cele ce urmează, datorat discontinutăţii funcţiei f.

Menţionăm, fără demonstraţie, următorul rezultat fundamental de existenţă locală. Pentru demonstraţie, cititorul interesat poate consulta Vrabie [**17**], sau Vrabie[**18**]. În acest scop, fie $\mathbb{I}$ un interval nevid şi deschis din $\mathbb{R}$, Ω o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$ şi $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie.

TEOREMA 2.2.1. (PEANO). *Dacă $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$, atunci pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ are cel puţin o soluţie locală.*

Din Teorema 2.2.1 şi Propoziţia 2.1.3 rezultă:

CONSECINŢA 2.2.1. *Dacă* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *este continuă pe* Ω*, atunci pentru orice* $\xi \in \Omega$ $\mathcal{PCO}(\Omega, f, 0, \xi)$ *are cel puţin o soluţie locală.*

3. Teorema lui Picard de existenţă şi unicitate locală

Fie $a \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$ şi $r > 0$ şi fie cilindrul $\Delta = [\,a, a+h\,] \times B(\xi, r)$. Fie $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă şi să considerăm problema CAUCHY

$$(\mathcal{PC}) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = \xi, \end{cases}$$

care, după cum s-a demonstrat în Propoziţia 2.1.1, este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$(\mathcal{EI}) \qquad x(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

pentru orice $t \in \mathbb{J}$.

Cum funcţia $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ este continuă pe mulţimea compactă Δ, ea este mărginită pe Δ, adică există $M > 0$ astfel încât

$$\|f(t,x)\| \leq M \tag{2.3.1}$$

pentru orice $(t,x) \in \Delta$.

LEMA 2.3.1. *Fie* $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă pe* Δ *şi fie* δ *definit de*

$$\delta = \min\left\{h, \frac{r}{M}\right\}. \tag{2.3.2}$$

Atunci, pentru orice funcţie continuă $y : [\,a, a+\delta\,] \to B(\xi, r)$*, funcţia* $x : [\,a, a+\delta\,] \to \mathbb{R}^n$*, definită prin*

$$x(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

pentru orice $t \in [\,a, a+\delta\,]$ *duce* $[\,a, a+\delta\,]$ *în* $B(\xi, r)$.

Demonstraţie. În virtutea definiţiei lui x şi a relaţiilor (2.3.3) şi (2.3.1), avem

$$\|x(t) - \xi\| \leq \int_a^t \|f(\tau, y(\tau))\|\, d\tau \leq \delta M \leq r$$

pentru orice $t \in [\,a, a+\delta\,]$ şi demonstraţia este completă. □

Putem acum trece la definirea şirului de aproximaţii succesive $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ corespunzător problemei $(\mathcal{PC})$. Să considerăm $x_0 : [\,a, a+\delta\,] \to B(\xi, r)$ definit prin $x_0(t) = \xi$ pentru orice $t \in [\,a, a+\delta\,]$ şi să definim $x_k : [\,a, a+\delta\,] \to B(\xi, r)$, pentru $k \geq 1$, prin

$$x_k(t) = \xi + \int_a^t f(\tau, x_{k-1}(\tau))\, d\tau, \quad \text{pentru orice} \quad t \in [\,a, a+\delta\,]. \tag{2.3.3}$$

Un simplu raţionament inductiv combinat cu Lema 2.3.1 arată că x_k este bine definit pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Rezultatul principal din această secţiune este Teorema lui PICARD referitoare la convergenţa uniformă a şirului de aproximaţii sucesive.

TEOREMA 2.3.2. (PICARD) *Fie* $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă pe* Δ *care satisface condiţia lui* LIPSCHITZ *pe* $B(\xi, r)$, *adică există* $L > 0$ *astfel încât pentru orice* $(t,u), (t,v) \in \Delta$, *să avem*

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|. \tag{2.3.4}$$

Atunci problema $(\mathcal{PC})$ *are o unică soluţie* $x : [\,a, a+\delta\,] \to B(\xi, r)$ *şi aceasta este limita uniformă pe* $[\,a, a+\delta\,]$ *a şirului de aproximaţii succesive. În plus, are loc următoarea formulă de evaluare a erorii*

$$\|x_k(t) - x(t)\| \leq M\frac{L^k\delta^{k+1}}{(k+1)!}\ , \tag{2.3.5}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ *şi* $t \in [\,a, a+\delta\,]$.

Demonstraţie. Din Lema 2.3.1, rezultă că şirul de aproximaţiilor succesive (2.3.3) este bine definit. Să observăm acum că acest şir este uniform convergent pe $[\,a, a+\delta\,]$ dacă şi numai dacă seria, numită *telescopică*,

$$x_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty}[x_{k+1}(t) - x_k(t)] \tag{2.3.6}$$

este uniform convergentă pe $[\,a, a+\delta\,]$. Aceasta rezultă din simpla observaţie că şirul sumelor parţiale ale seriei (2.3.6) coincide cu şirul aproximaţiilor succesive (2.3.3). Pentru a demonstra convergenţa uniformă a seriei (2.3.6), vom utiliza Criteriul Comparaţiei a lui Weierstrass. Mai precis, vom demonstra că seria

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|$$

este majorată termen cu termen de o serie convergentă, cu termeni pozitivi. În acest scop să observăm că, din definiţia şirului de aproximaţii succesive (2.3.3), avem

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \int_a^t \|f(\tau, x_0(\tau))\|\,d\tau \leq M(t-a)$$

pentru orice $t \in [\,a, a+\delta\,]$. Din (2.3.3), (2.3.4) şi din inegalitatea de mai sus deducem

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \int_a^t \|f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau))\|\,d\tau$$

$$\leq L\int_a^t \|x_1(\tau) - x_0(\tau)\|\,d\tau \leq M\frac{L(t-a)^2}{2!}\ ,$$

pentru orice $t \in [\,a, a+\delta\,]$. Această inegalitate sugerează că, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $t \in [\,a, a+\delta\,]$, ar trebui să avem

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq M\frac{L^k(t-a)^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{2.3.7}$$

Cum pentru $k = 0$ această inegalitate este satisfăcută, să presupunem că ea are loc pentru un $k \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $t \in [\,a, a+\delta\,]$. Atunci, din (2.3.3), (2.3.4) şi din presupunerea inductivă, deducem

$$\|x_{k+2}(t) - x_{k+1}(t)\| \leq \int_a^t \|f(\tau, x_{k+1}(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau))\|\,d\tau$$

$$\leq L \int_a^t \|x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau)\| \, d\tau \leq L \int_a^t M \frac{L^k(\tau - a)^{k+1}}{(k+1)!} \, d\tau$$
$$= M \frac{L^{k+1}(t-a)^{k+2}}{(k+2)!} ,$$
pentru orice $t \in [\, a, a+\delta \,]$ şi astfel (2.3.7) are loc. Evident (2.3.7) implică
$$\sup_{t \in [\, a, a+\delta \,]} \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq M \frac{L^k \delta^{k+1}}{(k+1)!}$$
pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $t \in [\, a, a+\delta \,]$. Cum
$$\sum_{k=0}^{\infty} M \frac{L^k \delta^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L} \left(e^{\delta L} - 1\right),$$
ultima inegalitate arată că seria telescopică este uniform convergentă. Deci şirul aproximaţiilor succesive $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este uniform convergent pe $[\, a, a+\delta \,]$ la o funcţie x. Trecând la limită pentru $k \to \infty$ în (2.3.3), deducem că x este soluţie a $(\mathcal{E}\mathcal{I})$. Din Propozitia 2.1.1, urmează că x este soluţie a problemei Cauchy $(\mathcal{PC})$. Fie acum x şi y soluţii ale $(\mathcal{PC})$ sau, echivalent, ale $(\mathcal{E}\mathcal{I})$. Avem atunci
$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_a^t \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| \, d\tau \leq L \int_a^t \|x(\tau) - y(\tau)\| \, d\tau$$
pentru orice $t \in [\, a, a+\delta \,]$. Din Lema 1.4.2 a lui Gronwall, rezultă că $\|x(t) - y(t)\| = 0$ pentru orice $t \in [\, a, a+\delta \,]$, ceea ce demonstrează unicitatea soluţiei. În sfârşit, să observăm că (2.3.5) se obţine printr-un argument inductiv, la fel ca (2.3.7). Demonstraţia este încheiată. □

4. Problema unicităţii

După cum am subliniat deja în mai multe rânduri, principala utilitate a ecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii diferenţiale constă în utilizarea acestora pentru a prezice cu o cât mai mare acurateţe evoluţia unui anumit fenomen căruia i se cunosc starea iniţială şi legea de variaţie a vitezei în funcţie de stare. Pe de altă parte, pentru înlăturarea oricărui echivoc în cadrul acestei predicţii, este necesar ca problema Cauchy corespunzătoare ecuaţiei sau sistemului de ecuaţii diferenţiale avute în vedere să aibă cel mult o soluţie pe un anumit interval dat.

Scopul nostru aici este de a prezenta mai multe condiţii suficiente care să asigure această proprietate de unicitate.

În Secţiunea 2.2, am menţionat că, dacă membrul drept $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ în problema Cauchy

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = \xi \end{cases}$$

este o funcţie continuă, atunci această problemă are cel puţin o soluţie locală. Trebuie însă precizat că, dacă f este numai continuă, pentru anumite date iniţiale $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, se poate ca $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ să aibă *mai mult* decât o soluţie locală pe un anumit interval, după cum putem constata din următorul exemplu clasic datorat lui Peano (1890).

Exemplul 2.4.1. Fie $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, x) = 3\sqrt[3]{x^2}$ pentru orice $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $a = 0$ şi $\xi = 0$. Atunci, putem verifica cu uşurinţă că atât $x(t) = 0$ cât şi $y(t) = t^3$, pentru $t \in [\, 0, +\infty)$ sunt soluţii ale $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)$.

Este interesant de menţionat că există exemple de funcţii continue $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ are cel puţin două soluţii distincte pe o vecinătate la dreapta lui a. Cei interesaţi pot consulta P. HARTMAN [**22**] unde, la pagina 18, este analizat un asemenea exemplu.

Începem cu următoarele definiţii şi observaţii.

DEFINIŢIA 2.4.1. O funcţie $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *local lipschitziană* pe Ω dacă pentru orice submulţime compactă $\mathcal{K}$ din $\mathbb{I} \times \Omega$, există $L = L(\mathcal{K}) > 0$ astfel încât, pentru orice $(t, u), (t, v) \in \mathcal{K}$ să avem

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|. \tag{2.4.1}$$

OBSERVAŢIA 2.4.1. Folosirea termenului "local" în Definiţia 2.4.1 este întrucâtva improprie, dar este motivată de faptul că $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este local lipschitziană pe Ω dacă şi numai dacă pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, există o vecinătate $\mathcal{V}$ a punctului (a, ξ), $\mathcal{V} \subset I \times \Omega$ şi $L = L(\mathcal{V}) > 0$ astfel încât, pentru orice $(t, u), (t, v) \in \mathcal{V}$, (2.4.1) să aibă loc. Lăsăm în seama cititorului demonstraţia acestui frumos exerciţiu de analiză.

OBSERVAŢIA 2.4.2. Dacă funcţia $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisface condiţia lui CAUCHY pe Ω, adică f are derivate parţiale în raport cu ultimele n variabile şi, pentru orice i, j din $\{1, 2, \ldots, n\}$, $(\partial f_i)/(\partial x_j)$ este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$, atunci f este local lipschitziană pe Ω.

DEFINIŢIA 2.4.2. Spunem că $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ are *proprietatea de unicitate locală* dacă pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$ şi orice două soluţii x şi y ale $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ există $\delta > 0$ astfel încât $[\, a, a + \delta\,] \subset \mathbb{I}$ şi $x(t) = y(t)$ pentru orice $t \in [\, a, a + \delta\,]$.

DEFINIŢIA 2.4.3. Spunem că $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ are *proprietatea de unicitate globală* dacă pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, orice două soluţii x şi y ale $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ coincid pe intervalul comun de definiţie.

Continuăm cu următorul rezultat util.

PROPOZIŢIA 2.4.1. *Condiţia necesară şi suficientă ca $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ să aibă proprietatea de unicitate locală este ca ea să aibă proprietatea de unicitate globală.*

Demonstraţie. Suficienţa este evidentă. Să presupunem că $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ are proprietatea de unicitate locală. Fie $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$ şi fie $x : \mathbb{J} \to \Omega$ şi $y : \mathbb{K} \to \Omega$ două soluţii ale $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$. Mulţimea

$$\mathcal{C}(x, y) = \{t \in \mathbb{J} \cap \mathbb{K};\ x(s) = y(s) \text{ pentru orice } s \in [\, a, t\,]\}$$

este nevidă şi închisă deoarece x şi y sunt funcţii continue. Pentru a încheia demonstraţia este suficient să arătăm că

$$\sup \mathcal{C}(x, y) = \sup(\mathbb{J} \cap \mathbb{K}). \tag{2.4.2}$$

În acest scop să presupunem pentru reducere la absurd că (2.4.2) nu are loc. Întrucât $\sup \mathcal{C}(x, y) \leq \sup(\mathbb{J} \cap \mathbb{K})$, urmează că $\sup \mathcal{C}(x, y) < \sup(\mathbb{J} \cap \mathbb{K})$. Dar, în acest caz, atât x cât şi y sunt definite la dreapta punctului $b = \sup \mathcal{C}$ şi sunt soluţii ale $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, b, x(b))$, şi ca atare, din ipoteză, ele trebuie să coincidă pe un interval de forma $[\, b, b+\delta)$, cu $\delta > 0$ suficient de mic. Dar această afirmaţie este în contradicţie cu definiţia lui b. Pentru a elimina contradicţia este necesar ca (2.4.2) să aibă loc. Demonstraţia este încheiată. $\square$

În virtutea Propoziţiei 2.4.1 "unicitatea locală" şi "unicitatea globală" descriu una şi aceeaşi proprietate a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. Din acest motiv, în cele ce urmează, vom utiliza termenul de "unicitate" pentru a desemna oricare din cele două proprietăţi definite mai sus.

Trecem acum la prezentarea primei condiţii suficiente de unicitate.

Teorema 2.4.1. *Dacă $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este local lipschitziană pe Ω, atunci $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ are proprietatea de unicitate.*

Demonstraţie. Concluzia rezultă din Teorema 2.3.2 a lui Picard. $\square$

O altă clasă importantă de funcţii f pentru care $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ are proprietatea de unicitate este definită mai jos.

Definiţia 2.4.4. O funcţie $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *disipativă pe* Ω dacă pentru orice $t \in \mathbb{I}$ şi $u, v \in \Omega$, avem

$$\langle f(t, u) - f(t, v), u - v \rangle \leq 0,$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar standard din $\mathbb{R}^n$, adică

$$\langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i,$$

pentru orice $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ din $\mathbb{R}^n$.

Observaţia 2.4.3. Dacă $n = 1$, $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ este disipativă pe Ω dacă şi numai dacă pentru orice $t \in \mathbb{I}$, $f(t, \cdot)$ este descrescătoare pe Ω.

Teorema 2.4.2. *Dacă $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este disipativă pe Ω atunci $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ are proprietatea de unicitate la dreapta.*

Concluzia teoremei rezultă din următoarea lemă utilă şi în cele ce urmează.

Lema 2.4.1. *Fie $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ disipativă pe Ω, fie $a \in \mathbb{I}$ şi $\xi, \eta \in \Omega$. Dacă $x : \mathbb{I}_x \to \Omega$ şi $y : \mathbb{I}_y \to \Omega$ sunt două soluţii ale problemelor* Cauchy *$\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ şi respectiv $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \eta)$ atunci*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|\xi - \eta\|$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}_x \cap \mathbb{I}_y$, $t \geq a$.

Demonstraţie. Fie $a \in \mathbb{I}$, $\xi, \eta \in \Omega$ şi fie $x : \mathbb{I}_x \to \Omega$, $y : \mathbb{I}_y \to \Omega$ două soluţii ale $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ şi respectiv $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \eta)$. Atunci, pentru orice $t \in \mathbb{I}_x \cap \mathbb{I}_y$, avem

$$x'(t) - y'(t) = f(t, x(s)) - f(t, y(t)).$$

Înmulţind scalar în ambii membri egalitatea de mai sus cu $x(t) - y(t)$ şi reamintind că, în virtutea punctului (i) din Lema 6.1.2, avem

$$\langle x'(t) - y'(t), x(t) - y(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t) - y(t)\|^2,$$

obţinem

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t) - y(t)\|^2 = \langle f(t, x(t)) - f(t, y(t)), x(t) - y(t) \rangle.$$

Din condiţia de disipativitate rezultă

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t) - y(t)\|^2 \leq 0.$$

Astfel, $t \mapsto \frac{1}{2}\|x(t)-y(t)\|^2$ şi, o dată cu ea, $t \mapsto \|x(t)-y(t)\|$ sunt descrescătoare pe $\mathbb{I}_x \cap \mathbb{I}_y$. De aici rezultă

$$\|x(t)-y(t)\| \leq \|x(a)-y(a)\| = \|\xi-\eta\|$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}_x \cap \mathbb{I}_y$, $t \geq a$, ceea ce încheie demonstraţia lemei. □

OBSERVAŢIA 2.4.4. Spre deosebire de condiţia LIPSCHITZ locală care asigură unicitatea bilaterală, condiţia de disipativitate asigură numai unicitatea la dreapta dar nu şi la stânga după cum putem constata din următorul exemplu.

EXEMPLUL 2.4.2. Fie $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(t,x) = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x^2} & \text{pentru orice } t \in \mathbb{R} \text{ şi } x < 0 \\ 0 & \text{pentru orice } t \in \mathbb{R} \text{ şi } x \geq 0. \end{cases}$$

Atunci $\mathcal{PC}(f, \mathbb{R}, \mathbb{R}, 0, 0)$ are numai o soluţie saturată la dreapta, dar atât $x(t) = 0$ cât şi $y(t) = t^3$ pentru $t < 0$, sunt soluţii saturate la stânga ale $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)$.

Prezentăm în încheiere o consecinţă utilă a Teoremelor 2.3.2 şi 2.4.2.

TEOREMA 2.4.3. *Dacă $f : \mathbb{I}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ este continuă pe $\mathbb{I}\times\Omega$ şi disipativă pe Ω atunci, pentru orice $(a,\xi) \in \mathbb{I}\times\Omega$, există $\delta > 0$ astfel încât $[\,a, a+\delta\,] \subset \mathbb{I}$ şi $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ să admită o soluţie unică definită pe $[\,a, a+\delta\,]$.*

5. Soluţii saturate

Fie $\mathbb{I}$ un interval nevid şi deschis din $\mathbb{R}$, Ω o submulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{I}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie, $a \in \mathbb{I}$ şi $\xi \in \Omega$. Fie $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ şi să considerăm problema CAUCHY

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

Reamintim că o soluţie $x : \mathbb{J} \to \Omega$ se numeşte *continuabilă la dreapta* (*la stânga*) dacă există o altă soluţie la dreapta (stânga) $y : \mathcal{K} \to \Omega$ cu $\sup \mathbb{J} < \sup \mathbb{K}$ ($\inf \mathbb{J} > \inf \mathcal{K}$) astfel încât $x(t) = y(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{J}\cap\mathbb{K}$. Soluţia $x : \mathbb{J} \to \Omega$ se numeşte *saturată la dreapta* (*stânga*) dacă nu este continuabilă la dreapta (stânga). Întrucât, în cele ce urmează ne vom referi numai la soluţii la dreapta, pentru simplificarea expunerii, ori de câte ori vom folosi termenul "continuabilă", respectiv "saturată", vom înţelege "continuabilă la dreapta", respectiv "saturată la dreapta". Începem cu o lemă simplă şi utilă.

LEMA 2.5.1. *Fie $f : \mathbb{I}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{I}\times\Omega$. Atunci, o soluţie $x : [\,a, b) \to \Omega$ a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ este continuabilă dacă şi numai dacă*

(i) $b < \sup \mathbb{I}$
şi există
(ii) $x^* = \lim\limits_{t\uparrow b} x(t)$ *şi* $x^* \in \Omega$.

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă, în timp ce suficienţa este o consecinţă a Teoremei 2.2.1 combinată cu Propoziţia 2.1.2. Într- adevăr, dacă (i) şi (ii) au loc, în virtutea Teoremei 2.2.1, $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, b, x^*)$ are cel puţin o soluţie locală $y : [\,b, b+\delta) \to \Omega$, unde $\delta > 0$ este suficient de mic. Atunci, din Propoziţia 2.1.2, funcţia z, obţinută prin concatenarea funcţiilor x şi y şi care coincide cu x pe $[\,a, b)$, este o soluţie a $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$. Ca atare x este continuabilă. □

OBSERVAŢIA 2.5.1. Din Lema 2.5.1 rezultă cu uşurinţă că orice soluţie saturată a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ este în mod necesar definită pe un interval deschis la dreapta.

O condiţie suficientă pentru existenţa limitei finite din Lema 2.5.1 (ii) este dată de

PROPOZIŢIA 2.5.1. *Fie* $x : [\,a, b) \to \Omega$ *o soluţie a* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. *Dacă* $b < +\infty$ *şi există* $M > 0$ *astfel încât*

$$\|f(\tau, x(\tau))\| \leq M$$

pentru orice $\tau \in [\,a, b)$ *atunci există* $\lim_{t \uparrow b} x(t) = x^*$.

Demonstraţie. În virtutea Propoziţiei 2.1.1 avem

$$\|x(t) - x(s)\| \leq \left| \int_s^t \|f(\tau, x(\tau))\| \, d\tau \right| \leq M|t - s|$$

pentru orice $t, s \in [\,a, b)$. Ca atare x satisface condiţia lui CAUCHY de existenţă a limitei finite la stânga în b şi demonstraţia este încheiată. □

O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o soluţie a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ să fie continuabilă este dată de

TEOREMA 2.5.1. *Fie* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă şi* $x : [\,a, b) \to \Omega$ *o soluţie a* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. *Atunci* x *este continuabilă dacă şi numai dacă graficul său*

$$\operatorname{graf}(x) = \{(t, x(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \; t \in [\,a, b)\}$$

este inclus într-o submulţime compactă din $\mathbb{I} \times \Omega$.

Demonstraţie. Necesitatea. Dacă x este continuabilă atunci $b \in \mathbb{I}$ şi x poate fi extinsă prin continuitate la o funcţie $y : [\,a, b\,] \to \Omega$. Cum funcţia $t \mapsto (t, y(t))$ este continuă pe mulţimea compactă $[\,a, b\,]$, rezultă că imaginea ei $\{(t, y(t)); \; t \in [\,a, b\,]\}$ este compactă. Pe de altă parte, această imagine include graf(x) şi este evident inclusă în $\mathbb{I} \times \Omega$.

Suficienţa. Dacă graf(x) este inclus într-o submulţime compactă din $\mathbb{I} \times \Omega$, cum $\mathbb{I}$ este un interval deschis, urmează că b este punct interior lui $\mathbb{I}$ şi ca atare $b < \sup \mathbb{I}$. În plus, f fiind continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$, restricţia ei la $\overline{\operatorname{graf}(x)}$ (care este compactă fiind închisă şi inclusă într-o submulţime compactă) este mărginită. Există deci $M > 0$ astfel încât

$$\|f(\tau, x(\tau))\| \leq M$$

pentru orice $\tau \in [\,a, b)$. Concluzia teoremei rezultă din Lema 2.5.1 şi Propoziţia 2.5.1. □

Continuăm cu un rezultat fundamental referitor la existenţa soluţiilor saturate.

TEOREMA 2.5.2. *Dacă* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *este continuă pe* $\mathbb{I} \times \Omega$ *şi* $x : \mathbb{J} \to \Omega$ *este o soluţie a* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$, *atunci, fie* x *este saturată, fie* x *poate fi prelungită până la o soluţie saturată.*

Demonstraţie. Dacă x este saturată nu avem ce demonstra. Să presupunem atunci că x nu este saturată şi să definim $\mathcal{S}$ ca fiind mulţimea tuturor soluţiilor problemei $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ care extind x. Evident $\mathcal{S}$ este nevidă întrucât x fiind nesaturată există cel puţin o soluţie care o prelungeşte. Pe $\mathcal{S}$ să definim relaţia "$\preceq$" prin $y \preceq z$ dacă z este o prelungire a lui y. Este un simplu exerciţiu să verificăm ca $(\mathcal{S}, \preceq)$ este o mulţime inductiv ordonată. Ca atare, din lema lui ZORN, rezultă ca $\mathcal{S}$ are cel puţin un element maximal y. Cum x este prim element în $\mathcal{S}$, din definiţia relaţiei $\preceq$ şi din maximalitatea lui y rezultă că y este o soluţie saturată a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ care extinde x. Demonstraţia este încheiată. □

OBSERVAŢIA 2.5.2. În ipotezele Teoremei 2.5.2 o soluţie continuabilă a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ poate avea mai multe extensii saturate. Vezi Problema 2.14. Este uşor de constatat că acest fenomen este posibil numai în cazul în care $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ nu are proprietatea de unicitate.

Din Teoremele 2.2.1 şi 2.5.2 urmează:

CONSECINŢA 2.5.1. *Dacă $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$ atunci, pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ are cel puţin o soluţie saturată.*

În legătură cu comportarea soluţiilor saturate la capătul din dreapta al intervalului de definiţie enunţăm, fără demonstraţie, următoarele două teoreme fundamentale.

TEOREMA 2.5.3. *Fie $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$ şi fie $x : [a, b) \to \Omega$ o soluţie saturată a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. Atunci are loc una şi numai una din următoarele trei situaţii:*
(i) *x este nemărginită pe $[a, b)$;*
(ii) *x este mărginită pe $[a, b)$ şi este globală, adică $b = \sup \mathbb{I}$;*
(iii) *x este mărginită pe $[a, b)$, nu este globală şi mulţimea punctelor limită ale lui x la stânga lui b este inclusă în frontiera mulţimii Ω.*

TEOREMA 2.5.4. *Fie $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$ care duce submulţimile mărginite din $\mathbb{I} \times \Omega$ în mulţimi mărginite din $\mathbb{R}^n$ şi fie $x : [a, b) \to \Omega$ o soluţie saturată a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. Atunci are loc una şi numai una din următoarele trei situaţii:*
(i) *x este nemărginită pe $[a, b)$ şi, dacă $b < \infty$, atunci*

$$\lim_{t \uparrow b} \|x(t)\| = +\infty \, ;$$

(ii) *x este mărginită pe $[a, b)$ şi este globală, adică $b = \sup \mathbb{I}$;*
(iii) *x este mărginită pe $[a, b)$, nu este globală şi în acest caz există*

$$\lim_{t \uparrow b} x(t) = x^*$$

şi x^* aparţine frontierei mulţimii Ω.

Pentru demonstraţii vezi Vrabie [**17**] sau Vrabie [**18**].

CONSECINŢA 2.5.2. *Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă şi fie $x : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ o soluţie saturată a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. Atunci fie x este globală, adică $b = +\infty$, fie x nu este globală şi în acest caz există*

$$\lim_{t \uparrow b} \|x(t)\| = +\infty.$$

Demonstraţie. Să observăm pentru început că, dacă $b < +\infty$, x este în mod necesar nemărginită pe $[a, b)$. Într-adevăr, dacă presupunem contrariul, x are cel puţin un punct limită la stânga x^* în b. În virtutea Teoremei 2.5.4, x^* trebuie să aparţină frontierei mulţimii $\mathbb{R}^n$ care este vidă! Astfel, presupunerea conform căreia x este mărginită pe $[a, b)$ este falsă. Concluzia Consecinţei 2.5.2 rezultă imediat din Teorema 2.5.4. $\square$

În ipotezele Consecinţei 2.5.2, dacă $b < +\infty$ şi $\lim_{t \uparrow b} \|x(t)\| = +\infty$, spunem că x *explodează în timp finit.*

CONSECINŢA 2.5.3. *Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă şi fie $x : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ o soluţie a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. Atunci x este continuabilă dacă şi numai dacă $b < +\infty$ şi x este mărginită pe $[a, b)$.*

Demonstraţie. Necesitatea este banală, în timp ce suficienţa este o reformulare a Consecinţei 2.5.2. □

Încheiem această secţiune cu două condiţii suficiente asupra funcţiei f care asigură existenţa soluţiilor globale pentru $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$.

TEOREMA 2.5.5. *Fie $f : \mathbb{I}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{I}\times\mathbb{R}^n$ şi să presupunem că există două funcţii continue $h, k : \mathbb{I} \to \mathbb{R}_+$ astfel încât*

$$\|f(\tau, y)\| \leq k(\tau)\|y\| + h(\tau), \tag{2.5.1}$$

pentru orice $(\tau, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$. Atunci, pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n, f, a, \xi)$ are cel puţin o soluţie globală.

Demonstraţie. În virtutea Consecinţei 2.5.1 este suficient să arătăm că orice soluţie saturată a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ este globală. În acest scop, fie $x : [\,a, b) \to \mathbb{R}^n$ o soluţie saturată a $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$. Întrucât x satisface $(\mathcal{EI})$ din Propoziţia 2.1.1, din (2.5.1) obţinem

$$\|x(t)\| \leq \|\xi\| + \int_a^t h(\tau)\, d\tau + \int_a^t k(\tau)\|x(\tau)\|\, d\tau,$$

pentru orice $t \in [\,a, b)$. Vom arăta în continuare că $b = \sup \mathbb{I}$. Într-adevăr, dacă presupunem contrariul, cum $[\,a, b\,]$ este compact şi h, k sunt continue pe $[\,a, b\,] \subset \mathbb{I}$, există $M > 0$ astfel încât

$$h(t) \leq M \quad \text{şi} \quad k(t) \leq M$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$. Inegalitatea precedentă împreună cu Lema 1.4.2 a lui GRONWALL arată că

$$\|x(t)\| \leq [\|\xi\| + M(b - a)]e^{M(b-a)}$$

pentru orice $t \in (a, b)$. Deci x este mărginită pe $[\,a, b)$ şi din acest motiv are cel puţin un punct limită x^* la stânga lui b. Din Teorema 2.5.3, urmează atunci că x^* aparţine frontierei mulţimii $\mathbb{R}^n$ care este vidă. Această contradicţie poate fi eliminată numai dacă $b = \sup \mathbb{I}$. Demonstraţia este completă. □

O consecinţă semnificativă a Teoremei 2.5.5 se referă la sistemele diferenţiale de ordinul întâi liniare care, datorită importanţei lor aplicative deosebite, vor fi studiate în amănunt în capitolul 4.

Fie $\mathbb{I}$ interval nevid şi deschis din $\mathbb{R}$ şi fie $\mathcal{A} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{B} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ funcţii continue cu valori matrici, adică două matrici ale căror elemente sunt funcţii continue de la $\mathbb{I}$ în $\mathbb{R}$. Fie $a \in \mathbb{I}$, $\mathcal{X}_a \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ şi să considerăm problema CAUCHY

$$\begin{cases} \mathcal{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t) + \mathcal{B}(t) \\ \mathcal{X}(a) = \mathcal{X}_a. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

CONSECINŢA 2.5.4. *Dacă $\mathcal{A} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{B} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ sunt continue atunci, pentru orice $a \in \mathbb{I}$ şi $\mathcal{X}_a \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, problema* CAUCHY (2.5.2) *are o soluţie globală unică.*

Demonstraţie. După cum s-a constatat în Secţiunea 1 din appendix, $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ este un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$ de dimensiune $m \times p$ care, din acest motiv, poate fi identificat cu $\mathbb{R}^{m\times p}$. Mai mult, norma $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ definită pe $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ în Secţiunea 1 din appendix prin

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} = \sup\{\|\mathcal{A}x\|_m\,;\ \|x\|_p \leq 1\}$$

pentru orice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, gândită prin această identificare drept o normă pe spaţiul $\mathbb{R}^{m\times p}$, este echivalentă cu cea euclidiană. Vezi Observaţia 6.1.1. Să definim acum funcţia $f : \mathbb{I} \times \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ prin

$$f(t, \mathcal{X}) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X} + \mathcal{B}(t),$$

pentru orice $(t, \mathcal{X}) \in \mathbb{I} \times \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$. Evident f este continuă şi

$$\|f(t, \mathcal{X})\|_{\mathcal{O}} \leq \|\mathcal{A}(t)\|_{\mathcal{O}}\|\mathcal{X}\|_{\mathcal{O}} + \|\mathcal{B}(t)\|_{\mathcal{O}},$$

pentru orice $(t, \mathcal{X}) \in \mathbb{I} \times \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$. Astfel f satisface toate ipotezele Teoremei 2.5.5 şi ca atare, pentru orice $a \in \mathbb{I}$ şi $\mathcal{X}_a \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, problema CAUCHY (2.5.2) are cel puţin o soluţie globală.

În sfârşit, deoarece

$$\|f(t, \mathcal{X}) - f(t, \mathcal{Y})\|_{\mathcal{O}} \leq \|\mathcal{A}(t)\|_{\mathcal{O}}\|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|_{\mathcal{O}},$$

pentru orice $(t, \mathcal{X}), (t, \mathcal{Y}) \in \mathbb{I} \times \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, urmează că f este local lipschitziană pe $\mathbb{R}^{m\times p}$. Atunci, în virtutea Teoremei 2.3.2, (2.5.2) are proprietatea de unicitate şi aceasta încheie demonstraţia. □

TEOREMA 2.5.6. *Fie $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$ şi disipativă pe $\mathbb{R}^n$. Atunci, pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$, problema* CAUCHY $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n, f, a, \xi)$ *are o soluţie globală unică.*

Demonstraţie. Fie $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$. Din Teoremele 2.4.3 şi 2.5.2 ştim că problema CAUCHY $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n, f, a, \xi)$ are o soluţie saturată unică $x : [\,a, b) \to \mathbb{R}^n$. Vom încheia demonstraţia arătând că $b = \sup \mathbb{I}$. În acest scop, să observăm că $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n, f, a, \xi)$ poate fi rescrisă echivalent ca

$$\begin{cases} x'(\tau) = f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, 0) + f(\tau, 0) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

Înmulţind scalar ambii membri ai ecuaţiei de mai sus cu $x(\tau)$, folosind condiţia de disipativitate asupra funcţiei f, reamintind că

$$\langle x'(\tau), x(\tau)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|x(\tau)\|^2$$

şi integrând pe $[\,a, t\,]$, obţinem

$$\frac{1}{2}\|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + \int_a^t \langle f(\tau, 0), x(\tau)\rangle d\tau$$

pentru orice $t \in [\,a, b)$. Din inegalitatea CAUCHY-SCHWARZ deducem

$$\frac{1}{2}\|x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + \int_a^t \|f(\tau, 0)\|\|x(\tau)\|\, d\tau$$

pentru orice $t \in [\,a, b)$. Suntem deci în ipotezele lemei 1.4.3 de unde rezultă

$$\|x(t)\| \leq \|\xi\| + \int_a^t \|f(\tau, 0)\| d\tau$$

pentru orice $t \in [\,a, b)$. În consecinţă, dacă $b < \sup \mathbb{I}$, atunci x este mărginită pe $[\,a, b)$ şi ca atare ea are cel puţin un punct limită x^* la stânga lui b. Din Teorema 2.5.3, x^* trebuie să aparţină frontierei mulţimii $\mathbb{R}^n$ care este mulţimea vidă! Astfel $b = \sup \mathbb{I}$ şi aceasta încheie demonstraţia. □

6. Dependenţa continuă de date şi de parametri

În această secţiune, ne propunem să arătăm că, în ipoteze standard de existenţă şi unicitate asupra funcţiei f, soluţia problemei CAUCHY $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ depinde continuu atât de datele iniţiale cât şi de parametri.

Începem cu studiul dependenţei continue a soluţiei de datele iniţiale, urmând să arătăm cum studiul dependenţei continue de parametri poate fi redus la precedentul. Pentru simplitate, ne vom mărgini la cazurile: (1) $\Omega = \mathbb{R}^n$ şi f disipativă şi (2) $\Omega = \mathbb{R}^n$ şi global lipschitziană.

Fie $f : [\,a,\,b\,] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $[\,a,\,b\,] \times \mathbb{R}^n$ şi disipativă pe $\mathbb{R}^n$. Fie $a \in [\,a,\,b\,]$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ şi să considerăm problema CAUCHY

$$\mathcal{PC}(a,\xi) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

Atunci, conform Teoremelor 2.4.2 şi 2.5.2, problema $(\mathcal{PC}(a,\eta)$ are o soluţie globală unică. Putem atunci nota această soluţie cu $x(\cdot,\eta) : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}^n$.

Rezultatul fundamental referitor la continuitatea soluţiei problemei CAUCHY ca funcţie de data iniţială ξ, în cazul disipativ este:

TEOREMA 2.6.1. *Fie $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $[\,a,b\,] \times \mathbb{R}^n$ şi disipativă pe Ω. Atunci aplicaţia $\eta \mapsto x(\cdot,\eta)$ este neexpansivă de la $\mathbb{R}^n$ în $C([\,a,b\,];\mathbb{R}^n)$, acesta din urmă fiind înzestrat cu norma supremum.*

Demonstraţie. În virtutea Din condiţia de disipativitate şi din Lema 2.4.1, avem

$$\|x(t,\xi) - x(t,\eta)\| \leq \|\xi - \eta\|$$

pentru orice $t \in [\,a,b\,]$). Ca atare rezultă

$$\sup_{t \in [\,a,b\,]} \|x(t,\eta) - x(t,\mu)\| \leq \|\eta - \mu\|$$

pentru orice $\eta, \mu \in \mathbb{R}^n$. Deci aplicaţia $\eta \mapsto x(\cdot,\eta)$ este neexpansivă de la $\mathbb{R}^n$ în $C([\,a,b\,];\mathbb{R}^n)$, acesta din urmă fiind înzestrat cu norma supremum. Demonstraţia Teoremei 2.6.1 este completă. □

Să presupunem acum că $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $[\,a,b\,] \times \mathbb{R}^n$ şi şi global lipschitziană pe $\mathbb{R}^n$, i.e., există $L > 0$ astfel încât

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|$$

pentru orice $t \in [\,a,\,b\,]$ şi orice $u, v \in \mathbb{R}^n$. Rezultă atunci că funcţia f satisface condiţiile Teoremei 2.5.5. Într-adevăr, avem

$$\|f(t,u)\| \leq \|f(t,u) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \leq L\|u\| + \|f(t,0)\|,$$

pentru orice $t \in [\,a,b\,]$ şi orice $u \in \mathbb{R}^n$, aşa încât, funcţiile h şi k din Teorema 2.5.5 sunt date de

$$\begin{cases} k(t) = L & t \in [\,a,\,b\,] \\ h(t) = \|f(t,0)\| & t \in [\,a,\,b\,]. \end{cases}$$

Din Teorema 2.3.2 a lui Picard şi Teorema 2.5.5, rezultă că, pentru orice $\eta \in \mathbb{R}^n$, problema $(\mathcal{PC}(a,\xi)$ are o soluţie globală unică, $x(\cdot,\xi) : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}^n$.

Varianta “global lipschitziană a Teoremei 2.6.1 este:

TEOREMA 2.6.2. *Fie $f : [\,a, b\,] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continuă pe $[\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n$ şi lipschitziană pe $\mathbb{R}^n$. Atunci aplicaţia $\eta \mapsto x(\cdot, \eta)$ este lipschitziană de la $\mathbb{R}^n$ în $C([\,a, b\,]; \mathbb{R}^n)$, acesta din urmă fiind înzestrat cu norma supremum.*

Demonstraţie. Fie $\eta, \mu \in \mathbb{R}^n$. Avem

$$\|x(t,\eta) - x(t,\mu)\| \leq \|\eta - \mu\| + \int_a^t \|f(s, x(s,\eta)) - f(s, x(s,\mu))\|\, ds$$

$$\leq \|\eta - \mu\| + L \int_a^t \|x(s,\eta) - x(s,\mu)\|\, ds.$$

Din Lema 1.4.2 a lui Gronwall, rezultă

$$\|x(t,\eta) - x(t,\mu)\| \leq \|eta - \mu\| e^L (b - a)$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$. În consecinţă

$$\sup_{t \in [\,a,b\,]} \|x(t,\eta) - x(t,\mu)\| \leq e^L (b - a) \|\eta - \mu\|.$$

Cum η şi μ sunt elemente arbitrare din $\mathbb{R}^n$, ultima inegalitate arată că $\eta \mapsto x(\cdot, \eta)$ este lipschitziană de la $\mathbb{R}^n$ în $C([\,a, b\,]; \mathbb{R}^n)$ cu constanta Lipschitz $e^L(b - a)$. Demonstraţia este completă.

□

Trecem acum la studiul dependenţei continue a soluţiei în raport cu parametrii. În acest scop, fie $u \in \mathbb{R}^n$ şi $p \in \mathbb{R}^m$, notăm cu

$$(u, p) = (u_1, u_2, \ldots, u_n, p_1, p_2, \ldots, p_m).$$

Fie $f : [\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ o funcţie care este continuă pe $[\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ şi lipschitziană pe $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, adică există $L > 0$ astfel încât, pentru orice $(t, u, p), (t, v, q) \in [\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, să avem

$$\|f(t, u, p) - f(t, v, q)\|_n \leq L \|(u, p) - (v, q)\|_{n+m},$$

unde, pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|_k$ este norma euclideană pe $\mathbb{R}^k$.

Fie $\xi \in \Omega$ şi $p \in \mathbb{P}$ şi să considerăm problema CAUCHY

$$\mathcal{PC}(\xi)_p \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), p) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

care are o soluţie globală unică $x(\cdot, \xi, p) : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$.

Un alt rezultat fundamental din această secţiune este

TEOREMA 2.6.3. *Fie $f : [\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ o funcţie care este continuă pe $[\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ şi lipschitziană pe $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Atunci aplicaţia $(\eta, q) \mapsto x(\cdot, \eta, q)$ este lipschitziană de la $\mathbb{R}^m$ în $C([\,a, b\,]; \mathbb{R}^n)$, acesta din urmă fiind înzestrat cu norma supremum.*

Demonstraţie. Pentru orice $x \in \Omega$ şi $p \in \mathbb{P}$, să notăm cu

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+m}) = (x, p) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

şi să definim $F : \mathbb{I} \times \Omega \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}^{n+m}$ prin

$$F(t, z) = (f_1(t, z), f_2(t, z), \ldots, f_n(t, z), 0, 0, \ldots, 0).$$

Atunci, $\mathcal{PC}(\xi)_p$ poate fi rescrisă ca

$$\mathcal{PC}((\xi,p)) \qquad \begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)) \\ z(a) = (\xi, p). \end{cases}$$

Astfel, dependenţa continuă a soluţiei x de p este o consecinţă a dependenţei continue a lui z de (ξ, p) care, la rândul ei, rezultă din Teorema 2.6.2. □

7. Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială de ordinul n

În această secţiune vom prezenta câteva rezultate referitoare la problema Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul n scalară, care, după cum am văzut în Secţiunea 1 din acest capitol, poate fi redusă la o problemă Cauchy pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi definit convenabil.

Mai precis, fie $\mathbb{I}$ un interval nevid şi deschis din $\mathbb{R}$, Ω o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie, $a \in \mathbb{I}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Omega$ şi să considerăm problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială de ordinul n în forma normală cu datele $\mathcal{D}' = (\mathbb{I}, \Omega, g, a, \xi)$

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}') \qquad \begin{cases} y^{(n)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(a) = \xi_1,\ y'(a) = \xi_2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \xi_n. \end{cases}$$

Reamintim că, prin intermediul transformărilor

$$(\mathcal{T}) \qquad \begin{cases} x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ f(t, x) = (x_2, x_3, \ldots, x_n,\ g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)), \end{cases}$$

$\mathcal{PC}(\mathcal{D}')$ poate fi rescrisă ca o problemă Cauchy pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ x_1(a) = \xi_1,\ x_2(a) = \xi_2, \ldots x_n(a) = \xi_n. \end{cases}$$

Această problemă Cauchy, la rândul ei, poate fi reformulată ca o problemă Cauchy de forma

$$\mathcal{PC}(\mathcal{D}) \qquad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = \xi, \end{cases}$$

unde $\mathcal{D} = (\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$, iar f este definită ca mai sus.

Putem trece acum la prezentarea rezultatelor fundamentale referitoare la $\mathcal{PC}(\mathcal{D}')$. Începem cu următoarea teoremă de existenţă locală.

Teorema 2.7.1. (Peano). *Dacă $g : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$, atunci pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, g, a, \xi)$ are cel puţin o soluţie locală.*

Demonstraţie. Evident g este continuă dacă şi numai dacă f, definită prin intermediul transformărilor $(\mathcal{T})$, este continuă. Atunci, conform Teoremei 2.2.1 a lui Peano din Secţiunea 2 a acestui capitol, pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ are cel puţin o soluţie locală $x : [\, a, a + \delta\,] \to \Omega$. Având în vedere $(\mathcal{T})$, este uşor de constatat că funcţia $y : [\, a, a + \delta\,] \to \mathbb{R}$, definită prin $y(t) = x_1(t)$ pentru orice $t \in [\, a, a + \delta\,]$, este o soluţie locală a $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, g, a, \xi)$. Demonstraţia este încheiată. □

DEFINIŢIA 2.7.1. Spunem că $\mathcal{PC}(\mathcal{D}')$ are *proprietatea de unicitate* dacă pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, orice două soluţii y şi z ale $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, g, a, \xi)$ coincid pe intervalul comun de definiţie.

Ca şi în cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, continuitatea membrului drept în $\mathcal{PC}(\mathcal{D}')$ asigură numai existenţa locală a cel puţin unei soluţii, dar nu şi unicitatea acesteia pe intervalul ei de existenţă. Pentru a avea asigurată şi unicitatea trebuie să impunem condiţii suplimentare de regularitate asupra funcţiei g. Una dintre cele mai des utilizate condiţii este condiţia LIPSCHITZ locală.

DEFINIŢIA 2.7.2. O funcţie $g : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte *local lipschitziană* pe Ω dacă pentru orice submulţime compactă $\mathcal{K}$ din $\mathbb{I} \times \Omega$, există $L = L(\mathcal{K}) > 0$ astfel încât, pentru orice $(t, u), (t, v) \in \mathcal{K}$ să avem

$$|g(t, u) - g(t, v)| \leq L\|u - v\|.$$

Putem trece acum la prezentarea unei condiţii suficiente de unicitate.

TEOREMA 2.7.2. *Dacă* $g : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *este local lipschitziană pe* Ω, *atunci* $\mathcal{PC}(\mathcal{D}')$ *are proprietatea de unicitate.*

Demonstraţie. Să observăm că, dacă g este local lipschitziană pe Ω, atunci f definită pe calea transformărilor $(\mathcal{T})$ are aceeaşi proprietate. Într-adevăr, fie $\mathcal{K}$ din $\mathbb{I} \times \Omega$ şi fie $L = L(\mathcal{K}) > 0$ ca în Definiţia 2.7.2. Atunci

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| = \left(\sum_{i=2}^{n} |u_i - v_i|^2 + |g(t, u) - g(t, v)|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|^2 + L^2\|u - v\|^2\right)^{1/2} = \sqrt{1 + L^2}\|u - v\|$$

pentru orice $(t, u), (t, v) \in \mathcal{K}$. Dar această inegalitate demonstrează că f este local lipschitziană în sensul Definiţiei 2.4.1. Concluzia rezultă atunci din Teorema 2.3.2. $\square$

Enunţăm mai jos o consecinţă simplă şi importantă a Teoremelor 2.7.1 şi 2.7.2.

TEOREMA 2.7.3. *Dacă* $g : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* $\mathbb{I} \times \Omega$ *şi local lipschitziană pe* Ω *atunci, pentru orice* $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, *există* $\delta > 0$ *astfel încât* $[\,a, a + \delta\,] \subset \mathbb{I}$ *şi* $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, g, a, \xi)$ *să admită o soluţie locală unică definită pe* $[\,a, a + \delta\,]$.

8. Exerciţii şi probleme propuse spre rezolvare

EXERCIŢIUL 2.1. *Să se rezolve următoarele probleme* CAUCHY

$$(a)\begin{cases} tx' = x + x^2 \\ x(1) = 1. \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} tx' = (1-t^2)x \\ x(2) = 1. \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} x' = (8t + 2x + 1)^2 \\ x(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} x'(t^2x - x) + tx^2 + t = 0 \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

$$(e)\begin{cases} tx' = x - t \\ x(1) = 2. \end{cases} \qquad (f)\begin{cases} tx' = -(t + x) \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

$$(g)\begin{cases} t^2x' = x(t - x) \\ x(1) = 1. \end{cases} \qquad (h)\begin{cases} 2txx' = 3x^2 - t^2 \\ x(1) = 2. \end{cases}$$

$$(i)\begin{cases} tx' = x + tx \\ x(1) = e. \end{cases} \qquad (j)\begin{cases} tx' = -2x + t^4 \\ x(1) = 2. \end{cases}$$

$$(k)\begin{cases} tx' = -x + e^t \\ x(1) = 0. \end{cases} \qquad (l)\begin{cases} tx' = -x - tx^2 \\ x(1) = -1. \end{cases}$$

$$(m)\begin{cases} 2txx' = x^2 - t \\ x(1) = 2. \end{cases} \qquad (n)\begin{cases} (2t - t^2x)x' = -x \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

$$(o)\begin{cases} tx' = -2x(1 - tx) \\ x(1) = 1. \end{cases} \qquad (p)\begin{cases} (x^2 - 3t^2)x' = -2tx \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

PROBLEMA 2.1. *Daţi o altă demonstraţie Propoziţiei* 2.1.2 *evitând utilizarea echivalenţei dintre* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ *şi* $(\mathcal{EI})$.

PROBLEMA 2.2. *Fie* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$f(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{şi} \quad x = 0 \\ \dfrac{t}{x} & \text{dacă} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{şi} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Demonstraţi că pentru orice $(a,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, a, \xi)$ *are cel puţin o soluţie globală la dreapta dar, cu toate acestea,* f *nu este continuă pe* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *În consecinţă, continuitatea funcţiei* f *nu este o condiţie necesară de existenţă a soluţiilor.*

PROBLEMA 2.3. *Fie* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$f(t,x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{şi} \quad x \geq 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{şi} \quad x < 0. \end{cases}$$

După cum am văzut în Exemplul 2.2.1, *problema* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)$ *nu are nici o soluţie locală la dreapta. Arătaţi că* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)$ *are o unică soluţie saturată la stânga şi determinaţi această soluţie.*

PROBLEMA 2.4. *Fie* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *cu proprietatea că pentru orice* $(a,\xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$ *există o vecinătate* $\mathcal{V}$ *a lui* (a,ξ), $\mathcal{V} \subset \mathbb{I} \times \Omega$ *şi* $L = L(\mathcal{V}) > 0$ *astfel încât pentru orice* $(t,x), (t,y) \in \mathcal{V}$, *avem*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Demonstraţi că f *este local lipschitziană pe* Ω *în sensul Definiţiei* 2.4.1

PROBLEMA 2.5. *Fie* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie care are derivate parţiale în raport cu ultimele n-variabile şi că pentru orice* i, j, *din* $\{1, 2, \dots, n\}$, $\partial f_i / \partial x_j$ *este continuă pe* $\mathbb{I} \times \Omega$. *Demonstraţi că* f *este local lipschitziană pe* Ω.

PROBLEMA 2.6. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t,x) = \sqrt[3]{(x-t)^2} + 1$ *şi* $g(t,x) = 2f(t,x)$ *pentru orice* $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Demonstraţi că pentru orice* $(a,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, g, a, \xi)$ *are proprietatea de unicitate dar, cu toate acestea, pentru orice* $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, a, a)$ *are cel puţin două soluţii.*

PROBLEMA 2.7. *Fie* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, fie* $(a, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *şi fie* $x, y : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ *două soluţii ale* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, a, \xi)$. *Arătaţi că atât* $x \vee y$ *cât şi* $x \wedge y$ *definite pe* $\mathbb{J}$ *prin*

$$(x \vee y)(t) = \max\{x(t), y(t)\}, \ (x \wedge y)(t) = \min\{x(t), y(t)\}$$

pentru orice $t \in \mathbb{J}$, *sunt soluţii ale* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, a, \xi)$.

PROBLEMA 2.8. *Fie* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă astfel încât* $\mathcal{PC}(\mathcal{D})$ *are proprietatea de unicitate. Fie* $a \in \mathbb{R}$ *fixat,* $\xi \in \mathbb{R}$ *şi* $x(\cdot, \xi) : [a, b_\xi) \to \mathbb{R}$ *unica soluţie saturată a* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, a, \xi)$. *Arătaţi că, ori de câte ori* $\xi \leq \eta$, *avem* $x(t, \xi) \leq x(t, \eta)$ *pentru orice* t *în* $[a, b_\xi) \cap [a, b_\eta)$.

PROBLEMA 2.9. *Fie* $\mathbb{I}$ *un interval nevid şi deschis din* $\mathbb{R}$, Ω *o submulţime nevidă şi deschisă din* $\mathbb{R}^n$, *şi* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă. Să presupunem că există o funcţie continuă* $\omega : \mathbb{I} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât, pentru orice* $(t,x), (t,y) \in \mathbb{I} \times \omega$, *să avem*

$$\langle f(t,x) - f(t,y), x - y \rangle \leq \omega(t, \|x - y\|)\|x - y\|.$$

Arătaţi că dacă, pentru un anumit $a \in \mathbb{I}$ *unica soluţie* $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \mathbb{R}_+, \omega, a, 0)$ *este identic* 0, *atunci pentru orice* $\xi \in \Omega$, $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$ *are cel mult o soluţie pe un interval dat. Demonstraţi Teoremele* 2.3.2 *şi* 2.4.2 *folosind acest rezultat.*

PROBLEMA 2.10. *Fie* $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie continuă cu* $\omega(r) > 0$ *pentru orice* $r > 0$ *şi* $\omega(0) = 0$. *Dacă*

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{\omega(\eta)} = +\infty$$

atunci singura soluţie a problemei CAUCHY $x' = \omega(x)$, $x(0) = 0$ *este* $x \equiv 0$.

PROBLEMA 2.11. *Fie* $f, g : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *două funcţii continue pe* $\mathbb{I} \times \Omega$ *cu* f *lipschitziană şi* g *disipativă pe* Ω. *Atunci* $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f + g)$ *are proprietatea de unicitate.*

PROBLEMA 2.12. *Dacă* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *este continuă şi există* $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *continuă cu* $\omega(r) > 0$ *pentru orice* $r > 0$, $\omega(0) = 0$,

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{\omega(\eta)} = +\infty$$

şi

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \omega(\|x - y\|)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$ *şi* $x, y \in \Omega$, *atunci* $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f)$ *are proprietatea de unicitate. Aceasta este teorema de unicitate a lui* OSGOOD.

PROBLEMA 2.13. *Demonstraţi Teorema* 2.3.2 *utilizând Teorema* 2.4.2 *şi metoda factorului integrant.*

PROBLEMA 2.14. *Fie* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin* $f(t,x) = \sqrt[3]{x^2}$ *pentru orice* $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Fie* $x : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ *pentru orice* $t \in [-1, 0]$, *o soluţie a* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, -1, 0)$. *Arătaţi că există cel puţin două soluţii saturate ale* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, -1, 0)$ *ce extind* x.

PROBLEMA 2.15. *Găsiţi două intervale nevide şi deschise* $\mathbb{I}$ *şi* Ω *din* $\mathbb{R}$ *şi o funcţie continuă* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *care nu duce submulţimile mărginite din* $\mathbb{I} \times \Omega$ *în submulţimi mărginite din* $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 2.16. *Să se demonstreze un rezultat analog Teoremei* 2.5.4 *în ipoteza că funcţia* $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *este continuă şi pentru orice* $\mathbb{J} \times B \subset \mathbb{I} \times \Omega$ *cu* $\mathbb{J}$ *compact şi* B *mărginită,* $f(\mathbb{J} \times B)$ *este mărginită în* $\mathbb{R}^n$. *Este clasa funcţiilor* f *satisfăcând condiţia de mai sus strict mai amplă decât cea a funcţiilor* f *care duc submulţimile mărginite din* $\mathbb{I} \times \Omega$ *în submulţimi mărginite din* $\mathbb{R}^n$?

PROBLEMA 2.17. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue, şi fie* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. *Să presupunem că există* $a > 0$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$ *avem:*

$$G(x) \geq ax^2 \text{ şi } yf(y) \geq 0.$$

Arătaţi că pentru orice $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, *orice soluţie saturată a problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} x'' + f(x') + g(x) = 0 \\ x(0) = \xi_1, \quad x'(0) = \xi_2, \end{cases}$$

este definită pe $\mathbb{R}_+$.

PROBLEMA 2.18. *Fie* $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continue pe* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ *cu* f *lipschitziană şi* g *disipativă pe* $\mathbb{R}^n$. *Atunci, pentru orice* $(a, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n, f + g, a, \xi)$ *are o soluţie globală unică.*

PROBLEMA 2.19. *Fie* $f : (t_1, t_2) \times (\omega_1, \omega_2) \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă,* $a \in (t_1, t_2)$, $\xi \in (\omega_1, \omega_2)$ *şi fie* $x : [a, b) \to \mathbb{R}$ *o soluţie saturată a problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

Se se demonstreze că, dacă $b < t_2$ *şi* x *este mărginită, atunci există* $\lim_{t \uparrow b} x(t) = x^*$. *Să se formuleze o generalizare în cazul* $f : (t_1, t_2) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *cu* Ω *nevidă deschisă în* $\mathbb{R}^n$ *a cărei frontieră conţine numai puncte izolate.*

PROBLEMA 2.20. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi fie* $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* C^1 *satisfăcând*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(a) = x(b). \end{cases}$$

Arătaţi că x *este constantă. Extindeţi acest rezultat la cazul în care* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *cu* $n > 1$. *Este continuitatea lui* f *suficientă în acest caz?*

PROBLEMA 2.21. *Fie* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ca în Problema* 2.2. *Pentru* $\xi \in (0, +\infty)$, *să notăm cu* $x(\cdot, \xi)$ *unica soluţie globală a* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, \xi)$. *Arătaţi că* $\lim\limits_{\xi \downarrow 0} x(t, \xi) = t$ *uniform pentru* $t \in [0, +\infty)$, *dar, cu toate acestea, funcţia* $y(t) = t$, *pentru* $t \in [0, +\infty)$, *nu este o soluţie a* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)$. *Explicaţi rezultatul.*

PROBLEMA 2.22. *Fie* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$f(t, x, p) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \ t \in \mathbb{R} \ \text{ şi } \ x + p = 0 \\ \dfrac{t}{x + p} & \text{dacă } \ t \in \mathbb{R} \ \text{ şi } \ x + p \neq 0. \end{cases}$$

Pentru $p \in (0, +\infty)$ *să notăm cu* $x(\cdot, p) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *unica soluţie globală a* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)_p$. *Arătaţi că* $\lim\limits_{p \downarrow 0} x(t, p) = t$ *uniform pentru* $t \in [0, 1]$, *dar, cu toate acestea, funcţia* $y(t) = t$, *pentru* $t \in [0, 1]$, *nu este o soluţie a* $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)_0$. *Explicaţi rezultatul.*

PROBLEMA 2.23. *Fie* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin* $f(t, x, p) = 3\sqrt[3]{x^2 + p^2}$ *pentru orice* $(t, x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Arătaţi că, pentru orice* $p \neq 0$, $\mathcal{PC}(\mathcal{D})_p$ *are proprietatea de unicitate. În plus, deşi* $\lim_{p\to 0} x(t, x, p) = f(t, x, 0)$ *uniform pentru* $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathcal{PC}(\mathcal{D})_0$ *nu are proprietatea de unicitate, i.e., proprietatea de unicitate nu depinde "continuu" de parametri.*

PROBLEMA 2.24. *Fie* $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă şi* $g : [\,a, b\,] \times [\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă pe* $[\,a, b\,] \times [\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n$ *şi lipschitziană pe* $\mathbb{R}^n$, *adică există* $L > 0$ *astfel încât pentru orice* $(t, s, x), (t, s, y) \in [\,a, b\,] \times [\,a, b\,] \times \mathbb{R}^n$, *avem* $\|g(t, s, x) - g(t, s, y)\| \leq L\|x - y\|$. *Folosind şirul aproximaţiilor succesive, arătaţi că ecuaţia integrală* VOLTERRA

$$x(t) = f(t) + \int_a^t g(t, \tau, x(\tau))d\tau$$

are o soluţie unică $x : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$.

PROBLEMA 2.25. *Fie* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continuă şi disipativă. Să se demonstreze că oricare ar fi funcţia continuă* $h : [\,0, T\,] \to \mathbb{R}^n$ *şi oricare ar fi* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *problema* CAUCHY

$$\mathcal{PC}(h, \xi) \qquad \begin{cases} x'(t) = \mathcal{A}x(t) + h(t) \\ x(0) = \xi \end{cases}$$

are o soluţie unică $x(\cdot, h, \xi) : [\,0, T\,] \to \mathbb{R}^n$. *Să se arate că pentru orice funcţii continue* $h_i : [\,0, T\,] \to \mathbb{R}^n$ *şi orice* $\xi_i \in \mathbb{R}^n$, *funcţiile* $x_i = x(\cdot, h_i, \xi_i)$, $i = 1, 2$, *satisfac*

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \leq \|\xi_1 - \xi_2\|^2 + 2\int_0^t \langle h_1(s) - h_2(s), x_1(s) - x_2(s)\rangle ds$$

şi

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|\xi_1 - \xi_2\| + \int_0^t \|h_1(s) - h_2(s)\|ds$$

pentru orice $t \in [\,0, T\,]$.

PROBLEMA 2.26. *Fie* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă şi disipativă pe* $\mathbb{R}^n$ *şi fie* $f : [\,0, T\,] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continuă pe* $[\,0, T\,] \times \mathbb{R}^n$ *şi lipschitziană pe* $\mathbb{R}^n$. *Fie* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *şi să definim şirul de aproximaţii succesive* $x_0(t) = \xi$, $x_k(t) = x(t, f(t, x_{k-1}(t)), \xi)$ *pentru* $k = 1, 2, \ldots$ *şi* $t \in [\,0, T\,]$, *unde* $x(\cdot, f(\cdot, x_{k-1}(\cdot)), \xi) : [\,0, T\,] \to \mathbb{R}^n$ *este unica soluţie a problemei* CAUCHY

$$\mathcal{PC}(k) \qquad \begin{cases} x_k'(t) = \mathcal{A}x_k(t) + f(t, x_{k-1}(t)) \\ x_k(0) = \xi \end{cases}$$

pentru $k = 1, 2, \ldots$. *Utilizând cea de-a doua inegalitate din Problema* 2.25 *să se demonstreze că şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este uniform convergent pe* $[\,0, T\,]$ *la unica soluţie a problemei* CAUCHY

$$\mathcal{PC}(f, \xi) \qquad \begin{cases} x'(t) = \mathcal{A}x(t) + f(t, x(t)) \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

PROBLEMA 2.27. *Fie* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *şi fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *două funcţii continue şi să presupunem că există* $\omega > 0$ *astfel încât* $\langle \mathcal{A}x - \mathcal{A}y, x - y\rangle \leq -\omega^2\|x - y\|^2$ *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$. *Fie funcţia(cunoscută sub numele de operatorul lui* POINCARÉ*)* $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *definită prin* $\mathcal{P}(\xi) = x(T, 0, \xi)$, *unde* $x(\cdot, 0, \xi)$ *este unica soluţie globală a problemei* CAUCHY

$$\mathcal{PC}(\xi) \qquad \begin{cases} x'(t) = \mathcal{A}x(t) + f(t) \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

Să definim şirul de aproximaţii succesive $\xi_0 = \xi$ *şi* $\xi_k = \mathcal{P}(\xi_{k-1})$ *pentru* $k \in \mathbb{N}^*$.

(1) *Să se arate că şirul* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este convergent la un element* $\eta \in \mathbb{R}^n$.
(2) *Să se arate că* $x(\cdot, 0, \eta)$, *cu* $\eta = \lim_k \xi_k$, *satisface* $x(T, 0, \eta) = x(0, 0, \eta) = \eta$.
(3) *Dacă, în plus,* f *este periodică de periodă* $T > 0$, *atunci unica soluţie globală* $x(\cdot, 0, \eta)$ *a* $\mathcal{PC}(\eta)$ *este periodică de perioadă* T.
(4) *Ecuaţia* $x'(t) = \mathcal{A}x(t) + f(t)$ *are cel mult o soluţie* T*-periodică* $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$.

CAPITOLUL 3

Sisteme de ecuaţii liniare

Acest capitol prezintă cele mai importante rezultate referitoare la problema Cauchy guvernată de un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu n funcţii necunoscute. În primul paragraf se arată că mulţimea soluţiilor unui astfel de sistem omogen este un spaţiu vectorial de dimensiune n peste $\mathbb{R}$. Paragraful al doilea este dedicat studiului sistemelor neomogene şi stabilirii aşa numitei formule a variaţiei constantelor, iar paragrafele al treilea şi al patrulea prezintă două metode de determinare a unei baze algebrice în spaţiul soluţiilor în cazul unui sistem omogen cu coeficienţi constanţi. În paragraful al cincilea sunt reformulate rezultatele stabilite anterior în cazul ecuaţiei diferenţiale de ordinul n liniară, iar în paragraful al şaselea se stabileşte o medodă de rezolvare explicită a unor astfel de ecuaţii cu coeficienţi constanţi. Capitolul se încheie cu o secţiune de exerciţii şi probleme propuse spre rezolvare.

---

1. Sisteme omogene. Spaţiul soluţiilor

Fie $a_{ij} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ şi $b_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ funcţii continue pentru $i, j = 1, 2, \dots n$ şi să considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t), \end{array}\right. \tag{3.1.1}$$

care, cu notaţiile

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t)\dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t)\dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

pentru $t \in \mathbb{I}$, poate fi scris ca o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară vectorială

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + b(t). \tag{3.1.2}$$

Pentru simplitatea scrierii, în tot ceea ce urmează vom scrie sistemul (3.1.1) numai sub forma ecuaţiei vectoriale (3.1.2), numind-o prin abuz de limbaj sistem diferenţial de ordinul întâi liniar.

Definiţia 3.1.1. Dacă în (3.1.2) $b(t) = 0$ pe $\mathbb{I}$ sistemul (3.1.2) poartă numele de *omogen*, iar în caz contrar *neomogen*.

Din consecinţa 2.5.4 deducem:

Teorema 3.1.1. *Pentru orice $a \in \mathbb{I}$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ problema* Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + b(t) \\ x(a) = \xi \end{array}\right.$$

are o soluţie globală unică.

La rândul ei, Teorema 3.1.1 implică:

TEOREMA 3.1.2. *Orice soluţie saturată a sistemului* (3.1.2) *este definită pe* $\mathbb{I}$.

Să considerăm acum sistemul omogen ataşat sistemului (3.1.2), adică sistemul

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t). \tag{3.1.3}$$

TEOREMA 3.1.3. *Mulţimea soluţiilor saturate ale sistemului omogen* (3.1.3) *este un spaţiu vectorial de dimensiune n peste* $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Vom arăta că această submulţime din $C^1(\mathbb{I};\mathbb{R}^n)$ este un subspaţiu vectorial izomorf cu $\mathbb{R}^n$. Fie $\mathcal{S}$ mulţimea soluţiilor sistemului (3.1.3), fie $x, y \in \mathcal{S}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vom arăta că $\alpha x + \beta y \in \mathcal{S}$, de unde va rezulta că $\mathcal{S}$ este subspaţiu vectorial al lui $C^1(\mathbb{I};\mathbb{R}^n)$. Într-adevăr, să observăm că

$$(\alpha x + \beta y)'(t) = \alpha x'(t) + \beta y'(t) = \alpha\mathcal{A}(t)x(t) + \beta\mathcal{A}(t)y(t) =$$

$$= \mathcal{A}(t)[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \mathcal{A}(t)[(\alpha x + \beta y)(t)]$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, relaţie care demonstrează că $\alpha x + \beta y \in \mathcal{S}$.

Trecem acum la construirea unui izomorfism de la $\mathcal{S}$ la $\mathbb{R}^n$. Mai precis, să fixăm $a \in \mathbb{I}$ şi să definim $\mathcal{T} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ prin

$$\mathcal{T}(x) = x(a)$$

pentru orice $x \in \mathcal{S}$. Evident $\mathcal{T}$ este liniar. În plus, din partea de unicitate a Teoremei 3.1.1 rezultă că $\mathcal{T}$ este injectiv, iar din partea de existenţă a aceleiaşi teoreme 3.1.1 rezultă că $\mathcal{T}$ este surjectiv. Deci $\mathcal{T}$ este un izomorfism de spaţii vectoriale şi, cum orice două spaţii vectoriale izomorfe au aceeaşi dimensiune, urmează că dimensiunea lui $\mathcal{S}$ este egală cu dimensiunea lui $\mathbb{R}^n$, adică cu n. Demonstraţia este încheiată. $\square$

OBSERVAŢIA 3.1.1. Teorema 3.1.3 are o importanţă fundamentală în teoria sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare deoarece ea ne arată că, în acest cadru, determinarea soluţiei generale revine la determinarea a n soluţii saturate particulare liniar independente. Într-adevăr, Teorema 3.1.3 afirmă că, în $\mathcal{S}$ orice bază are cardinalul n. Pe de altă parte, dacă $x^1, x^2, \ldots x^n \in \mathcal{S}$ este o bază, orice element $x \in \mathcal{S}$ se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de elementele bazei, adică există constantele $c_1, c_2, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ unic determinate, astfel încât

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) \tag{3.1.4}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Altfel spus, cunoaşterea unei familii de n soluţii saturate ale ecuaţiei (3.1.3) liniar independente este echivalentă cu cunoaşterea oricărei soluţii şi deci cu a soluţiei generale.

OBSERVAŢIA 3.1.2. În conformitate cu Observaţia 3.1.1, o problemă fundamentală în studiul sistemului (3.1.3) este aceea a determinării a cel puţin unei baze în mulţimea soluţiilor. Subliniem că, în general, nu se cunosc metode de determinare a unei astfel de baze, cu excepţia cazului în care matricea $\mathcal{A}$ este constantă, caz care va face obiectul unei analize amănunţite pe care o vom prezenta într-o secţiune viitoare.

În continuare vom prezenta o metodă de verificare dacă n soluţii saturate ale sistemului (3.1.3) sunt, sau nu, liniar independente. Fie $x^1, x^2, \ldots, x^n$ soluţii saturate ale sistemului (3.1.3) şi să definim matricea $\mathcal{X} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ prin $\mathcal{X}(t) = \mathrm{col}(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, adică matricea care, în punctul $t \in \mathbb{I}$, are drept coloane componentele vectorilor $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$. Mai precis

$$\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) \ldots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \ldots & x_2^n(t) \\ \vdots & & \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \tag{3.1.5}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$.

DEFINIŢIA 3.1.2. Matricea $\mathcal{X}$ definită prin (3.1.5) poartă numele de *matrice asociată* sistemului de soluţii $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathcal{S}$.

OBSERVAŢIA 3.1.3. Din faptul că fiecare coloană a matricei $\mathcal{X}$ asociate sistemului (3.1.3) este o soluţie a acestui sistem, rezultă că $\mathcal{X}$ este soluţie pentru următorul sistem matriceal

$$\mathcal{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$.

DEFINIŢIA 3.1.3. Sistemul $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathcal{S}$ poartă numele de *sistem fundamental de soluţii* al ecuaţiei (3.1.3) dacă el constituie o bază în $\mathcal{S}$.

DEFINIŢIA 3.1.4. Matricea asociată unui sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (3.1.3) poartă numele de *matrice fundamentală* a sistemului (3.1.3).

OBSERVAŢIA 3.1.4. Sistemul (3.1.3) are o infinitate de matrici fundamentale. Aceasta rezultă din simpla observaţie că spaţiul soluţiilor saturate ale sistemului (3.1.3) are o infinitate de baze.

OBSERVAŢIA 3.1.5. Dacă $\mathcal{X}$ este o matrice fundamentală pentru sistemul (3.1.3), atunci soluţia generală a sistemului (3.1.3) este dată de

$$x(t, c) = \mathcal{X}(t)c \tag{3.1.6}$$

pentru $t \in \mathbb{I}$ şi $c \in \mathbb{R}^n$. Într-adevăr, (3.1.6) nu reprezintă nimic altceva decât scrierea matriceală a relaţiei (3.1.4) deoarece

$$\mathcal{X}(t)c = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) \ldots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \ldots & x_2^n(t) \\ \vdots & & \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i \begin{pmatrix} x_1^i(t) \\ x_2^i(t) \\ \vdots \\ x_n^i(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i x^i(t).$$

DEFINIŢIA 3.1.5. Dacă $\mathcal{X}$ este matricea asociată unui sistem de soluţii $x^1, x^2, \ldots, x^n$ din $\mathcal{S}$, determinantul său, notat cu $\mathcal{W} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ şi definit prin

$$\mathcal{W}(t) = \det \mathcal{X}(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, se numeşte *wronskianul asociat sistemului de soluţii*[1] $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

TEOREMA 3.1.4. *Fie $x^1, x^2, \ldots, x^n$ un sistem de soluţii saturale ale ecuaţiei* (3.1.3)*, fie $\mathcal{X}$ matricea şi respectiv $\mathcal{W}$ wronskianul, asociate sistemului de soluţii. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(*i*) *matricea $\mathcal{X}$ este fundamentală;*
(*ii*) *pentru orice $t \in \mathbb{I}$ $\mathcal{W}(t) \neq 0$;*
(*iii*) *există $a \in \mathbb{I}$ astfel încât $\mathcal{W}(a) \neq 0$.*

[1] Numele acestui determinant provine de la numele matematicianului polonez HÖENE JOSEPH MARIA WRONSKI (1776-1853) care l-a definit şi studiat pentru prima dată.

Demonstraţie. Începem prin a arăta că (i) implică (ii). Să presupunem deci că matricea $\mathcal{X}$ este fundamentală, ceea ce revine la a presupune că sistemul $x^1, x^2, \ldots, x^n$ este liniar independent. Să presupunem pentru reducere la absurd că există $a \in \mathbb{I}$ cu $\mathcal{W}(a) = 0$. Rezultă atunci că sistemul algebric liniar şi omogen

$$\mathcal{X}(a)c = 0$$

cu necunoscutele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ are cel puţin o soluţie nebanală $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Pe de altă parte, funcţia $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ definită prin

$$x(t) = \mathcal{X}(t)\xi$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$ este, conform observaţiei 3.1.5, o soluţie a sistemului (3.1.3) care verifică $x(a) = 0$. Din partea de unicitate a Teoremei 3.1.1 urmează că $x(t) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, relaţie care este echivalentă cu

$$\mathcal{X}(t)\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x^i(t) = 0$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt nişte constante reale nu toate nule. Deci sistemul $x^1, x^2, \ldots, x^n$ nu este liniar independent, afirmaţie în contradicţie cu (i). Această contradicţie poate fi eliminată numai dacă are loc (ii).

Evident (ii) implică (iii).

În sfârşit vom demonstra că (iii) implică (i). Din nou, vom presupune pentru reducere la absurd că, deşi (iii) are loc $\mathcal{X}$ nu este matrice fundamentală. Aceasta înseamnă că există nişte constante $c_1, c_2, \ldots, c_n$, nu toate nule, astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) = \mathcal{X}(t)c = 0$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Din această egalitate deducem în particular (luând $t = a$) că, sistemul algebric, liniar şi omogen

$$\mathcal{X}(a)c = 0,$$

a cărui determinant $\mathcal{W}(a)$ este nenul, are totuşi o soluţie nebanală. Această contradicţie poate fi înlăturată numai dacă (iii) implică (i) şi, cu acesta, demonstraţia este încheiată. $\square$

OBSERVAŢIA 3.1.6. Fie $a \in \mathbb{I}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ şi $\mathcal{X}$ o matrice fundamentală pentru sistemul omogen (3.1.3). Atunci, unica soluţie a problemei CAUCHY pentru sistemul omogen

$$\begin{cases} x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) \\ x(a) = \xi \end{cases}$$

este dată de

$$x(t, a, \xi) = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(a)\xi \tag{3.1.7}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Într-adevăr, din Observaţia 3.1.5, ştim că $x(\cdot, a, \xi)$ este dată de (3.1.6), adică este de forma

$$x(t, a, \xi) = \mathcal{X}(t)c$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $c \in \mathbb{R}^n$. Impunând condiţia $x(a, a, \xi) = \xi$, deducem $\mathcal{X}(a)c = \xi$. Dar, conform Teoremei 3.1.4, $\mathcal{X}(a)$ este inversabilă şi, în consecinţă, $c = \mathcal{X}^{-1}(a)\xi$ ceea ce demonstrează (3.1.7).

LEMA 3.1.1. *Fie $\mathcal{X}$ o matrice fundamentală a sistemului* (3.1.3). *Atunci, familia de operatori $\mathcal{U} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definită prin*

$$\mathcal{U}(t, s) = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)$$

pentru orice $t, s \in \mathbb{I}$ este independentă de alegerea matricei fundamentale $\mathcal{X}$. În plus, pentru orice $s \in \mathbb{I}$, $\mathcal{U}(\cdot, s)$ verifică

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(t,s) = \mathcal{A}(s)\mathcal{U}(t,s) \\ \\ \mathcal{U}(s,s) = \mathcal{I} \end{cases} \tag{3.1.8}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathcal{I}$ este matricea unitate de tip $n \times n$.

Demonstraţie. Faptul că $\mathcal{U}(\cdot, s)$ verifică (1.8) rezultă din Observaţia 3.1.6 cu $a = s$ şi luând succesiv $\xi = e^1, \xi = e^2, \ldots, \xi = e^n$, cu $e^1, e^2, \ldots, e^n$ baza canonică în $\mathbb{R}^n$. Din unicitatea soluţiei problemei CAUCHY (1.8) rezultă că $\mathcal{U}$ nu depinde de matricea fundamentală $\mathcal{X}$. Demonstraţia este încheiată. □

DEFINIŢIA 3.1.6. Familia de operatori $\mathcal{U}$ definită în Lema 3.1.1 se numeşte *evolutor*, sau *operator de evoluţie* generat de $\mathcal{A}$.

OBSERVAŢIA 3.1.7. Facem menţiunea că evolutorul $\mathcal{U}$ are următoarele proprietăţi:
($\mathcal{E}_1$) $\mathcal{U}(s,s) = \mathcal{I}$ pentru orice $s \in \mathbb{I}$;
($\mathcal{E}_2$) $\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,\tau) = \mathcal{U}(t,\tau)$ pentru orice $\tau, s, t \in \mathbb{I}$;
($\mathcal{E}_3$) $\lim_{t \to s} \|\mathcal{U}(t,s) - \mathcal{I}\|_{\mathcal{O}} = 0$.

Într-adevăr, ($\mathcal{E}_1$) şi ($\mathcal{E}_3$) rezultă din Lema 3.1.1, în timp ce ($\mathcal{E}_2$) este o consecinţă a principiului concatenării (vezi Propoziţia 2.1.2) şi a părţii de unicitate a Consecinţei 2.5.4.

OBSERVAŢIA 3.1.8. Observaţia 3.1.6 poate fi reformulată în termenii evolutorului generat de $\mathcal{A}$. Mai precis, pentru orice $a \in \mathbb{I}$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, unica soluţie saturată a problemei CAUCHY pentru sistemul (3.1.3), care satisface $x(a,a,\xi) = \xi$, este dată de

$$x(t,a,\xi) = \mathcal{U}(t,a)\xi$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$..

În continuare vom demonstra un rezultat care exprimă în mod explicit dependenţa wronskianului unui sistem de soluţii de elementele matricii $\mathcal{A}$. Începem cu

LEMA 3.1.2. *Fie $d_{ij} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile pe $\mathbb{I}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$. Atunci funcţia $\mathcal{D} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ definită prin:*

$$\mathcal{D}(t) = \begin{vmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t)\ldots & d_{1n}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t)\ldots & d_{2n}(t) \\ \vdots & & \\ d_{n1}(t) & d_{n2}(t)\ldots & d_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$ este derivabilă pe $\mathbb{I}$ şi

$$\mathcal{D}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}_k(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathcal{D}_k$ este determinantul obţinut din $\mathcal{D}$ prin înlocuirea elementelor liniei k cu derivatele acestora, $k = 1,2,\ldots,n$.

Demonstraţie. Întrucât, conform definiţiei

$$\mathcal{D}(t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \varepsilon(\sigma) d_{1i_1}(t) d_{2i_2}(t)\ldots, d_{ni_n}(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, rezultă că $\mathcal{D}$ este derivabilă pe $\mathbb{I}$. În plus, avem

$$\mathcal{D}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} \varepsilon(\sigma) d_{1i_1}(t) d_{2i_2}(t)\ldots, d'_{ki_k}(t)\ldots, d_{ni_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}_k(t),$$

ceea ce completează demonstraţia. □

TEOREMA 3.1.5. (LIOUVILLE[2]) *Dacă $\mathcal{W}$ este wronskianul unui sistem de n soluţii ale ecuaţiei* (3.1.3), *atunci*

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\mathcal{A}(s)\,ds\right) \tag{3.1.9}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $t_0 \in \mathbb{I}$ este fixat, iar $\mathrm{tr}\mathcal{A}$ *este urma matricii $\mathcal{A}$, adică*

$$\mathrm{tr}\mathcal{A}(s) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s)$$

pentru orice $s \in \mathbb{I}$.

Demonstraţie. Din Lema 3.1.2 rezultă că $\mathcal{W}$ este derivabilă pe $\mathbb{I}$ şi în plus

$$\mathcal{W}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_k^1)'(t) & (x_k^2)'(t) & \dots & (x_k^n)'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

Ţinând cont că $x^1, x^2, \dots, x^n$ sunt soluţii ale sistemului (3.1.3), obţinem

$$\mathcal{W}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)x_j^1(t) & \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)x_j^2(t) & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t)x_j^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_j^1(t) & x_j^2(t) & \dots & x_j^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(t) \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_j^1(t) & x_j^2(t) & \dots & x_j^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

Deci $\mathcal{W}$ verifică

$$\mathcal{W}'(t) = \mathrm{tr}\mathcal{A}(t)\mathcal{W}(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Dar ecuaţia de mai sus este liniară şi omogenă şi ca atare $\mathcal{W}$ este dat de (3.1.9). □

OBSERVAŢIA 3.1.9. Facem menţiunea că Teorema 3.1.4 poate fi dedusă şi cu ajutorul Teoremei 3.1.5. Propunem ca exerciţiu această variantă de demonstraţie a Teoremei 3.1.4.

[2]JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) matematician francez recunoscut pentru contribuţiile sale la studiul numerelor transcendente şi a funcţiilor dublu periodice.

2. Sisteme neomogene. Formula variaţiei constantelor

Să considerăm sistemul diferenţial de ordinul întâi liniar, neomogen

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + b(t), \tag{3.2.1}$$

unde $\mathcal{A} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi $b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ sunt funcţii continue. Totodată să considerăm sistemul omogen ataşat

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t). \tag{3.2.2}$$

În această secţiune vom prezenta o metodă de determinare a soluţiei generale a sistemului (3.2.1) cu ajutorul soluţiei generale a sistemului omogen ataşat.

Începem cu următorul rezultat simplu dar foarte util în aplicaţii.

TEOREMA 3.2.1. *Fie $\mathcal{X}$ o matrice fundamentală a sistemului* (3.2.2) *şi fie $y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ o soluţie a sistemului* (3.2.1). *O funcţie $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ este soluţie a sistemului* (3.2.1) *dacă şi numai dacă x este de forma*

$$x(t) = \mathcal{X}(t)c + y(t) \tag{3.2.3}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $c \in \mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ o soluţie a sistemului (3.2.1) şi să definim funcţia $z : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ prin

$$z(t) = x(t) - y(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Evident z este derivabilă pe $\mathbb{I}$ şi avem

$$z'(t) = x'(t) - y'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + b(t) - \mathcal{A}(t)y(t) - b(t) = \mathcal{A}(t)(x(t) - y(t)) = \mathcal{A}(t)z(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Deci z este soluţie a sistemului omogen (2.2) şi, în conformitate cu Observaţia 3.1.5, ea este de forma

$$z(t) = \mathcal{X}(t)c$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $c \in \mathbb{R}^n$. Din această relaţie şi din definiţia funcţiei z deducem (3.2.3), ceea ce încheie demonstraţia necesităţii.

Suficienţa. Fie x funcţia definită de (3.2.3). Cum $\mathcal{X}c$ este soluţie a sistemului omogen (3.2.2) rezultă că x este derivabilă pe $\mathbb{I}$. În plus

$$\begin{aligned} x'(t) = \mathcal{X}'(t)c + y'(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t)c + \mathcal{A}(t)y(t) + b(t) = \\ = \mathcal{A}(t)(\mathcal{X}(t)c + y(t)) + b(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + b(t) \end{aligned}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$ şi în consecinţă x este soluţie a sistemului (3.2.1). □

OBSERVAŢIA 3.2.1. Teorema 3.2.1 afirmă că soluţia generală a sistemului (3.2.1) este de forma (3.2.3) cu y soluţie particulară a sistemului (3.2.1) şi $c \in \mathbb{R}^n$ vector constant.

Fie acum $a \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ şi să considerăm problema CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + b(t) \\ x(a) = \xi. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

TEOREMA 3.2.2. *Fie $\mathcal{X}$ o matrice fundamentală a sistemului omogen* (3.2.2). *Atunci unica soluţie saturată a problemei* CAUCHY (3.2.4) *este dată de*

$$x(t, a, \xi) = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(a)\xi + \int_a^t \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)b(s)\,ds \tag{3.2.5}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$.

Demonstraţie. Pornind de la Observaţia 3.1.5, vom căuta unica soluţie a problemei CAUCHY sub forma

$$x(t, a, \xi) = \mathcal{X}(t)c(t) \tag{3.2.6}$$

pentru $t \in \mathbb{I}$, unde $c : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie de clasă C^1 care urmează a fi determinată. Vom determina c impunând condiţia ca x definit de (3.2.6) să fie soluţie a problemei CAUCHY (3.2.4). Avem

$$x'(t, a, \xi) = \mathcal{X}'(t)c(t) + \mathcal{X}(t)c'(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Deci x dat de (3.2.6) este soluţie a sistemului (3.2.1) dacă şi numai dacă

$$\mathcal{X}'(t)c(t) + \mathcal{X}(t)c'(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t)c(t) + b(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Cum $\mathcal{X}$ verifică sistemul

$$\mathcal{X}'(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, ultima egalitate este echivalentă cu

$$\mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t)c(t) + \mathcal{X}(t)c'(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t)c(t) + b(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, care la rândul ei poate fi rescrisă sub forma

$$\mathcal{X}(t)c'(t) = b(t) \tag{3.2.7}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Reamintind că $\mathcal{X}(t)$ este nesingulară pentru orice $t \in \mathbb{I}$ deducem

$$c'(t) = \mathcal{X}^{-1}(t)b(t)$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Integrând această relaţie în ambii membri de la a la t, obţinem

$$c(t) = c(a) + \int_a^t \mathcal{X}^{-1}(s)b(s)\,ds,$$

relaţie care conform egalităţii (3.2.6) conduce la

$$x(t, a, \xi) = \mathcal{X}(t)c(a) + \mathcal{X}(t)\int_a^t \mathcal{X}^{-1}(a, s)b(s)\,ds$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Conform punctului (i) din Lema 6.1.3, $\mathcal{X}(t)$ comută cu integrala. Ca atare

$$x(t, a, \xi) = \mathcal{X}(t)c(a) + \int_a^t \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)b(s)\,ds$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Impunând condiţia ca $x(a, a, \xi) = \xi$ deducem că $c(a) = \mathcal{X}^{-1}(a)\xi$ relaţie care împreună cu precedenta implică (3.2.5). □

OBSERVAŢIA 3.2.2. Formula (3.2.5), numită *formula variaţiei constantelor* mai poate fi scrisă echivalent sub forma

$$x(t, a, \xi) = \mathcal{U}(t, a)\xi + \int_a^t \mathcal{U}(t, s)b(s)\,ds \tag{3.2.8}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathcal{U} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ este evolutorul generat de $\mathcal{A}$, adică familia de operatori definiţi prin

$$\mathcal{U}(t, s) = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)$$

pentru orice $t, s \in \mathbb{I}$. Vezi Definiţia 3.1.6 din Secţiunea 1 a acestui capitol.

3. Funcţia exponenţială de matrice

Să considerăm sistemul liniar, omogen, cu coeficienţi constanţi

$$x'(t) = \mathcal{A}x(t), \tag{3.3.1}$$

unde $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Cum, în cazul ecuaţiei scalare $x' = ax$, soluţia generală este dată de $x(t) = \xi e^{ta}$ pentru $t \in \mathbb{R}$, unde

$$e^{ta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k a^k}{k!},$$

convergenţa fiind uniformă pe orice mulţime compactă din $\mathbb{R}$, aceasta ne sugerează ca, şi în cazul n-dimensional, să definim (deocamdată formal) o candidată pentru titlul de matrice fundamentală prin

$$e^{t\mathcal{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k. \tag{3.3.2}$$

Reamintim că $\mathcal{A}^k$ este produsul matricei $\mathcal{A}$ cu ea însăşi de k ori, iar $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$. Prin analogie cu cazul scalar, vom demonstra că seria din membrul drept este uniform convergentă, pentru t din mulţimile compacte din $\mathbb{R}$, în sensul normei $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ definită în Secţiunea 1 din appendix şi în sfârşit, vom arăta că suma acestei serii este unica matrice fundamentală X a sistemului (3.3.1) care satisface $\mathcal{X}(0) = \mathcal{I}$.

Pentru a fixa ideile începem cu

DEFINIŢIA 3.3.1. Seria $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$, cu elemente din $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ este *convergentă* la $\mathcal{C}$ dacă

$$\lim_{m\to+\infty} \left\| \sum_{k=0}^{m} \mathcal{C}_k - \mathcal{C} \right\|_{\mathcal{O}} = 0$$

unde $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ este norma definită în Secţiunea 1 din appendix. Seria $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$, cu elemente din $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ este *normal convergentă* dacă seria $\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{C}_k\|_{\mathcal{O}}$ este convergentă.

OBSERVAŢIA 3.3.1. Este uşor de constatat că pentru orice serie de matrice $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$ normal convergentă există o matrice $\mathcal{C}$ astfel încât seria să fie convergentă la $\mathcal{C}$. Aceasta rezultă din simpla observaţie că şirul sumelor parţiale a oricărei serii de matrice normal convergentă este fundamental în norma spaţiului $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ care este complet (putând fi identificat cu $\mathbb{R}^{n\times n}$ dotat cu norma euclidiană). Vezi Observaţia 6.1.1.)

DEFINIŢIA 3.3.2. Fie $\mathcal{C}_k : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$. Seria de funcţii cu valori matrice $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k(t)$ este *uniform convergentă* pe $\mathbb{I}$ la $\mathcal{C} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m(\varepsilon)$

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \mathcal{C}_k(t) - \mathcal{C}(t) \right\|_{\mathcal{O}} \leq \varepsilon$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$.

TEOREMA 3.3.1. *Pentru orice* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *seria*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k$$

este uniform convergentă pe orice interval compact $\mathbb{I}$ *din* $\mathbb{R}$. *În plus, suma ei* $e^{t\mathcal{A}}$ *este derivabilă pe* $\mathbb{R}$ *şi*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t\mathcal{A}}\right) = \mathcal{A}e^{t\mathcal{A}} = e^{t\mathcal{A}}\mathcal{A} \tag{3.3.3}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Conform Consecinţei 6.1.1 avem

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} \frac{t^k}{k!} \mathcal{A}^k \right\|_{\mathcal{O}} \le \sum_{k=m}^{m+p} \frac{(|t| \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}})^k}{k!}$$

pentru orice m, $p \in \mathbb{N}$ şi orice $t \in \mathbb{R}$. Această inegalitate arată că seria considerată satisface condiţia lui CAUCHY uniform pentru t din orice mulţime compactă întrucât seria cu termeni pozitivi care o majorează are această proprietate. Deci şirul sumelor parţiale este un şir CAUCHY uniform pe orice interval compact $\mathbb{I}$ şi ca atare, seria considerată este uniform convergentă pe $\mathbb{I}$.

Pentru a demonstra cea de-a doua parte a teoremei începem prin a observa că seria este derivabilă termen cu termen şi că seria derivatelor este la rândul ei uniform convergentă pe orice interval compact din $\mathbb{R}$. Într-adevăr este uşor de constatat că

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{I}) = 0 \;\text{ şi }\; \frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k\right) = \mathcal{A}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathcal{A}^{k-1} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathcal{A}^{k-1}\mathcal{A}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ şi orice $t \in \mathbb{R}$. De aici rezultă că

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} \frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k\right) \right\|_{\mathcal{O}} \le \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} \sum_{k=m}^{m+p} \frac{(|t| \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}})^{k-1}}{(k-1)!},$$

inegalitate care arată că seria derivatelor satisface condiţia lui CAUCHY uniform pentru t din orice interval compact. Ca atare suma seriei iniţiale este derivabilă şi derivata ei satisface

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t\mathcal{A}}\right) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathcal{A}^{k-1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathcal{A}^{k-1}\right)\mathcal{A},$$

relaţii care evident sunt echivalente cu (3.3.3). Demonstraţia este încheiată. □

OBSERVAŢIA 3.3.2. Prima egalitate din (3.3.3) demonstrează că orice coloană a matricei $e^{t\mathcal{A}}$, gândită ca o funcţie de la $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}^n$, este o soluţie a sistemului omogen (3.3.1). Cum $e^{0\mathcal{A}} = \mathcal{I}$ şi $\mathcal{I}$ este nesingulară, rezultă că $e^{t\mathcal{A}}$ este matrice fundamentală pentru sistemul (3.3.1).

Câteva consecinţe utile ale Teoremei 3.3.1 sunt formulate mai jos.

PROPOZIŢIA 3.3.1. *Pentru orice* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *seria*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathcal{A}^k$$

este convergentă. În plus, funcţia $\mathcal{A} \mapsto e^{\mathcal{A}}$ *definită pe* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *cu valori în* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *unde* $e^{\mathcal{A}}$ *este suma seriei de mai sus, are următoarele proprietăţi:*

(i) $e^{\mathcal{I}} = e\mathcal{I}$;
(ii) *dacă* $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ *atunci* $e^{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = e^{\mathcal{A}}e^{\mathcal{B}}$;
(iii) *dacă* $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{Q}$ *atunci* $e^{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}^{-1}e^{\mathcal{B}}\mathcal{Q}$;
(iv) $e^{-\mathcal{A}} = \left(e^{\mathcal{A}}\right)^{-1}$.

Demonstraţie. Punctul (i) este o consecinţă imediată a definiţiei matricei $e^{\mathcal{I}}$. Pentru a demonstra (ii), să observăm că, dacă $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, atunci

$$e^{t\mathcal{A}}\mathcal{B} = \mathcal{B}e^{t\mathcal{A}} \tag{3.3.4}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, dacă $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ atunci $\mathcal{A}^k\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}^k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, relaţie care împreună cu definiţia matricei $e^{t\mathcal{A}}$ implică (3.3.4). Din (3.3.4) şi din (3.3.3) rezultă că

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t\mathcal{A}}e^{t\mathcal{B}}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{t\mathcal{A}}\right)e^{t\mathcal{B}} + e^{t\mathcal{A}}\frac{d}{dt}\left(e^{t\mathcal{B}}\right) = \mathcal{A}e^{t\mathcal{A}}e^{t\mathcal{B}} + e^{t\mathcal{A}}\mathcal{B}e^{t\mathcal{B}} = (\mathcal{A}+\mathcal{B})e^{t\mathcal{A}}e^{t\mathcal{B}}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Această egalitate ne arată că $\mathcal{X}(t) = e^{t\mathcal{A}}e^{t\mathcal{B}}$ este o matrice fundamentală pentru sistemul

$$x' = (\mathcal{A} + \mathcal{B})x$$

care satisface $\mathcal{X}(0) = \mathcal{I}$. Din partea de unicitate a Teoremei 3.1.1 şi din Observaţia 3.3.2 urmează că $e^{t\mathcal{A}}e^{t\mathcal{B}} = e^{t(\mathcal{A}+\mathcal{B})}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, ceea ce evident implică (ii).

Dacă $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{Q}$ atunci $\mathcal{A}^k = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}^k\mathcal{Q}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, de unde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{B}^k\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathcal{B}^k\right)\mathcal{Q},$$

ceea ce demonstrează (iii).

În sfârşit, cum $\mathcal{A}$ şi $-\mathcal{A}$ comută, din (ii) deducem $e^{\mathcal{A}}e^{-\mathcal{A}} = e^{-\mathcal{A}}e^{\mathcal{A}} = e^{\mathcal{O}} = \mathcal{I}$. În consecinţă $e^{\mathcal{A}}$ este inversabilă şi inversa ei este $e^{-\mathcal{A}}$. Demonstraţia este completă. $\square$

OBSERVAŢIA 3.3.3. Să considerăm problema CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = \mathcal{A}x(t) + b(t) \\ x(a) = \xi \end{cases}$$

unde $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie continuă, $a \in \mathbb{I}$ şi $\xi \in \mathbb{R}^n$. Atunci unica soluţie a acestei probleme este dată de

$$x(t, a, \xi) = e^{(t-a)\mathcal{A}}\xi + \int_a^t e^{(t-s)\mathcal{A}}b(s)\,ds \tag{3.3.5}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$.

Să notăm că (3.3.5) este o consecinţă directă a formulei (2.5) a variaţiei constantelor demonstrată în Secţiunea 2 a acestui capitol. Într-adevăr, luînd $\mathcal{X}(t) = e^{t\mathcal{A}}$ şi făcând apel la (ii) şi (iv) din Propoziţia 3.3.1 deducem că $\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s) = e^{(t-s)\mathcal{A}}$ pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$. De aici şi din (2.5) deducem (3.3.5).

OBSERVAŢIA 3.3.4. Toate consideraţiile făcute în această secţiune pot fi extinse fără nici o dificultate la cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi în corpul numerelor complexe. Mai precis, să considerăm sistemul diferenţial liniar şi omogen

$$w'(z) = \mathcal{A}w(z), \tag{3.3.6}$$

unde $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Prin soluţie a acestui sistem înţelegem o funcţie $w : D \to \mathbb{C}$, olomorfă pe $D \subseteq \mathbb{C}^n$ şi care satisface (3.3.6) pentru orice $z \in D$.

Să înzestrăm $\mathbb{C}^n$ cu produsul scalar standard $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definit prin

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w_i}$$

pentru orice $z, w \in \mathbb{C}^n$, să definim norma $\|\cdot\|_e : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ prin $\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ şi norma $\|\cdot\|_{\mathcal{O}} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$ prin

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} = \sup\{\|\mathcal{A}z\|_e;\ \|z\|_e \le 1\}$$

pentru orice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Ajunşi în acest punct, să observăm că seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\mathcal{A}^k$$

este uniform convergentă pe orice mulţime compactă din $\mathbb{C}$ şi suma ei este o matrice cu elemente funcţii întregi (olomorfe pe $\mathbb{C}$) notată cu $e^{z\mathcal{A}}$. Din teorema de derivabilitate a seriilor de puteri complexe deducem că matricea de mai sus este soluţie pe $\mathbb{C}$ a problemei CAUCHY

$$\begin{cases} \mathcal{W}'(z) = \mathcal{A}\mathcal{W}(z) \\ \mathcal{W}(0) = \mathcal{I}. \end{cases}$$

4. Determinarea matricei $e^{t\mathcal{A}}$

În această secţiune vom prezenta o metodă de determinare a matricei $e^{t\mathcal{A}}$ utilizând *forma canonică* JORDAN a unei matrice. Începem prin a reaminti că, pentru orice matrice cu elemente complexe $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, există o matrice nesingulară $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, astfel încât

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{J}\mathcal{Q}, \tag{3.4.1}$$

unde $\mathcal{J}$ este forma canonică JORDAN a matricei $\mathcal{A}$. Mai precis, dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ reale sau complexe, cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, \ldots m_s$, $\sum_{p=1}^{s} m_p = n$, atunci $\mathcal{J}$ o matrice diagonală de blocuri : $\mathcal{J}_{pj}$, $p = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, h(p)$, astfel că $e^{t\mathcal{J}}$ este, de asemenea, o matrice diagonală de blocuri

$$e^{t\mathcal{J}} = \operatorname{diag}\left(e^{t\mathcal{J}_{11}}, \ldots, e^{t\mathcal{J}_{1h(1)}}, e^{t\mathcal{J}_{21}}, \ldots, e^{t\mathcal{J}_{sh(s)}}\right) \tag{3.4.2}$$

Aici, $\mathcal{J}_{pj}$ pentru $p = 1, 2, \ldots, s$ şi $j = 1, 2, \ldots, h(p)$, sunt *celulele Jordan* corespunzătoare rădăcinii caracteristice λ_p, i.e.

$$\mathcal{J}_{pj} = \begin{pmatrix} \lambda_p & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_p & 1\ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0\ldots & \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_{pj}\times m_{pj}}(\mathbb{C})$$

and $\sum_{j=1}^{h(p)} m_{pj} = m_p$. Un procedeu de determinare a matricei $\mathcal{Q}$ este prezentat în C. UDRIŞTE ET AL. [**15**], p. 62. Din (3.4.1) şi din Propoziţia 3.3.1 punctul (iii), combinată cu Observaţia 3.3.4, urmează

$$\mathcal{J}_{pj} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 \end{pmatrix} + \lambda_p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{pmatrix}$$

pentru $p = 1, 2, \ldots, s$ şi $j = 1, 2, \ldots, h(p)$. Notând cu

$$\mathcal{E}_{pj} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } \mathcal{I}_{pj} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{pmatrix},$$

relaţia de mai sus se rescrie sub forma $\mathcal{J}_{pj} = \mathcal{E}_{pj} + \lambda_p\mathcal{I}_{pj}$. Cum $t\mathcal{E}_{pj}$ şi $t\lambda_p\mathcal{I}_{pj}$ comută, conform Propoziţiei 3.3.1, urmează că

$$e^{t\mathcal{J}_{pj}} = e^{t\lambda_p}e^{t\mathcal{E}_{pj}}. \tag{3.4.3}$$

Este uşor de văzut că puterea de exponent q, $q = 1, 2, \ldots, m_{pj}$, a matricei $\mathcal{E}_{pj}$ i.e., $\mathcal{E}_{pj}^q$, este matricea ale cărei elemente $e_{k,l}$ sunt date de: $e_{k,l} = 0$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, m_{pj}$ şi $l = 1, 2, \ldots, m_{pj}$, $l \neq k+q$ şi $e_{k,k+q} = 1$. Astfel, cum matricea $\mathcal{E}_{pj}$ este de ordinul m_{pj}, urmează că $\mathcal{E}_{pj}^{m_{pj}}$ este matricea nulă. Ţinând cont de definiţia matricei exponenţiale, avem

$$e^{t\mathcal{E}_{pj}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{m_{pj}-1}}{(m_{pj}-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \ldots & \frac{t^{m_{pj}-2}}{(m_{pj}-2)!} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4.4}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Din (3.4.2), (3.4.3) şi (3.4.4), obcţinem forma explicită a matricei $e^{t\mathcal{A}}$.

Încheiem cu un rezultat fundamental în teoria sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, rezultat care poartă numele de *teorema de structură a matricei* $e^{t\mathcal{A}}$.

TEOREMA 3.4.1. *Toate elementele matricei $e^{t\mathcal{A}}$ sunt de forma*

$$\sum_{k=1}^{s} e^{\alpha_k t}\left[p_k(t)\cos(\beta_k t) + q_k(t)\sin(\beta_k t)\right],$$

unde $\alpha_k + i\beta_k$, $k = 1, 2\ldots, s$, sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$*, iar p_k şi q_k sunt polinoame cu coeficienţi reali, de grad cel mult $m_k - 1$, m_k fiind ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha_k + i\beta_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$.*

Demonstraţie. Fie $\lambda = \alpha + i\beta$ o rădăcină a ecuaţiei $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$. Ţinând cont de faptul că $e^{t\lambda} = e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right]$, efectuând înmulţirile în (3.4.2), utilizând (3.4.3), (3.4.4) şi reamintind că, deşi $\mathcal{Q}^{-1}$ şi $\mathcal{Q}$ sunt matrici cu elemente numere complexe, produsul $\mathcal{Q}^{-1}e^{t\mathcal{J}}\mathcal{Q} = e^{t\mathcal{A}}$ este în mod necesar o matrice cu elemente numere reale, obţinem concluzia teoremei. □

Funcţiile de forma celor precizate în Teorema 3.4.1 sunt cunoscute în literatura de specialitate sub numele de *cvasi-polinoame.*

OBSERVAŢIA 3.4.1. Teorema de structură a matricei $e^{t\mathcal{A}}$ ne oferă o metodă efectivă de determinare a acestei matrici. Mai precis, pentru a găsi $e^{t\mathcal{A}}$, vom ţine cont de faptul că toate elementele ei sunt de forma precizată în Teorema 3.4.1 şi vom determina coeficienţii polinoamelor p_k şi q_k punând condiţiile: $e^{0\mathcal{A}} = \mathcal{I}$ şi $\left(e^{t\mathcal{A}}\right)' = \mathcal{A}e^{t\mathcal{A}}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Subliniem totuşi că această metodă este destul de greoaie după cum putem constata din exemplul de mai jos.

EXEMPLUL 3.4.1. Să se determine $e^{t\mathcal{A}}$ în cazul în care

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ se rescrie echivalent sub forma

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

şi are rădăcinile $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = 4$, ambele având ordinul de multiplicitate 1. Ca tare, elementele matricei $e^{t\mathcal{A}}$ sunt combinaţii liniare de e^t şi e^{4t}. Avem

$$e^{t\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} c_{11}^1 e^t + c_{11}^2 e^{4t} & c_{12}^1 e^t + c_{12}^2 e^{4t} \\ c_{21}^1 e^t + c_{21}^2 e^{4t} & c_{22}^1 e^t + c_{22}^2 e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Din condiţia $e^{0\mathcal{A}} = \mathcal{I}$ rezultă

$$\begin{cases} c_{11}^1 + c_{11}^2 = 1 & c_{21}^1 + c_{21}^2 = 0 \\ c_{12}^1 + c_{12}^2 = 0 & c_{22}^1 + c_{22}^2 = 1. \end{cases}$$

Ca atare, notând $c_{11}^1 = \alpha$, $c_{12}^1 = \beta$, $c_{21}^1 = \gamma$ şi $c_{22}^1 = \delta$, avem $c_{11}^2 = 1 - \alpha$, $c_{12}^2 = -\beta$, $c_{21}^2 = -\gamma$ şi $c_{22}^2 = 1 - \delta$. Cu aceste notaţii, $e^{t\mathcal{A}}$ este de forma

$$e^{t\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha e^t + (1-\alpha)e^{4t} & \beta e^t - \beta e^{4t} \\ \gamma e^t - \gamma e^{4t} & \delta e^t + (1-\delta)e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Condiţia $\left(e^{t\mathcal{A}}\right)' = \mathcal{A}e^{t\mathcal{A}}$ are forma

$$\begin{pmatrix} \alpha e^t + 4(1-\alpha)e^{4t} & \beta e^t - 4\beta e^{4t} \\ \gamma e^t - 4\gamma e^{4t} & \delta e^t + 4(1-\delta)e^{4t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (2\alpha - \gamma)e^t + (2 - 2\alpha + \gamma)e^{4t} & (2\beta - \delta)e^t + (-2\beta - 1 + \delta)e^{4t} \\ (-2\alpha + 3\gamma)e^t + (-2 + 2\alpha - 3\gamma)e^{4t} & (-2\beta + 3\delta)e^t + (2\beta + 3 - 3\delta)e^{4t} \end{pmatrix}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Ţinând cont că familia $\{e^t, e^{4t}\}$ este liniar independentă în spaţiul funcţiilor continue de la $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$, identificând coeficienţii lui e^t şi e^{4t} din cele două matrice, obţinem un sistem liniar de opt ecuaţii cu patru necunoscute (α, β, γ, δ), compatibil determinat, având soluţia

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} & \beta = \frac{1}{3} \\ \\ \gamma = \frac{2}{3} & \delta = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

În consecinţă

$$e^{t\mathcal{A}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^t + e^{4t} & e^t - e^{4t} \\ 2e^t - 2e^{4t} & e^t + 2e^{4t} \end{pmatrix}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

5. Ecuaţia diferenţială de ordinul n liniară

Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul n liniară

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots a_n(t)y(t) = f(t), \tag{3.5.1}$$

unde $a_1, a_2, \dots a_n, f$ sunt funcţii continue de la un interval nevid deschis $\mathbb{I}$ în $\mathbb{R}$. După cum am văzut în Secţiunea 2 a capitolului 1, ecuaţia (3.5.1) poate fi rescrisă ca un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Într-adevăr, prin intermediul transformărilor

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{$\mathcal{T}$}$$

(3.5.1) poate fi rescrisă ca un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \dots a_1(t)x_n + f(t), \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Cu notaţiile

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

şi

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

pentru $t \in \mathbb{I}$, sistemul (3.5.2) poate fi scris ca o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară vectorială

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + b(t). \tag{3.5.3}$$

Din acest moment este clar că toate consideraţiile făcute în secţiunile anterioare ale acestui capitol se pot reformula pentru a putea fi aplicate şi ecuaţiei (3.5.1). Începem prin precizarea unor noţiuni şi stabilirea unor replici ale rezultatelor demonstrate în secţiunile anterioare.

DEFINIŢIA 3.5.1. Dacă în (3.5.1) $f(t) = 0$ pe $\mathbb{I}$, ecuaţia (3.5.1) poartă numele de *omogenă*, iar în caz contrar *neomogenă*.

TEOREMA 3.5.1. *Pentru orice $a \in \mathbb{I}$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ problema* CAUCHY

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)y(t) = f(t) \\ y(a) = \xi_1, y'(a) = \xi_2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \xi_n \end{cases}$$

are o soluţie globală unică.

TEOREMA 3.5.2. *Orice soluţie saturată a ecuaţiei* (3.5.1) *este definită pe* $\mathbb{I}$.

Să considerăm acum ecuaţia omogenă ataşată ecuaţiei (3.5.1), adică ecuaţia

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots, a_n(t)y(t) = 0. \tag{3.5.4}$$

Să notăm cu $\mathcal{S}_n$ mulţimea soluţiilor saturate ale ecuaţiei omogene (3.5.4) şi cu $\mathcal{S}$ mulţimea soluţiilor saturate ale sistemului liniar şi omogen ataşat sistemului (3.5.3).

LEMA 3.5.1. *Aplicaţia $\mathcal{T} : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}$ definită prin*

$$\mathcal{T}(y) = (y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pentru orice $y \in \mathcal{S}_n$ este un izomorfism de spaţii vectoriale.

Demonstraţie. Se constată că $\mathcal{S}_n$ este un subspaţiu vectorial al lui $C^n(\mathbb{I}; \mathbb{R})$ şi că aplicaţia $\mathcal{T}$ este liniară. În plus, $\mathcal{T}$ este surjectivă deoarece dată o soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a sistemului omogen ataşat sistemului (3.5.3) este clar că funcţia $y = x_1$ este de clasă C^n de la $\mathbb{I}$ în $\mathbb{R}$ şi $\mathcal{T}(y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. În sfârşit, $\mathcal{T}$ este injectiv, deoarece $\mathcal{T}(y) = \mathcal{T}(z)$ este echivalentă cu $(y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = (z, z', \ldots, z^{(n-1)})$, egalitate care evident implică $y = z$. Deci $\mathcal{T}$ este izomorfism şi demonstraţia este completă. □

O consecinţă imediată a lemei 3.5.1 este:

TEOREMA 3.5.3. *Mulţimea soluţiilor saturate ale ecuaţiei omogene* (3.5.4) *este un spaţiu vectorial de dimensiune n peste* $\mathbb{R}$.

OBSERVAŢIA 3.5.1. Teorema 3.5.3 arată că determinarea soluţiei generale a ecuaţiei (3.5.4) revine la determinarea a n soluţii saturate particulare liniar independente.

De asemenea, din Teorema 3.2.1 rezultă

TEOREMA 3.5.4. *Soluţia generală $y(\cdot, c)$ a ecuaţiei neomogene* (3.5.1) *este de forma*

$$y(t, c) = y_{\mathcal{O}}(t, c) + y_p(t),$$

unde $y_{\mathcal{O}}(\cdot, c)$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene (3.5.4) *ataşate, iar y_p este o soluţie saturată particulară a ecuaţiei* (3.5.1).

Fie acum $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem de soluţii saturate ale ecuaţiei (3.5.4) şi să definim matricea $\mathcal{Y} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ prin

$$\mathcal{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{3.5.5}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$.

DEFINIŢIA 3.5.2. Matricea $\mathcal{Y}$ definită prin (3.5.5) poartă numele de *matrice asociată* sistemului de soluţii $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{S}_n$.

DEFINIŢIA 3.5.3. Sistemul $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{S}_n$ poartă numele de *sistem fundamental de soluţii* al ecuaţiei (3.5.4) dacă el constituie o bază în mulţimea $\mathcal{S}_n$ a tuturor soluţiilor saturate ale ecuaţiei (3.5.4).

DEFINIŢIA 3.5.4. Matricea asociată unui sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (3.5.4) poartă numele de *matrice fundamentală* a ecuaţiei (3.5.4).

OBSERVAŢIA 3.5.2. Întrucât aplicaţia $\mathcal{T}$ definită în Lema 3.5.1 este un izomorfism între $\mathcal{S}_n$ şi $\mathcal{S}$, rezultă că un sistem de soluţii saturate $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuaţiei (3.5.4) este fundamental dacă şi numai dacă $x^1, x^2, \ldots, x^n$, cu $x^i = \mathcal{T}(y_i)$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ este un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen asociat sistemului (3.5.3). Această observaţie simplă ne va permite să reformulăm mai multe rezultate stabilite pentru sisteme omogene şi în cazul ecuaţiei diferenţiale de ordinul n liniară cu coeficienţi constanţi.

Mai precis, fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem de soluţii saturate ale ecuaţiei (3.5.4), fie $\mathcal{Y}$ matricea asociată acestui sistem şi fie $\mathcal{W}(t) = \det \mathcal{Y}(t)$, pentru $t \in \mathbb{I}$, determinantul care, prin analogie cu cazul studiat anterior, va fi numit *wronskianul* sistemului de soluţii.

TEOREMA 3.5.5. (LIOUVILLE) *Fie $\mathcal{W}$ wronskianul unui sistem de n soluţii saturate ale ecuaţiei* (3.5.4). *Atunci*

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds\right) \tag{3.5.6}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $t_0 \in \mathbb{I}$ este fixat.

Demonstraţie. Concluzia rezultă din Teorema 3.1.5, observând că, în cazul sistemului omogen ataşat sistemului (3.5.3) urma matricei $\mathcal{A}$ este egală cu $-a_1$. □

TEOREMA 3.5.6. *Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem de soluţii saturate ale ecuaţiei* (3.5.4), *fie $\mathcal{Y}$ matricea şi respectiv $\mathcal{W}$ wronskianul, asociate sistemului de soluţii. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) *matricea $\mathcal{Y}$ este fundamentală;*
(ii) *pentru orice $t \in \mathbb{I}$, $\mathcal{W}(t) \neq 0$;*
(iii) *există $a \in \mathbb{I}$ astfel încât $\mathcal{W}(a) \neq 0$.*

Demonstraţie. Concluzia rezultă din Teorema 3.1.4. □

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (3.5.4). Din Teorema 3.5.3, rezultă că soluţia generală a ecuaţiei omogene (3.5.4) este dată de

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \tag{3.5.7}$$

cu $c_i \in \mathbb{R}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. În ceea ce priveşte ecuaţia neomogenă (3.5.1) avem:

TEOREMA 3.5.7. *Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei* (3.5.4). *Atunci, soluţia generală a ecuaţiei neomogene* (3.5.1) *este dată de*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t),$$

unde $c_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt funcţii de clasă C^1 care verifică sistemul

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) + \cdots + c_n'(t)y_n(t) = 0 \\ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) + \cdots + c_n'(t)y_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + c_2'(t)y_2^{(n-2)}(t) + \cdots + c_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ c_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases} \tag{3.5.8}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$.

Demonstraţie. Să observăm că $y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)y_i(t)$, este soluţie a ecuaţiei (3.5.1) dacă şi numai dacă $x(t) = \mathcal{Y}(t)c(t)$ este soluţie a sistemului (3.5.3), unde $c(t)$ este vectorul coloană ale cărui componente sunt $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$. Raţionând ca în demonstraţia Teoremei 3.2.2 deducem că c trebuie să satisfacă (3.2.7). Dar sistemul (3.5.8) nu este nimic altceva decât forma specifică pe care o capătă (3.2.7) în acest caz. Demonstraţia este completă. □

Încheiem această secţiune cu menţiunea că metoda de a determina soluţia generală a ecuaţiei neomogene (3.5.1) pe calea precizată în Teorema 3.5.7 poartă numele de *metoda variaţiei constantelor.*

6. Ecuaţia de ordinul n liniară cu coeficienţi constanţi

Începem această secţiune cu prezentarea unei metode de determinare a unui sistem fundamental de soluţii în cazul ecuaţiei diferenţiale de ordinul n liniară cu coeficienţi constanţi. Subliniem că pentru cazul general al ecuaţiei cu coeficienţi variabili nu se cunosc metode de determinare a unui sistem fundamental de soluţii.

Fie deci ecuaţia de ordinul n liniară, omogenă, cu coeficienţi constanţi

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = 0, \tag{3.6.1}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, care, prin intermediul transformărilor

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{$\mathcal{T}$}$$

poate fi rescrisă ca o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară vectorială

$$x'(t) = \mathcal{A}x(t), \tag{3.6.2}$$

unde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ şi } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

OBSERVAŢIA 3.6.1. Se constată prin calcul direct că ecuaţia $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ are în acest caz forma

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{3.6.3}$$

Aceasta poartă numele de *ecuaţie caracteristică* ataşată ecuaţiei (3.6.1), iar polinomul corespunzător din membrul stâng se numeşte *polinom caracteristic* ataşat ecuaţiei (3.6.1).

Rezultatul principal referitor la determinarea unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (3.6.1) este

TEOREMA 3.6.1. *Fie* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *rădăcinile ecuaţiei* (3.6.3) *având ordinele de multiplicitate* $m_1, m_2, \ldots, m_s$. *Atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia* (3.6.1) *este*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{F}_j,$$

unde, dacă λ_j *este reală cu ordinul de multiplicitate* m_j,

$$\mathcal{F}_j = \left\{ e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, \ldots, t^{(m_j-1)} e^{\lambda_j t} \right\},$$

iar dacă λ_j *nu este reală*

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_j(\cos) \cup \mathcal{F}_j(\sin)$$

cu

$$\mathcal{F}_j(\cos) = \left\{ e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), te^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), t^2 e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), \ldots, t^{m_j-1} e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) \right\}$$

şi

$$\mathcal{F}_j(\sin) = \left\{e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), te^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), t^2 e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), \ldots, t^{m_j-1}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t)\right\}.$$

În acest ultim caz α_j este partea reală a rădăcinii λ_j, iar β_j este modulul părţii imaginare a aceleaşi rădăcini.

Demonstraţie. Este uşor de constatat că familia $\mathcal{F}$ conţine cel mult n elemente. Ca atare, pentru a demonstra teorema, ar fi suficient să arătăm că orice soluţie a ecuaţiei (3.6.1) este o combinaţie liniară de elemente din $\mathcal{F}$. Într-adevăr, dacă ar fi aşa, atunci $\mathcal{F}$ ar fi o familie de generatori pentru mulţimea soluţiilor saturate $\mathcal{S}_n$ ale ecuaţiei (3.6.1), mulţime care, conform Teoremei 3.5.3, este un spaţiu vectorial de dimensiune n peste $\mathbb{R}$. Atunci, în mod necesar $\mathcal{F}$ ar avea exact n elemente şi ar fi o bază în $\mathcal{S}_n$ ceea ce ar completa demonstraţia.

Fie deci $y \in \mathcal{S}_n$. Atunci funcţia $\mathcal{T}(y) = x$ definită în Lema 3.5.1 este o soluţie a ecuaţiei omogene (3.6.2). Conform observaţiei 3.1.5, există $c \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$x(t) = e^{t\mathcal{A}}c$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Pe de altă parte, din Teorema 3.4.1 şi din Observaţia 3.6.1, rezultă că toate componentele lui x sunt combinaţii liniare de elemente din $\mathcal{F}$. În particular $y = x_1$ are aceeaşi proprietate şi demonstraţia este încheiată. □

Putem acum analiza un exemplu care ilustrează modul în care poate fi descris fenomenul de rezonanţă în cazul oscilaţiilor armonice întreţinute.

EXEMPLUL 3.6.1. Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea

$$x'' + \omega^2 x = f(t) \tag{3.6.4}$$

care descrie oscilaţiile unui punct material P de masă m care se mişcă pe axa Ox sub acţiunea cumulată a două forţe: prima elastică $F(x) = -kx$ pentru $x \in \mathbb{R}$ şi cea de-a doua periodică de forma $G(t) = mf(t)$ pentru $t \in \mathbb{R}$. Reamintim că $\omega^2 = k/m$. Subliniem că aici este vorba de de două sisteme: primul caracterizat de forţa elastică F sistem pe care îl vom numi *receptor* şi cel de-al doilea, numit *excitator*, caracterizat de forţa perturbatoare G, exterioară sistemului receptor. Ecuaţia (3.6.4) descrie acţiunea sistemului excitator asupra celui receptor. Datorită semnificaţiei evidente a acţiunii forţei G, ecuaţia de mai sus poartă numele de *ecuaţia oscilaţiilor întreţinute* ale punctului material P. Reamintim că aici $x(t)$ reprezintă elongaţia punctului P la momentul t. Să observăm că, în conformitate cu cele prezentate mai sus, soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate este dată de

$$x(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ne propunem în continuare să determinăm soluţia ecuaţiei neomogene în cazul în care forţa de întreţinere G are aceeaşi formă cu soluţia ecuaţiei omogene, caz în care G contribuie la amplificarea în timp a oscilaţiilor. Analiza aceastei situaţii, cunoscută sub numele de *fenomen de rezonanţă*, constituie un prim pas spre înţelegerea a numeroase fenomene mult mai complexe, dar în esenţă de aceeaşi natură. Mai precis, să presupunem că

$$f(t) = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t$$

pentru $t \in \mathbb{R}$, unde cel puţin unul dintre numerele $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ este nenul. Utilizând metoda variaţiei constantelor prezentată la sfârşitul secţiunii precedente avem că soluţia generală a ecuaţiei (3.6.4) este de forma

$$x(t) = c_1(t) \sin \omega t + c_2(t) \cos \omega t$$

unde c_1, c_2 sunt funcţii de clasă C^1 care verifică

$$\begin{cases} c_1'(t) \sin \omega t + c_2'(t) \cos \omega t = 0 \\ \\ \omega c_1'(t) \cos \omega t - \omega c_2'(t) \sin \omega t = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem după o simplă integrare

$$\begin{cases} c_1(t) = k_3 + (k_2/\omega)t \\ c_2(t) = k_4 - (k_1/\omega)t \end{cases}$$

pentru $t \in \mathbb{R}$, unde $k_3, k_4 \in \mathbb{R}$. Drept urmare, soluţia ecuaţiei (3.6.4) este

$$x(t) = k_3 \sin \omega t + k_4 \cos \omega t + \frac{k_2}{\omega} t \sin \omega t - \frac{k_1}{\omega} t \cos \omega t.$$

Se poate constata că, spre deosebire de soluţia ecuaţiei omogene care este mărginită pe $\mathbb{R}$, aceasta este nemărginită. Observaţia anterioară este foarte importantă, de exemplu, în alegerea materialelor de construcţie pentru structurile supuse unor oscilaţii întreţinute. Mai precis, aceste materiale trebuie alese astfel încât frecvenţele proprii de oscilaţie să nu fie multipli raţionali de frecvenţa forţei de întreţinere a oscilaţiilor.

Încheiem această secţiune cu prezentarea unei clase de ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare cu coeficienţi variabili care, printr-o simplă substituţie, se reduc la ecuaţii cu coeficienţi constanţi. Mai precis, să considerăm ecuaţia

$$t^n y^{(n)}(t) + t^{n-1} a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = f(t), \tag{3.6.5}$$

în care $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, ecuaţie cunoscută sub numele de *ecuaţia lui* EULER.

TEOREMA 3.6.2. *Prin intermediul substituţiilor*

$$\begin{cases} t = e^s \\ y(t) = z(s) \end{cases}$$

pentru $t > 0$ *şi* $s \in \mathbb{R}$, *ecuaţia* (3.6.5) *se reduce la una cu coeficienţi constanţi în noua funcţie necunoscută* z *de noua variabilă* s.

Demonstraţie. Începem prin a face menţiunea că transformarea $s \mapsto e^s$ de la $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}_+^*$ este inversabilă, de clasă C^1, cu inversa de clasă C^1. Să observăm că, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$, derivata de ordin k lui y este de forma

$$\frac{d^k y}{dt^k} = e^{-ks} \left(c_1 \frac{dz}{ds} + c_2 \frac{d^2 z}{ds^2} + \cdots + c_k \frac{d^k z}{ds^k} \right) \tag{3.6.6}$$

cu $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constante. Într-adevăr, pentru $k = 1$ avem

$$\frac{dy}{dt} = e^{-s} \frac{dz}{ds}.$$

Presupunând acum (3.6.5) adevărată pentru un $k \leq n - 1$ şi derivând-o membru cu membru deducem

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} = e^{-(k+1)s} \left(c_1 \frac{d^2 z}{ds^2} + c_2 \frac{d^3 z}{ds^3} + \cdots + c_k \frac{d^{k+1} z}{ds^{k+1}} \right) - \\ -k e^{-(k+1)s} \left(c_1 \frac{dz}{ds} + c_2 \frac{d^2 z}{ds^2} + \cdots + c_k \frac{d^k z}{ds^k} \right) = \\ = e^{-(k+1)s} \left(d_1 \frac{d^z}{ds} + d_2 \frac{d^2 z}{ds^2} + \cdots + d_{k+1} \frac{d^{k+1} z}{ds^{k+1}} \right) \end{aligned}$$

cu $d_1, d_2, \cdots + d_{k+1}$ constante. Deci (3.6.5) este adevărată pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$. Calculând derivatele funcţiei y, înlocuindu-le în (3.6.5) şi ţinând cont că, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$, avem $t^k e^{-ks} = 1$, conchidem că z este soluţia unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n, liniară, cu coeficienţi constanţi. Demonstraţia este completă. $\square$

OBSERVAŢIA 3.6.2. Consideraţii analoge arată că şi ecuaţiile de forma

$$(\alpha t+\beta)^n y^{(n)}(t)+(\alpha t+\beta)^{n-1}a_1 y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n y(t)=f(t),$$

cu $\alpha>0$ şi $\beta\in\mathbb{R}$, sunt reductibile la ecuaţii diferenţiale de ordinul n, liniare, cu coeficienţi constanţi.

7. Exerciţii şi probleme propuse spre rezolvare

PROBLEMA 3.1. *Fie $a,b:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ două funcţii continue cu $\lim_{t\to+\infty}a(t)=1$, b absolut integrabilă pe $\mathbb{R}_+$ şi să considerăm sistemul*

$$(\mathcal{S})\qquad \begin{cases} x'(t)=a(t)y(t)\\ y'(t)=b(t)x(t).\end{cases}$$

Să se demonstreze că

(i) *dacă (x,y) este o soluţie a sistemului $(\mathcal{S})$ cu x mărginită pe $\mathbb{R}_+$, atunci*
$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=0\,;$$
(ii) *există cel puţin o soluţie a sistemului $(\mathcal{S})$ nemărginită pe $\mathbb{R}_+$;*
(iii) *dacă şi funcţia a este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}_+$, atunci singura soluţie mărginită a sistemului $(\mathcal{S})$ este soluţia identic nulă.*

PROBLEMA 3.2. *Fie $f:\mathbb{I}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă C^1 cu proprietatea că*

$$\mathrm{div}_x f(t,x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t,x)=0$$

pe $\mathbb{I}\times\mathbb{R}^n$. Pentru $a\in\mathbb{I}$ şi $\xi\in\mathbb{R}^n$, să notăm cu $S(\cdot)\xi:[\,a,b)\to\mathbb{R}^n$ unica soluţie saturată a problemei $\mathcal{PC}(\mathbb{I},\mathbb{R}^n,f,a,\xi)$. Fie D un domeniu de volum finit din $\mathbb{R}^n$ şi fie $D(t)=S(t)D$ pentru $t\in[\,a,b)$. Să se demonstreze că volumul lui $D(t)$ adică

$$\mathrm{Vol}\,(D(t))=\iint\ldots\int_D\det\left(\frac{\partial S_i(t)x}{\partial x_j}\right)dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

este constant pe $[\,a,b)$. Acest rezultat este cunoscut sub numele de teorema lui LIOUVILLE *şi este deosebit de util în fizica statistică.*

PROBLEMA 3.3. *Fie $H:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 şi să considerăm sistemul hamiltonian*

$$\begin{cases}\dfrac{dp_i}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}(p,q)\\[2ex] \dfrac{dq_i}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}(p,q)\end{cases}\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Fie $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ şi să notăm cu $S(\cdot)(\xi,\eta)=(p(\cdot),q(\cdot))$, unde $(p,q):[\,a,b)\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ este unica soluţie saturată a sistemului care satisface $p(a)=\xi$ şi $q(a)=\eta$. Să se demonstreze că, oricare ar fi domeniul D de volum finit din $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Vol}(S(t)D)=\mathrm{Vol}(D)$ pentru orice $t\in[\,a,b)$.

PROBLEMA 3.4. *Fie $\mathcal{A}\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice a cărei transpusă $\mathcal{A}^\tau=-\mathcal{A}$. Să se arate că, pentru orice $t\in\mathbb{R}$, matricea $e^{t\mathcal{A}}$ este ortogonală. Reamintim că o matrice $\mathcal{B}$ este ortogonală dacă ea este nesingulară şi $\mathcal{B}^\tau=\mathcal{B}^{-1}$.*

PROBLEMA 3.5. *Fie $\mathcal{A}\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice a cărei transpusă $\mathcal{A}^\tau=-\mathcal{A}$. Să se arate că orice matrice fundamentală $\mathcal{X}$ a sistemului*

$$x'(t)=\mathcal{A}x(t),$$

care este ortogonală în $t=0$, este ortogonală pentru orice $t\in\mathbb{R}$.

PROBLEMA 3.6. *Fie* $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *o funcţie continuă cu proprietatea că, pentru orice* $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}^\tau(t) = -\mathcal{A}(t)$. *Să se demonstreze că orice matrice fundamentală* $\mathcal{X}$ *a sistemului*

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t),$$

care este ortogonală în $t = 0$, *este ortogonală pentru orice* $t \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 3.7. *Fie* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Să se arate că, dacă* $\lambda \in \mathbb{C}$ *este o rădăcină a ecuaţiei* $\det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = 0$, *atunci, pentru orice* $t \in \mathbb{R}$, $e^{t\lambda}$ *este rădăcină a ecuaţiei* $\det(e^{t\mathcal{A}} - \lambda \mathcal{I}) = 0$

PROBLEMA 3.8. *Dacă* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *este simetrică, adică* $\mathcal{A}^\tau = \mathcal{A}$ *atunci şi* $e^{t\mathcal{A}}$ *este simetrică pentru orice* $t \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 3.9. *Fie* $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *o funcţie continuă cu proprietatea că* $\mathcal{A}^*(t) = \mathcal{A}(t)$ *pentru orice* $t \in \mathbb{R}$. *Să se demonstreze că orice matrice fundamentală* $\mathcal{X}$ *a sistemului*

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t),$$

care este simetrică în $t = 0$, *este simetrică pentru orice* $t \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 3.10. *Fie* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Să se demonstreze că o condiţie necesară şi suficientă ca toate elementele matricei* $e^{t\mathcal{A}}$ *să fie pozitive pentru* $t \geq 0$ *este ca toate elementele nediagonale ale matricei* $\mathcal{A}$ *să fie pozitive.* (A. HALANAY [**7**], p. 190)

PROBLEMA 3.11. *Fie* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Demonstraţi că soluţia problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} \mathcal{X}'(t) = \mathcal{A}\mathcal{X}(t) + \mathcal{X}(t)\mathcal{B} \\ \mathcal{X}(0) = \mathcal{C} \end{cases}$$

este dată de $\mathcal{X}(t) = e^{t\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{t\mathcal{B}}$. (A. HALANAY [**7**], p. 191)

PROBLEMA 3.12. *Fie* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Să se demonstreze că dacă integrala*

$$\mathcal{X} = -\int_0^{+\infty} e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}ds$$

există atunci ea este soluţia ecuaţiei matriceale $\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{X}\mathcal{B} = \mathcal{C}$. (A. HALANAY [**7**], p. 191)

PROBLEMA 3.13. *Fie* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *şi fie*

$$\begin{cases} \cos\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\mathcal{A}^{2k}}{(2k)!} \\ \sin\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\mathcal{A}^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{cases}$$

(1) *Să se calculeze* $\dfrac{d}{dt}(\cos t\mathcal{A})$ *şi* $\dfrac{d}{dt}(\sin t\mathcal{A})$;
(2) *Să se arate că matricea de tip* $2n \times 2n$

$$\mathcal{Z}(t) = \begin{pmatrix} \cos t\mathcal{A} & \sin t\mathcal{A} \\ -\mathcal{A}\sin t\mathcal{A} & \mathcal{A}\cos t\mathcal{A} \end{pmatrix}$$

este matrice de soluţii asociată sistemului de $2n$ *ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi cu* $2n$ *funcţii necunoscute:* $x_1, x_2 \ldots, x_n, y_1, y_2 \ldots, y_n$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\mathcal{A}^2x(t). \end{cases}$$

În ce condiţii este aceasta o matrice fundamentală?

(A. HALANAY [**7**], p. 191)

PROBLEMA 3.14. *Fie* $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă pe* $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$ *şi lipschitziană pe* $\mathbb{R}^n$, *fie* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{I}$ *şi* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Definim următorul şir de aproximaţii succesive:* x_0 *este unica soluţie globală a sistemului*

$$\begin{cases} x'(t) = \mathcal{A}x(t) \\ x(a) = \xi, \end{cases}$$

iar x_m *este unica soluţia globală a sistemulului*

$$\begin{cases} x_m'(t) = \mathcal{A}x_m(t) + f(t, x_{m-1}(t)) - \mathcal{A}x_{m-1}(t) \\ x_m(a) = \xi. \end{cases}$$

Să se demonstreze că pentru orice $b > a$ *cu* $[a, b] \subset \mathbb{I}$, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *converge uniform pe* $[a, b]$ *la unica soluţie* $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *a problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \xi. \end{cases}$$

(A. HALANAY [**7**], p. 196)

EXERCIŢIUL 3.1. *Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare*:

$$(1)\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 3x_2. \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1. \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1' = x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -x_1 - 3x_2. \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 + t. \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} x_1' + 2x_1 + x_2 = \sin t \\ x_2' - 4x_1 - 2x_2 = \cos t. \end{cases} \qquad (6)\begin{cases} x_1' + 2x_1 + 4x_2 = 1 + 4t \\ x_2' + x_1 - x_2 = \frac{3}{2}t^2. \end{cases}$$

$$(7)\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_1. \end{cases} \qquad (8)\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_3 + x_1 \\ x_3' = x_1 + x_2. \end{cases}$$

EXERCIŢIUL 3.2. *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea*:

(1) $x'' - 5x' + 4x = 0$. (2) $x'' + 2x' + x = 0$. (3) $x'' + 4x = 0$.
(4) $x'' - 4x = t^2e^{2t}$. (5) $x'' + 9x = \cos 2t$. (6) $x'' + x = \dfrac{1}{\sin t}$.
(7) $x'' + x = 2t\cos t\cos 2t$. (8) $x'' - 4x' + 4x = te^{2t}$. (9) $x'' - 2x = 4t^2e^{t^2}$.

EXERCIŢIUL 3.3. *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de ordin superior*:

(1) $x''' - 13x'' + 12x' = 0$. (2) $x''' - x' = 0$. (3) $x''' + x = 0$.
(4) $x^{IV} + 4x = 0$. (5) $x''' - 3x'' + 3x' - x = t$. (6) $x^{IV} + 2x'' + x = 0$.
(7) $x^{IV} - 2x''' + x'' = e^t$. (8) $x''' + x'' + x' + x = te^t$. (9) $x''' + 6x'' + 9x' = t$.

EXERCIŢIUL 3.4. *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de tip* EULER, *sau reductibile la acestea*:

(1) $t^2x'' + 3tx' + x = 0$. (2) $t^2x'' - tx' - 3x = 0$.
(3) $t^2x'' + tx' + 4x = 0$. (4) $t^3x''' - 3t^2x'' + 6tx' - 6x = 0$.
(5) $(3t + 2)x'' + 7x' = 0$. (6) $x'' = \dfrac{2x}{t^2}$.
(7) $x'' + \dfrac{x'}{t} + \dfrac{x}{t^2} = 0$. (8) $t^2x'' - 4tx' + 6x = t$.
(9) $(1 + t)^2x'' - 3(1 + t)x' + 4x = (1 + t)^3$. (10) $t^2x'' - tx' + x = 2t$.

CAPITOLUL 4

Probleme de stabilitate

Acest capitol este dedicat în întregime studiului stabilităţii soluţiei unui sistem de ecuaţii diferenţiale. În primul paragraf sunt definite şi ilustrate conceptele fundamentale referitoare la stabilitate. Paragraful al doilea este axat pe stabilirea unor condiţii necesare şi suficiente de stabilitate în cazul particular al sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare, iar paragraful al treilea analizează condiţiile în care se conservă proprietatea de stabilitate asimptotică a unui sistem diferenţial liniar la mici perturbări. În paragraful al patrulea sunt prezentate mai multe condiţii suficiente de stabilitate exprimate prin intermediul existenţei unei funcţii descrescătoare de-a lungul traiectoriilor, iar în paragraful al cincilea sunt incluse mai multe rezultate cu privire la stabilitatea soluţiilor sistemelor disipative. În paragraful al şaselea este analizată problema stabilităţii soluţiilor sistemelor de control automat, iar paragraful al şaptelea este dedicat câtorva consideraţii referitoare la instabilitate. Ultimul paragraf este consacrat unor probleme şi exerciţii propuse spre rezolvare.

1. Tipuri de stabilitate

În accepţiunea uzuală stabilitatea este proprietatea stării unui sistem de a nu-şi schimba esenţial evoluţia în urma unor "mici" perturbări ale stării iniţiale. Această accepţiune a fost adoptată din mecanică unde descrie acea proprietate a stării de echilibru a unui sistem conservativ de a fi "puţin sensibilă pe termen lung" la orice fel de perturbări, cu condiţia ca acestea să fie de "mică intensitate". Matematic, această noţiune are mai multe accepţiuni, toate provenind din precedenta, şi care descriu diverse tipuri de continuitate a soluţiei unui sistem ca funcţie de datele iniţiale. Studiul riguros al stabilităţii îşi are originea în lucrările de mecanică cerească ale lui Poincaré şi Maxwell şi a culminat cu teza de doctorat a lui Liapunov (1892) care constituie punctul de referinţă al teoriei moderne a stabilităţii.

După cum am arătat în Teorema 2.6.2, în anumite condiţii de regularitate asupra membrului drept f, aplicaţia $\eta \mapsto x(\cdot, a, \eta)$ - unica soluţie globală a problemei Cauchy

$$\mathcal{PC}(a,\eta) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(a) = \eta \end{cases}$$

este lipschitziană de la $\mathbb{R}^n$ în $C([\,a,b\,];\mathbb{R}^n)$. O problemă mai delicată, dar de interes practic, este aceea de a stabili condiţii suficiente asupra funcţiei f astfel încât, pe de o parte $x(\cdot, a, \xi)$ să fie definită pe $[\,a, +\infty)$ şi, pe de altă parte aplicaţia $\eta \mapsto x(\cdot, a, \eta)$ să fie continuă de la o vecinătate a lui ξ în spaţiul funcţiilor continue de la $[\,a, +\infty)$ în $\mathbb{R}^n$, dotat cu topologia convergenţei uniforme.

Fie Ω o submulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi local lipschitziană pe Ω şi să consideră sistemul diferenţial

$$x' = f(t,x). \tag{4.1.1}$$

Să presupunem că (4.1.1) are o soluţie $\phi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$.

DEFINIŢIA 4.1.1. Soluţia $\phi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ a sistemului (4.1.1) se numeşte *simplu stabilă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $a \geq 0$ există $\delta(\varepsilon, a) > 0$ astfel încât pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi - \phi(a)\| \leq \delta(\varepsilon, a)$:

(i) unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a sistemului (4.1.1) care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi

(ii) $\|x(t, a, \xi) - \phi(t)\| \leq \varepsilon$ pentru orice $t \in [\,a, +\infty)$.

Situaţia descrisă în Definiţia 4.1.1 poate fi ilustrată sugestiv în cazul $n = 2$ ca în Figura 4.1.1 de mai jos.

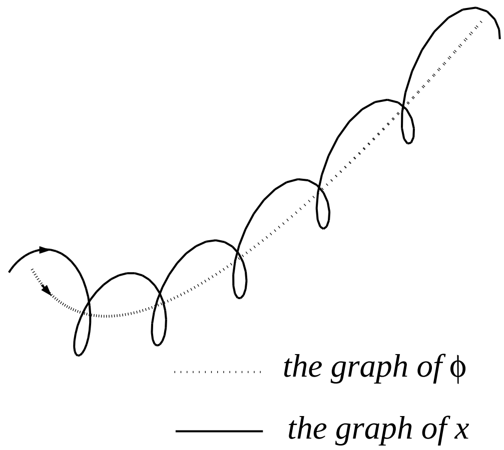

FIGURA 4.1.1

DEFINIŢIA 4.1.2. Soluţia $\phi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ a sistemului (4.1.1) se numeşte *uniform stabilă* dacă ea este simplu stabilă şi $\delta(\varepsilon, a)$ din Definiţia 4.1.1 poate fi ales independent de $a \geq 0$.

DEFINIŢIA 4.1.3. Soluţia $\phi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ a sistemului (4.1.1) se numeşte *asimptotic stabilă* dacă ea este simplu stabilă şi în plus pentru orice $a \geq 0$ există $\mu(a) > 0$ astfel încât pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi - \phi(a)\| \leq \mu(a)$:

(i) unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a sistemului (4.1.1) care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi

(ii) $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t, a, \xi) - \phi(t)\| = 0$.

Vezi Figura 4.1.2 de mai jos.

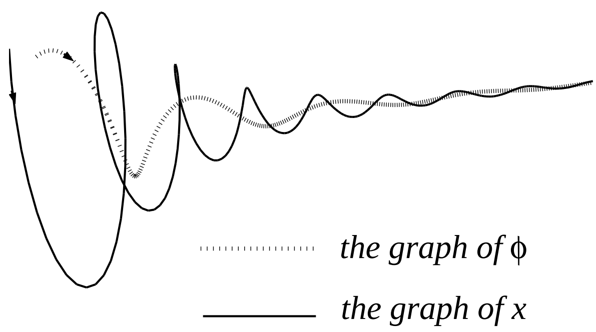

FIGURA 4.1.2

DEFINIŢIA 4.1.4. Soluţia $\phi : \mathbb{R}_+ \to \Omega$ a sistemului (4.1.1) se numeşte *uniform asimptotic stabilă* dacă ea este uniform stabilă şi există $\mu > 0$ astfel încât pentru orice $a \geq 0$ şi orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi - \phi(a)\| \leq \mu$:

(i) unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a sistemului (4.1.1) care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $a(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $a \geq 0$, orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi - \phi(a)\| \leq \mu$ şi orice $t \geq a + a(\varepsilon)$ avem

$$\|x(t, a, \xi) - \phi(t)\| \leq \varepsilon.$$

OBSERVAŢIA 4.1.1. Toate cele patru concepte de stabilitate definite mai sus se referă la proprietăţi ale unei soluţii a sistemului (4.1.1) şi nu la proprietăţi ale sistemului. Mai precis există sisteme care posedă atât soluţii stabile cât şi soluţii instabile. Într-adevăr, să considerăm ecuaţia diferenţială

$$x' = ax(p - x),$$

unde $a > 0$ şi $p > 0$ sunt constante. După cum am văzut în secţiunea 4 din capitolul 1, această ecuaţie descrie răspândirea unei boli într-o populaţie cu p indivizi, $x(t)$ reprezentând numărul de indivizi infectaţi la momentul t. Reamintim că pentru orice $\tau \geq 0$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}$ unica soluţie globală $x(\cdot, \tau, \xi) : [\,\tau, +\infty) \to \mathbb{R}$ a acestei ecuaţii care satisface $x(\tau, \tau, \xi) = \xi$ este

$$x(t, \tau, \xi) = \frac{p\xi e^{ap(t-\tau)}}{p + \xi(e^{ap(t-\tau)} - 1)}$$

pentru $t \in [\,\tau, +\infty)$. Este uşor de observat că, dintre cele două soluţii staţionare ale ecuaţiei $x = 0$ şi $x = p$, prima este instabilă, iar cea de a doua este uniform stabilă. Reformulând această observaţie în termenii fenomenului modelat, putem afirma că, într-un sistem biologic izolat, starea de sănătate ($x = 0$) este fragilă la perturbări, adică instabilă, în timp ce starea de boală este uniform stabilă.

OBSERVAŢIA 4.1.2. Se constată imediat că orice soluţie ϕ a sistemului (4.1.1) care este uniform asimptotic stabilă este atât uniform stabilă cât şi asimptotic stabilă. De asemenea, orice soluţie uniform sau asimptotic stabilă este simplu stabilă. Subliniem că: (1) stabilitatea simplă nu implică stabilitatea uniformă; (2) noţiunile de stabilitate uniformă şi respectiv asimptotică sunt independente; (3) stabilitatea uniformă nu o implică pe cea uniform asimptotică. Vezi exemplul de mai jos.

EXEMPLUL 4.1.1. Pentru a demonstra punctul (1) din Observaţia 4.1.2, fie ecuaţia $x'(t) = a(t)x(t)$, unde

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left[t(\cos t)(1 - t\cos t)\right].$$

Este uşor de constatat că a satisface condiţia (1) din Problema 4.1 cu $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definită prin $M(t_0) = (t_0 \cos t_0 - \frac{1}{2})^2$ pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}_+$, dar nu satisface nici una dintre celelalte trei condiţii. Deci soluţia nulă a ecuaţiei de mai sus este simplu stabilă dar nu este nici uniform, nici asimptotic stabilă, ceea ce demonstrează (1).

Soluţia identic nulă a ecuaţiei $x' = 0$ este uniform stabilă dar nu este asimptotic stabilă şi cu atât mai puţin uniform asimptotic stabilă. Această observaţie demonstrează (3) şi faptul că stabilitatea uniformă nu o implică pe cea asimptotică. Pentru a completa demonstraţia punctului (2) din Observaţia 4.1.2 vom arăta că stabilitatea asimptotică nu o implică pe cea uniformă. În acest scop să considerăm ecuaţia $x'(t) = a(t)x(t)$, unde

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left[t\,(\sin t - \alpha t)\right]$$

pentru orice $t \geq 0$, unde $\alpha \in (0, 1/\pi)$. Lăsăm în seama cititorului să demonstreze că a satisface condiţia (3) din Problema 4.1 dar nu satisface condiţia (2) din aceeaşi problemă. Deci soluţia nulă a ecuaţiei este asimptotic stabilă dar nu este uniform stabilă.

OBSERVAŢIA 4.1.3. Prin transformarea $y = x - \phi$ studiul oricărui tip de stabilitate referitor la soluţia ϕ a sistemului (4.1.1) se reduce la studiul aceluiaşi tip de stabilitate referitor la soluţia identic nulă a sistemului

$$y'(t) = f(t, y(t) + \phi(t)) - \phi'(t).$$

Din acest motiv, în tot ceea ce urmează, vom presupune că $0 \in \Omega$, $f(t, 0) = 0$ şi ne vom limita numai la studiul stabilităţii soluţiei identic nule a sistemului (4.1.1).

Un *punct staţionar* sau *punct de echilibru* pentru sistemul (4.1.1) este un element $x^* \in \Omega$ cu proprietatea $f(t, x^*) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Evident, dacă x^* este un punct staţionar pentru sistemul (4.1.1), funcţia $x \equiv x^*$ este o soluţie constantă a sa, numită *soluţie staţionară*. Să observăm că soluţia identic nulă a sistemului (4.1.1) este de fapt o soluţie staţionară sau un punct de echilibru pentru sistem în accepţiunea precizată anterior. În cazul sistemelor autonome, adică a sistemelor pentru care f nu depinde în mod explicit de variabila $t \in \mathbb{R}_+$, are loc următorul rezultat de comportare la infinit a soluţiilor sistemului (4.1.1). Menţionăm că un rezultat foarte asemănător a fost stabilit în Secţiunea 4 a capitolului 3 pe parcursul demonstraţiei lemei **??**.

TEOREMA 4.1.1. *Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă şi fie $x : [\,a, +\infty) \to \Omega$ o soluţie a sistemului* (4.1.1). *Dacă există*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*$$

şi $x^* \in \Omega$, atunci x^* este un punct de echilibru pentru sistemul (4.1.1).

Demonstraţie. Din teorema lui LAGRANGE aplicată componentei x_i a soluţiei pe intervalul $[\,m, m + 1\,]$, cu $m \in \mathbb{N} \cap [\,a, +\infty)$ şi $i = 1, 2 \ldots, n$, rezultă că există θ_{im} în $(m, m + 1)$ astfel încât

$$x_i(m + 1) - x_i(m) = x_i'(\theta_{im}) = f_i(x(\theta_{im}))$$

pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ şi $m \in \mathbb{N} \cap [\,a, +\infty)$. Cum $\lim_m (x_i(m + 1) - x_i(m)) = 0$ şi $\lim_m f_i(x(\theta_{im})) = f_i(x^*)$ urmează că

$$\lim_{t \to +\infty} f_i(x(t)) = f_i(x^*) = 0$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ şi ca atare $f(x^*) = 0$. Demonstraţia este încheiată. □

Pentru simplitate vom relua definiţiile anterioare în cazul particular $\phi \equiv 0$.

DEFINIŢIA 4.1.5. Soluţia nulă a sistemului (4.1.1) se numeşte *simplu stabilă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $a \geq 0$ există $\delta(\varepsilon, a) > 0$ astfel încât pentru orice $\xi \in \Omega$ care satisface $\|\xi\| \leq \delta(\varepsilon, a)$:

(i) unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a sistemului (4.1.1) care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi

(ii) $\|x(t, a, \xi)\| \leq \varepsilon$ pentru orice $t \in [\,a, +\infty)$.

DEFINIŢIA 4.1.6. Soluţia nulă a sistemului (4.1.1) se numeşte *uniform stabilă* dacă ea este simplu stabilă şi $\delta(\varepsilon, a)$ din Definiţia 4.1.1 poate fi ales independent de $a \geq 0$.

DEFINIŢIA 4.1.7. Soluţia nulă a sistemului (4.1.1) se numeşte *asimptotic stabilă* dacă ea este simplu stabilă şi în plus pentru orice $a \geq 0$ există $\mu(a) > 0$ astfel încât pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \leq \mu(a)$:

(i) unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a sistemului (4.1.1) care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi

(ii) $\lim_{t \to +\infty} \|x(t, a, \xi)\| = 0$.

DEFINIŢIA 4.1.8. Soluţia nulă a sistemului (4.1.1) se numeşte *uniform asimptotic stabilă* dacă ea este uniform stabilă şi există $\mu > 0$ astfel încât pentru orice $a \geq 0$ şi orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \leq \mu$:

(i) unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a sistemului (4.1.1) care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $a(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $a \geq 0$, orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \leq \mu$ şi orice $t \geq a + a(\varepsilon)$ avem

$$\|x(t, a, \xi)\| \leq \varepsilon.$$

Încheiem acest paragraf cu definiţia unui concept de stabilitate care, de această dată, descrie o proprietate a sistemului (4.1.1) şi nu a unei soluţii.

DEFINIŢIA 4.1.9. Sistemul (4.1.1) se numeşte *global asimptotic stabil* dacă pentru orice $a \geq 0$ şi orice $\xi \in \Omega$ unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a sa care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită pe $[\,a, +\infty)$ şi $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t, a, \xi) = 0$.

2. Stabilitatea sistemelor liniare

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta mai multe rezultate referitoare la diversele tipuri de stabilitate în cazul particular al sistemelor diferenţiale liniare. Mai precis, să considerăm sistemul

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t), \tag{4.2.1}$$

unde $\mathcal{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ este o matrice ale cărei elemente a_{ij} sunt funcţii continue de la $\mathbb{R}_+$ în $\mathbb{R}$.

TEOREMA 4.2.1. *Soluţia nulă a sistemului* (4.2.1) *este simplu stabilă* (*asimptotic stabilă*), (*uniform stabilă*), (*uniform asimptotic stabilă*) *dacă şi numai dacă orice soluţie saturată a sa este simplu stabilă* (*asimptotic stabilă*), (*uniform stabilă*), (*uniform asimptotic stabilă*).

Demonstraţie. Dacă $x = \phi$ este o soluţie saturată a sistemului (4.2.1), prin transformarea $y = x - \phi$, aceasta este dusă în soluţia saturată $y \equiv 0$. Concluzia teoremei rezultă din simpla observaţie că ϕ satisface condiţiile Definiţiei 4.1.1, (4.1.2 sau 4.1.3 sau 4.1.4) dacă şi numai dacă $y \equiv 0$ satisface condiţiile Definiţiei 4.1.5, (4.1.6 sau 4.1.7 sau 4.1.8). $\square$

OBSERVAŢIA 4.2.1. Conform Teoremei 4.2.1, în cazul sistemelor liniare, stabilitatea unei soluţii saturate este echivalentă cu stabilitatea oricărei soluţii saturate. De aceea, în acest cadru, vom vorbi despre stabilitatea sau instabilitatea sistemului înţelegând prin aceasta stabilitatea sau instabilitatea soluţiei nule (sau a oricărei alte soluţii saturate).

Continuăm cu un rezultat fundamental referitor la stabilitatea simplă.

TEOREMA 4.2.2. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:
(i) *sistemul* (4.2.1) *este simplu stabil*;
(ii) *sistemul* (4.2.1) *are un sistem fundamental de soluţii mărginite pe* $\mathbb{R}_+$;
(iii) *toate soluţiile saturate ale sistemului* (4.2.1) *sunt mărginite pe* $\mathbb{R}_+$;
(iv) *toate matricele fundamentale ale sistemului* (4.2.1) *sunt mărginite pe* $\mathbb{R}_+$;
(v) *sistemul* (4.2.1) *are o matrice fundamentală mărginită pe* $\mathbb{R}_+$.

Demonstraţie. Dacă (4.2.1) este simplu stabil, atunci pentru $\varepsilon = 1$ şi $a = 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ cu $\|\xi\| \leq \delta$, unica soluţie saturată $x(\cdot, 0, \xi)$ a sistemului (4.2.1) satisface

$$\|x(t, 0, \xi)\| \leq 1$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Luând n vectori liniar independenţi din sfera $B(0, \delta)$ să observăm că cele n soluţii saturate, care au ca date iniţiale în $t = 0$ cei n vectori respectiv, sunt mărginite pe $\mathbb{R}_+$ şi formează un sistem fundamental de soluţii pentru (4.2.1). Deci (i) implică (ii). Dacă (4.2.1) are un sistem fundamental de soluţii mărginite pe $\mathbb{R}_+$, cum orice soluţie este o combinaţie liniară de elemente din sistemul fundamental, ea este mărginită şi ca atare (ii) implică (iii). Evident (iii) implică (iv) care la rândul său implică (v). În sfârşit, să considerăm o matrice fundamentală $\mathcal{X}(t)$ a sistemului (4.2.1) şi să reamintim că, pentru orice $a \geq 0$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a sistemului (4.2.1) este dată de

$$x(t, a, \xi) = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(a)\xi$$

pentru orice $t \geq a$. Presupunând că are loc (v) putem alege $\mathcal{X}(t)$ astfel încât să existe $M > 0$ cu proprietatea

$$\|\mathcal{X}(t)\|_{\mathcal{O}} \leq M$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$, unde $\|\mathcal{X}(t)\|_{\mathcal{O}}$ este norma definită în Secţiunea 1 din appendix, normă care, conform observaţiei 6.1.1 este echivalentă cu norma euclidiană a matricei $\mathcal{X}(t)$, adică cu radicalul din suma pătratelor elementelor sale. Din ultimele două relaţii avem

$$\|x(t, a, \xi)\| \leq M\|\mathcal{X}^{-1}(a)\|_{\mathcal{O}}\|\xi\|$$

pentru orice $t \geq a$. În consecinţă, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $a \geq 0$ există

$$\delta(\varepsilon, a) = \varepsilon\left(M\|\mathcal{X}^{-1}(a)\|_{\mathcal{O}}\right)^{-1} > 0$$

astfel încât, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ cu $\|\xi\| \leq \delta(\varepsilon, a)$ să avem

$$\|x(t, a, \xi)\| \leq \varepsilon$$

pentru orice $t \geq a$. Deci (v) implică (i) şi demonstraţia este încheiată. □

În cazul liniar, cele două condiţii din Definiţia 4.1.7 a stabilităţii asimptotice nu sunt independente. Mai precis avem

PROPOZIŢIA 4.2.1. *Sistemul* (4.2.1) *este asimptotic stabil dacă şi numai dacă pentru orice* $a \geq 0$ *există* $\mu(a) > 0$ *astfel încât pentru orice* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *cu* $\|\xi\| \leq \mu(a)$ *să avem*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t, a, \xi) = 0.$$

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă. Pentru a demonstra suficienţa să observăm că, pentru $a = 0$ există $\mu > 0$ astfel încât toate soluţiile saturate ale sistemului (4.2.1), care au drept date iniţiale în $t = 0$ vectori din $B(0, \mu)$, au limita 0 pentru t tinzând la $+\infty$. În consecinţă, toate aceste soluţii sunt mărginite pe $\mathbb{R}_+$. În particular, orice sistem fundamental de soluţii ale sistemului (4.2.1) care au datele iniţiale în $t = 0$ din $B(0, \mu)$ este constituit numai din funcţii mărginite pe $\mathbb{R}_+$. Din echivalenţa afirmaţiilor (i) şi (ii) din Teorema 4.2.2 rezultă că (4.2.1) este simplu stabil, ceea ce completează demonstraţia. □

Rezultatul de bază cu privire la stabilitatea asimptotică a sistemelor liniare este

TEOREMA 4.2.3. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

(i) *sistemul* (4.2.1) *este asimptotic stabil*;
(ii) *sistemul* (4.2.1) *admite un sistem fundamental de soluţii care tind la* 0 *pentru* t *tinzând la* $+\infty$;
(iii) *sistemul* (4.2.1) *este global asimptotic stabil*;
(iv) *norma oricărei matrici fundamentale a sistemului* (4.2.1) *tinde la* 0 *pentru* t *tinzând la* $+\infty$;
(v) *există o matrice fundamentală a sistemului* (4.2.1) *a cărei normă tinde la* 0 *pentru* t *tinzând la* $+\infty$.

Demonstraţie. Dacă (4.2.1) este asimptotic stabil pentru $a = 0$ există $\mu > 0$ astfel încât, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ cu $\|\xi\| \leq \mu$, unica soluţie saturată $x(\cdot, 0, \xi)$ a sistemului (4.2.1), care satisface $x(0, 0, \xi) = \xi$, tinde la 0 pentru t tinzând la $+\infty$. Să considerăm un sistem fundamental de soluţii ale lui (4.2.1) format din funcţii care în $t = 0$ au drept valori n vectori liniar independenţi din $B(0, \mu)$, şi să observăm că, din modul în care a fost ales $\mu > 0$, acest sistem conţine numai funcţii cu limita 0 la $+\infty$. Deci (i) implică (ii). Dacă (4.2.1) admite un sistem fundamental de soluţii care tind la 0 pentru t tinzând la $+\infty$, atunci orice soluţie a lui (4.2.1) va avea aceeaşi proprietate fiind o combinaţie liniară de elemente din sistemul fundamental considerat. Deci (ii) implică (iii). Evident (iii) implică (iv) care la rândul său implică (v). În sfârşit, dacă $\mathcal{X}(t)$ este o matrice fundamentală a sistemului (4.2.1) cu

$$\lim_{t\to+\infty}\|\mathcal{X}(t)\|_{\mathcal{O}}=0,$$

din formula de reprezentare a soluţiei: $x(t,a,\xi)=\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(a)\xi$ pentru orice $t\geq a$, deducem că orice soluţie saturată a sistemului (4.2.1) tinde la 0 pentru t tinzând la $+\infty$. Conform Propoziţiei 4.2.1, sistemul (4.2.1) este simplu stabil şi ca atare (v) implică (i). Demonstraţia este încheiată. □

TEOREMA 4.2.4. *Sistemul* (4.2.1) *este uniform stabil dacă şi numai dacă există o matrice fundamentală a sa* $\mathcal{X}(t)$ *şi există* $M>0$ *astfel încât*

$$\|\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)\|_{\mathcal{O}}\leq M \tag{4.2.2}$$

pentru orice $t,s\in\mathbb{R}_+$, $s\leq t$.

Demonstraţie. Pentru a demonstra suficienţa să presupunem că sistemul (4.2.1) are o matrice fundamentală care satisface (4.2.2). Fie $\xi\in\mathbb{R}^n$ şi $a\in\mathbb{R}_+$. Cum unica soluţie saturată a (4.2.1) $x(\cdot,a,\xi)$ este dată de

$$x(t,a,\xi)=\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(a)\xi,$$

din (4.2.2), rezultă

$$\|x(t,a,\xi)\|\leq\|\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(a)\|_{\mathcal{O}}\|\xi\|\leq M\|\xi\|$$

pentru orice $t\geq a$. Fie $\varepsilon>0$. Din inegalitatea precedentă rezultă că, pentru orice $\xi\in\Omega$ cu $\|\xi\|\leq\varepsilon M^{-1}$, avem

$$\|x(t,a,\xi)\|\leq\varepsilon$$

pentru orice $t\geq a$. Ca atare (4.2.1) este uniform stabil.

Pentru necesitate să presupunem că (4.2.1) este uniform stabil. Atunci, pentru $\varepsilon=1$ există $\delta>0$ astfel încât, pentru orice $a\in\mathbb{R}_+$ şi orice $\xi\in\Omega$ cu $\|\xi\|\leq\delta$, unica soluţie saturată $x(\cdot,a,\xi)$, a (4.2.1) care satisface $x(a,a,\xi)=\xi$, verifică inegalitatea

$$\|x(t,a,\xi)\|\leq 1$$

pentru orice $t\geq a$. Fie $\mathcal{X}(t)$ acea matrice fundamentală a sistemului (4.2.1) care satisface $\mathcal{X}(0)=\mathcal{I}_n$. Fie $\lambda\in(0,\delta)$ şi $t,s\in\mathbb{R}_+$ cu $s\leq t$. Să observăm că matricea $\lambda\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)$ are drept coloană de rang $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ acea soluţie saturată x^i a sistemului (4.2.1) care pentru $t=s$ ia valoarea ξ^i, unde ξ^i este vectorul cu toate componentele nule exceptând cea de pe locul i care este λ. Atunci $\|\xi^i\|=\lambda<\delta$ şi de aceea $\|x^i(t)\|\leq 1$ pentru orice $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ şi orice $t\geq s$. Cum din Observaţia 6.1.1 avem

$$\lambda\|\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)\|_{\mathcal{O}}\leq\lambda\|\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)\|_e=\left(\sum_{i=1}^n\|x^i(t)\|^2\right)^{1/2}$$

pentru orice $t\geq s$, din inegalităţile precedente urmează

$$\|\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)\|_{\mathcal{O}}\leq\lambda^{-1}n^{1/2}$$

pentru orice $t,s\in\mathbb{R}_+$, $s\leq t$. Demonstraţia este încheiată. □

În privinţa stabilităţii uniform asimptotice demonstrăm

TEOREMA 4.2.5. *Sistemul* (4.2.1) *este uniform asimptotic stabil dacă şi numai dacă există o matrice fundamentală* $\mathcal{X}(t)$ *a sa care satisface*

$$\lim_{t-s\to+\infty}\|\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(s)\|_{\mathcal{O}}=0.$$

Demonstraţie. Să observăm că, (4.2.1) este uniform asimptotic stabil dacă şi numai dacă el este uniform stabil şi asimptotic stabil. Concluzia rezultă din Teoremele 4.2.3 şi 4.2.4. □

Fie acum sistemul

$$x' = \mathcal{A}x \tag{4.2.3}$$

în care $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ este o matrice constantă.

DEFINIŢIA 4.2.1. Matricea $\mathcal{A}$ se numeşte *hurwitziană*[1] dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ au partea reală strict negativă.

LEMA 4.2.1. *Dacă $\mathcal{A}$ este hurwitziană atunci există constantele $M \geq 1$ şi $\omega > 0$ astfel încât*

$$\|e^{t\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}} \leq Me^{-t\omega}$$

pentru orice $t \geq 0$.

Demonstraţie. Conform Teoremei 3.4.1 de structură a matricei $e^{t\mathcal{A}}$ toate elementele acesteia sunt de forma $\sum_{k=1}^{s} \left[p_k(t)e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t) + q_k(t)e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t)\right]$, unde $\alpha_k + i\beta_k$ este o rădăcină de ordin de multiplicitate m_k a ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$, iar p_k şi q_k sunt polinoame cu coeficienţi reali, de grad cel mult $m_k - 1$. Dacă $\mathcal{A}$ este hurwitziană atunci există $\omega > 0$ astfel încât orice rădăcină $\alpha + i\beta$ a ecuaţiei caracteristice să satisfacă

$$\alpha < -\omega.$$

Într-adevăr, fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ rădăcinile ecuaţiei caracteristice ordonate după părţile lor reale: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \alpha_k < 0$. Atunci $\omega = -\frac{1}{2}\alpha_k$ satisface proprietatea cerută. Avem atunci

$$\|e^{t\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}} = e^{-t\omega}\|\mathcal{B}(t)\|_{\mathcal{O}},$$

unde toate elementele matricei $\mathcal{B}$ sunt de forma

$$\sum_{k=1}^{s} \left[p_k(t)e^{-t\gamma_k}\cos(\beta_k t) + q_k(t)e^{-t\gamma_k}\sin(\beta_k t)\right],$$

unde $\gamma_k > 0$, iar p_k şi q_k sunt polinoame. Ca atare există $M \geq 1$ astfel încât

$$\|\mathcal{B}(t)\|_{\mathcal{O}} \leq M$$

pentru orice $t \geq 0$. Această inegalitate impreună cu relaţia de mai sus completează demonstraţia. $\square$

TEOREMA 4.2.6. *Dacă sistemul* (4.2.3) *este asimptotic stabil atunci matricea $\mathcal{A}$ este hurwitziană. Dacă matricea $\mathcal{A}$ este hurwitziană atunci sistemul* (4.2.3) *este global şi uniform asimptotic stabil.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra prima afirmaţie să presupunem pentru reducere la absurd că, deşi sistemul (4.2.3) asimptotic stabil, matricea $\mathcal{A}$ nu este hurwitziană. Aceasta înseamnă că există cel puţin o rădăcină a ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$ având partea reală nenegativă. Fie $\lambda = \alpha + i\beta$ această rădăcină. Atunci matricea $\mathcal{A}$, gândită ca un element din $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ are cel puţin un vector propriu $z \in \mathbb{C}^n$ corespunzător valorii proprii λ. Să notăm cu $z = \xi + i\eta$, unde $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, acest vector. Dacă valoarea proprie λ este reală atunci vectorul propriu corespunzător are toate componentele reale ($z = \xi$) şi în acest caz funcţia $x(t, 0, c\xi) = ce^{\lambda t}\xi$, cu $c \in \mathbb{R}$, este soluţie a sistemului (4.2.3). Cum ξ, în calitate de vector propriu al matricei $\mathcal{A}$, este nenul iar $\lambda \geq 0$, rezultă că pentru orice $c \in \mathbb{R}^*$ funcţia $x(\cdot, 0, c\xi)$ nu poate tinde în normă la 0. Ca atare, soluţia nulă a sistemului (4.2.3) nu poate fi asimptotic stabilă. Dacă λ nu este real atunci conjugatul său $\overline{\lambda}$ este de asemenea valoare proprie pentru $\mathcal{A}$ iar $\overline{z} = \xi - i\eta$ este un vector propriu corespunzător. Mai mult să observăm că $\eta \neq 0$. Într-adevăr dacă η ar fi nul, atunci $z \in \mathbb{R}^n$ şi din $\mathcal{A}z = \lambda z$ ar rezulta $\lambda \in \mathbb{R}$, în contradicţie cu

[1] Denumirea provine de la numele matematicianului german ADOLF HURWITZ care a trăit între anii 1859-1919 şi care a definit şi studiat această clasă de matrice.

presupunerea făcută. În aceste condiţii, să observăm că funcţia $y(\cdot, 0, c\eta) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definită prin

$$y(t, 0, c\eta) = \frac{c}{2i}\left(e^{\lambda t}z - e^{\overline{\lambda}t}\overline{z}\right) = ce^{\alpha t}(\sin\beta t \cdot \xi + \cos\beta t \cdot \eta)$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}^*$, este nenulă fiind partea imaginară a funcţiei $ce^{\lambda t}z$ care în $t = 0$ are valoarea $c\eta$. Dar această funcţie $y(\cdot, 0, c\eta)$, care este soluţie a sistemului (4.2.3), nu poate tinde în normă la 0 pentru nici o valoare a lui $c \in \mathbb{R}^*$. Deci soluţia nulă a sistemului nu este asimptotic stabilă. Contradicţia la care am ajuns poate fi înlăturată numai dacă $\mathcal{A}$ este hurwitziană. Demonstraţia necesităţii este completă.

Pe de altă parte, dacă matricea $\mathcal{A}$ este hurwitziană din Lema 4.2.1 rezultă că

$$\lim_{t-s\to+\infty} \|e^{t\mathcal{A}}e^{-s\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}}\|e^{(t-s)\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}} = 0,$$

relaţie care, în virtutea Teoremei 4.2.5, încheie demonstraţia suficienţei. □

OBSERVAŢIA 4.2.2. Teorema 4.2.6 arată că, pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, stabilitatea asimptotică este echivalentă cu stabilitatea globală şi uniform asimptotică.

O completare utilă a Teoremei 4.2.6 este

TEOREMA 4.2.7. *Dacă ecuaţia caracteristică* $\det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$ *are măcar o rădăcină cu partea reală strict pozitivă atunci sistemul* (4.2.3) *este instabil. Dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice au partea reală nenegativă şi celulele* JORDAN *corespunzătoare tuturor rădăcinilor având partea reală egală cu* 0 *sunt de ordinul întâi, atunci sistemul* (4.2.3) *este uniform stabil. În particular, dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice au partea reală nenegativă şi toate rădăcinile având partea reală egală cu* 0 *sunt simple, atunci sistemul* (4.2.3) *este uniform stabil.*

Demonstraţie. Reluând consideraţiile din demonstraţia necesităţii Teoremei 4.2.6, deducem că, dacă $\alpha + i\beta$ este o rădăcină a ecuaţiei caracteristice şi $\xi + i\eta \in \mathbb{C}^n$ este un vector propriu corespunzător, atunci, cel puţin una dintre funcţiile $x(t, 0, c\xi) = ce^{\lambda t}\xi$ sau $y(t, 0, c\eta) = ce^{\alpha t}(\sin\beta t \cdot \xi + \cos\beta t \cdot \eta)$ cu $c \in \mathbb{R}^*$ este soluţie neidentic nenulă pentru sistem. Evident, dacă $\alpha > 0$, acea soluţie este nemărginită. În conformitate cu Teorema 4.2.2 sistemul (4.2.3) este instabil. Dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice au partea reală nenegativă şi celulele JORDAN corespunzătoare celor cu partea reală egală cu 0 sunt de ordinul întâi, în conformitate cu formula (4.3) din Capitolul 4, $e^{t\mathcal{J}_p} = (1)$ şi aceasta deoarece, în acest caz, $\mathcal{E}_p = (0)$. În consecinţă toate elementele matricei $e^{t\mathcal{A}}$ sunt mărginite pe $\mathbb{R}_+$. Ca atare există $M > 0$ astfel încât $\|e^{t\mathcal{A}}e^{-s\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}} = \|e^{(t-s)\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}} \leq M$ pentru orice $t, s \in \mathbb{R}_+$, $s \leq t$. În virtutea Teoremei 4.4.5, sistemul (4.2.3) este uniform stabil. □

EXEMPLUL 4.2.1. Condiţia ca toate celulele JORDAN corespunzătoare rădăcinilor cu partea reală egală cu 0 să fie de ordinul întâi este mai puţin restrictivă decât condiţia ca toate aceste rădăcini să fie simple. Într-adevăr, rădăcinile ecuaţiei caracteristice corespunzătoare matricei $\mathcal{A}$, având forma JORDAN

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sunt $\lambda = 0$ şi $\lambda = -1$, ambele având ordinul de multiplicitate 2. Cu toate acestea, celulele JORDAN corespunzătoare rădăcinii duble 0 sunt de ordinul întâi. În acest caz matricea $e^{t\mathcal{A}}$ este

$$e^{t\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+t)e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Încheiem această secţiune cu o condiţie necesară şi suficientă ca o matrice $\mathcal{A}$ să fie hurwitziană sau, echivalent, ca un polinom cu coeficienţi reali să aibă toate rădăcinile cu partea reală strict negativă. Fie $p(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n$ un polinom cu coeficienţi reali. Acestui polinom îi asociem aşa numita matrice a lui HURWITZ

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \alpha_{2k-1} & \alpha_{2k-2} & \alpha_{2k-3} & \alpha_{2k-4} & \dots & \alpha_{2k-n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

unde $\alpha_i = 0$ dacă $i < 0$ sau $i > n$.

TEOREMA 4.2.8. (HURWITZ) *Un polinom $p(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n$ are toate rădăcinile cu partea reală strict negativă dacă şi numai dacă toţi minorii principali ai matricii lui* HURWITZ *asociate sunt pozitivi, adică*

$$D_1 = \alpha_1 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{vmatrix} > 0,\ \dots, D_n = \det(H) > 0.$$

Pentru demonstraţia acestei teoreme vezi S. NISTOR, I. TOFAN [**12**], p. 176.

3. Stabilitatea sistemelor perturbate

Fie Ω o vecinătate deschisă a lui $0 \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi local lipschitziană pe Ω cu $F(t, 0) = 0$ pentru orice $\mathbb{R}_+$. Fie $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi să considerăm sistemul

$$x' = \mathcal{A}x + F(t, x). \tag{4.3.1}$$

Deoarece în cele ce urmează acest sistem va fi gândit ca fiind provenit din sistemul liniar şi omogen

$$x' = \mathcal{A}x \tag{4.3.2}$$

prin adăugarea aşa-zisei *funcţii perturbatoare* $F(t, x)$, el va fi numit *sistem perturbat.*

În această secţiune, vom analiza modul în care proprietăţile de stabilitate ale sistemului (4.3.2) se vor transmite sistemului (4.3.1). După cum vom vedea, dacă (4.3.2) este asimptotic stabil şi F este "dominată" de $\mathcal{A}$, atunci soluţia nulă a sistemului (4.3.1) este asimptotic stabilă. Nu acelaşi lucru se va întâmpla în cazul stabilităţii simple care este fragilă la perturbări. Într-adevăr, (4.3.2) poate fi simplu stabil dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice au partea reală egală cu 0. Pe de altă parte, perturbări liniare oricât de mici pot conduce la un sistem liniar guvernat de o matrice pentru care măcar una dintre rădăcinile ecuaţiei caracteristice este strict pozitivă situaţie generatoare de instabilitate. De exemplu ecuaţia scalară $x'(t) = 0$ este simplu stabilă, în timp ce ecuaţia perturbată $x'(t) = \varepsilon x(t)$, cu $\varepsilon > 0$, este instabilă şi aceasta indiferent de ordinul de mărime al lui $\varepsilon > 0$.

Începem cu următorul rezultat fundamental.

TEOREMA 4.3.1. (POINCARÉ-LIAPUNOV) *Fie $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi $F : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi local lipschitziană pe Ω. Dacă există $M \geq 1$, $\omega > 0$ şi $L > 0$ astfel încât*

$$\|e^{t\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}} \leq Me^{-\omega t} \tag{4.3.3}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|F(t, x)\| \leq L\|x\| \tag{4.3.4}$$

pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ *şi*

$$LM - \omega < 0, \tag{4.3.5}$$

atunci soluţia nulă a sistemului (4.3.1) *este asimptotic stabilă.*

Demonstraţie. Fie $\xi \in \Omega$, $a \in \mathbb{R}_+$ şi fie $x(\cdot,a,\xi) : [\,a,T_m) \to \Omega$ unica soluţie saturată a sistemului (4.3.1) care satisface condiţia iniţială $x(a,a,\xi) = \xi$. Vom demonstra pentru început că, dacă $\|\xi\|$ este suficient de mică, atunci $x(\cdot,a,\xi)$ este definită pe $[\,a,+\infty)$. Pentru această să observăm că, din formula variaţiei constantelor (4.3.5), din Secţiunea 3 a capitolului 4, cu $b(t) = F(t,x(t))$ pentru $t \in [\,a,T_m)$, avem

$$x(t,a,\xi) = e^{(t-a)\mathcal{A}}\xi + \int_a^t e^{(t-s)\mathcal{A}} F(s,x(s,a,\xi))\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a,T_m)$. Din această relaţie deducem

$$\|x(t,a,\xi)\| \le \|e^{(t-a)\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}}\|\xi\| + \int_a^t \|e^{(t-s)\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}}\|F(s,x(s,a,\xi))\|\,ds$$

de unde, în virtutea condiţiilor (4.3.3) şi (4.3.4), rezultă

$$\|x(t,a,\xi)\| \le Me^{-\omega(t-a)}\|\xi\| + \int_a^t LMe^{-\omega(t-s)}\|x(s,a,\xi)\|\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a,T_m)$. Înmulţind inegalitatea de mai sus în ambii membri cu $e^{\omega t} > 0$ obţinem

$$e^{\omega t}\|x(t,a,\xi)\| \le Me^{\omega a}\|\xi\| + \int_a^t LMe^{\omega s}\|x(s,a,\xi)\|\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a,T_m)$. Notând cu $y : [\,a,T_m) \to \mathbb{R}_+$ funcţia definită prin

$$y(t) = e^{\omega t}\|x(t,a,\xi)\|$$

pentru $t \in [\,a,T_m)$, inegalitatea precedentă se rescrie echivalent sub forma

$$y(t) \le Me^{\omega a}\|\xi\| + \int_a^t LMy(s)\,ds$$

pentru orice $t \in [\,a,T_m)$. Din inegalitatea lui GRONWALL urmează

$$y(t) \le Me^{\omega a}\|\xi\|e^{LM(t-a)}$$

de unde, reamintind definiţia funcţiei y, deducem

$$\|x(t,a,\xi)\| \le M\|\xi\|e^{(LM-\omega)(t-a)} \tag{4.3.6}$$

pentru orice $t \in [\,a,T_m)$.

Fie acum $\rho > 0$ astfel încât $B(0,\rho) \subset \Omega$ şi fie $\mu(a) > 0$ definit prin

$$\mu(a) = \frac{\rho}{2M}.$$

Atunci, conform inegalităţii (4.3.6), pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \le \mu(a)$ avem

$$\|x(t,a,\xi)\| \le \frac{\rho}{2}$$

pentru orice $t \in [\,a,T_m)$. Presupunând că $T_m < +\infty$, din această inegalitate şi Propoziţia 2.5.1 rezultă că există

$$\lim_{t \uparrow T_m} x(t,a,\xi) = x^*$$

şi $x^* \in B(0,\frac{\rho}{2}) \subset \Omega$ relaţie care, în virtutea punctului (iii) din Teorema 2.5.3, contrazice faptul că $x(\cdot,a,\xi)$ este saturată. Această contradicţie poate fi eliminată numai dacă, pentru orice $\xi \in \Omega$ satisfăcând $\|\xi\| \le \mu(a)$, avem $T_m = +\infty$.

În sfârşit să observăm că, din cele demonstrate anterior şi din (4.3.6), rezultă că, pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \leq \mu(a)$, avem

$$\lim_{t\uparrow+\infty} x(t,a,\xi) = 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

O consecinţă utilă în aplicaţii este enunţată mai jos.

TEOREMA 4.3.2. *Fie $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice hurwitziană şi $F : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi local lipschitziană pe Ω. Dacă există $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât*

$$\|F(t,x)\| \leq \alpha(\|x\|)$$

pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\alpha(r)}{r} = 0$$

atunci soluţia nulă a sistemului (4.3.1) *este asimptotic stabilă.*

Demonstraţie. Cum $\mathcal{A}$ este hurwitziană există $M \geq 1$ şi $\omega > 0$ astfel încât să aibă loc (4.3.3). Să fixăm $L > 0$ cu proprietatea (4.3.5) şi să alegem $\delta > 0$ astfel încât

$$\alpha(r) \leq Lr$$

pentru orice $r \in [0,\delta)$. Considerând restricţia funcţiei F la $\mathbb{R}_+ \times \{x \in \Omega\,;\, \|x\| < \delta\}$ suntem în ipotezele Teoremei 4.3.1 şi demonstraţia este încheiată. □

Trecem acum la studiul stabilităţii prin *metoda primei aproximaţii*, metodă deosebit de eficientă în aplicaţii. Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă C^1 cu $f(0) = 0$ şi să considerăm sistemul

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{4.3.7}$$

care evident are soluţia identic nulă.

TEOREMA 4.3.3. *Dacă $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie de clasă C^1 cu $f(0) = 0$ şi cu matricea jacobiană $\mathcal{A} = f_x(0)$ hurwitziană, atunci soluţia nulă a sistemului*

(4.3.7)

este asimptotic stabilă.

Demonstraţie. Cum f este de clasă C^1 ea este diferenţiabilă şi ca atare

$$f(x) = f(0) + f_x(0)x + F(x) = \mathcal{A}x + F(x)$$

pentru orice $x \in \Omega$, unde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Suntem atunci în ipotezele Teoremei 4.3.2 cu

$$\alpha(r) = \sup\{\|f_x(\theta) - f_x(0)\|_{\mathcal{O}}\,;\ \theta \in \Omega,\ \|\theta\| \leq r\}$$

pentru $r \geq 0$. □

Următorul exemplu pune în evidenţă faptul oarecum surprinzător că, deşi consecinţă a Teoremei 4.3.1, Teorema 4.3.3 poate fi utilizată în situaţii în care Teorema 4.3.1 nu este direct aplicabilă.

Exemplul 4.3.1. Să considerăm ecuaţia lui Liénard

$$z'' + g'(z)z' + z = 0,$$

unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 cu $g(0) = 0$. Această ecuaţie poate fi rescrisă ca un sistem diferenţial de ordinul întâi

$$\begin{cases} z' = y - g(z) \\ y' = -z. \end{cases}$$

Sistemul de mai sus este de forma (4.3.1) cu $n = 2$, $x = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi

$$F(t, x) = \begin{pmatrix} -g(z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cum matricea $\mathcal{A}$ nu este hurwitziană condiţia (4.3.3) din Teorema 4.3.1 nu este îndeplinită şi deci Teorema 4.3.1 nu este aplicabilă direct.

Pe de altă parte, să observăm că sistemul anterior poate fi gândit şi ca un sistem de forma (4.3.7) în care funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este definită prin

$$f(x) = \begin{pmatrix} y - g(z) \\ -z \end{pmatrix}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$ şi a cărei matrice jacobiană în $(0, 0)$ este

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -g'(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cum această matrice este hurwitziană dacă $g'(0) > 0$, din Teorema 4.3.3 rezultă că, în acest caz ($g'(0) > 0$), soluţia nulă a sistemului de mai sus este asimptotic stabilă. Ca o consecinţă a acestui rezultat deducem că soluţia nulă a ecuaţiei Van der Pol, adică a ecuaţiei corespunzătoare cazului particular $g(z) = z - z^3$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$, este asimptotic stabilă.

Enunţăm, fără demonstraţie, o completare a Teoremei 4.3.3. Vezi I .G. Malkin [**24**], capitolul 4.

Teorema 4.3.4. *Fie* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie de clasă* C^1 *cu* $f(0) = 0$ *şi fie* $\mathcal{A} = f_x(0)$. *Dacă există* $\alpha > 1$, $M > 0$ *şi* $r > 0$ *astfel încât* $\|f(x) - \mathcal{A}x\| \leq M\|x\|^\alpha$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^n$ *cu* $\|x\| \leq r$ *şi cel puţin o rădăcină a ecuaţiei caracteristice* $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ *are partea reală strict pozitivă, atunci soluţia nulă a sistemului* (4.3.7) *este instabilă.*

Cazul în care, cel puţin una dintre rădăcinile caracteristice ale matricei $f_x(0)$ are partea reală 0, necesită o analiză a proprietăţilor diferenţialelor de ordin superior ale funcţiei f în $x = 0$.

4. Studiul stabilităţii cu ajutorul funcţiei Liapunov

O metodă de mare fineţe în stabilirea unor condiţii suficiente de stabilitate constă în construirea unei funcţii descrescătoare pe traiectoriile unui sistem diferenţial dat, funcţie care poate descreşte numai o dată cu norma argumentului. Sugerată de particularităţile evoluţiei unor fenomene mecanice în care această funcţie reprezintă energia potenţială a sistemului de particule aflate în mişcare, această metodă inventată de matematicianul rus Liapunov în anul 1892 se dovedeşte şi astăzi deosebit de eficace.

Fie Ω o vecinătate deschisă a originii în $\mathbb{R}^n$ şi fie $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi local lipschitziană pe Ω cu $f(t, 0) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Această din urmă condiţie ne arată că sistemul

$$x' = f(t, x) \tag{4.4.1}$$

admite drept soluţie funcţia $\varphi \equiv 0$.

DEFINIŢIA 4.4.1. O funcţie $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *pozitiv definită* pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dacă există o funcţie $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continuă, crescătoare cu $\omega(r) = 0$ dacă şi numai dacă $r = 0$, astfel încât

$$V(t, x) \geq \omega(\|x\|) \tag{4.4.2}$$

pentru orice $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$.

O funcţie $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *negativ definită* pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dacă $-V$ este pozitiv definită pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

DEFINIŢIA 4.4.2. O funcţie $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *funcţie* LIAPUNOV pentru sistemul (4.4.1) dacă:

(i) V este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ şi $V(t, 0) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$;
(ii) V este pozitiv definită pe $\mathbb{R}_+ \times \Omega$;
(iii) pentru orice $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ are loc

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x) \leq 0. \tag{4.4.3}$$

TEOREMA 4.4.1. *Dacă sistemul* (4.4.1) *admite o funcţie* LIAPUNOV *atunci soluţia sa nulă este simplu stabilă.*

Demonstraţie. Fie $a \in \mathbb{R}_+$, $\xi \in \Omega$ şi fie $x : [\,a, T_m) \to \Omega$ unica soluţie saturată a sistemului (4.4.1) care satisface condiţia $x(a, a, \xi) = \xi$. Vom arăta pentru început că, dacă $\|\xi\|$ este suficient de mică, atunci $T_m = +\infty$. Pentru aceasta să definim funcţia $g : [\,a, T_m) \to \mathbb{R}_+$ prin

$$g(t) = V(t, x(t, a, \xi))$$

pentru orice $t \in [\,a, T_m)$, unde V este o funcţie LIAPUNOV pentru sistemul (4.4.1). Evident g este de clasă C^1 pe $[\,a, T_m)$. În plus, din (4.4.3) rezultă

$$g'(t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t, a, \xi)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x(t, a, \xi)) \frac{dx_i}{dt}(t, a, \xi) =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t, a, \xi)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x(t, a, \xi)) f_i(t, x(t, a, \xi)) \leq 0$$

pentru orice $t \in [\,a, T_m)$. Deci g este descrescătoare şi ca atare $g(t) \leq g(a)$ pentru orice $t \in [\,a, T_m)$. Reamintind definiţia funcţiei g, această inegalitate se rescrie echivalent sub forma

$$V(t, x(t, a, \xi)) \leq V(a, \xi)$$

pentru orice $t \in [\,a, T_m)$. Deoarece V este pozitiv definită, din (4.4.2) şi din inegalitatea de mai sus deducem

$$\omega(\|x(t, a, \xi)\|) \leq V(a, \xi)$$

pentru orice $t \in [\,a, T_m)$.

Fie $\rho > 0$ cu $B(0, \rho) \subset \Omega$. Cum $V(a, \cdot)$ este continuă în 0 şi $V(a, 0) = 0$, pentru $\omega(\rho) > 0$, cu $\rho > 0$ ca mai sus, există $r = r(a) \in (0, \rho)$ astfel încât

$$V(a, \xi) < \omega(\rho)$$

pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \leq r$. Din această inegalitate şi din precedentă deducem

$$\omega(\|x(t, a, \xi)\|) < \omega(\rho)$$

pentru orice $t \in [a, T_m)$. Deoarece ω este crescătoare, rezultă

$$\|x(t, a, \xi)\| \leq \rho$$

pentru orice $t \in [a, T_m)$. Cum $B(0, \rho) \subset \Omega$ şi $x(\cdot, a, \xi)$ este saturată, această inegalitate probează că, pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \leq r(a)$, $T_m = +\infty$. În sfârşit, un raţionament similar ne arată că, pentru orice $a \in \mathbb{R}_+$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(a, \varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\|x(t, a, \xi)\| < \varepsilon$$

pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \leq \delta(a, \varepsilon)$ şi orice $t \geq a$. Deci soluţia nulă a sistemului (4.4.1) este stabilă ceea ce completează demonstraţia. □

TEOREMA 4.4.2. *Dacă sistemul* (4.4.1) *admite o funcţie* LIAPUNOV $V : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ *şi există funcţiile* $\lambda, \eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *continue, crescătoare cu* $\lambda(r) = \eta(s) = 0$ *dacă şi numai dacă* $r = s = 0$, *astfel încât*

$$V(t, x) \leq \lambda(\|x\|) \tag{4.4.4}$$

şi

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x) \leq -\eta(\|x\|) \tag{4.4.5}$$

pentru orice $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, *atunci soluţia sa nulă este asimptotic stabilă.*

Demonstraţie. În virtutea Teoremei 4.4.1 soluţia nulă a sistemului (4.4.1) este simplu stabilă. Ca atare, pentru orice $a \in \mathbb{R}_+$, există $\mu(a) > 0$ astfel încât, pentru orice $\xi \in \Omega$ cu $\|\xi\| \leq \mu(a)$, unica soluţie saturată a sistemului (4.4.1) $x(\cdot, a, \xi)$ care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită pe $[a, +\infty)$. Fie $x(\cdot, a, \xi) : [a, +\infty) \to \Omega$ o astfel de soluţie şi să definim funcţia $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ prin $g(t) = V(t, x(t, a, \xi))$ pentru $t \in [a, +\infty)$, unde V este o funcţie LIAPUNOV cu proprietăţile (4.4.4) şi (4.4.5). Funcţia g este de clasă C^1 şi

$$g'(t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t, a, \xi)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x(t, a, \xi)) \frac{dx_i}{dt}(t, a, \xi) =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t, a, \xi)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x(t, a, \xi)) f_i(t, x(t, a, \xi)) \leq -\eta(\|x(t, a, \xi)\|)$$

pentru orice $t \in [a, +\infty)$. Integrând această relaţie în ambii membri de la a la t deducem

$$\int_a^t \eta(\|x(s, a, \xi\|) \, ds + V(t, x(t, a, \xi)) \leq V(a, \xi),$$

pentru orice $t \in [a, +\infty)$. Cum atât η cât şi V sunt cu valori pozitive, această inegalitate ne asigură, pe de o parte, că integrala

$$\int_a^{+\infty} \eta(\|x(s, a, \xi)\|) \, ds$$

este convergentă şi, pe de altă parte, că există

$$\lim_{t \uparrow +\infty} V(t, x(t, a, \xi)) = \ell$$

şi este finită. Să observăm acum că, din pozitivitatea funcţiei η şi din convergenţa integralei de mai sus, rezultă că există cel puţin un şir $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu

$$\begin{cases} \lim\limits_{n} t_n = +\infty \\ \\ \lim\limits_{n} \eta(\|x(t_n, a, \xi)\|) = 0. \end{cases}$$

Cum η este descrescătoare şi $\eta(r) = 0$ dacă şi numai dacă $r = 0$ urmează că

$$\lim_n \|x(t_n, a, \xi)\| = 0.$$

Reamintind că V satisface (4.4.4) şi că λ este continuă şi se anulează în 0, deducem că $\ell = 0$. Din observaţia de mai sus şi din (4.4.2) avem

$$\limsup_{t\uparrow+\infty} \omega(\|x(t, a, \xi)\|) \leq \lim_{t\uparrow+\infty} V(t, x(t, a, \xi) = 0$$

şi ca atare

$$\lim_{t\uparrow+\infty} \omega(\|x(t, a, \xi)\|) = 0.$$

Întrucât ω este crescătoare şi $\omega(r) = 0$ dacă şi numai dacă $r = 0$, relaţia anterioară poate avea loc numai dacă

$$\lim_{t\uparrow+\infty} \|x(t, a, \xi)\| = 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

În ceea ce priveşte stabilitatea global asimptotică a sistemului (4.4.1) avem:

TEOREMA 4.4.3. *Să presupunem că* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *şi că sistemul* (4.4.1) *admite o funcţie* LIAPUNOV $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *satisfăcând toate ipotezele Teoremei* 4.4.2. *Dacă, în plus, funcţia* $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *din Definiţia* 4.4.1 *are proprietatea*

$$\lim_{r\uparrow+\infty} \omega(r) = +\infty,$$

atunci sistemul (4.4.1) *este global asimptotic stabil.*

Demonstraţie. Menţionăm că singura deosebire faţă de demonstraţia Teoremei 4.4.2 constă în aceea că toate evaluările făcute acolo rămân valabile pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$. Subliniem că ipoteza impusă asupra funcţiei ω este utilă numai în demonstrarea faptului că, pentru orice $a \in \mathbb{R}_+$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, unica soluţie saturată a problemei Cauchy (4.4.1), $x(\cdot, a, \xi)$, este globală, adică definită pe $[\,a, +\infty)$. $\square$

Pentru sistemele diferenţiale autonome, adică pentru sistemele de tipul

$$x' = f(x), \tag{4.4.6}$$

unde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, putem căuta funcţia LIAPUNOV independentă de variabila t. Lema de mai jos precizează o condiţie suficientă pentru ca o funcţie $V : \Omega \to \mathbb{R}$ să fie pozitiv definită.

LEMA 4.4.1. *Dacă* $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* Ω, $V(0) = 0$ *şi* $V(x) > 0$ *pentru orice* $x \in \Omega$, $x \neq 0$, *atunci există o vecinătate a originii* $\Omega_0 \subset \Omega$ *astfel încât* V *să fie pozitiv definită pe* Ω_0.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că V este pozitiv definită pe o mulţime de forma $B(0, \rho) \subset \Omega$, cu $\rho > 0$ ales convenabil. În acest scop fie $\rho > 0$ astfel încât $B(0, \rho) \subset \Omega$ şi fie $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definită prin

$$\omega(r) = \begin{cases} \inf\{V(x);\ r \leq \|x\| \leq \rho\} & \text{pentru } 0 \leq r \leq \rho \\ \omega(\rho) & \text{pentru } r > \rho. \end{cases}$$

Este clar că funcţia ω este continuă şi crescătoare pe $\mathbb{R}_+$. În plus, $\omega(r) = 0$ dacă şi numai dacă $r = 0$. În consecinţă V este pozitiv definită, ceea ce completează demonstraţia lemei. $\square$

CONSECINŢA 4.4.1. *Dacă* $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *satisface*

(h) V *este de clasă* C^1 *pe* Ω *şi* $V(0) = 0$;
(hh) *pentru orice* $x \in \Omega$, $x \neq 0$, *avem* $V(x) > 0$;

(hhh) *pentru orice* $x \in \Omega$ *are loc*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \leq 0,$$

atunci există o vecinătate a originii $\Omega_0 \subset \Omega$ *astfel încât* V *să fie o funcţie* LIAPUNOV *pentru ecuaţia autonomă* (4.4.6) *pe* Ω_0.

În Figura 4.4.1 de mai jos este ilustrată imaginea traiectoriei unui sistem diferenţial autonom din $\mathbb{R}^2$ printr-o funcţie LIAPUNOV. Sensul precizat pe imagine corespunde sensului de creştere a variabilei t.

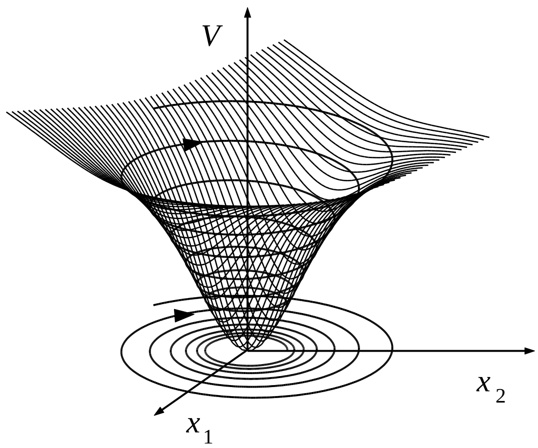

FIGURA 4.4.1

Eficienţa practică a Consecinţei 4.4.1 este ilustrată de următorul exemplu.

EXEMPLUL 4.4.1. Să se studieze stabilitatea soluţiei nule a sistemului diferenţial

$$\begin{cases} x_1' = -x_1x_2 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_1x_2. \end{cases}$$

Să observăm pentru început că sistemul de mai sus poate fi rescris ca o ecuaţie diferenţială vectorială

$$x' = f(x),$$

unde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este definită prin $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (-x_1x_2 - x_2, x_1 + x_1x_2)$, pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Evident f este de clasă C^∞ iar matricea sa jacobiană în 0 este

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ are rădăcinile $\pm i$ şi ca atare $\mathcal{A}$ nu este hurwitziană. Din acest motiv, nici unul dintre rezultatele de stabilitate demostrate în secţiunea precedentă nu poate fi utilizat în acest caz. Vom arăta în continuare că sistemul admite o funcţie LIAPUNOV definită pe o vecinătate convenabil aleasă a lui 0. În acest scop să observăm funcţia $V : (-1,1)\times(-1,1) \to \mathbb{R}$ definită prin $V(x) = x_1+x_2-\ln(1+x_1)-\ln(1+x_2)$ pentru orice $x = (x_1, x_2) \in (-1,1)\times(-1,1)$ este de clasă C^1, $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ pentru orice $x \neq 0$ şi

$$f_1(x)\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial V}{\partial x_2}(x) = 0$$

pentru orice $x \in (-1,1) \times (-1,1)$. Din consecinţa 4.4.1 rezultă că V este o funcţie LIAPUNOV pentru sistem şi ca atare, în virtutea Teoremei 4.4.1, soluţia nulă este simplu stabilă.

Încheiem cu observaţia că modul în care a fost determinată funcţia V va putea fi înţeles cu mai multă uşurinţă în capitolul următor când vom prezenta o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o funcţie V să rămână constantă pe traiectoriile unui sistem autonom. Din acest motiv nu intrăm în detalii care ne-ar abate de la esenţa problemei: faptul că Teorema 4.4.1 este utilă în situaţii în care Teorema 4.3.3 nu poate furniza nici o informaţie.

În cazul sistemelor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

$$x' = \mathcal{A}x, \tag{4.4.7}$$

unde $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, avem următoarea condiţie necesară şi suficientă de stabilitate globală şi uniform asimptotică.

TEOREMA 4.4.4. (LIAPUNOV) *Sistemul* (4.4.7) *este global şi uniform asimptotic stabil dacă şi numai dacă există o matrice pozitiv definită şi simetrică $\mathcal{P} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cu proprietatea*

$$\mathcal{A}^*\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} = -\mathcal{I}, \tag{4.4.8}$$

unde $\mathcal{A}^*$ este transpusa matricei $\mathcal{A}$.

Demonstraţie. Conform Teoremei 4.2.6 sistemul (4.4.7) este global şi uniform asimptotic stabil dacă şi numai dacă matricea $\mathcal{A}$ este hurwitziană. Pentru necesitate să presupunem deci că $\mathcal{A}$ este hurwitziană. Atunci, cum $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}) = \det(\mathcal{A}^*-\lambda\mathcal{I})$, rezultă că şi $\mathcal{A}^*$ este hurwitziană. Ca atare, din tema 4.2.1, există $M \geq 1$ şi $\omega > 0$ astfel încât

$$\|e^{t\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}} \leq Me^{-t\omega} \text{ şi } \|e^{t\mathcal{A}^*}\|_{\mathcal{O}} \leq Me^{-t\omega}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Putem defini atunci

$$\mathcal{P} = \int_0^{+\infty} e^{t\mathcal{A}^*}e^{t\mathcal{A}}dt$$

întrucât integrala din membrul drept este convergentă. Să observăm că matricea $\mathcal{P}$ este simetrică. Într-adevăr, cum $\left(e^{t\mathcal{A}}\right)^* = e^{t\mathcal{A}^*}$ şi $(\mathcal{B}\mathcal{C})^* = \mathcal{C}^*\mathcal{B}^*$, din punctul (ii) al lemei 6.1.3 avem

$$\mathcal{P}^* = \left(\int_0^{+\infty} e^{t\mathcal{A}^*}e^{t\mathcal{A}}dt\right)^* = \int_0^{+\infty}\left(e^{t\mathcal{A}^*}e^{t\mathcal{A}}\right)^* dt = \int_0^{+\infty} e^{t\mathcal{A}^*}e^{t\mathcal{A}}dt = \mathcal{P}.$$

Din punctul (iii) al aceleiaşi Leme 6.1.3 deducem

$$\langle\mathcal{P}x, x\rangle = \int_0^{+\infty}\langle e^{t\mathcal{A}^*}e^{t\mathcal{A}}x, x\rangle\, dt = \int_0^{+\infty}\|e^{t\mathcal{A}}x\|^2 dt.$$

Ca atare $\langle\mathcal{P}x, x\rangle > 0$ pentru orice $x \neq 0$ şi în consecinţă $\mathcal{P}$ este pozitiv definită. Pentru a încheia demonstraţia necesităţii să observăm că, din punctul (i) al Lemei 6.1.3 urmează că

$$\mathcal{A}^*\mathcal{P} = \int_0^{+\infty}\mathcal{A}^*e^{t\mathcal{A}^*}e^{t\mathcal{A}}dt = \int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(e^{t\mathcal{A}^*}\right)e^{t\mathcal{A}}dt,$$

de unde, integrând prin părţi, obţinem

$$\mathcal{A}^*\mathcal{P} = e^{t\mathcal{A}^*}e^{t\mathcal{A}}|_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} e^{t\mathcal{A}^*}\frac{d}{dt}\left(e^{t\mathcal{A}}\right)dt = -\mathcal{I} - \mathcal{P}\mathcal{A}.$$

Suficienţa rezultă observând că, dacă $\mathcal{P}$ este o soluţie pozitiv definită şi simetrică a ecuaţiei (4.4.8), atunci $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin $V(x) = \frac{1}{2}\langle\mathcal{P}x, x\rangle$ este o funcţie LIAPUNOV pentru sistemul (4.4.7). Într-adevăr, se constată cu uşurinţă că $\nabla V(x) = \mathcal{P}x$, iar din (4.4.8), rezultă că $\langle\mathcal{P}x, \mathcal{A}x\rangle = -\frac{1}{2}\|x\|^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Deci V este o funcţie LIAPUNOV pentru sistemul (4.4.7). În plus, deoarece $\mathcal{P}$ este pozitiv definită, există $\eta > 0$ astfel încât

$$V(x) \geq \eta\|x\|^2$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Din această observaţie şi din faptul că $V(x) \leq \frac{1}{2}\|\mathcal{P}\|_{\mathcal{O}}\|x\|^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, deducem că V satisface toate condiţiile Teoremei 4.4.3. Deci sistemul (4.4.7) este global şi asimptotic stabil. Conform Teoremei 4.2.6 matricea $\mathcal{A}$ este hurwitziană şi ca atare, tot din aceeaşi teoremă, urmează că sistemul (4.4.7) este global şi uniform asimptotic stabil. Demonstraţia este completă. □

Încheiem această secţiune cu o aplicaţie directă a rezultatelor stabilite anterior la studiul stabilităţii soluţiei nule pentru o clasă de sisteme autonome de tip disipativ.

Fie Ω o vecinătate deschisă a originii şi fie $\mathcal{A} : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Reamintim că $\mathcal{A}$ se numeşte disipativă dacă

$$\langle \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(y), x - y \rangle \leq 0$$

pentru orice $x, y \in \Omega$. Să considerăm ecuaţia autonomă

$$x' = \mathcal{A}(x). \tag{4.4.9}$$

TEOREMA 4.4.5. *Dacă $\mathcal{A} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie continuă, disipativă, cu $\mathcal{A}(0) = 0$, atunci soluţia nulă a sistemului* (4.4.9) *este simplu stabilă. Dacă, în plus, $\Omega = \mathbb{R}^n$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$*

$$\langle \mathcal{A}(x), x \rangle < 0,$$

atunci sistemul (4.4.9) *este global asimptotic stabil, adică, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$ avem*

$$\lim_{t \uparrow +\infty} S(t)\xi = 0.$$

Demonstraţie. Din faptul că $\mathcal{A}$ este disipativă şi $\mathcal{A}(0) = 0$ rezultă că $V : \Omega \to \mathbb{R}$ definită prin $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ pentru orice $x \in \Omega$ este o funcţie LIAPUNOV pentru sistemul (4.4.9). Într-adevăr, V este de clasă C^1, $V(0) = 0$ şi este pozitiv definită, funcţia ω fiind în acest caz definită prin $\omega(r) = \frac{1}{2}r^2$ pentru $r \in \mathbb{R}$. În plus, cum, pentru orice $x \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i(x) x_i = \langle \mathcal{A}(x), x \rangle,$$

din disipativitatea funcţiei $\mathcal{A}$ şi din condiţia $\mathcal{A}(0) = 0$ deducem că V, definită ca mai sus este o funcţie LIAPUNOV pentru sistemul (4.4.9). Din această observaţie şi din Teorema 4.4.1 rezultă că soluţia nulă a sistemului (4.4.9) este simplu stabilă. Dacă în plus $\Omega = \mathbb{R}^n$ şi $\langle \mathcal{A}(x), x \rangle < 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ cu $x \neq 0$, atunci, conform lemei 4.4.1, funcţiile $\lambda, \eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite prin $\lambda(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ şi $\eta(x) = -\langle \mathcal{A}(x), x \rangle$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ satisfac toate condiţiile din Teorema 4.4.3. Demonstraţia este încheiată. □

5. Exerciţii şi probleme propuse spre rezolvare

PROBLEMA 4.1. *Se consideră ecuaţia diferenţială scalară $x'(t) = a(t)x(t)$, $t \geq 0$, unde $a : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă. Să se demonstreze că:*

(1) *soluţia nulă este simplu stabilă dacă şi numai dacă există o funcţie $M : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât:*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \leq M(t_0)$$

pentru orice $t_0 \geq 0$ şi orice $t \geq t_0$;

(2) *soluţia nulă este uniform stabilă dacă şi numai dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât:*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \leq M$$

pentru orice $t_0 \geq 0$ şi orice $t \geq t_0$;

(3) *soluţia nulă este asimptotic stabilă dacă şi numai dacă*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{0}^{t} a(s)\, ds = -\infty\,;$$

(4) *soluţia nulă este uniform asimptotic stabilă dacă şi numai dacă există* $K \geq 0$ *şi* $\alpha > 0$ *astfel încât*

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \leq K - \alpha(t - t_0)$$

pentru orice $t_0 \geq 0$ *şi orice* $t \geq t_0$.

(C. CORDUNEANU [**3**], p. 117)

EXERCIŢIUL 4.1. *Să se studieze stabilitatea soluţiei nule a următoarelor ecuaţii diferenţiale scalare*

$$\begin{array}{lll} (1)\ x' = x. & (2)\ x' = 0. & (3)\ x' = -x. \\ (4)\ x' = -2x + \sin x. & (5)\ x' = x^2. & (6)\ x' = -x^2. \\ (7)\ x' = -\operatorname{tg} x. & (8)\ x' = -\sin x. & (9)\ x' = -x + x^2 \end{array}$$

EXERCIŢIUL 4.2. *Să se studieze stabilitatea următoarelor sisteme diferenţiale liniare de ordinul întâi*:

$$(1)\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2. \end{cases} \quad (2)\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1. \end{cases} \quad (3)\begin{cases} x_1' = x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2. \end{cases} \quad (5)\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 3x_2. \end{cases} \quad (6)\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

$$(7)\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_1. \end{cases} \quad (8)\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_3 + x_1 \\ x_3' = x_1 + x_2. \end{cases} \quad (9)\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 \\ x_2' = x_3 - x_1 \\ x_3' = x_1 - x_2. \end{cases}$$

PROBLEMA 4.2. *Fie* $\omega > 0$ *şi* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă absolut integrabilă pe* $[0, +\infty)$. *Să se demonstreze că orice soluţie globală a ecuaţiei* $x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$, $t \geq 0$, *este mărginită pe* $[0, +\infty)$. (C. CORDUNEANU [**3**], p. 152)

PROBLEMA 4.3. *Fie* $\omega > 0$ *şi* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă absolut integrabilă pe* $[0, +\infty)$. *Să se demonstreze că soluţia nulă a ecuaţiei* $x''(t) + [\omega^2 + f(t)]x(t) = 0$, $t \geq 0$, *este uniform stabilă.* (C. CORDUNEANU [**3**], p. 152)

PROBLEMA 4.4. *Fie* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *o matrice hurwitziană. Fie* $\mathcal{B} : [0, +\infty) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *o matrice continuă cu* $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\mathcal{B}(t)\|_{\mathcal{O}} = 0$. *Să se demonstreze că soluţia nulă a sistemului* $x'(t) = [\mathcal{A} + \mathcal{B}(t)]x(t)$, $t \geq 0$, *este asimptotic stabilă.* (C. CORDUNEANU [**3**], p. 153)

PROBLEMA 4.5. *Fie* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *o matrice hurwitziană. Fie* $\mathcal{B} : [0, +\infty) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *o matrice continuă cu*

$$\int_0^{+\infty} \|\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{O}} ds < +\infty.$$

Să se demonstreze că există $k > 0$ *şi* $\alpha > 0$ *astfel încât orice soluţie* $x : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ *a sistemului* $x'(t) = [\mathcal{A} + \mathcal{B}(t)]x(t)$, $t \geq 0$, *satisface*

$$\|x(t)\| \leq k e^{-\alpha t} \|x(0)\|$$

pentru orice $t \geq 0$. *În particular soluţia nulă a sistemului de mai sus este asimptotic stabilă.* (A. HALANAY [**7**], p. 194)

PROBLEMA 4.6. *Fie* $\mathcal{A}_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, \ldots, m$. *Dacă* $\mathcal{A}_0$ *este hurwitziană atunci, pentru orice* $a > 0$ *există* $\delta(a) > 0$ *astfel încât, pentru orice* $\xi \in B(0, \delta(a))$, *unica soluţie globală* $x(\cdot, a, \xi)$ *a problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} x'(t) = (t^m \mathcal{A}_0 + t^{m-1}\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_m)x(t) \\ x(a) = \xi \end{cases}$$

satisface

$$\lim_{t\to+\infty} x(t,a,\xi) = 0.$$

PROBLEMA 4.7. *Fie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ şi local lipschitziană pe $\mathbb{R}$ şi fie $x(\cdot,\xi_i) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\xi_1 < \xi_2$, $i = 1,2$, soluţii ale ecuaţiei diferenţiale*

$$x' = f(t,x)$$

cu $x(0,\xi_i) = \xi_i$, $i = 1,2$ şi $\lim_{t\to+\infty} x(t,\xi_1) = \lim_{t\to+\infty} x(t,\xi_2) = x^* \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că oricare ar fi $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$, soluţia saturată a ecuaţiei de mai sus $x(\cdot,\xi)$, care satisface $x(0,\xi) = \xi$, este globală şi asimptotic stabilă. (V. GLĂVAN, V. GUŢU, A. STAHI [**6**], p. 178.)

PROBLEMA 4.8. *Fie $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie local lipschitziană cu $f(0) = 0$. Dacă toate soluţiile saturare ale ecuaţiei diferenţiale*

$$x' = f(x)$$

sunt globale şi mărginite pe $[0,+\infty)$ rezultă că soluţia nulă a ecuaţiei de mai sus este simplu stabilă? (V. GLĂVAN, V. GUŢU, A. STAHI [**6**], p. 179.)

PROBLEMA 4.9. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 cu $f(0) = 0$ şi având proprietatea că $f'(0) = \lambda > 0$. Atunci soluţia nulă a ecuaţiei $x' = f(x)$ nu este asimptotic stabilă.*

EXERCIŢIUL 4.3. *Să se studieze stabilitatea soluţiei nule a sistemelor diferenţiale neliniare de ordinul întâi:*

$$(1)\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2^2 \\ x_2' = -x_1^3 - 2x_2. \end{cases} \quad (2)\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2^5 \\ x_2' = -x_1^4 - 4x_2. \end{cases} \quad (3)\begin{cases} x_1' = -\sin x_1 + 5x_2 \\ x_2' = -x_1^3 - x_2. \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2^2 \\ x_2' = x_1x_2 - x_2. \end{cases} \quad (5)\begin{cases} x_1' = -\sin x_1 + x_2^2 \\ x_2' = -4x_1 - 5x_2. \end{cases} \quad (6)\begin{cases} x_1' = 2\,\mathrm{sh}\, x_2 \\ x_2' = -x_1^2 - 3x_2. \end{cases}$$

EXERCIŢIUL 4.4. *Să se studieze stabilitatea soluţiei nule a sistemelor diferenţiale neliniare de ordinul întâi:*

$$(1)\begin{cases} x_1' = -x_1^3 + x_2 \\ x_2' = -x_1 - 2x_2^3. \end{cases} \quad (2)\begin{cases} x_1' = -x_1^5 - 3x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2^3. \end{cases} \quad (3)\begin{cases} x_1' = -x_1 + 5x_2^3 \\ x_2' = -x_1^3 - 3x_2. \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2^2 \\ x_2' = x_1x_2 - x_2. \end{cases} \quad (5)\begin{cases} x_1' = -\sin x_1 + x_2 \\ x_2' = -4x_1 - 3\,\mathrm{tg}\, x_2. \end{cases} \quad (6)\begin{cases} x_1' = -2\,\mathrm{sh}\, x_1 + 4x_2^3 \\ x_2' = -x_1^3 - 2x_2. \end{cases}$$

CAPITOLUL 5

Integrale prime

Capitolul de faţă este consacrat introducerii şi studiului noţiunii de integrală primă pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. În primele două paragrafe sunt prezentate noţiunile şi rezultatele principale referitoare la această problemă în cazul sistemelor autonome şi respectiv neautonome. Paragraful al treilea este dedicat studiului ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare şi cvasi-liniare. Capitolul se încheie cu o secţiune de exerciţii şi probleme propuse spre rezolvare.

1. Integrale prime pentru sisteme autonome

Fie Ω o submulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, fie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă şi să considerăm sistemul autonom

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{5.1.1}$$

În anumite cazuri specifice, consideraţii uneori extra-matematice, legate de semnificaţiile fizice ale funcţiilor care intervin în sistemul (5.1.1), probează existenţa unor funcţii de clasă C^1, $U : \Omega \to \mathbb{R}$ care, deşi neconstante pe Ω, rămân constante pe traiectoriile sistemului (5.1.1). Determinarea unei familii funcţional independente de astfel de funcţii poate fi de un real folos în obţinerea de informaţii despre soluţiile sistemului (5.1.1) care, de cele mai multe ori, nu poate fi rezolvat explicit. Mai mult, cu cât o astfel de familie este mai amplă, cu atât şansele de rezolvare explicită a sistemului (5.1.1) cresc, din simplul motiv că, dintr-un set de relaţii de forma $U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, p$, cu U_i funcţional independente şi c_i constante, putem exprima (local) p componente ale lui x în funcţie de celelalte $n-p$. Ca atare sistemul (5.1.1) este echivalent (local) cu un sistem de $n-p$ ecuaţii cu $n-p$ funcţii necunoscute.

Pentru o mai bună înţelegere a consideraţiilor anterioare să analizăm următorul exemplu.

Exemplul 5.1.1. Să considerăm ecuaţia de ordinul al doilea

$$x''(t) = g(x(t)),$$

unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă. Această ecuaţie, dedusă din legea a doua a lui Newton, descrie mişcarea unui punct material de masă 1 sub acţiunea unei forţe centrale aplicate în origine a cărei intensitate în punctul de abscisă x este $g(x)$. Menţionăm că $x(t)$ este elongaţia, $x'(t)$ viteza şi $x''(t)$ acceleraţia punctului la momentul t. Reamintim că ecuaţia anterioară poate fi rescrisă echivalent ca un sistem de ordinul întâi de forma

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = g(x(t)). \end{cases}$$

Înmulţind cea de-a doua egalitate din acest sistem în ambii membri cu $y(t) = x'(t)$ şi adunând egalitatea astfel obţinută cu prima, deducem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(y^2\right)(t) = g(x(t))x'(t)$$

pentru orice t din intervalul $[0, T)$ de existenţă a soluţiei. Întegrând egalitatea de mai sus în ambii membri de la 0 la t obţinem

$$\frac{1}{2}y^2(t) - G(x(t)) = -G(x(0))$$

pentru orice $t \in [0, T)$, unde G este o primitivă a funcţiei g.

Ca atare funcţia $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$U(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - G(x)$$

pentru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, evident de clasă C^1 şi neconstantă pe $\mathbb{R}^2$, rămâne constantă pe traiectoriile sistemului.

Să observăm că egalitatea anterioară se rescrie sub forma echivalentă

$$\frac{1}{2}x'^2(t) - G(x(t)) = -G(x(0))$$

pentru orice $t \in [0, T)$, care afirmă că energia totală a punctului material rămâne constantă pe traiectorie.

Un avantaj al acestei observaţii poate fi acela de a putea reduce ordinul ecuaţiei cu o unitate exprimându-l fie pe x, fie pe x' în funcţie de celălalt din egalitatea $U(x, x') = c$, unde c este o constantă reală.

O altă situaţie întâlnită frecvent în aplicaţii este aceea în care rezolvarea explicită a unui sistem de ecuaţii diferenţiale este practic imposibilă, dar determinarea uneia dintre necunoscute în funcţie de celelalte este suficientă pentru obţinerea informaţiei dorite. Următorul exemplu este edificator în acest sens.

EXEMPLUL 5.1.2. Să considerăm sistemul pradă-răpitor

$$\begin{cases} x' = (a - ky)x \\ y' = -(b - hx)y \end{cases}$$

şi să presupunem că dorim să aflăm numărul de indivizi din specia răpitor la un moment dat $T > 0$. Pentru rezolvarea acestei probleme ar fi suficient să cunoaştem $x(0)$ şi $y(0)$ şi apoi să determinăm explicit soluţia problemei CAUCHY corespunzătoare. Din păcate, datorită neliniarităţii sistemului, această cale nu este uşor de parcurs. De aceea, se pune problema găsirii unui procedeu mai simplu de determinare a lui $y(T)$ care să nu angajeze rezolvarea explicită a problemei CAUCHY. În acest scop să presupunem că avem la dispoziţie mijloacele tehnice de a determina cu uşurinţă numărul $x(t)$ de indivizi din specia pradă în orice moment t al evoluţiei ei. Atunci, pentru determinarea lui $y(T)$, ar fi suficient să-l exprimăm pe y în funcţie de x, $x(0)$ şi $y(0)$. În cazul considerat acest lucru este realizabil deoarece, considerând y ca funcţie de clasă C^1 de x, obţinem din sistem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(b - hx)}{x(a - ky)}.$$

Această ecuaţie este cu variabile separabile şi are soluţia generală definită implicit de

$$hx + ky - b \ln x - a \ln y = c$$

unde $x > 0$, $y > 0$ şi $c \in \mathbb{R}$. În concluzie, pentru a-l determina pe $y(T)$, ar fi suficient să cunoaştem $x(0) = \xi$, $y(0) = \eta$ şi $x(T)$. În aceste condiţii, îl putem obţine pe $y(T)$ din ecuaţia

$$hx(T) + ky(T) - b \ln x(T) - a \ln y(T) = h\xi + k\eta - b \ln \xi - a \ln \eta.$$

Subliniem încă o dată faptul deosebit de important că, pentru soluţionarea acestei probleme prin metoda descrisă anterior, avem de determinat numai trei valori $x(0) = \xi$, $y(0) = \eta$ şi $x(T)$ urmând ca apoi, *fără a rezolva* problema CAUCHY corespunzătoare, să-l găsim pe $y(T)$ din ecuaţia de mai sus.

Aceste exemple simple sugerează introducerea următoarei definiţii.

DEFINIŢIA 5.1.1. Fie $\Omega_0 \subset \Omega$ nevidă şi deschisă. O funcţie $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrală primă* a sistemului (5.1.1) pe Ω_0 dacă

(i) $\nabla U(\xi) = 0$ are numai zerouri izolate $\xi \in \Omega_0$;
(ii) U este de clasă C^1 pe Ω_0;
(iii) oricare ar fi o soluţie $x : \mathbb{I} \to \Omega_0$ a sistemului (5.1.1) există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$U(x(t)) = c$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$.

Situaţia descrisă în Definiţia 5.1.1 este ilustrată în cazul $n = 2$ în Figura 5.1.1 de mai jos.

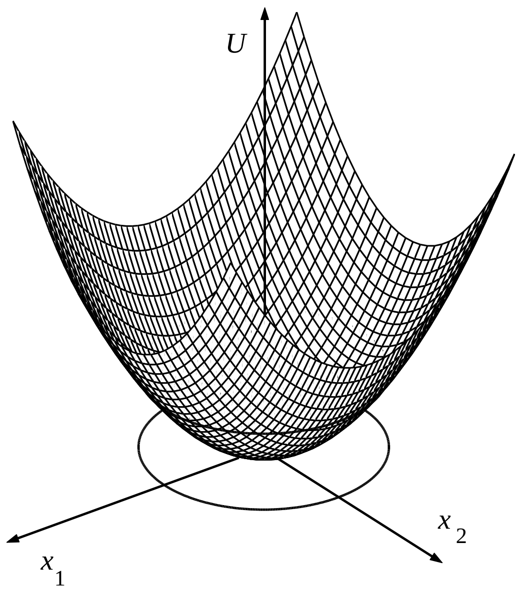

FIGURA 5.1.1

OBSERVAŢIA 5.1.1. Întrucât (5.1.1) este autonom, condiţia (iii) din Definiţia 5.1.1 este echivalentă cu

(iv) oricare ar fi o soluţie $x : [0, T) \to \Omega_0$ a sistemului (5.1.1) există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $U(x(t)) = c$ pentru orice $t \in [0, T)$.

TEOREMA 5.1.1. *Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă, Ω_0 o submulţime nevidă şi deschisă din Ω şi fie $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, neconstantă pe Ω_0. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca U să fi o integrală primă pentru* (5.1.1) *este ca*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\xi)\frac{\partial U}{\partial x_i}(\xi) = 0 \tag{5.1.2}$$

pentru orice $\xi \in \Omega_0$.

Demonstraţie. Necesitatea. Fie U o integrală primă a sistemului (5.1.1) pe Ω_0, fie $\xi \in \Omega_0$ şi fie $x(\cdot, 0, \xi) : [0, T_m) \to \Omega_0$ o soluţie saturată la dreapta a sistemului (5.1.1) care satisface $x(0, 0, \xi) = \xi$. Cum $U(x(t)) = c$ pentru orice $t \in [0, T_m)$, rezultă

$$0 = \frac{d}{dt}(U(x))(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t))\frac{dx_i}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t))f_i(x(t)).$$

Luând $t = 0$ în egalitatea de mai sus obţinem (5.1.2).

Suficienţa. Fie $x : [0, T) \to \Omega_0$ o soluţie a sistemului (5.1.1). Fie $g : [0, T) \to \mathbb{R}$, definită prin $g(t) = U(x(t))$ pentru orice $t \in [0, T)$. Evident g este de clasă C^1 şi în virtutea relaţiei (5.1.2) avem

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left(U(x)\right)(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)) \frac{dx_i}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)) f_i(x(t)) = 0.$$

Deci $U(x)$ este constantă pe $[0, T)$ şi demonstraţia este încheiată. □

Observaţia 5.1.2. Condiţia (5.1.2) are următoarea interpretare geometrică sugestivă. În esenţă ea afirmă că pentru orice $\xi \in \Omega_0$ pentru care $\nabla U(\xi) \neq 0$, vectorul $f(\xi)$ este tangent la suprafaţa de ecuaţie $U(x) = U(\xi)$. Într-adevăr, condiţia (5.1.2) exprimă faptul că $f(\xi)$ este ortogonal pe $\nabla U(\xi)$ care, la rândul său, este normal la suprafaţa $U(x) = U(\xi)$ în punctul ξ.

În lumina observaţiei anterioare, avem:

Teorema 5.1.2. *Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă, Ω_0 o submulţime nevidă şi deschisă din Ω şi fie $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 având proprietatea că $\nabla U(x) \neq 0$ pe Ω_0. Condiţia necesară şi suficientă ca, pentru orice $\xi \in \Omega_0$, orice traiectorie a ecuaţiei* (5.1.1) *care trece printr-un punct al suprafeţei de nivel constant*

$$\Sigma_\xi = \{x \in \Omega_0;\ U(x) = U(\xi)\}$$

să rămână în întregime pe această suprafaţă este ca, pentru orice $\xi \in \Omega_0$ şi orice $\eta \in \Sigma_\xi$, $f(\eta)$ să fie tangent la Σ_ξ în η.

Demonstraţie. Condiţia ca, pentru orice $\xi \in \Omega_0$, toate traiectoriile a ecuaţiei (5.1.1) care pleacă de pe suprafaţa Σ_ξ să rămână în întregime pe Σ_ξ este echivalentă cu condiţia ca funcţia U să fie constantă pe orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale (5.1.1) având data iniţială în Ω_0. În conformitate cu Teorema 5.1.1, această din urmă condiţie este echivalentă cu $\langle f(\xi), \nabla U(\xi)\rangle = 0$ care, la rândul ei, este echivalentă cu condiţia ca, pentru orice $\eta \in \Sigma_\xi$, $f(\eta)$ să fie tangent la Σ_ξ în η. Demonstraţia este încheiată. □

Reamintim că un punct $a \in \Omega$ se numeşte *punct staţionar*, sau *punct de echilibru* pentru sistemul (5.1.1) dacă $f(a) = 0$.

Definiţia 5.1.2. Fie $a \in \Omega$ şi fie Ω_0 o vecinătate deschisă a lui a inclusă în Ω. Integralele prime $U_1, U_2, \ldots, U_k : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ ale sistemului (5.1.1) se numesc *independente* în a dacă

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}(a)\right)_{k \times n} = k.$$

Este uşor de constatat că (5.1.1) nu poate avea decât cel mult n integrale prime independente într-un punct $a \in \Omega$. Teoremele următoare aduc informaţii foarte precise în acest sens în cazul în care $a \in \Omega$ nu este un punct staţionar al sistemului (5.1.1).

Teorema 5.1.3. *Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă şi $a \in \Omega$ un punct nestaţionar al sistemului* (5.1.1). *Atunci pe orice vecinătate deschisă Ω_0 a lui a inclusă în Ω există cel mult $n - 1$ integrale prime independente ale sistemului* (5.1.1).

Demonstraţie. Să presupunem pentru reducere la absurd că există cel puţin un punct nestaţionar a al sistemului (5.1.1) şi o vecinătate deschisă Ω_0 a sa inclusă în Ω astfel încât (5.1.1) să admită n integrale prime $U_1, U_2, \ldots, U_n$ independente în a, definite pe Ω_0. Din (5.1.2) în Teorema 5.1.1 rezultă

$$
\left\{
\begin{aligned}
&f_1(a)\frac{\partial U_1}{\partial x_1}(a)+f_2(a)\frac{\partial U_1}{\partial x_2}(a)+\cdots+f_n(a)\frac{\partial U_1}{\partial x_n}(a)=0\\
&f_1(a)\frac{\partial U_2}{\partial x_1}(a)+f_2(a)\frac{\partial U_2}{\partial x_2}(a)+\cdots+f_n(a)\frac{\partial U_2}{\partial x_n}(a)=0\\
&\vdots\\
&f_1(a)\frac{\partial U_n}{\partial x_1}(a)+f_2(a)\frac{\partial U_n}{\partial x_2}(a)+\cdots+f_n(a)\frac{\partial U_n}{\partial x_n}(a)=0.
\end{aligned}
\right. \tag{5.1.3}
$$

Interpretând (5.1.3) ca un sistem liniar şi omogen cu necunoscutele $f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a)$ şi ţinând cont că $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sunt independente în a, urmează că determinatul acestui sistem este diferit de zero. În consecinţă sistemul(5.1.3) admite numai soluţia banală $f_1(a) = f_2(a) = \cdots = f_n(a) = 0$, ceea ce este în contradicţie cu faptul că a este nestaţionar. Această contradicţie poate fi eliminată numai dacă $U_1, U_2, \ldots, U_n$ nu sunt independente în a. Demonstraţia este încheiată. □

Dacă f satisface condiţii de regularitate suplimentare rezultatul anterior poate fi îmbunătăţit considerabil. Mai precis avem:

TEOREMA 5.1.4. *Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă C^1 şi fie $a \in \Omega$ un punct nestaţionar al sistemului* (5.1.1). *Atunci există o vecinătate deschisă Ω_0 a lui a inclusă în Ω pe care sunt definite $n-1$ integrale prime independente ale sistemului* (5.1.1).

Întrucât demonstraţia Teoremei 5.1.4 excede programa unui curs adresat anului II de studii, nu vom da detalii. Cititorul interesat poate consulta Vrabie [**17**] sau Vrabie [**18**].

TEOREMA 5.1.5. *Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă, fie $a \in \Omega$ un punct nestaţionar al sistemului* (5.1.1) *şi fie $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ integrale prime ale lui* (5.1.1) *definite pe o vecinătate deschisă Ω_0 a lui a inclusă în Ω şi independente în a. Atunci, oricare ar fi o integrală primă $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ a sistemului* (5.1.1), *există o vecinătate deschisă $\Omega_1 \subset \Omega_0$ a punctului a, o mulţime deschisă D în $\mathbb{R}^{n-1}$ cu $(U_1(a), U_2(a), \ldots, U_{n-1}(a)) \in D$ şi o funcţie de clasă C^1 $F : D \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$U(x) = F(U_1(x), U_2(x), \ldots, U_{n-1}(x))$$

pentru orice $x \in \Omega_1$.

Demonstraţie. Cum $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ sunt independente în a, pentru orice vecinătate deschisă $\Omega_1 \subset \Omega_0$ a lui a există cel puţin o funcţie de clasă C^1 $U_n : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$\det\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}(a)\right)_{n\times n} \neq 0.$$

Un exemplu de astfel de funcţie este $U_n(x) = x_i$ pentru $x \in \Omega_1$, unde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ este astfel încât determinantul matricii obţinută din

$$\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}(a)\right)_{(n-1)\times n}$$

prin suprimarea coloanei i să fie diferit de zero.

În aceste condiţii, transformarea $G = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ este un difeomorfism de la Ω_1 la o mulţime Δ din $\mathbb{R}^n$. Fie $H : \Delta \to \Omega_1$ inversa acestei transformări şi să observăm că

$$U(H(U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x))) = U(x)$$

pentru orice $x \in \Omega_1$. Ca atare, notând cu $F = U \circ H$, pentru a încheia demonstraţia, ar fi suficient să arătăm că F, definit mai sus, nu depinde de ultima variabilă y_n. Să observăm că

$$\frac{\partial F}{\partial y_n}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_n}(y). \tag{5.1.4}$$

Cum că $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U$ sunt integrale prime ale sistemului (5.1.1) pe Ω_0, din Teorema 5.1.1, rezultă

$$\begin{cases} f_1(x)\dfrac{\partial U_1}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\dfrac{\partial U_1}{\partial x_2}(x) + \cdots + f_n(x)\dfrac{\partial U_1}{\partial x_n}(x) = 0 \\ f_1(x)\dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\dfrac{\partial U_2}{\partial x_2}(x) + \cdots + f_n(x)\dfrac{\partial U_2}{\partial x_n}(x) = 0 \\ \vdots \\ f_1(x)\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x) + \cdots + f_n(x)\dfrac{\partial U}{\partial x_n}(x) = 0. \end{cases}$$

Deoarece a este punct nestaţionar avem $f(a) \neq 0$ şi ca atare putem alege vecinătatea deschisă $\Omega_1 \subset \Omega_0$ a punctului a astfel încât

$$f(x) \neq 0 \;\text{ şi }\; \operatorname{rang}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x)\right)_{(n-1)\times n} = n-1$$

pentru orice $x \in \Omega_1$. În aceste condiţii, interpretând sistemul de mai sus drept un sistem liniar şi omogen cu necunoscutele $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, urmează că determinantul său este identic zero pe Ω_1. Cum acest determinant are cel puţin un minor de ordin $n-1$, alcătuit cu primele $n-1$ linii, nenul, urmează că ultima linie a sa este o combinaţie liniară de celelalte. Mai precis, există funcţiile $a_{i,j} : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ cu $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ astfel încât

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j}(x)\frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x)$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $x \in \Omega_1$. Din (5.1.4), utilizând aceste egalităţi, deducem

$$\frac{\partial F}{\partial y_n}(y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j}(H(y))\frac{\partial U_j}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_n}(y)$$

Observând că, din modul în care a fost definit H, avem $x = H(y)$ dacă şi numai dacă $y = (U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x))$, conchidem

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_n}(y) = \frac{\partial y_j}{\partial y_n} = 0$$

pentru $j = 1, 2, \ldots, n-1$. În consecinţă avem

$$\frac{\partial F}{\partial y_n}(y) = 0$$

pentru orice $y \in \Delta$. Cum Δ poate fi aleasă convexă (micşorând mulţimea Ω_1 dacă este cazul), această relaţie demonstrează că F nu depinde de y_n, ceea ce încheie demonstraţia. □

Încheiem această secţiune cu o observaţie importantă.

OBSERVAŢIA 5.1.3. Dacă se cunosc p integrale prime ale sistemului diferenţial (5.1.1) care sunt independente într-un punct nestaţionar $a \in \Omega$, atunci există o vecinătate a lui a pe care sistemul (5.1.1) este echivalent cu un alt sistem diferenţial cu $n-p$ funcţii necunoscute. În particular, pentru $p = n-1$, există o vecinătate a lui a pe care sistemul (5.1.1) este echivalent cu o ecuaţie diferenţială scalară (cu o singură funcţie necunoscută). Într-adevăr, fie $U_1, U_2, \ldots, U_p : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ cele p integrale prime ale lui (5.1.1) independente în a şi fie $x : I \to \Omega_0$ o soluţie generică a sistemului (5.1.1). Ţinând cont că există constantele $c_1, c_2, \ldots, c_p$ astfel încât

$$U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

în virtutea faptului că $U_1, U_2, \ldots, U_p$ sunt independentente în a şi a teoremei de existenţă a sistemelor de funcţii definite implicit, rezultă că există o vecinătate a lui a, pe care, p

componente ale lui x pot fi exprimate în mod unic ca funcţii de clasă C^1 de celelalte $n-p$. Renumerotând componentele lui x dacă este cazul, putem presupune că acele componente care se exprimă ca funcţii de celelalte sunt ultimele p. Înlocuind aceste componente ale lui x în primele $n-p$ ecuaţii din (5.1.1), obţinem un sistem de ecuaţii diferenţiale cu $n-p$ funcţii necunoscute.

2. Integrale prime pentru sisteme neautonome

În această secţiune vom extinde consideraţiile anterioare la cazul sistemelor neautonome de forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{5.2.1}$$

unde $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie continuă, prin reducerea acestora la cazul automon. Mai precis fie $D = \mathbb{I} \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, fie

$$z = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

fie $F : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ definită prin

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, x) \end{pmatrix}$$

pentru orice $z \in D$. Evident F este de clasă C^1 şi (5.2.1) poate fi rescris echivalent sub forma autonomă

$$z'(t) = F(z(t)). \tag{5.2.2}$$

Având în vedere echivalenţa dintre (5.2.1) şi (5.2.2) vom defini noţiunea de integrală primă pentru (5.2.1) după cum urmează.

DEFINIŢIA 5.2.1. Fie $D_0 \subset \mathbb{I} \times \Omega$ nevidă şi deschisă. O funcţie $U : D_0 \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrală primă* a sistemului (5.2.1) pe D_0 dacă

(i) $\nabla U(t, \xi) = 0$[1] are numai zerouri izolate $(t, \xi) \in D_0$;
(ii) U este de clasă C^1 pe D_0 ;
(iii) oricare ar fi o soluţie $x : \mathbb{J} \to \Omega$ a sistemului (5.2.1) cu $(t, x(t)) \in D_0$ pentru orice $t \in \mathbb{J}$, există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $U(t, x(t)) = c$ pentru orice $t \in \mathbb{J}$.

Enunţăm în continuare câteva dintre cele mai importante rezultate referitoare la integralele prime pentru sistemele de tipul (5.2.1). Întrucât, în virtutea echivalenţei dintre (5.2.1) şi (5.2.2), toate aceste rezultate sunt consecinţe ale teoremelor demonstrate în cazul autonom, nu vom intra în detalii.

TEOREMA 5.2.1. *Fie $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă, D_0 o submulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{I} \times \Omega$ şi fie $U : D_0 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, neconstantă pe D_0. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca U să fi o integrală primă pentru (1.1) este ca*

$$\frac{\partial U}{\partial t}(s, \xi) + \sum_{i=1}^{n} f_i(s, \xi) \frac{\partial U}{\partial x_i}(s, \xi) = 0 \tag{5.2.3}$$

pentru orice $(s, \xi) \in D_0$.

Datorită formei particulare a funcţiei F, rezultă că orice punct din D este nestaţionar pentru sistemul (5.2.2). Ca atare avem:

TEOREMA 5.2.2. *Fie $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă. Atunci pe orice vecinătate deschisă a oricărui punct din $\mathbb{I} \times \Omega$ există cel mult n integrale prime independente ale sistemului* (5.2.1).

[1] In acest caz, $\nabla U := (U_t, U_{x_1}, \cdots U_{x_n})$.

TEOREMA 5.2.3. *Fie $f : \mathbb{I}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă C^1. Atunci pentru orice $(s,a) \in \mathbb{I}\times\Omega$ există o vecinătate deschisă D_0 a lui (s,a) inclusă în $\mathbb{I}\times\Omega$ pe care sunt definite n integrale prime independente ale sistemului* (5.2.1).

3. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

Fie Ω o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^3$ fie $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ o funcţie de clasă C^1 (câmp vectorial) şi să considerăm următoarea problemă cu caracter geometric: *să se determine toate suprafeţele Σ de clasă C^1 din $\mathbb{R}^3$ cu proprietatea că în orice punct de coordonate $(x_1,x_2,x_3) \in \Sigma$ $f(x_1,x_2,x_3)$ este paralel cu planul tangent la suprafată.* Din însăşi formularea problemei suntem conduşi la căutarea acestor suprafeţe, fie sub forma explicită

$$(\mathcal{E}) \qquad x_3 = x_3(x_1,x_2)$$

cu (x_1,x_2) dintr-o mulţime nevidă şi deschisă D din $\mathbb{R}^2$, fie sub forma implicită

$$(\mathcal{I}) \qquad \phi(x_1,x_2,x_3) = c,$$

unde $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1, iar $c \in \mathbb{R}$.

Să observăm că, o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o suprafaţă Σ să aibă proprietatea cerută este ca în orice punct $(x_1,x_2,x_3) \in \Sigma$ vectorul $n(x_1,x_2,x_3)$ normal la Σ în acel punct să fie ortogonal pe $f(x_1,x_2,x_3)$. Această condiţie poate fi rescrisă echivalent

$$\langle f(x_1,x_2,x_3), N(x_1,x_2,x_3)\rangle = 0$$

unde $N(x_1,x_2,x_3)$ este orice vector coliniar cu vectorul normal $n(x_1,x_2,x_3)$. Ca atare, dacă ne propunem să căutăm suprafeţele cerute sub forma explicită $(\mathcal{E})$, ţinând cont că, în acest caz, $N(x_1,x_2,x_3)$ poate fi luat

$$N(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}(x_1,x_2), \frac{\partial x_3}{\partial x_2}(x_1,x_2), -1\right),$$

condiţia necesară şi suficientă de mai sus se rescrie sub forma

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(x_1,x_2,x_3(x_1,x_2))\frac{\partial x_3}{\partial x_i}(x_1,x_2) = f_3(x_1,x_2,x_3(x_1,x_2)) \tag{5.3.1}$$

pentru orice $(x_1,x_2) \in D$.

Dacă alegem varianta de a căuta suprafeţele Σ sub forma implicită $(\mathcal{I})$, cum în acest caz un vector normal la suprafaţă este

$$N(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3), \frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\right),$$

condiţia necesară şi suficientă anterioară capătă forma

$$\sum_{i=1}^{3} f_i(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3) = 0 \tag{5.3.2}$$

pentru orice $(x_1,x_2,x_3) \in \Omega$.

În consecinţă, determinarea acestor suprafeţe revine la determinarea, fie a tuturor funcţiior de clasă C^1 x_3 satisfăcând (5.3.1), fie a tuturor funcţiilor, de asemenea de clasă C^1, ϕ satisfăcând (5.3.2). Ca atare, rezolvarea problemei se reduce la rezolvarea unei ecuaţii în care funcţia necunoscută intervine împreună cu derivatele sale parţiale de ordinul întâi. În continuare ne vom ocupa cu prezentarea succintă a celor mai importante rezultate referitoare la astfel de ecuaţii.

Fie Ω o submulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^{n+1}$ şi fie $f_i, f : \Omega \to \mathbb{R}$ cu $i = 1,2,\ldots,n$, funcţii de clasă C^1.

DEFINIŢIA 5.3.1. O *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasi-liniară* este o ecuaţie de forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, z(x)) \frac{\partial z}{\partial x_i}(x) = f(x, z(x)), \tag{5.3.3}$$

unde

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x, z) \neq 0$$

măcar pentru un $(x, z) \in \Omega$. O *soluţie* a acestei ecuaţii este o funcţie $z : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, cu D nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, astfel încât $(x, z(x)) \in \Omega$ pentru orice $x \in D$ şi z satisface (5.3.3) Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei (5.3.3) poartă numele de *soluţie generală* a ecuaţiei (5.3.3)..

Dacă $f = 0$ pe Ω şi f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nu depind de z ecuaţia (5.3.3) se numeşte liniară. Mai precis, fie D o submulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$ şi fie $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, funcţii de clasă C^1 pe D.

DEFINIŢIA 5.3.2. O *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară* este o ecuaţie de forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = 0 \tag{5.3.4}$$

O *soluţie* a acestei ecuaţii este o funcţie $\phi : D_0 \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, cu D_0 nevidă şi deschisă din D, astfel încât ϕ satisface (5.3.4). Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei (5.3.4) poartă numele de *soluţie generală* a ecuaţiei (5.3.4).

Evident orice funcţie constantă pe D este soluţie a ecuaţiei (5.3.4). De aceea, în tot ceea ce urmează ne vom referi numai la soluţiile neconstante ale ecuaţiei (5.3.4).

Vom începe cu studiul ecuaţiei (5.3.4) arătând apoi cum studiul problemei (5.3.3) se reduce la acela al unei probleme de tip (5.3.4) într-un spaţiu de dimensiune mai mare cu o unitate.

DEFINIŢIA 5.3.3. Sistemul diferenţial

$$x_i'(t) = f_i(x(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.3.5}$$

poartă numele de *sistem caracteristic* ataşat ecuaţiei liniare (5.3.4).

OBSERVAŢIA 5.3.1. Din considerente care ţin de tradiţie, acest sistem este foarte frecvent scris, în mod formal, sub aşa numita *formă simetrică*

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x)}. \tag{5.3.6}$$

Începem cu următoarea reformulare a Teoremei 4.1.1.

TEOREMA 5.3.1. *Fie D_0 o submulţime nevidă şi deschisă din D şi fie $\phi : D_0 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi neconstantă. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca ϕ să fie soluţie a ecuaţiei* (5.3.4) *este ca ea să fie o integrală primă pe D_0 a sistemului caracteristic* (5.3.5) *sau, echivalent, pentru sistemul* (5.3.6).

O consecinţă imediată a Teoremei 5.1.5 este

TEOREMA 5.3.2. *Fie $a \in D$ un punct nestaţionar al sistemului caracteristic* (5.3.5)*, fie D_0 o vecinătate deschisă a lui a inclusă în D şi fie $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1} : D_0 \to \mathbb{R}$ integrale prime independente în a ale sistemului* (5.3.5)*. Atunci soluţia generală a ecuaţiei* (5.3.4) *pe mulţimea D_0 este dată de*

$$\phi(x) = F(U_1(x), U_2(x), \ldots, U_{n-1}(x))$$

pentru $x \in D_0$, unde F parcurge mulţimea funcţiilor de clasă C^1 definite pe imaginea transformării $U = (U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}) : D_0 \to \mathbb{R}^{n-1}$ cu valori în $\mathbb{R}$.

EXEMPLUL 5.3.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$(x_2 - x_3)\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + (x_3 - x_1)\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + (x_1 - x_2)\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0$$

pe mulţimea punctelor nestaţionare. Sistemul caracteristic sub forma simetrică este

$$\frac{dx_1}{x_2 - x_3} = \frac{dx_2}{x_3 - x_1} = \frac{dx_3}{x_1 - x_2}.$$

Avem $dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$ şi $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0$. Ca atare funcţiile $U_1, U_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin $U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ şi respectiv prin $U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, sunt integrale prime pentru acest sistem. Punctele staţionare ale sistemului sunt de forma (x_1, x_2, x_3) cu $x_1 = x_2 = x_3$. Este uşor de constatat că integralele prime de mai sus sunt independente în jurul oricărui punct nestaţionar. Ca atare, soluţia generală a ecuaţiei este $\phi(x_1, x_2, x_3) = F(x_1 + x_2 + x_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, unde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1.

După cum putem constata din exemplul de la începutul acestei secţiuni, o funcţie de clasă C^1 x_3 definită implicit de o relaţie de forma $\phi(x_1, x_2, x_3) = c$ este soluţie a problemei (5.3.1) dacă şi numai dacă ϕ este soluţie a problemei (5.3.2). Această observaţie ne conduce la ideea de a căuta soluţia z a problemei (5.3.3) ca o funcţie definită implicit de o relaţie de forma $\phi(x, z) = c$. Din teorema de derivare a funcţiilor definite implicit avem

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x) = -\frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial z}}(x, z(x))$$

pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$. Înlocuind $\partial z / \partial x_i$ în (5.3.3), după eliminarea numitorului obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, z)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x, z) + f(x, z)\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) = 0, \tag{5.3.7}$$

ecuaţie care este de tipul (5.3.4). Din Teorema 5.3.2 deducem

TEOREMA 5.3.3. *Fie $(a, \zeta) \in \Omega$ un punct nestaţionar al sistemului caracteristic*

$$\begin{cases} x_i'(t) = f_i(x(t), z(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ z'(t) = f(x(t), z(t)) \end{cases} \tag{5.3.8}$$

ataşat ecuaţiei (5.3.7)*, fie Ω_0 o vecinătate deschisă a punctului (a, ζ) inclusă în Ω şi fie $U_1, U_2, \ldots, U_n : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ integrale prime independente în punctul (a, ζ) ale sistemului* (5.3.8)*. Atunci soluţia generală a ecuaţiei* (5.3.3) *pe mulţimea Ω_0 este definită implicit de*

$$F(U_1(x, z(x)), U_2(x, z(x)), \ldots, U_n(x, z(x))) = c,$$

unde F parcurge mulţimea funcţiilor de clasă C^1 definite pe imaginea transformării $U = (U_1, U_2, \ldots, U_n) : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}$, iar c parcurge $\mathbb{R}$.

4. Exerciţii şi probleme propuse spre rezolvare

EXERCIŢIUL 5.1. *Să se determine câte două integrale prime independente în jurul unui punct nestaţionar pentru fiecare din următoarele sisteme diferenţiale autonome*:

$$(1)\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 \\ x_2' = x_3 - x_1 \\ x_3' = x_1 - x_2. \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \\ x_3' = x_1 - x_2. \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x_1' = x_1 x_2 \\ x_2' = -x_1^2 \\ x_3' = x_2 x_3. \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} x_1' = x_2 + x_1 x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 x_3 \\ x_3' = x_3^2 - 1. \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = -2x_1 x_2. \end{cases} \qquad (6)\begin{cases} x_1' = x_1 x_2 \\ x_2' = -x_2^2 \\ x_3' = -x_1(1 + x_1^2). \end{cases}$$

$$(7)\begin{cases} x_1' = x_1 x_2^2 \\ x_2' = x_1^2 x_2 \\ x_3' = x_3(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \qquad (8)\begin{cases} x_1' = 2x_2(2 - x_1) \\ x_2' = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 \\ x_3' = -x_2 x_3. \end{cases}$$

PROBLEMA 5.1. *Să se demonstreze că funcţia* $U : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$U(x, y) = x^{-b} y^{-a} e^{hx+ky}$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *este o integrală primă pentru sistemul "pradă-răpitor", cunoscut şi sub numele de sistemul* LOTKA-VOLTERRA:

$$\begin{cases} x' = (a - ky)x \\ y' = -(b - hx)y, \end{cases}$$

unde a, b, k, h *sunt constante pozitive.* (D. K. ARROWSMITH, C. M. PLACE [**1**], p. 145.)

PROBLEMA 5.2. *Să se demonstreze că toate traiectoriile sistemului diferenţial*

$$\begin{cases} x_1' = x_3 - x_2 \\ x_2' = x_1 - x_3 \\ x_3' = x_2 - x_1 \end{cases}$$

sunt cercuri.

PROBLEMA 5.3. *Să se demonstreze că toate traiectoriile sistemului pradă-răpitor* (*vezi Problema* 5.1) *care pleacă din primul cadran, mai puţin cele două semiaxe, rămân în primul cadran şi sunt curbe închise.* (V. GLĂVAN, V. GUŢU, A. STAHI [**6**], p. 134.)

PROBLEMA 5.4. *Într-o altă formulare, Problema* 5.3 *afirmă că toate soluţiile sistemului pradă-răpitor care pleacă din primul cadran, mai puţin cele două semiaxe, sunt periodice cu perioada* T *depinzând de datele iniţiale. Să se demonstreze că populaţiile medii ale celor două specii pe un interval de timp egal cu perioada* T:

$$x_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(s)\, ds \quad \text{şi} \quad y_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} y(s)\, ds$$

sunt independente de datele iniţiale.

PROBLEMA 5.5. *Fie* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie local lipschitziană. Să se demonstreze că toate punctele de minim local strict ale unei integrale prime pentru sistemul diferenţial*

$$x' = f(x),$$

care sunt soluţii staţionare ale sistemului de mai sus, sunt simplu stabile. Are loc aceeaşi proprietate în cazul punctelor de maxim local strict? (V. GLĂVAN, V. GUŢU, A. STAHI [**6**], p. 180.)

PROBLEMA 5.6. *Să se demonstreze că soluţia staţionară* $(b/h, a/k)$ *a sistemului pradă-răpitor este simplu stabilă.*

PROBLEMA 5.7. *Să se determine sistemele diferenţiale de ordinul întâi autonome care admit o integrală primă injectivă. Există sisteme neautonome care să admită integrale prime injective?*

PROBLEMA 5.8. *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă. Dacă există o integrală primă* $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a sistemului autonom*

$$x' = f(x)$$

care este coercivă, adică

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} U(x) = +\infty,$$

atunci toate soluţile saturate ale sistemului sunt globale. Se păstrează concluzia de mai sus dacă limita este $-\infty$*?*

PROBLEMA 5.9. *Evoluţia a numeroase fenomene din fizică este descrisă de aşa-numitele sisteme hamiltoniene*

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}(p,q) \\ \\ \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(p,q), \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

unde $H : \Omega \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ *este o funcţie de clasă* C^1*, neconstantă, cunoscută sub numele de funcţia lui* HAMILTON*, depinzând de* $p_1, p_2, \ldots, p_n$*, numite coordonate generalizate şi de* $q_1, q_2, \ldots, q_n$*, numite viteze generalizate. Să se demonstreze că funcţia lui* HAMILTON *este o integrală primă pentru sistemul hamiltonian.* (V. GLĂVAN, V. GUŢU, A. STAHI [**6**], p. 134.)[2]

PROBLEMA 5.10. *Fie* Ω *o submulţime nevidă şi deschisă din* $\mathbb{R}^n$ *şi fie* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie continuă. Să se demonstreze că, pentru orice* $\lambda \neq 0$*, mulţimea integralelor prime pentru ecuaţia* $x' = f(x)$ *coincide cu mulţimea integralelor prime pentru ecuaţia* $x' = \lambda f(x)$*.*

PROBLEMA 5.11. *Să se demonstreze că nu există nici o integrală primă definită pe* $\mathbb{R}^2$ *a sistemul autonom "decuplat"*

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = x_2. \end{cases}$$

Să se arate că sistemul de mai sus are integrale prime definite pe $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 > 0\}$*.* (V. GLĂVAN, V. GUŢU, A. STAHI [**6**], p. 135.)

PROBLEMA 5.12. *Fie* $\mathcal{A} : \mathbb{I} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *o funcţie continuă cu* $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ *pentru orice* $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *şi orice* $t \in \mathbb{I}$*. Să se demonstreze că orice soluţie globală a sistemului*

$$x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t)$$

este mărginită pe $\mathbb{I}$*. În cazul în care* $\mathbb{I} = [\,0, +\infty)$*, este sistemul de mai sus simplu stabil?* (V. GLĂVAN, V. GUŢU, A. STAHI [**6**], p. 136.)

[2]Faptul că funcţia H este constantă pe traiectoriile sistemului reprezintă *legea conservării energiei* şi aceasta deoarece, în toate cazurile concrete $H(p, q)$ nu este nimic altceva decât energia sistemului aflat în poziţia $(p, q) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$.

EXERCIŢIUL 5.2. *Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi*:

$$(1)\ (x_2^2-x_3^2)\frac{\partial z}{\partial x_1}+(x_3^2-x_1^2)\frac{\partial z}{\partial x_2}+(x_1^2-x_2^2)\frac{\partial z}{\partial x_3}=0.$$

$$(2)\ -x_1e^{x_2}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_3e^{x_2}\frac{\partial z}{\partial x_3}=0.$$

$$(3)\ x_1(x_2-x_3)\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2(x_3-x_1)\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_3(x_1-x_2)\frac{\partial z}{\partial x_3}=0.$$

$$(4)\ (x_1-x_3)\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+(x_2-x_3)\frac{\partial x_3}{\partial x_2}=2x_3.$$

$$(5)\ x_3\frac{\partial x_3}{\partial x_1}-x_3\frac{\partial x_3}{\partial x_2}=x_2-x_1.$$

$$(6)\ x_1\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial x_3}{\partial x_2}=x_3+\frac{x_1x_2}{x_3}.$$

$$(7)\ x_2x_3\frac{\partial x_3}{\partial x_1}+x_1x_3\frac{\partial x_3}{\partial x_2}=2x_1x_2.$$

$$(8)\ (1+\sqrt{z-a_1x_1-a_2x_2-a_3x_3})\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial z}{\partial x_3}=a_1+a_2+a_3.$$

(M. CRAIU şi M. ROŞCULEŢ [**4**], p. 48 – 60.)

EXERCIŢIUL 5.3. *Să rezolve următoarele probleme* CAUCHY:

$$(1)\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\\[2ex] z(x,0)=\cos x.\end{cases}\qquad (2)\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\\[2ex] z(x,x^2)=x^3.\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}-2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0\\[2ex] u(1,y,z)=\sin(y+z).\end{cases}\qquad (4)\begin{cases} x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\\[2ex] z(2,y)=(y-4)^3.\end{cases}$$

(V. GLĂVAN, V. GUŢU, A. STAHI [**6**], p. 188 – 192.)

PROBLEMA 5.13. *Fie* $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *şi* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *două funcţii de clasă* C^1 *şi* $a\in\mathbb{R}$. *Să se determine soluţia problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}+a\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(t,x)\\[2ex] z(0,x)=\varphi(x).\end{cases}$$

PROBLEMA 5.14. *Fie* $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *şi* $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *două funcţii de clasă* C^1 *şi* $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Să se determine soluţia problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}+a(t)\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(t,x)\\[2ex] z(0,x)=\varphi(x).\end{cases}$$

PROBLEMA 5.15. *Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 şi $a \in \mathbb{R}^n$. Să se determine soluţia problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial z}{\partial x_i} = f(t,x) \\ \\ z(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

(V. BARBU [**2**], p. 200)

PROBLEMA 5.16. *Fie $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 şi $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă. Să se determine soluţia problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(t) \dfrac{\partial z}{\partial x_i} = f(t,x) \\ \\ z(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

PROBLEMA 5.17. *Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 şi $a \in \mathbb{R}$. Să se determine soluţia problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + ax\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(t,x) \\ \\ z(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

PROBLEMA 5.18. *Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 şi $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se determine soluţia problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + a(t)x\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(t,x) \\ \\ z(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

PROBLEMA 5.19. *Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 şi fie $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Să se determine soluţia problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \langle \mathcal{A}x, \nabla_x z\rangle = f(t,x) \\ \\ z(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

(V. BARBU [**2**], p. 200)

PROBLEMA 5.20. *Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 şi fie $\mathcal{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o funcţie continuă. Să se determine soluţia problemei* CAUCHY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \langle \mathcal{A}(t)x, \nabla_x z\rangle = f(t,x) \\ \\ z(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

PROBLEMA 5.21. *Determinaţi suprafaţa care conţine cercul de ecuaţii $x_1^2+x_3^2 = 1,\ x_2 = 2$, ortogonală familiei de conuri $x_1x_2 = \alpha x_3^2$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.* (M. CRAIU şi M. ROŞCULEŢ [**4**], p. 58.

CAPITOLUL 6

Rezultate auxiliare

1. Elemente de analiză vectorială

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ şi să notăm cu $\mathbb{R}^k$ mulţimea tuturor k-uplelor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de numere reale care, după cum se ştie, este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ de dimensiune k în raport cu operaţiile "+" (legea de compoziţie internă) şi "·" (legea de compoziţie externă) definite prin

$$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_k) + (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k)$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$ şi respectiv prin

$$\lambda \cdot x = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_k)$$

pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi orice $x \in \mathbb{R}^k$. În tot ceea ce urmează, pe $\mathbb{R}^k$ vom considera produsul scalar standard $\langle \cdot, \cdot \rangle_k : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definit prin

$$\langle x, y \rangle_k = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

şi norma euclidiană $\| \cdot \|_k$ definită de produsul scalar prin

$$\|x\|_k = \sqrt{\langle x, x \rangle_k} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right)^{1/2}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$. Ori de câte ori nu va exista pericolul de confuzie, vom suprima indicele k, scriind $\langle x, y \rangle$ în loc de $\langle x, y \rangle_k$ şi $\|x\|$ în loc de $\|x\|_k$ şi, de asemenea, vom suprima "·" scriind λx în loc de $\lambda \cdot x$.

Fie $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor de tip $n \times m$ cu elemente reale. În multe situaţii este convenabil să identificăm un element $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ cu un operator liniar (notat pentru simplitate cu acelaşi simbol) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, definit prin

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}x$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^m$, unde x este considerat vector coloană.

Pe mulţimea $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, care este evident un spaţiu vectorial de dimensiune $n \times m$ peste $\mathbb{R}$, definim funcţia $\| \cdot \|_{\mathcal{O}}$ prin

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} = \sup\{\|\mathcal{A}x\|_n \,;\ \|x\|_m \leq 1\}$$

pentru orice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Următoarea lemă simplă este deosebit de utilă în ceea ce urmează.

Lema 6.1.1. *Funcţia* $\| \cdot \|_{\mathcal{O}} : \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ *este o normă pe* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, *adică satisface*:

(N_1) $\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} = 0$ *dacă şi numai dacă* $\mathcal{A}$ *este matricea nulă*;
(N_2) $\|\lambda\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} = |\lambda|\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}$ *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi orice* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$;
(N_3) $\|\mathcal{A} + \mathcal{B}\|_{\mathcal{O}} \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} + \|\mathcal{B}\|_{\mathcal{O}}$ *pentru orice* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

De asemenea, pentru orice $x \in \mathbb{R}^m$ *şi orice* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

(N_4) $\|\mathcal{A}x\|_n \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}\|x\|_m$.

În plus, pentru orice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *şi orice* $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, *avem*

(N_5) $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\|_{\mathcal{O}} \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{O}}$.

Demonstraţie. Întrucât (N_1) şi (N_2) sunt evidente, ne vom limita la demonstraţia celorlalte trei proprietăţi. Pentru a verifica (N_3), să observăm că operatorul $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ este continuu de la $\mathbb{R}^m$ în $\mathbb{R}^n$. Cum $\|\cdot\|_n$ este continuă pe $\mathbb{R}^n$, rezultă că funcţia $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\|_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ este continuă. Pe de altă parte, mulţimea $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^m\,;\ \|x\|_m \leq 1\}$ este compactă şi atunci, conform teoremei lui WEIERSTRASS, rezultă că funcţia menţionată mai sus îşi atinge marginea superioară pe $B(0,1)$. Există deci $\xi \in B(0,1)$ astfel încât

$$\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\|_{\mathcal{O}} = \sup\{\|(\mathcal{A}+\mathcal{B})x\|_n\,;\ \|x\|_m \leq 1\} = \|(\mathcal{A}+\mathcal{B})\xi\|_n.$$

Dar

$$\|(\mathcal{A}+\mathcal{B})\xi\|_n \leq \|\mathcal{A}\xi\|_n + \|\mathcal{B}\xi\|_n \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} + \|\mathcal{B}\|_{\mathcal{O}},$$

ceea ce încheie demonstraţia punctului (N_3).

Pentru a demonstra (N_4), să observăm că, pentru $x = 0$, ea este verificată în mod evident. Fie atunci $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$. Avem $\|x\|_m^{-1} x \in B(0,1)$ şi ca atare

$$\|\mathcal{A}(\|x\|_m^{-1}x)\|_n = \|x\|_m^{-1}\|\mathcal{A}x\|_n \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}},$$

ceea ce arată că (N_4) este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}^m$.

În sfârşit, din (N_4), deducem că, pentru orice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, orice $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ şi orice $x \in \mathbb{R}^p$, avem

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}x\|_m \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}\|\mathcal{B}x\|_m \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{O}}\|x\|_p$$

Trecând la supremum după $x \in B(0,1)$ în inegalitatea de mai sus, deducem (N_5). Demonstraţia este încheiată. □

CONSECINŢA 6.1.1. *Pentru orice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi orice $k \in \mathbb{N}$ avem*

(N_6) $\|\mathcal{A}^k\|_{\mathcal{O}} \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}^k$.[1]

Demonstraţie. Concluzia rezultă printr-un simplu raţionament inductiv aplicat proprietăţii (N_5). □

OBSERVAŢIA 6.1.1. Norma $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ definită pe $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ este echivalentă pe spaţiul $\mathbb{R}^{n\times m}$ cu norma euclidiană. Mai precis, există două constante $k_1 > 0$ şi $k_2 > 0$, astfel încât

$$k_1\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} \leq \|\mathcal{A}\|_e \leq k_2\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} \tag{6.1.1}$$

pentru orice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, unde

$$\|\mathcal{A}\|_e^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2.$$

Într-adevăr, dacă $e_1, e_2, \ldots, e_m$ sunt vectorii bazei canonice în $\mathbb{R}^m$ atunci avem

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 = \|\mathcal{A}e_1\|_e^2 \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}^2 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 = \|\mathcal{A}e_2\|_e^2 \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}^2 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{im}^2 = \|\mathcal{A}e_m\|_e^2 \leq \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}^2. \end{cases}$$

Adunând membru cu membru aceste inegalităţi deducem

$$\|\mathcal{A}\|_e^2 \leq m\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}^2.$$

[1] $\mathcal{A}^k$ reprezintă produsul matricei $\mathcal{A}$ cu ea însăşi de k ori. Pentru $k = 0$, prin definiţie, $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$, unde $\mathcal{I}$ este matricea unitate din $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Deci, pentru $k_2 = \sqrt{m}$, a doua inegalitate din (6.1.1) este verificată. Pe de altă parte, după cum am constatat în cadrul demonstraţiei lemei 6.1.1, există $\xi \in \mathbb{R}^m$ cu $\|\xi\|_m \leq 1$ astfel încât

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}^2 = \|\mathcal{A}\xi\|_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j \right)^2 .$$

Folosind inegalitatea CAUCHY-SCHWARZ[2] pentru a majora suma după j, deducem

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \|\xi\|_m^2 \leq \|\mathcal{A}\|_e^2.$$

Această inegalitate ne arată că, pentru $k_1 = 1$, este verificată şi prima inegalitate din (6.1.1).

Subliniem că inegalitatea (6.1.1) exprimă invarianţa proprietăţilor de mărginire, continuitate, diferenţiabilitate, ş.a. referitoare la funcţii cu valori în $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, în raport cu cele două norme $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ şi $\|\cdot\|_e$.

Fie acum D o submulţime nevidă din $\mathbb{R}$ şi fie $f : D \to \mathbb{R}^n$ o funcţie,

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$$

pentru orice $t \in D$. În tot ceea ce urmează vom spune că f are o anumită proprietate dacă toate funcţiile componente $f_1, f_2, \ldots, f_n$ au acea proprietate. De exemplu vom spune că f este *derivabilă* în $t \in D$ dacă toate funcţiile f_i cu $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt derivabile în t. Dacă f este derivabilă în $t \in D$ vom nota cu $f'(t)$ *derivata* ei în t, adică

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_n'(t)).$$

Analog, vom spune că $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$ este *integrabilă* RIEMANN pe $[\,a, b\,]$ dacă toate funcţiile componente f_i cu $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt integrabile RIEMANN pe $[\,a, b\,]$. În cazul în care f are această proprietate, vom nota cu

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \int_a^b f_2(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\,dt \right)$$

integrala ei RIEMANN pe $[\,a, b\,]$. Următoarea lemă generalizează două rezultate bine-cunoscute în cazul $n = 1$.

LEMA 6.1.2. *Fie $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$ şi $g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$.*

(i) *Dacă f şi g sunt derivabile în $t_0 \in [\,a, b\,]$ atunci funcţia $\langle f, g\rangle : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ este derivabilă în t_0 şi*

$$\frac{d}{dt}\left(\langle f, g\rangle\right)(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0)\rangle + \langle f(t_0), g'(t_0)\rangle. \tag{6.1.2}$$

În particular, dacă f este derivabilă în $t_0 \in [\,a, b\,]$ atunci $\|f\|^2 : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}_+$ este derivabilă în t_0 şi

$$\frac{d}{dt}\left(\|f\|^2\right)(t_0) = 2\langle f'(t_0), f(t_0)\rangle. \tag{6.1.3}$$

[2]Reamintim că inegalitatea CAUCHY-SCHWARZ afirmă că, pentru orice sisteme de numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_m$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_m$, avem

$$\left(\sum_{j=1}^{m} x_j y_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{m} x_j^2 \sum_{j=1}^{m} y_j^2.$$

(ii) *Dacă* $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann pe* $[\,a, b\,]$ *atunci* $\|f\| : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}_+$ *este integrabilă Riemann pe* $[\,a, b\,]$ *şi*

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt. \tag{6.1.4}$$

Demonstraţie. Pentru a demonstra (i) să reamintim că $\langle f, g\rangle : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$(\langle f, g\rangle)(t) = \langle f(t), g(t)\rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(t)$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$. Cum toate funcţiile f_i şi g_i cu $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt derivabile în t_0, din relaţia de mai sus, rezultă că $\langle f, g\rangle$ este derivabilă în t_0. În plus, avem

$$\frac{d}{dt}(\langle f, g\rangle)(t_0) = \sum_{i=1}^{n} [f_i'(t_0) g_i(t_0) + f_i(t_0) g_i'(t_0)] = \langle f'(t_0), g(t_0)\rangle + \langle f(t_0), g'(t_0)\rangle,$$

ceea ce demonstrează (6.1.2). Evident (6.1.3) rezultă din (6.1.2) luând $f = g$.

Pentru a demonstra (ii), să observăm că funcţia $\|f\| : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}_+$ este definită prin

$$\|f\|(t) = \|f(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t) \right)^{1/2}$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$. Întrucât toate funcţiile f_i cu $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt integrabile RIEMANN, rezultă că $\|f\|$ are aceeaşi proprietate. Fie acum $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ o divizare a intervalului $[\,a, b\,]$ şi fie $\xi_i \in [t_i, t_{i+1})$ $i = 0, 1, \ldots, k-1$ puncte intermediare arbitrare. Avem

$$\|\sigma_\Delta(f, \xi_i)\| = \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i) f(\xi_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i) \|f(\xi_i)\| = \sigma_\Delta(\|f\|, \xi_i).$$

Luând un şir de diviziuni ale intervalului $[\,a, b\,]$ cu şirul normelor tinzând la zero şi un şir corespunzător de puncte intermediare şi trecând la limită în inegalitatea de mai sus obţinem (6.1.4). Demonstraţia este încheiată. $\square$

LEMA 6.1.3. *Fie* $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *şi* $\mathcal{B} : [\,a, b\,] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(i) *Dacă* f *este integrabilă* RIEMANN *pe* $[\,a, b\,]$ *atunci* $\mathcal{A}f$ *este integrabilă pe* $[\,a, b\,]$ *şi*

$$\mathcal{A}\left(\int_a^b f(t)\, dt \right) = \int_a^b \mathcal{A} f(t)\, dt.$$

(ii) *Dacă* $\mathcal{B}$ *este integrabilă* RIEMANN *pe* $[\,a, b\,]$ *atunci* $\mathcal{B}^*$ *este integrabilă* RIEMANN *pe* $[\,a, b\,]$ *şi*

$$\left(\int_a^b \mathcal{B}(t)\, dt \right)^* = \int_a^b \mathcal{B}^*(t)\, dt.$$

(iii) *Dacă* $\mathcal{B}$ *este integrabilă* RIEMANN *pe* $[\,a, b\,]$ *şi* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *atunci* $\langle \mathcal{B}(\cdot)x, y\rangle$ *este integrabilă* RIEMANN *pe* $[\,a, b\,]$ *şi*

$$\left\langle \left(\int_a^b \mathcal{B}(t)\, dt \right) x, y \right\rangle = \int_a^b \langle \mathcal{B}(t)x, y\rangle dt.$$

Demonstraţie. Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ o divizare a intervalului $[\,a, b\,]$ şi fie $\xi_i \in [t_i, t_{i+1})$ $i = 0, 1, \ldots, k-1$ puncte intermediare arbitrare. Avem

$$\mathcal{A}(\sigma_\Delta(f, \xi_i)) = \sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i) \mathcal{A} f(\xi_i) = \sigma_\Delta(\mathcal{A}f, \xi_i),$$

$$(\sigma_\Delta(\mathcal{B},\xi_i))^* = \sum_{i=0}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)\mathcal{B}^*(\xi_i) = \sigma_\Delta(\mathcal{B}^*,\xi_i)$$

şi

$$\langle \sigma_\Delta(\mathcal{B},\xi_i)x,y\rangle = \sum_{i=0}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)\langle \mathcal{B}(\xi_i)x,y\rangle = \sigma_\Delta(\langle \mathcal{B}(\cdot)x,y\rangle,\xi_i).$$

Luând un şir de diviziuni ale intervalului $[\,a,b\,]$ cu şirul normelor tinzând la zero şi un şir corespunzător de puncte intermediare şi trecând la limită în egalităţile de mai sus obţinem (i), (ii) şi (iii). Demonstraţia este încheiată. $\square$

Soluţiile exerciţiilor şi problemelor propuse spre rezolvare

Capitolul 1

Problema 1.1 Fie $x : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ curba căutată. Condiţia din enunţ se exprimă prin

$$\frac{x(t)}{x(t)/x'(t)} = \frac{k}{x(t) - t},$$

sau echivalent

$$x'(t) = \frac{k}{x(t) - t}$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$. Aceasta din urmă este o ecuaţie diferenţială reductibilă la una cu variabile separabile. Schimbarea de funcţie necunoscută $y = x - t$ conduce la ecuaţia

$$y'(t) = \frac{k - y(t)}{y(t)}$$

pentru orice $t \in [\,a, b\,]$, a cărei soluţie generală este definită implicit de $y + \ln|k - y| + t + c = 0$, cu c constantă arbitrară. Rezultă atunci că familia de curbe cu proprietatea cerută este definită implicit de $x + \ln|k - x + t| + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Problema 1.2 Fie $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ curba căutată cu $3 \in \mathbb{I}_x$ şi fie $A(a, 0)$ şi $B(0, b)$ punctele de intersecţie ale tangentei la curbă în punctul $(t, x(t))$ cu axele de coordonate. Cum $(t, x(t))$ este mijlocul segmentului AB, avem $a = 2t$ şi $b = 2x$. Pe de altă parte, panta tangentei în punctul curent $(t, x(t))$ este $x'(t)$. Condiţia din enunţ se exprimă atunci prin $x'(t) = -\frac{b}{a}$ sau echivalent prin $tx'(t) = -x(t)$. Ecuaţia de mai sus este cu variabile separabile şi are soluţia generală $tx = c$, cu c constantă reală. Cum $x(3) = 2$ deducem $c = 6$. În concluzie, curba căutată este hiperbola de ecuaţie $tx = 6$.

Exerciţiul 1.1 (1) Este o ecuaţie cu variabile separabile având soluţia generală definită prin $x(t) = \pm \arcsin \sqrt{\frac{\cos^2 t}{1+2c\cos^2 t}}$ pentru $t \in \mathbb{I}_x \subset \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $\mathbb{I}_x$ depinzând de constanta $c \in \mathbb{R}$.

(2) Este o ecuaţie Bernoulli, dar şi cu variabile separabile. Soluţia generală este definită prin $x(t) = ct(1 - ct)^{-1}$ pentru $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ depinde de constanta de integrare $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai admite soluţia singulară $x(t) = -1$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

(3) Este o ecuaţie cu variabile separabile având soluţia generală $x(t) = \pm\sqrt{2\ln|t| - t^2 + c}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ este un interval ce nu conţine 0 şi depinde de constanta de integrare $c \in \mathbb{R}$.

(4) Substituţia $y = t + x$ conduce la ecuaţia cu variabile separabile $y' = 1 + y^2$. Rezolvând această ecuaţie şi revenind la funcţia x obţinem $x(t) = \mathrm{tg}(t + c) - t$ pentru orice $t \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right)$, $c \in \mathbb{R}$.

(5) Substituţia $y = 8t + 2x + 1$ conduce la o ecuaţie cu variabile separabile. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este $x(t) = \mathrm{tg}(4t + c) - 4t - \frac{1}{2}$ pentru orice $t \in \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{c}{4}, \frac{\pi}{8} - \frac{c}{4}\right)$, $c \in \mathbb{R}$.

(6) Substituţia $y = 2t + 3x + 1$ conduce la o ecuaţie cu variabile separabile. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale, după renotarea convenabilă a constantei de integrare, este dată în forma implicită $t + 2x + 7\ln|2t + 3x - 13| = c$ cu $c \in \mathbb{R}$.

(7) Substituţia $y = 2t - x$ conduce la o ecuaţie cu variabile separabile. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale, după renotarea convenabilă a constantei de integrare, este dată în forma implicită $5t + 10x - 3\ln|10t - 5x + 6| = c$ cu $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai are şi soluţia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $x(t) = 2t + \frac{6}{5}$ eliminată în procesul de integrare a ecuaţiei cu variabile separabile.

(8) Ecuaţie cu variabile separabile având soluţia generală $x(t) = \pm\sqrt{\frac{c}{t^2-1} - 1}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ este un interval ce nu conţine ± 1, depinzând de constanta $c \in \mathbb{R}$.

Problema 1.3 La fel ca şi în cazul Problemei 1.2, fie $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ curba căutată cu $1 \in \mathbb{I}_x$ şi fie $A(a, 0)$ şi $B(0, b)$ punctele de intersecţie ale normalei la curbă în punctul $(t, x(t))$ cu axele

de coordonate. Cum $(t, x(t))$ este mijlocul segmentului AB, avem $a = 2t$ şi $b = 2x$. Pe de altă parte, panta normalei la curbă în punctul curent $(t, x(t))$ este $-[x'(t)]^{-1}$. Condiţia din enunţ se exprimă atunci prin $-[x'(t)]^{-1} = -\frac{b}{a}$ sau echivalent prin $x(t)x'(t) = t$. Ecuaţia de mai sus este cu variabile separabile şi are soluţia generală $x^2 - t^2 = c$, cu c constantă reală. Dar $x(1) = 2$ şi atunci $c = 3$. În concluzie, curba căutată este hiperbola de ecuaţie $x^2 - t^2 = 3$.
Problema 1.4 Fie $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ curba căutată. Condiţia din enunţ se exprimă echivalent prin

$$x(t)/x'(t) = a,$$

ecuaţie care are soluţia generală $x(t) = ce^{t/a}$ pentru $t \in \mathbb{R}$, cu $c \in \mathbb{R}$.
Problema 1.5 În acest caz ecuaţia la care se ajunge este

$$x(t)/x'(t) = 2t,$$

pentru $t \geq 0$, care are soluţia generală $x(t) = c\sqrt{t}$ cu $c > 0$.
Exerciţiul 1.2 (1) Împărţind cu $t \neq 0$, ecuaţia se reduce la una omogenă având soluţia generală $x(t) = -t\ln|t| + ct$ pentru $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ este un interval ce nu conţine 0 şi $c \in \mathbb{R}$.

(2) Împărţind cu $t \neq 0$, ecuaţia se reduce la una omogenă a cărei soluţie generală este $x(t) = \frac{c}{t} - \frac{t}{2}$ pentru $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ este un interval ce nu conţine 0 şi $c \in \mathbb{R}^*$. Ecuaţia mai admite şi soluţia $x(t) = -\frac{t}{2}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

(3) Împărţind la t^2 obţinem o ecuaţie omogenă a cărei soluţie generală este definită prin $x(t) = t(\ln|t| + c)^{-1}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ este un interval ce depinde de constanta $\in \mathbb{R}$ şi nu conţine 0. Ecuaţia mai admite şi soluţia $x(t) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

(4) Împărţind prin $2tx$ obţinem o ecuaţie omogenă a cărei soluţie generală este $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$x(t) = \pm t\sqrt{\frac{t+c}{t}},$$

unde $c \in \mathbb{R}$ şi $\mathbb{I}_x$ de depinde de c şi nu conţine 0. Totodată ecuaţia mai admite şi soluţiile $x_{1,2}(t) = \pm t$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

(5) Evident $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, este soluţie a ecuaţiei. Împărţind ecuaţia cu $t \neq 0$ obţinem o ecuaţie omogenă a cărei soluţie este dată sub forma implicită $\ln|x| - \sqrt{\frac{t}{x}} = c$ pentru $t \in (-\infty, 0)$ şi $\ln x + \sqrt{\frac{t}{x}} = c$ pentru $t \in (0, +\infty)$.

(6) Împărţind cu $t \neq 0$ obţinem o ecuaţie omogenă. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = (c^2t^2 - 1)(2c)^{-1}$ pentru orice $t =\in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}_+^*$.

(7) Împărţind cu $4x^2+3tx+t^2$ şi simplificând fracţia obţinută prin $t^2 \neq 0$ obţinem o ecuaţie omogenă. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este definită implicit de $(x^2 + t^2)^{3/2}(x + t) = c$, unde $c \in \mathbb{R}$.

(8) Împărţind cu $2tx \neq 0$ ecuaţia se reduce la una omogenă. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$, $x(t) = \pm t\sqrt{1 + ct}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $c \in \mathbb{R}$ şi $\mathbb{I}_x$ depinde de c.
Problema 1.6 Fie $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ curba căutată cu $1 \in \mathbb{I}_x$. Condiţia din enunţ se exprimă prin

$$\left|t - \frac{x}{x'}\right| = \sqrt{t^2 + x^2}$$

sau echivalent prin

$$t - \frac{x}{x'} = \pm\sqrt{t^2 + x^2}.$$

Aceste ecuaţii sunt reductibile la ecuaţii omogene. Analizând cele două cazuri deducem că numai ecuaţia $t - x/x' = \sqrt{t^2 + x^2}$ are soluţie convenabilă ($x(1) = 0$) şi anume $x(t) = \pm 2\sqrt{1 - t}$.
Problema 1.7 Punând condiţia ca $x = t^m y$ să verifice ecuaţia, deducem

$$mt^{m-1}y + t^m y' = f(t, t^m y) = t^{m-1}f(1, y),$$

sau echivalent

$$y' = \frac{1}{t}(f(1, y) - y).$$

Pentru ecuaţia considerată avem $f(t,x) = x^2 - \frac{2}{t^2}$. Să observăm că $f(\lambda t, \lambda^m x) = \lambda^{m-1} f(t,x)$ pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ şi $\lambda \in \mathbb{R}_+$ dacă şi numai dacă

$$\lambda^{2m} - \frac{2}{\lambda^2 t^2} = \lambda^{m-1}\left(x^2 - \frac{2}{t^2}\right).$$

Se observă că această condiţie este verificată dacă şi numai dacă $m = -1$. Punând $x = t^{-1}y$ obţinem $y' = \frac{1}{t}(y^2 + y - 2)$, ecuaţie care are soluţia generală $y(t) = \frac{c+2t^3}{c-t^3}$ cu $c \in \mathbb{R}$. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este atunci $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}_+$, $x(t) = \frac{c+2t^3}{ct-t^4}$, unde $c \in \mathbb{R}$ şi $\mathbb{I}_x$ este un interval care nu conţine 0 şi $\sqrt[3]{c}$.

Exerciţiul 1.3 (1) Ecuaţia este reductibilă la o ecuaţie liniară. De asemenea, ecuaţia este şi cu variabile separabile. Soluţia generală este $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = cte^t$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}$.

(2) Ecuaţie reductibilă la o ecuaţie liniară având soluţiile $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = \frac{t^4}{6}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$, $x(t) = \frac{t^4}{6} + \frac{c}{t^2}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $c \in \mathbb{R}^*$ şi $\mathbb{I}_x = (0, +\infty)$ sau $(-\infty, 0)$.

(3) Este o ecuaţie reductibilă la o ecuaţie liniară cu soluţiile $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$x_1(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & t \in \mathbb{R}^* \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

şi $x_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, definită prin $x_2(t) = (e^t + c)t^{-1}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ şi $\mathbb{I} = (0, +\infty)$ sau $(-\infty, 0)$.

(4) Ecuaţia are soluţia $x \equiv 0$. Pentru $x \neq 0$ îl vom căuta pe t ca funcţie de x. Obţinem ecuaţia

$$\frac{dt}{dx} = \frac{3t}{2x} - \frac{x}{t}$$

care este atât BERNOULLI cât şi omogenă şi care, prin integrare, conduce la forma implicită a soluţiei generale pentru ecuaţia iniţială $cx^3 + x^2 - t^2 = 0$ cu $c \in \mathbb{R}_+^*$.

(5) Ecuaţie este reductibilă la o ecuaţie BERNOULLI cu $\alpha = 2$. Soluţia generală este $x(t) = (t \ln|t| + ct)^{-1}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ depinde de $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai are şi soluţia $x \equiv 0$.

(6) Substituţia $x^2 = y$ conduce la o ecuaţie reductibilă la una liniară în y. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$, $x(t) = \pm\sqrt{t(c - \ln|t|)}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ nu conţine 0 şi depinde de $c \in \mathbb{R}$.

(7) Se observă că $x \equiv 0$ este soluţie. Pentru $x \neq 0$ vom determina pe t ca funcţie de x. Se constată că t verifică ecuaţia BERNOULLI

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{2}{x}t + t^2.$$

Soluţia generală x a ecuaţiei iniţiale este dată sub forma implicită $(cx^2 + x)t = 1$, unde $c \in \mathbb{R}$.

(8) Ecuaţia este reductibilă la o ecuaţie BERNOULLI având soluţia generală $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t) = \left(2t + ct^2\right)^{-1}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ depinde de $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai are şi soluţia $x \equiv 0$.

Problema 1.8 Avem

$$R'(t) = \frac{(x_2'(t) - x'(t))(x(t) - x_1(t)) - (x_2(t) - x(t))(x'(t) - x_1'(t))}{(x(t) - x_1(t))^2} =$$

$$= \frac{a(t)(x_2(t) - x(t))(x(t) - x_1(t)) - (x_2(t) - x(t))a(t)(x(t) - x_1(t))}{(x(t) - x_1(t))^2} = 0$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Deci R este constantă pe $\mathbb{I}$. Interpretarea geometrică a acestui rezultat este următoarea: dacă x_1, x_2 sunt două soluţii distincte ale ecuaţiei liniare $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ şi

x este o a treia soluţie, atunci $A(t, x(t))$ se află pe dreapta determinată de punctele $A_1(t, x_1(t))$ şi $A_2(t, x_2(t))$ şi raportul $\dfrac{AA_1}{AA_2}$ este constant.

Problema 1.9 Avem

$$y'(t) = \frac{x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t)}{x_2^2(t)} =$$

$$= \frac{[a(t)x_1(t) + b(t)x_1^2(t)]x_2(t) - x_1(t)[a(t)x_2(t) + b(t)x_2^2(t)]}{x_2^2(t)} =$$

$$= \frac{b(t)x_1(t)x_2(t)[x_1(t) - x_2(t)]}{x_2^2(t)} = b(t)[x_1(t) - x_2(t)]y(t)$$

ceea ce arată că $y'(t) = b(t)[x_1(t) - x_2(t)]y(t)$.

Problema 1.10 Să notăm cu

$$A(t) = \frac{x_2(t) - x(t)}{x_2(t) - x_1(t)}$$

şi să observăm că

$$A'(t) = \frac{(x_2'(t) - x'(t))(x_2(t) - x_1(t)) - (x_2'(t) - x_1'(t))(x_2(t) - x(t))}{(x_2(t) - x_1(t))^2} =$$

$$= \frac{(x_2(t) - x_1(t))[a(t) + b(t)(x_2(t) + x(t))](x_2(t) - x(t))}{(x_2(t) - x_1(t))^2} -$$

$$- \frac{(x_2(t) - x_1(t)[a(t) + b(t)(x_2(t) + x_1(t))](x_2(t) - x(t))}{(x_2(t) - x_1(t))^2} =$$

$$= \frac{b(t)(x_2(t) - x(t))(x(t) - x_1(t))}{x_2(t) - x_1(t)}.$$

Analog

$$C(t) = \frac{x_3(t) - x_1(t)}{x_3(t) - x(t)}$$

verifică

$$C'(t) = \frac{b(t)(x_3(t) - x_1(t))(x_1(t) - x(t))}{x_3(t) - x(t)}.$$

Dar

$$B'(t) = A'(t)C(t) + A(t)C'(t) =$$

$$= \frac{b(t)(x_2(t) - x(t))(x(t) - x_1(t))}{x_2(t) - x_1(t)} \cdot \frac{x_3(t) - x_1(t)}{x_3(t) - x(t)} +$$

$$+ \frac{x_2(t) - x(t)}{x_2(t) - x_1(t)} \cdot \frac{b(t)(x_3(t) - x_1(t))(x_1(t) - x(t))}{x_3(t) - x(t)} = 0$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Deci B este constant pe $\mathbb{I}$.

Exerciţiul 1.4 (1) Este o ecuaţie cu diferenţială exactă. Soluţia generală este dată sub forma implicită prin: $t^2 + 2tx + 2x^2 = c$, unde $c \geq 0$.

(2) Este o ecuaţie cu diferenţială exactă. Soluţia generală este dată sub forma implicită prin: $t^3 + 6tx + 3t^2 = c$, unde $c \in \mathbb{R}$.

(3) Este o ecuaţie cu diferenţială exactă. Soluţia generală este dată sub forma implicită prin: $2t^3 - 9t^2x^2 + 12t + 2x^3 = c$, unde $c \in \mathbb{R}$.

(4) Este o ecuaţie cu diferenţială exactă având soluţia generală dată sub forma implicită $-t^4 + 2t^2x^2 + 4xt + x^4 = c$, cu $c \in \mathbb{R}$.

(5) Este o ecuaţie reductibilă la una cu diferenţială exactă prin intermediul factorului integrant $\rho(x) = \frac{1}{x^4}$. Soluţia generală este dată sub forma implicită $t^2 - x^2 - cx^3 = 0$, unde $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai admite şi soluţia $x \equiv 0$ eliminată pe parcursul procesului de reducere a ecuaţiei iniţiale la una cu diferenţială exactă.

(6) Este o ecuaţie reductibilă la una cu diferenţială exactă prin înmulţirea cu factorul integrant $\rho(t) = \frac{1}{t^2}$. Soluţia generală este dată sub forma implicită $x^2 - t\ln|t| - ct = 0$, unde $c \in \mathbb{R}$. De aici deducem că $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ este definită prin $x(t) = \pm\sqrt{t(c + \ln|t|)}$ pentrum orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ depinde de $c \in \mathbb{R}$.

(7) Este o ecuaţie reductibilă la una cu diferenţială exactă prin înmulţirea cu factorul integrant $\rho(x) = \frac{1}{x^2}$. Avem soluţiile $x \equiv 0$ şi $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t) = 2t(2c - t^2)^{-1}$ pentru orice $t \in \mathbb{I}_x$, unde $\mathbb{I}_x$ depinde de $c \in \mathbb{R}$.

(8) Este o ecuaţie reductibilă la una cu diferenţială exactă prin înmulţirea cu factorul integrant $\rho(t) = \frac{1}{t}$. Soluţia generală este dată sub forma implicită $x\ln t + \frac{x^4}{4} = c$ pentru orice $t > 0$, unde $c \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 1.5 (1) Este o ecuaţie LAGRANGE având soluţia generală sub forma parametrică:

$$\begin{cases} t(p) = 6p^2 + cp \\ x(p) = 4p^3 + \dfrac{1}{2}cp^2 \end{cases}, \ p \in \mathbb{R}$$

unde $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai admite şi soluţia $x \equiv 0$.

(2) Este o ecuaţie LAGRANGE având soluţia generală sub forma parametrică:

$$\begin{cases} t(p) = \ln|p| - \arcsin p + c \\ x(p) = p + \sqrt{1 - p^2} \end{cases}, \ p \in (-1, 0) \ \text{ sau } \ (0, 1).$$

unde $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai admite şi soluţia $x \equiv 1$.

(3) Este o ecuaţie LAGRANGE având soluţia generală sub forma parametrică:

$$\begin{cases} t(p) = ce^{-p} - 2p + 2 \\ x(p) = c(1 + p)e^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}, \ p \in \mathbb{R}.$$

unde $c \in \mathbb{R}$.

(4) Este o ecuaţie LAGRANGE având soluţia generală sub forma parametrică:

$$\begin{cases} t(p) = -\dfrac{1}{3}p + \dfrac{c}{\sqrt{p}} \\ x(p) = -c\sqrt{p} - -\dfrac{1}{6}p^2 \end{cases}, \ p > 0,$$

sau

$$\begin{cases} t(p) = -\dfrac{1}{3}p + \dfrac{c}{\sqrt{-p}} \\ x(p) = c\sqrt{-p} - -\dfrac{1}{6}p^2 \end{cases}, \ p < 0,$$

unde $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai are şi soluţia $x \equiv 0$.

(5) Este o ecuaţie CLAIRAUT având soluţia generală $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = ct + t^2$ cu $c \in \mathbb{R}$ şi soluţia singulară sub forma parametrică:

$$\begin{cases} t(p) = -2p \\ x(p) = -p^2 \end{cases}, \ p \in \mathbb{R}$$

Eliminându-l pe $p \in \mathbb{R}$ obţinem $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

(6) Este o ecuaţie CLAIRAUT dar şi cu variabile separabile. Soluţia generală $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de $x(t) = ct + c$, cu $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia nu admite soluţie singulară.

(7) Este o ecuaţie CLAIRAUT având soluţia generală $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = ct + \sqrt{1 + c^2}$, cu $c \in \mathbb{R}$. Soluţia singulară este

$$\begin{cases} t(p) = -\dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \\ x(p) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \end{cases}, \ p \in \mathbb{R}.$$

Eliminându-l pe p se obţine $x : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x(t) = \sqrt{1 - t^2}$.

(8) Este o ecuaţie CLAIRAUT având soluţia generală $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = ct + \frac{1}{c}$, cu $c \in \mathbb{R}^*$ şi soluţia singulară

$$\begin{cases} t(p) = \dfrac{1}{p^2} \\ x(p) = \dfrac{2}{p} \end{cases}, \ p \in \mathbb{R}*.$$

Eliminând parametrul p obţinem $x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x(t) = \pm\sqrt{t}$.

Problema 1.11 Să alegem un reper cartezian cu originea în punctul fix precizat. Fie $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ funcţia al cărei grafic este curba căutată. Ecuaţia tangentei la curbă în punctul curent $(t, x(t))$ este $X - x(t) = x'(t)(T - t)$, iar distanţa de la origine la această tangentă este constantă dacă şi numai dacă există $c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$\frac{tx'(t) - x(t)}{\sqrt{1 + x'^2(t)}} = c.$$

Explicitând $x(t)$ se ajunge la o ecuaţie CLAIRAUT având soluţia generală $x(t) = kt - c\sqrt{1 + k^2}$, cu $k \in \mathbb{R}^*$ şi soluţia singulară

$$\begin{cases} t(p) = \dfrac{cp}{\sqrt{1 + p^2}} \\ x(p) = -\dfrac{c}{1 + p^2} \end{cases}, \ p \in \mathbb{R}.$$

Eliminând p obţinem ecuaţia implicită a curbei: $x^2 + t^2 = c^2$, ecuaţie care reprezintă un cerc cu centrul în origine (în punctul fix considerat) şi de rază egală cu distanţa $|c|$ de la punct la tangentă. Alte soluţii, numai de clasă C^1, se obţin juxtapunând un arc de cerc cu cele două semidrepte de pe tangentele la capete. Vezi Figura 6.1.1 de mai jos.

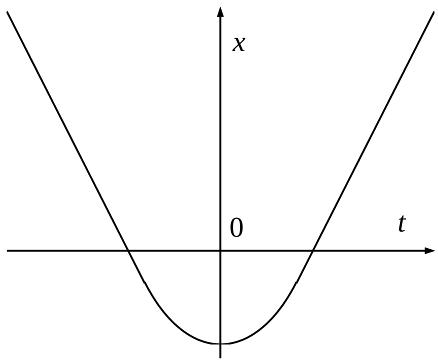

FIGURA 6.1.1

Problema 1.12 Fie $x : \mathbb{I}_x \to \mathbb{R}$ funcţia al cărei grafic este curba căutată. Ecuaţia tangentei la curbă în punctul curent $(t, x(t))$ este $X - x(t) = x'(t)(T - t)$, iar punctele de intersecţie ale acesteia cu axele de coordonate sunt $A\left(t - \frac{x(t)}{x'(t)}, 0\right)$ şi $B(0, x(t) - tx'(t))$. Condiţia din enunţ se exprimă analitic sub forma

$$\left(t - \frac{x(t)}{x'(t)}\right)(x(t) - tx'(t)) = -c,$$

unde $c \in \mathbb{R}^*$. Explicitând $x(t)$ obţinem o ecuaţie CLAIRAUT cu soluţia generală $x(t) = kt \pm \sqrt{ck}$, cu $k \in \mathbb{R}^*$, $ck > 0$ şi soluţia singulară $tx = -\dfrac{c}{4}$. Mai obţinem şi alte soluţii, numai de clasă C^1, prin juxtapunerea unui arc de hiperbolă cu semidreapta (semidreptele) de pe tangenta (tangentele) în capăt (în capete).

Problema 1.13 Să observăm că rezultanta forţei de gravitaţie şi a forţei centrifuge are direcţia normalei la suprafaţă în punctul considerat. Luând Oy drept axă de rotaţie şi notând cu ω viteza unghiulară, obţinem pentru secţiunea plană axială a suprafeţei ecuaţia diferenţială

$$g\frac{dy}{dx}(x) = \omega^2 x.$$

Problema 1.14 Conform legii BOYLE-MARIOTTE densitatea este proporţională cu presiunea. Ca atare variaţia de presiune de la altitudinea t la altitudinea $t+h$ va fi $p(t+h)-p(t) = -kp(t)h$. Ecuaţia diferenţială obţinută este $p'(t) = -kp(t)$. Deducem $p(t) = e^{-000167t}$.

Problema 1.15 Variaţia de lungime pe porţiunea x, $x+h$ este $s(x+h)-s(x) = kW(l-x)l^{-1}h$. Se obţine ecuaţia diferenţială $s'(x) = kW(l-x)l^{-1}$. Rezultă $s(l) = 0,5kWl$.

Problema 1.16 Fie $y : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}_+$ funcţia definită prin

$$y(t) = \int_a^t k(s)\,x(s)\,ds$$

pentru $t \in [\,a,b\,]$. Evident y este derivabilă pe $[\,a,b\,]$ şi $y'(t) = k(t)\,x(t)$ pentru orice $t \in [\,a,b\,]$. Ţinând cont de inegalitatea din ipoteză şi de faptul că funcţia k este pozitivă, deducem

$$y'(s) \le k(s)\,y(s) + k(s)\,h(s)$$

pentru orice $s \in [\,a,b\,]$. Înmulţind în ambii membri inegalitatea de mai sus cu

$$\exp\left(-\int_a^s k(\tau)\,d\tau\right)$$

deducem

$$\frac{d}{ds}\left(y(s)\exp\left(-\int_a^s k(\tau)\,d\tau\right)\right) \le k(t)\,h(t)\exp\left(-\int_a^s k(\tau)\,d\tau\right).$$

Prin integrare de la a la t obţinem

$$y(t) \le \int_a^t k(s)\,h(s)\exp\left(\int_s^t k(\tau)\,d\tau\right)ds.$$

Cum $x(t) \le h(t) + y(t)$ pentru orice $t \in [\,a,b\,]$ demonstraţia este încheiată.

Problema 1.17 Din inegalitatea lui BELLMAN rezultă

$$x(t) \le \xi + \int_a^t v(s)\,ds + \int_a^t k(s)\left(\xi + \int_a^s v(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int_s^t k(\tau)\,d\tau\right)ds =$$

$$= \xi + \int_a^t v(s)\,ds - \int_a^t \left(\xi + \int_a^s v(\tau)\,d\tau\right)\frac{d}{ds}\exp\left(\int_s^t k(\tau)\,d\tau\right)ds =$$

$$= \xi + \int_a^t v(s)\,ds - \left(\xi + \int_a^s v(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int_s^t k(\tau)\,d\tau\right)\Bigg|_a^t + \int_a^t v(s)\exp\left(\int_s^t k(\tau)\,d\tau\right)ds =$$

$$= \xi\exp\left(\int_a^t k(s)\,ds\right) + \int_a^t v(s)\exp\left(\int_s^t k(\tau)\,d\tau\right)ds.$$

Problema 1.18 Demonstraţia urmează, cu modificări minore, aceeaşi cale cu cea utilizată pentru stabilirea lemei 1.4.3.

Problema 1.19 Să presupunem pentru reducere la absurd că există $t_1 \in (0,T)$ astfel încât $x(t_1) > y(t_1)$. Deoarece x şi y sunt continue şi $x(0) \le y(0)$, există $t_0 \in [\,0,T\,]$ cu $t_0 < t_1$, astfel încât $x(t_0) = y(t_0)$ şi $x(t) \ge y(t)$ pentru orice $t \in [\,t_0,t_1)$. Cum f este crescătoare avem

$$\left(\frac{dx}{dt}(t) - \frac{dy}{dt}(t)\right)(x(t) - y(t)) \le 0$$

pentru orice $t \in [\,t_0,t_1\,]$. Integrând această inegalitate pe $[\,t_0,t_1\,]$ obţinem

$$(x(t_1) - y(t_1))^2 \le (x(t_0) - y(t_0))^2 = 0,$$

relaţie care contrazice inegalitatea $x(t_1) > y(t_1)$.

Capitolul 2

Exerciţiul 2.1 (a) $x(t) = t(2-t)^{-1}$ pentru $t \in [1, 2)$. (b) $x(t) = \frac{1}{2}te^{2-t^2/2}$ pentru $t \in [2, +\infty)$. (c) $x(t) = \operatorname{tg} 4t - 4t - \frac{1}{2}$ pentru $t \in [0, \frac{\pi}{8})$. (d) $x(t) = \sqrt{5(1-t^2)^{-1} - 1}$ pentru orice $t \in [0, 1)$. (e) $x(t) = -t \ln t + 2t$ pentru $t \in [1, +\infty)$. (f) $x(t) = (1-t^2)(2t)^{-1}$ pentru $t \in [1, +\infty)$. (g) $x(t) = t(\ln t + 1)^{-1}$ pentru $t \in [1, +\infty)$. (h) $x(t) = \sqrt{1+3t}$ pentru $t \in [1, +\infty)$. (i) $x(t) = te^t$ pentru $t \in [1, +\infty)$. (j) $x(t) = (t^6 + 11)(6t^2)^{-1}$ pentru $t \in [1, +\infty)$. (k) $x(t) = (e^t - e)t^{-1}$ pentru $t \in [1, +\infty)$. (l) $x(t) = (t \ln t - 1)^{-1}$ pentru $t \in [1, t^*)$ unde t^* este rădăcina ecuaţiei $t \ln t - 1 = 0$. (m) $x(t) = \sqrt{t(4 - \ln t)}$ pentru $t \in [1, e^4)$. (n) $x(t) = t^{-1}$ pentru $t \in [1, +\infty)$. (o) $x(t) = (2t - t^2)^{-1}$ pentru orice $t \in [1, 2)$. (p) x este definită implicit de ecuaţia $x^3 - x^2 + t^2 = 0$ pentru $t \in [1, +\infty)$.

Problema 2.1 Se constată imediat că funcţia z este continuă pe $[a, c]$, derivabilă pe $[a, c] \setminus \{b\}$ şi că verifică $z(a) = \xi$ şi $z'(t) = f(t, z(t))$ pentru orice $t \in [a, c] \setminus \{b\}$. Din continuitatea funcţiilor f şi z şi din ultima egalitate, deducem că z' poate fi prelungită prin continuitate în punctul b. Dar aceasta înseamnă că z este de clasă C^1 pe $[a, c]$ şi, în plus, că este soluţie a $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega, f, a, \xi)$.

Problema 2.2 Dacă $\xi > 0$ atunci funcţia $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t) = \sqrt{t^2 + \xi^2 - a^2}$, este unica soluţie globală la dreapta pentru $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, a, \xi)$. Analog, dacă $\xi < 0$ atunci funcţia $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t) = -\sqrt{t^2 + \xi^2 - a^2}$, este unica soluţie globală la stânga pentru $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, a, \xi)$. Dacă $\xi = 0$, atunci $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x(t) = 0$, este soluţia globală căutată. Evident funcţia f nu este continuă în $(1, 0)$ deoarece $f(1, 0) = 0$, în timp ce $\lim_{x \downarrow 0} f(1, x) = +\infty$.

Problema 2.3 Fie $x : (c, 0] \to \mathbb{R}$ o soluţie saturată la stânga a $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, 0, 0)$. Atunci avem $x'(t) = f(t, x(t))$ pentru orice $t \in (c, 0]$. Cum $x'(0) = f(0, 0) = -1$ şi x este de clasă C^1 x' nu poate lua decât valoarea -1. Reamintim că f are numai valorile ± 1. Ca atare $x(t) = -t + k$ cu $k \in \mathbb{R}$. Cum $x(0) = 0$ rezultă $k = 0$ şi în consecinţă unica soluţie saturată la stânga a $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, 0, 0)$ este funcţia $x : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t) = -t$.

Problema 2.4 Să presupunem pentru reducere la absurd că nu ar fi aşa. Atunci există o mulţime compactă $\mathcal{K} \subset \mathbb{I} \times \Omega$ astfel încât pentru orice $L > 0$ există $(t_L, x_L), (t_L, y_L) \in \mathcal{K}$ cu proprietatea $\|f(t_L, x_L) - f(t_L, y_L)\| > L\|x_L - y_L\|$. Luând $L = n$ cu $n \in \mathbb{N}$ şi notând cu $t_n = t_L$, $x_n = x_L$ şi $y_n = y_L$, avem $\|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\| > n\|x_n - y_n\|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $\mathcal{K}$ este compactă şi f este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$ ea este mărginită pe $\mathcal{K}$. Ca atare există $M > 0$ astfel încât $\|f(t, x)\| \leq M$ pentru orice $(t, x) \in \mathcal{K}$. Din această inegalitate şi din precedenta deducem că $n\|x_n - y_n\| \leq 2M$ pentru orice $n \in \mathbb{R}$. Urmează că $\lim_n (x_n - y_n) = 0$. Utilizând din nou compactitatea lui $\mathcal{K}$, putem presupune fără a restrânge generalitatea că există $(t^*, x^*) \in \mathcal{K}$ astfel încât $\lim_n (t_n, x_n, y_n) = (t^*, x^*, x^*)$. Din ipoteză ştim că există $\mathcal{V}$ o vecinătate a lui (t^*, x^*) şi $L = L(\mathcal{V}) > 0$ astfel încât pentru orice $(t, x), (t, y) \in \mathcal{V}$ să avem $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$. Cum $\lim_n (t_n, x_n, y_n) = (t^*, x^*, x^*)$, deducem că există $n(\mathcal{V}) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n(\mathcal{V})$ să avem $(t_n, x_n), (t_n, y_n) \in \mathcal{V}$. În consecinţă, pentru orice $n \geq n(\mathcal{V})$ avem $n\|x_n - y_n\| < \|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\| \leq L\|x_n - y_n\|$ ceea ce, în virtutea faptului că $x_n \neq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, conduce la o absurditate: $(n < L)$ pentru orice $n \geq n(\mathcal{V})$.

Problema 2.5 Conform Problemei 2.4 este suficient să demonstrăm că pentru orice (a, ξ) din $\mathbb{I} \times \Omega$ există o vecinătate $\mathcal{V}$ a lui (a, ξ) şi $L > 0$ astfel încât pentru orice $(t, x), (t, y) \in \mathcal{V}$ să avem $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$. Fie $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$ şi fie $\mathcal{V}$ o sferă închisă centrată în (a, ξ) inclusă în $\mathbb{I} \times \Omega$. Fie $(t, x), (t, y) \in \mathbb{V}$ şi să observăm că funcţia $\theta \mapsto (t, \theta y + (1 - \theta)x)$ este continuă de la $[0, 1]$ cu valori în $\mathcal{V}$, aceasta deoarece $\mathcal{V}$ este convexă. Atunci şi funcţia

$$\theta \mapsto \frac{d}{d\theta}(f(t, \theta y + (1 - \theta)x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \theta y + (1 - \theta)x)(y_j - x_j)$$

este continuă de la $[0,1]$ în $\mathbb{R}^n$ şi

$$\int_0^1 \frac{d}{d\theta}(f(t,\theta y+(1-\theta)x)\,d\theta = f(t,y)-f(t,x).$$

Din ipoteză ştim că $\partial f_i/\partial x_j$, $i,j=1,2,\ldots,n$ sunt continue pe $\mathbb{I}\times\Omega$ şi ca atare ele sunt mărginite pe mulţimea compactă $\mathcal{V}$. Aceasta înseamnă că există $M>0$ astfel încât

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(s,z)\right| \le M$$

pentru orice $i,j=1,2\ldots,n$ şi orice $(s,z)\in\mathcal{V}$. Avem atunci

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| = \left\|\int_0^1 \frac{d}{d\theta}(f(t,\theta y+(1-\theta)x)\,d\theta\right\| \le \int_0^1 \left\|\frac{d}{d\theta}(f(t,\theta y+(1-\theta)x)\right\| d\theta$$

$$\le \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,\theta y+(1-\theta)x)(y_j-x_j)\right\| d\theta \le \sqrt{n}M\|x-y\|$$

şi drept urmare $L=\sqrt{n}M$.

Problema 2.6 Substituţia $x-t=y$ în ecuaţia $x'=g(t,x)$ conduce la ecuaţia $y'=h(y)$, unde $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $h(y)=1+2\sqrt[3]{y^2}$ pentru orice $y\in\mathbb{R}$. Această ecuaţie este cu variabile separabile, iar problema CAUCHY asociată ei are proprietatea de unicitate. Într-adevăr, conform Teoremei 1.2.1 soluţia $\mathcal{PC}(\mathbb{R},\mathbb{R},h,a,\xi)$ este

$$y(t,\xi)=H^{-1}(t-a)$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}$, unde

$$H(z)=\int_\xi^z \frac{dy}{1+2\sqrt[3]{y^2}}.$$

Pentru a încheia demonstraţia, să remarcăm că funcţiile $x_1,x_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin $x_1(t)=t$ şi $x_2(t)=\frac{1}{27}(t-a)^3+t$ pentru $t\in\mathbb{R}$, sunt soluţii distincte ale $\mathcal{PC}(\mathbb{R},\mathbb{R},f,a,a)$.

Problema 2.7 Începem prin a observa că ambele funcţii $x\vee y$ şi $x\wedge y$ verifică condiţia iniţială. De asemenea, este uşor de constatat că $x\vee y=x\wedge y$ sunt continue pe $\mathbb{J}$, derivabile pe mulţimea deschisă $\{t;\ t\in\mathbb{J},\ x(t)\neq y(t)\}$ şi satisfac ecuaţia diferenţială în orice punct din această mulţime. Aceasta rezultă din faptul că mulţimea de mai sus este o reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise şi pe fiecare interval $\mathbb{J}_k$ din această reuniune avem sau $x(t)<y(t)$ pentru orice $t\in\mathbb{J}_k$, sau $x(t)>y(t)$ pentru orice $t\in\mathbb{J}_k$. Pentru a încheia demonstraţia ar fi suficient să arătăm că $x\vee y=x\wedge y$ sunt derivabile în orice punct $t\in\mathbb{J}$ în care $x(t)=y(t)$. Fie t un astfel de punct. Avem atunci

$$\lim_{s\to t}\frac{x(s)-x(t)}{s-t}=x'(t)=f(t,x(t))=f(t,y(t))=y'(t)=\lim_{s\to t}\frac{y(s)-y(t)}{s-t}$$

ceea ce probează că $x\vee y$ şi $x\wedge y$ sunt derivabile în t şi ambele au derivatele în acest punct egale cu $x'(t)=y'(t)$. De aici şi din faptul că $(x\vee y)(t)=(x\wedge y)(t)=x(t)=y(t)$, rezultă că ambele funcţii verifică ecuaţia diferenţială în t, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 2.8 Să presupunem pentru reducere la absurd că există $t_0\in[a,b_\xi)\cap[a,b_\eta)$ astfel încât $x(t_0,\xi)>x(t_0,\eta)$. Cum $(x(t_0,\xi)-x(t_0,\eta))(x(a,\xi)-x(a,\eta)\le 0$ şi $t\mapsto x(t,\xi)-x(t,\eta)$ are proprietatea lui DARBOUX fiind continuă, există $t_1\in[a,t_0)$ astfel încât $x(t_1,\xi)=x(t_1,\eta)$. Din proprietatea de unicitate deducem că $x(t,\xi)=x(t,\eta)$ pentru orice $t\in[t_1,b_\xi)\cap[t_1,b_\eta)$. Obţinem $x(t_0,\xi)=x(t_0,\eta)$ ceea ce este în contradicţie cu presupunerea făcută. Contradicţia poate fi eliminată numai dacă $x(t,\xi)\le x(t,\eta)$ pentru orice $t\in[a,b_\xi)\cap[a,b_\eta)$.

Problema 2.9 Fie $x,y:\mathbb{J}\to\Omega$ două soluţii ale $\mathcal{PC}(\mathbb{I},\Omega,f,a,\xi)$. Înmulţind scalar egalitatea $x'(t)-y'(t)=f(t,x(t))-f(t,y(t))$ cu $x(t)-y(t)$, utilizând (i) în Lema 6.1.2 şi condiţia din enunţ deducem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t)-y(t)\|^2 \le \omega(t, \|x(t)-y(t)\|)\|x(t)-y(t)\|$$

pentru orice $t \in \mathbb{J}$. Notând cu $z(t) = \frac{1}{2}\|x(t)-y(t)\|^2$, inegalitatea de mai sus se rescrie sub forma $z'(t) \le \omega(t, \sqrt{2z(t)})\sqrt{2z(t)}$, sau echivalent $(\sqrt{2z})'(t) \le \omega(t, \sqrt{2z(t)})$ pentru orice $t \in \mathbb{J}$. Cum $\sqrt{2z(a)} = 0$ şi unica soluţie a $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \mathbb{R}_+, \omega, a, 0)$ este funcţia identic nulă, din Problema **??**, urmează că $\sqrt{2z(t)} \le 0$ pentru orice $t \in \mathbb{J}$, ceea ce arată că $x(t) = y(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{J}$.

Teorema 2.3.2 rezultă din rezultatul demonstrat anterior luând $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $\omega(\eta) = L\eta$ pentru orice $\eta \in \mathbb{R}$, unde $L > 0$ este constanta LIPSCHITZ corespunzătoare funcţiei f pe mulţimea $[a, a+\delta] \times B(\xi, r)$. Vezi demonstraţia Teoremei 2.3.2. Teorema 2.4.2 rezultă din consideraţiile precedente luând $\omega \equiv 0$.

Problema 2.10 Începem prin a observa că, pentru orice $a > 0$ avem

$$\int_0^a \frac{d\eta}{\omega(\eta)} = +\infty.$$

Să presupunem pentru reducere la absurd că există o soluţie neidentic nulă $x : [0, T) \to \mathbb{R}$. Cum $\omega(r) \ge 0$, rezultă că $x(t) \ge 0$. În consecinţă, există $t \in (0, T)$ astfel încât $x(t) > 0$. De aici rezultă că există $\alpha, \beta \in [0, T)$ cu $\alpha < \beta$ şi $x(\alpha) = 0 < x(t)$ pentru orice $t \in (\alpha, \beta)$. Avem atunci

$$1 = \frac{x'(t)}{\omega(x(t))}$$

pentru orice $t \in (\alpha, \beta)$. Integrând această egalitate de la α la β obţinem

$$\beta - \alpha = \int_\alpha^\beta \frac{x'(t)\,dt}{\omega(x(t))} = \int_0^{x(\beta)} \frac{d\eta}{\omega(\eta)} = +\infty$$

ceea ce este absurd. Contradicţia la care am ajuns poate fi eliminată numai dacă unica soluţie saturată a problemei CAUCHY considerate este $x \equiv 0$.

Problema 2.11 Cum f este lipschitziană şi g este disipativă avem

$$\langle f(t,x) + g(t,x) - f(t,y) - g(t,y), x - y\rangle \le L\|x-y\|^2$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$ şi orice $x, y \in \Omega$. Suntem atunci în ipotezele Problemei 2.9 cu $\omega(r) = r$ pentru orice $r \in \mathbb{R}_+$.

Problema 2.12 Avem

$$\langle f(t,x) - f(t,y), x - y\rangle \le \omega(\|x-y\|)\|x-y\|$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}$ şi orice $x, y \in \Omega$ şi ca atare suntem în ipotezele Problemei 2.9.

Problema 2.13 Fie $[a, a+\delta]$, $B(\xi, r)$ şi $L > 0$ alese ca în demonstraţia Teoremei 2.3.2. Să notăm cu $u(t) = e^{-L(t-a)}x(t)$ şi cu $v(t) = e^{-L(t-a)}y(t)$ şi să observăm că u, v sunt soluţii ale $\mathcal{PC}(\mathbb{I}, \Omega_0, g, a, \xi)$, unde $g(t,z) = e^{-L(t-a)}f(t, e^{L(t-a)}z) - Le^{-L(t-a)}z$ pentru orice (t, z) din $\mathbb{I} \times \Omega_0$ cu $\Omega_0 \subset \Omega$ convenabil ales. Cum g satisface ipotezele Teoremei 2.4.2 (vezi demonstraţia Teoremei 2.6.2) rezultă că $u \equiv v$ sau echivalent că $x \equiv y$ pe $\mathbb{J}$.

Problema 2.14 Funcţiile $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $x_1(t) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi

$$x_2(t) = \begin{cases} \dfrac{(t+1)^3}{27} & \text{dacă } t < -1 \\ 0 & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ \dfrac{t^3}{27} & \text{dacă } t > 0 \end{cases}$$

sunt două soluţii saturate distincte ale $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, -1, 0)$.

Problema 2.15 Fie $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$, definită prin $f(t,x) = \operatorname{tg} x$ pentru orice $(t, x) \in \mathbb{I} \times \Omega$. Este uşor de constatat că f nu duce submulţimile mărginite din $\mathbb{I} \times \Omega$ în submulţimi mărginite din $\mathbb{R}$.

Problema 2.16 Demonstraţia urmează exact aceeaşi cale cu cea a Teoremei 2.5.4 cu excepţia frazei care precede inegalitatea (4.4) care în acest caz este: “Deoarece pentru orice submulţime compactă $\mathbb{J}$ din $\mathbb{I}$ şi orice submulţime mărginită B din Ω, $f(\mathbb{J} \times \Omega)$ este mărginită, cum $[a, b]$ este compactă şi inclusă în $\mathbb{I}$ iar C este mărginită, urmează că există $M > 0$ astfel încât...”. Este evident că funcţia $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(t, x) = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg} x$ pentru $(t, x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ are proprietatea din enunţul problemei, dar nu duce submulţimile mărginite din $\mathbb{I} \times \Omega$ în submulţimi mărginite din $\mathbb{R}$. Deci clasa funcţiilor având proprietatea descrisă în problemă este strict mai amplă decât cea a funcţiilor f care duc submulţimile mărginite din $\mathbb{I} \times \Omega$ în submulţimi mărginite din $\mathbb{R}^n$.

Problema 2.17 Fie $x : [0, b) \to \mathbb{R}$ o soluţie saturată a problemei CAUCHY considerate. Aceasta înseamnă că funcţia vectorială $z : [0, b) \to \mathbb{R}^2$, definită prin $z(t) = (x(t), x'(t))$ pentru orice $t \in [0, b)$, este soluţie saturată a problemei CAUCHY

$$(\mathcal{PC}) \qquad \begin{cases} x' = y \\ y' = -g(x) - f(y) \\ x(0) = \xi_1, \ y(0) = \xi_2 \end{cases}$$

Înmulţind ecuaţia $x'' + f(x') + g(x) = 0$ cu x', integrând egalitatea astfel obţinută pe $[0, t]$ şi reamintind că $G(x) \geq ax^2$ şi $yf(y) \geq 0$, obţinem

$$\frac{1}{2}|x'(t)|^2 + a|x(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|\xi_1|^2 + a|\xi_2|^2$$

pentru orice $t \in [0, b)$. Cum $a > 0$, rezultă că funcţia z definită mai sus este o soluţie saturată mărginită a $(\mathcal{PC})$. Conform Consecinţei 2.5.3 $b = +\infty$, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 2.18 Unicitatea rezultă din Problema 2.11. Vom arăta că orice soluţie saturată a $\mathcal{PC}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n, f, a, \xi)$ este globală. În virtutea Consecinţei 2.5.3, pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că, dacă $x : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ este o soluţie a $\mathcal{PC}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n, f, a, \xi)$ cu $b < +\infty$, atunci x este mărginită pe $[a, b)$. Să observăm că

$$\|x(t)\| \leq \|\xi\| + \int_a^t \|f(s, x(s))\| \, ds \leq \|\xi\| + \int_a^b \|f(s, 0)\| \, ds + L \int_a^t \|x(s)\| \, ds$$

pentru orice $t \in [a, b)$. Din inegalitatea lui GRONWALL rezultă că

$$\|x(t)\| \leq \left(\|\xi\| + \int_a^b \|f(s, 0)\| \, ds \right) e^{L(b-a)}$$

pentru orice $t \in [a, b)$, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 2.19 Deoarece x este mărginită pe $[a, b)$, mulţimea punctelor ei limită pentru $t \uparrow b$ este nevidă şi compactă. Pentru a încheia demonstraţia este suficient să arătăm că această mulţime conţine exact un element. În acest scop, cum x este saturată şi $b < t_2$, din Teorema 2.5.3 punctul (iii), deducem că mulţimea acestor puncte limită este inclusă în frontiera mulţimii (ω_1, ω_2) care este $\{\omega_1, \omega_2\}$. Presupunând pentru reducere la absurd că atât ω_1 cât şi ω_2 sunt puncte limită ale lui x pentru $t \uparrow b$, rezultă că există două şiruri $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ şi $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$, ambele strict crescătoare la b astfel încât $\lim_k x(t_k) = \omega_1$ şi $\lim_k x(s_k) = \omega_2$. În plus, putem presupune fără a restrânge generalitatea (trecând eventual la două subşiruri şi renumerotând termenii) că $t_k < s_k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Fie acum $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$. Atunci există $k_\omega \in \mathbb{N}$ astfel încât $x(t_k) \in (\omega_1, \omega)$ şi $x(s_k) \in (\omega, \omega_2)$ pentru orice $k \geq k_\omega$. Cum x este continuă ea are proprietatea lui DARBOUX şi ca atare, pentru orice $k \geq k_\omega$ există $r_k \in (t_k, s_k)$ astfel încât $x(r_k) = \omega$. Evident $\lim_k r_k = b$ şi în consecinţă $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ este de asemenea punct limită al lui x pentru $t \uparrow b$. Absurditatea la care am ajuns poate fi înlăturată numai dacă mulţimea punctelor limită ale lui x pentru $t \uparrow b$ este formată dintr-un singur punct. Generalizarea la cazul n-dimensional are următorul enunţ: *dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă a cărei frontieră este o mulţime de puncte izolate, $f : (t_1, t_2) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este continuă, $a \in (t_1, t_2)$, $\xi \in \Omega$ şi $x : [a, b) \to \Omega$ este o soluţie saturată a $\mathcal{PC}((t_1, t_2), \Omega, f, a, \xi)$ cu $b < t_2$ şi x mărginită pe $[a, b)$,* *atunci există* $\lim_{t\uparrow b} x(t) = x^*$. Demonstraţia urmează aceeaşi cale cu precedenta observând că segmentul de dreaptă care uneşte oricare două puncte distincte ale frontierei lui Ω conţine un întreg subsegment nebanal (care nu se reduce la un punct) inclus în Ω.

Problema 2.20 Înmulţind ecuaţia $x' = f(x)$ cu x', integrând-o membru cu membru pe $[\,a, b\,]$ şi ţinând cont că $x(a) = x(b)$, obţinem

$$\int_a^b x'^2(t)\,dt = \int_a^b f(x(t))x'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F(x(t))\,dt = F(x(b)) - F(x(a)) = 0,$$

unde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f. Cum x'^2 este continuă şi nenegativă, integrala ei pe $[\,a, b\,]$ este nulă dacă şi numai dacă $x' \equiv 0$ pe $[\,a, b\,]$. Deci x este constantă pe $[\,a, b\,]$. Rezultatul nu se păstrează în cazul $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pentru $n > 1$, după cum putem constata observând că funcţia $x : [\,0, 2\pi\,] \to \mathbb{R}^2$, definită prin $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\sin t, \cos t)$ pentru $t \in [\,0, 2\pi\,]$, este o soluţie neconstantă a problemei

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} x' = f(x) \\ x(a) = x(b), \end{cases}$$

unde $[\,a, b\,] = [\,0, 2\pi\,]$ şi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este dată de $f(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$ pentru $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Putem însă demonstra, utilizând aceleaşi argumente, că dacă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este gradientul unei funcţii de clasă C^1 $\varPhi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, atunci orice soluţie $x : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^1 a problemei $(\mathcal{P})$ este constantă.[3] În acest caz avem

$$\int_a^b \|x'(t)\|^2 dt = \int_a^b \langle f(x(t)), x'(t)\rangle dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varPhi}{\partial x_i}(x(t))x_i'(t)\right) dt = \varPhi(x(b)) - \varPhi(x(a)) = 0.$$

Problema 2.21 După cum am văzut pe parcursul rezolvării Problemei 2.2, dacă $\xi > 0$, atunci funcţia $x(\cdot, \xi) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t, \xi) = \sqrt{t^2 + \xi^2}$, este unica soluţie globală la dreapta pentru $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, \xi)$. Atunci

$$|x(t, \xi) - t| \le |\sqrt{t^2 + \xi^2} - t| = \frac{\xi^2}{\sqrt{t^2 + \xi^2} + t} \le \xi$$

pentru orice $t \ge 0$ şi orice $\xi > 0$. Deci $\lim_{\xi\downarrow 0} x(t, \xi) = t$ uniform pentru $t \ge 0$. Este uşor de verificat că funcţia $y(t) = t$ pentru $t \ge 0$ nu este soluţie a $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)$, deoarece $y'(0) = 1 \ne f(0, 0) = 0$. Această discontinuitate în raport cu datele inţiale este o consecinţă a discontinităţii funcţiei f în punctele de forma $(t, 0)$ cu $t \in \mathbb{R}$.

Problema 2.22 Unica soluţie a $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)_p$ pentru $p > 0$ este $x(\cdot, p) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t, p) = \sqrt{t^2 + p^2} - p$ pentru orice $t \in [\,0, +\infty)$. Avem

$$|x(t, p)| = \left|\frac{t^2}{\sqrt{t^2 + p^2}}\right| \le 1 \quad \text{şi} \quad |x'(t, p)| = \left|\frac{t}{\sqrt{t^2 + p^2}}\right| \le 1$$

pentru orice $p \ge 0$ şi orice $t \in [\,0, 1\,]$. Ca atare familia de funcţii $\{x(\cdot, p);\ p \ge 0\}$ este relativ compactă în $C([\,0, 1\,]; \mathbb{R})$. Din această observaţie şi din faptul că $\lim_{p\downarrow 0} x(t, p) = t$ punctual pe $[\,0, 1\,]$, rezultă că limita de mai sus este chiar uniformă pe $[\,0, 1\,]$. Dar funcţia $y : [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$, definită prin $y(t) = t$ nu este soluţie a $\mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, f, 0, 0)_0$ deoarece $y'(0) = 1 \ne f(0, 0, 0) = 0$. Şi în acest caz, discontinuitatea soluţiei ca funcţie de parametrul p este cauzată de discontinuitatea funcţiei f în punctele de forma (t, x, p) cu $x + p = 0$.

Problema 2.23 Pentru orice $p \ne 0$ fixat, funcţia $x \mapsto 3\sqrt[3]{x^2 + p^2}$ este local lipschitziană pe $\mathbb{R}$ fiind de clasă C^1. Atunci, conform Teoremei 2.3.2, urmează că, pentru orice $p > 0$, $\mathcal{PC}(\mathcal{D})_p$ are proprietatea de unicitate. Pe de altă parte, după cum am constatat în Exemplul 2.4.1, $\mathcal{PC}(\mathcal{D})_0$ nu are proprietatea de unicitate.

[3] Această condiţie este automat verificată pentru $n = 1$ deoarece orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite primitive.

Problema 2.24 Să definim şirul de funcţii: $x_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ prin $x_0(t) = f(t)$ pentru orice $t \in [a,b]$ şi

$$x_k(t) = f(t) + \int_a^t g(t, \tau, x_{k-1}(\tau))\, d\tau$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ şi orice $t \in [a,b]$. Evident toţi termenii acestui şir sunt funcţii continue pe $[a,b]$. Cum $[a,b]$ este compact, există $M > 0$ astfel încât $\|g(t,s,f(s))\| \leq M$ pentru orice $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$. Avem atunci $\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq M(t-a)$ pentru orice $t \in [a,b]$. Utilizând faptul că funcţia g este lipschitziană pe $\mathbb{R}^n$, se demonstrează prin inducţie completă că $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisface inegalitatea similara celei stabilite în cadrul demonstraţiei Teoremei 2.3.2. Din acest loc, demonstraţia o urmează pe cea dată Teoremei 2.3.2.

Problema 2.25 Fie $h : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă şi fie $\xi \in \mathbb{R}^n$. Conform Consecinţei 2.5.1 $(\mathcal{PC})$ are cel puţin o soluţie saturată x definită fie pe $[0,T]$ fie pe $[0,T_m)$ cu $T_m \leq T$. Vom arăta în continuare că x este definită pe $[0,T]$. În acest scop să presupunem pentru reducere la absurd că x este definită pe $[0,T_m)$. Atunci, pentru orice $s \in [0,T_m)$ şi $\delta > 0$ cu $s+\delta < T_m$ avem

$$x'(s+\delta) - x'(s) = \mathcal{A}x(s+\delta) - \mathcal{A}x(s) + h(s+\delta) - h(s).$$

Înmulţind scalar această inegalitate cu $x(s+\delta) - x(s)$, utilizând condiţia de disipativitate şi punctul (i) din Lema 6.1.2, deducem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\|x(s+\delta) - x(s)\|^2\right) \leq \langle h(s+\delta) - h(s), x(s+\delta) - x(s)\rangle.$$

Integrând această inegalitate pe $[0,t]$ cu $t + \delta < T_m$ obţinem

$$\|x(t+\delta) - x(t)\|^2 \leq \|x(\delta) - \xi\|^2 + 2\int_0^t \langle h(s+\delta) - h(s), x(s+\delta) - x(s)\rangle ds.$$

Din inegalitatea CAUCHY-SCHWARZ avem că

$$\langle h(s+\delta) - h(s), x(s+\delta) - x(s)\rangle \leq \|h(s+\delta) - h(s)\|\|x(s+\delta) - x(s)\|.$$

Din această relaţie, din precedenta şi din Lema 1.4.3, deducem că

$$\|x(t+\delta) - x(\delta)\| \leq \|x(\delta) - \xi\| + \int_0^t \|h(s+\delta) - h(s)\|\, ds.$$

Cum x este continuă în $t = 0$, $x(0) = \xi$ şi h este uniform continuă pe $[0,T]$, din această inegalitate conchidem că x satisface condiţia, lui CAUCHY de existenţă a limitei finite la dreapta punctului T_m. Ca atare x se poate prelungi la $[0,T_m]$ ceea ce este absurd. Această contradicţie poate fi eliminată numai dacă x este definită pe $[0,T]$. Unicitatea va rezulta din cea de-a doua inegalitate formulată în problemă, pe care o vom demonstra mai jos. Fie x_1, x_2 două soluţii saturate corespunzătoare datelor iniţiale ξ_i şi funcţiilor h_i cu $i = 1,2$. Înmulţind scalar egalitatea $x_1'(t) - x_2'(t) = \mathcal{A}x_1(t) - \mathcal{A}x_2(t) + h_1(t) - h_2(t)$ cu $x_1(t) - x_2(t)$, ţinând cont de disipativitatea funcţiei $\mathcal{A}$ şi utilizând punctul (i) din Lema 6.1.2, deducem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|x_1(t) - x_2(t)\|^2\right) \leq \langle h_1(t) - h_2(t), x_1(t) - x_2(t)\rangle$$

pentru orice $t \in [0,T]$. Integrând această inegalitate pe $[0,t]$ rezultă

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \leq \|\xi_1 - \xi_2\|^2 + 2\int_0^t \langle h_1(s) - h_2(s), x_1(s) - x_2\rangle ds$$

pentru orice $t \in [0,T]$. Din această inegalitate, din inegalitatea CAUCHY-SCHWARZ şi din Lema 1.4.3 urmează că

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|\xi_1 - \xi_2\| + \int_0^t \|h_1(s) - h_2\| ds$$

pentru orice $t \in [0,T]$, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 2.26 Cum funcţia x_1 este continuă pe $[0,T]$ rezultă că există $M>0$ astfel încât $\|x_1(t)-\xi\|\le M$ pentru orice $t\in[0,T]$. Din cea de-a doua inegalitate stabilită în Problema 2.25 şi din faptul că f este lipschitziană pe $\mathbb{R}^n$ de constantă $L>0$ deducem

$$\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\|\le\int_0^t L\|x_k(s)-x_{k-1}(s)\|\,ds$$

pentru orice $k\in\mathbb{N}$ şi orice $t\in[0,T]$. Din această inegalitate şi din precedenta, folosind metoda inducţiei complete, se arată că

$$\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\|\le M\frac{L^kt^k}{k!}$$

pentru orice $k\in\mathbb{N}$ şi orice $t\in[0,T]$. Ca atare

$$\|x_{k+p}(t)-x_k(t)\|\le M\sum_{i=0}^{p-1}\frac{[L(b-a)]^{k+i}}{(k+i)!}$$

pentru orice $k,p\in\mathbb{N}$ şi orice $t\in[a,b]$. Cum $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[L(b-a)]^k}{k!}=e^{L(b-a)}$, rezultă că şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este uniform Cauchy pe $[a,b]$ şi deci uniform convergent pe acest interval la o funcţie continuă x. Trecând la limită în relaţia de recurenţă (în forma integrală) care defineşte şirul, deducem că x este soluţia ecuaţiei integrale

$$x(t)=\xi+\int_a^t[\mathcal{A}x(s)+f(s,x(s))]\,ds$$

şi implicit a $(\mathcal{PC})$. Aceasta încheie demonstraţia părţii de existenţă a Problemei 2.26. Cum f este lipschitziană pe $B(\xi,r)$, din cea de-a doua inegalitate stabilită în Problema 2.25, urmează că orice două soluţii $x,y:[a,a+\delta]\to B(\xi,r)$ ale $(\mathcal{PC})$ satisfac

$$\|x(t)-y(t)\|\le\int_a^t L\|x(s)-y(s)\|\,ds$$

pentru orice $t\in[a,a+\delta]$. Din inegalitatea lui Gronwall rezultă că $x\equiv y$ ceea ce încheie şi demonstraţia părţii de unicitate.

Problema 2.27 Începem prin a observa că, din ipoteza impusă asupra funcţiei $\mathcal{A}$ rezultă că aceasta este disipativă pe $\mathbb{R}^n$. Din Problema 2.25 deducem că pentru orice $\xi\in\mathbb{R}^n$ $\mathcal{PC}(\xi)$ are o soluţie globală unică şi ca atare $\mathcal{P}$ este bine definită. Fie $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$ şi să notăm cu x şi y cele două soluţii globale ale $\mathcal{PC}(\xi)$ şi respectiv $\mathcal{PC}(\eta)$. Înmulţind scalar $x'(t)-y'(t)=\mathcal{A}x(t)-\mathcal{A}y(t)$ cu $x(t)-y(t)$, ţinând cont de condiţia de disipativitate pe care o satisface $\mathcal{A}$ şi apelând la punctul (i) din Lema 6.1.2, deducem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|x(t)-y(t)\|^2\right)\le-\omega^2\|x(t)-y(t)\|^2$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}_+$. Înmulţind această inegalitate cu factorul integrant $e^{2\omega^2t}$ obţinem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}e^{2\omega^2t}\|x(t)-y(t)\|^2\right)\le 0$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}_+$. De aici, integrând pe $[0,T]$, obţinem

$$\frac{1}{2}e^{2\omega^2T}\|x(T)-y(T)\|^2\le\frac{1}{2}\|x(0)-y(0)\|^2.$$

Reamintind că $x(0)=\xi$, $y(0)=\eta$, $x(T)=\mathcal{P}(\xi)$ şi $y(T)=\mathcal{P}(\eta)$, ultima inegalitate implică

$$\|\mathcal{P}(\xi)-\mathcal{P}(\eta)\|\le q\|\xi-\eta\|$$

pentru orice $\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$, unde $q=e^{-\omega^2T}$. Din această proprietate rezultă prin inducţie completă că $\|\xi_{k+1}-\xi_k\|\le q^k\|\xi_1-\xi_0\|$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$ şi ca atare $\|\xi_{k+p}-\xi_k\|\le\|\xi_1-\xi_0\|\sum_{i=0}^{p-1}q^{k+i}$ pentru orice $k,p\in\mathbb{N}^*$. În sfârşit, observând că seria geometrică $\sum_{k=0}^{\infty}q^k$ este convergentă deoarece $q \in (0,1)$, rezultă că şirul $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent la un element $\eta \in \mathbb{R}^n$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă $\xi_k = \mathcal{P}(x_{k-1})$ şi ţinând cont de continuitatea funcţiei $\mathcal{P}$, conchidem că $\eta = \mathcal{P}(\eta)$, ceea ce se exprimă echivalent prin $\eta = x(0,0,\eta) = x(T,0,\eta)$. Cu aceasta demonstraţia punctelor (1) şi (2) este încheiată. Dacă f este T-periodică şi x este o soluţie globală a ecuaţiei $x'(t) = \mathcal{A}x(t) + f(t)$, atunci şi funcţia $x_T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, definită prin $x_T(t) = x(t+T)$ este o soluţie a aceleiaşi ecuaţii. Cum $x(T,0,\eta) = \eta$, din proprietatea de unicitate, urmează că $x(t+T,0,\eta) = x(t,0,\eta)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Aceasta înseamnă că $x(\cdot,0,\eta)$ este periodică de perioadă T, ceea ce completează demonstraţia punctului (3). Pentru a demonstra punctul (4) să observăm că dacă $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ este o soluţie T-periodică a ecuaţiei diferenţiale $x'(t) = \mathcal{A}x(t)+f(t)$ atunci $\xi = x(0)$ este un punct fix al funcţiei $\mathcal{P}$, adică $\xi = \mathcal{P}(\xi)$.[4] Cum $\mathcal{P}$ este o contracţie strictă ($\|\mathcal{P}(\xi) - \mathcal{P}(\eta)\| \leq q\|\xi - \eta\|$ pentru $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, unde $q \in (0,1)$), urmează că $\mathcal{P}$ are cel mult un punct fix. Demonstraţia este încheiată.

Capitolul 3

Problema 3.1 Dacă x este mărginită pe $\mathbb{R}_+$ există $m > 0$ astfel încât

$$|x(t)| \leq m$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Din cea de-a doua ecuaţie din $(\mathcal{S})$ deducem

$$|y(t) - y(s)| \leq m \left| \int_s^t |b(\tau)|\, d\tau \right|$$

pentru orice $t, s \in \mathbb{R}_+$. Cum b este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}_+$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\left| \int_s^t |b(\tau)|\, d\tau \right| \leq \varepsilon$$

pentru orice $t, s \in \mathbb{R}_+$ cu $t \geq \delta(\varepsilon)$ şi $s \geq \delta(\varepsilon)$. Din inegalitatea stabilită anterior rezultă că y satisface condiţia lui CAUCHY de existenţă a limitei finite la $+\infty$. Fie $\ell = \lim_{t\to+\infty} y(t)$. Rezultă atunci că $\lim_{t\to+\infty} x'(t) = \ell$. Presupunând pentru reducere la absurd că $\ell \neq 0$ deducem că x este nemărginită. Într-adevăr, pentru a fixa ideile, să presupunem că $\ell > 0$. Atunci există $t_0 > 0$ astfel încât, pentru orice $t \geq t_0$ să avem $x(t) \in [\frac{\ell}{2}(t-t_0)+x(t_0), \frac{3\ell}{2}(t-t_0)+x(t_0)\,]$. Drept urmare x este nemărginită pe $\mathbb{R}_+$. Contradicţia la care am ajuns poate fi eliminată numai dacă $\ell = 0$ ceea ce demonstrează punctul (i).

Pentru a demonstra (ii), să observăm că wronskianul sistemului $(\mathcal{S})$ este constant. Fie atunci un sistem fundamental de soluţii ale lui $(\mathcal{S})$. Presupunând că ambele soluţii ar fi mărginite pe $\mathbb{R}_+$, din punctul demonstrat anterior, ar rezulta că

$$c = \lim_{t\to+\infty} W(t) = 0$$

relaţie în contradicţie cu faptul că sistemul de soluţii este fundamental. Această contradicţie poate fi eliminată numai dacă cel puţin una dintre cele două soluţii este nemărginită pe $\mathbb{R}_+$ ceea ce probează punctul (ii).

În sfârşit, din (i) rezultă că dacă x este mărginită avem $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ şi dacă y este mărginită avem $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. Repetând raţionamentul de mai sus deducem $W(t) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

Problema 3.2 Se arată că

$$\mathcal{X}(t) = \left(\frac{\partial S_i(t)x}{\partial x_j} \right)_{n\times n}$$

[4] Reciproca acestei afirmaţii este adevărată, după cum am constatat, în ipoteza suplimentară că f este T-periodică.

este soluţia problemei CAUCHY

$$\begin{cases} \mathcal{X}'(t) = f_x(t, S(t)x)\mathcal{X}(t) \\ \mathcal{X}(a) = \mathcal{I}_n. \end{cases}$$

Conform teoremei 3.1.5 a lui LIOUVILLE avem

$$\det(\mathcal{X}(t)) = \det(\mathcal{X}(a))\exp\left(\int_a^t \operatorname{tr} f_x(s, S(s)\xi)\, ds\right)$$

$$= \det(\mathcal{X}(a))\exp\left[\int_a^t \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(s, S(s)\xi)\right) ds\right] = \det(\mathcal{X}(a))$$

pentru orice $t \in [\,a, b)$, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 3.3 Cum H este de clasă C^2, din criteriul lui SCHWARZ (de egalitate a derivatelor parţiale mixte de ordinul al doilea), se constată că funcţia $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ definită prin

$$f(p, q) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right),$$

unde $p, q \in \mathbb{R}^n$, are divergenţa nulă. Concluzia rezultă din Problema 3.2.

Problema 3.4 Din definiţia matricei $e^{t\mathcal{A}}$ şi din continuitatea aplicaţiei $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^\tau$ rezultă că

$$\left(e^{t\mathcal{A}}\right)^\tau = e^{t\mathcal{A}^\tau} = e^{-t\mathcal{A}} = \left(e^{t\mathcal{A}}\right)^{-1},$$

ceea ce arată că $e^{t\mathcal{A}}$ este ortogonală.

Problema 3.5 Fie $\mathcal{X}$ o matrice fundamentală a sistemului $x'(t) = \mathcal{A}x(t)$ care este ortogonală în $t = 0$. Evident $\mathcal{X}$ verifică $\mathcal{X}'(t) = \mathcal{A}\mathcal{X}(t)$ şi ca atare

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{X}^\tau(t)\right) = \mathcal{X}^\tau(t)\mathcal{A}^\tau.$$

Deci $\mathcal{X}^\tau$ este soluţie a problemei CAUCHY

$$\begin{cases} \mathcal{Y}'(t) = \mathcal{Y}(t)\mathcal{A}^\tau \\ \mathcal{Y}(0) = \mathcal{X}^\tau(0) \end{cases}$$

Pe de altă parte $\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(t) = \mathcal{I}_n$, ceea ce implică $\left(\mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(t)\right)' = 0$. Avem atunci

$$\mathcal{X}'(t)\mathcal{X}^{-1}(t) = -\mathcal{X}(t)\left(\mathcal{X}^{-1}\right)'(t)$$

sau

$$\left(\mathcal{X}^{-1}\right)'(t) = -\mathcal{X}^{-1}(t)\mathcal{X}'(t)\mathcal{X}^{-1}(t) = \mathcal{X}^{-1}(t)\left(-\mathcal{A}\right) = \mathcal{X}^{-1}(t)\mathcal{A}^\tau.$$

Urmează că $\mathcal{X}^{-1}$ este de asemenea soluţie a problemei CAUCHY de mai sus, iar din partea de unicitate a Teoremei 3.1.1 deducem că $\mathcal{X}(t)^\tau = \mathcal{X}^{-1}(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Problema 3.6 Demonstraţia urmează aceeaşi cale cu cea de la problema anterioară.

Problema 3.7 Avem

$$\mathcal{A}^k - \lambda^k\mathcal{I}_n = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}_n)(\mathcal{A}^{k-1} + \lambda\mathcal{A}^{k-2} + \cdots + \lambda^{k-1}\mathcal{I}_n)$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. De aici se observă că orice rădăcină a ecuaţiei $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}_n) = 0$ este rădăcină şi pentru ecuaţia

$$\det\left(\sum_{p=1}^k \frac{t^p\mathcal{A}^p}{p!} - \sum_{p=1}^k \frac{t^p\lambda^p}{p!}\mathcal{I}_n\right) = 0.$$

Cum funcţia det este continuă, trecând la limită în egalitatea de mai sus pentru k tinzând la $+\infty$ deducem că dacă λ este rădăcină pentru ecuaţia $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}_n) = 0$ atunci, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, ea este rădăcină şi pentru ecuaţia $\det\left(e^{t\mathcal{A}} - \lambda\mathcal{I}_n\right) = 0$.

Problema 3.8 Matricea $\mathcal{A}$ este simetrică dacă şi numai dacă $\langle \mathcal{A}x, y\rangle = \langle x, \mathcal{A}y\rangle$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ca atare, dacă $\mathcal{A}$ este simetrică avem

$$\left\langle \left(\sum_{p=1}^{k} \frac{t^p \mathcal{A}^p}{p!}\right) x, y \right\rangle = \left\langle x, \left(\sum_{p=1}^{k} \frac{t^p \mathcal{A}^p}{p!}\right) y \right\rangle.$$

Trecând la limită pentru k tinzând la $+\infty$ în această egalitate şi ţinând cont că produsul scalar este o funcţie continuă de ansamblul variabilelor deducem $\langle e^{t\mathcal{A}}x, y\rangle = \langle x, e^{t\mathcal{A}}y\rangle$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $t \in \mathbb{R}$, ceea ce arată că $e^{t\mathcal{A}}$ este simetrică pentru orice $t \in \mathbb{R}$.
Problema 3.9 Fie $\mathcal{X} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o matrice fundamentală a sistemului cu proprietatea că $\mathcal{X}(0)$ este simetrică. Cum inversa unei matrici autoadjuncte este simetrică, iar $\mathcal{X}^{-1}(t) = \mathcal{X}(-t)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, este suficient să considerăm doar cazul $t > 0$. Fie atunci $t > 0$ şi să alegem $a > 0$ cu proprietatea că $t \in [\,0, a\,]$. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Să împărţim intervalul $[\,0, a\,]$ în k părţi egale $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = a$ şi să definim $\mathcal{A}_k : [\,0, a\,] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ prin $\mathcal{A}_k(t) = \mathcal{A}(t_i)$ pentru $t \in [\,t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ şi $\mathcal{A}_k(a) = \mathcal{A}(t_{k-1})$. Să definim funcţia $\mathcal{X}_k : [\,0, a\,] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ prin $\mathcal{X}_k(t) = e^{(t-t_i)\mathcal{A}(t_i)\mathcal{X}_k(t_i)}$ pentru $t \in [\,t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ şi $\mathcal{X}_k(0) = \mathcal{X}(0)$. Este uşor de constatat că $\mathcal{X}_k$ este continuă pe $[\,0, a\,]$, derivabilă pe mulţimea $[\,0, a\,] \setminus \{t_i;\ i = 1, 2, \ldots k\}$ şi verifică

$$(*) \qquad \mathcal{X}_k'(t) = \mathcal{A}_k(t)\mathcal{X}_k(t)$$

în orice punct de derivabilitate. Să observăm că $\mathcal{X}_k$ se obţine din concatenarea soluţiilor unor probleme CAUCHY de tipul

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_i'(t) = \mathcal{A}(t_i)\mathcal{Z}_i(t) \\ \mathcal{Z}_i(t_{i-1}) = \mathcal{Z}_{i-1}(t_{i-1}), \quad \mathcal{Z}_0(0) = \mathcal{X}(0) \end{cases}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, k$. Din problema anterioară, deducem succesiv că $\mathcal{Z}_i(t)$ este simetrică pentru orice $t \in [\,t_{i-1}, t_i]$ şi $i = 1, 2, \ldots, k$. Ca atare $\mathcal{X}_k(t)$ are aceeaşi proprietate pentru orice $t \in [\,0, a\,]$. În sfârşit, să observăm că şirul de funcţii $(\mathcal{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este uniform mărginit şi echicontinuu pe $[\,0, a\,]$. Aceasta este o consecinţă imediată a faptului că $\mathcal{X}_k$ verifică

$$\mathcal{X}_k(t) = \mathcal{X}(0) + \int_0^t \mathcal{A}_k(s)\mathcal{X}_k(s)\,ds$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ şi orice $t \in [\,0, a\,]$ şi a mărginirii funcţiei $\mathcal{A}$ pe intervalul $[\,0, a\,]$. În virtutea Teoremei **??** urmează că, cel puţin pe un subşir, $(\mathcal{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ este uniform convergent pe $[\,0, a\,]$ la o funcţie $\mathcal{Y}$. Cum $\lim_k \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$ uniform pe $[\,0, a\,]$, trecând la limită în $(*)$, deducem că $\mathcal{Y}(t) = \mathcal{X}(t)$ pentru orice $t \in [\,0, a\,]$. Demonstraţia se încheie cu observaţia că $\mathcal{Y}(t)$ este simetrică pentru orice $t \in [\,0, a\,]$ fiind limita uniformă a unui şir de funcţii având aceeaşi proprietate.
Problema 3.10 Întrucât $e^{t\mathcal{A}} = \mathcal{I} + t\mathcal{A} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \mathcal{A}^k}{k!}$ rezultă că, pentru $t > 0$ suficient de mic, toate elementele matricei $e^{t\mathcal{A}}$ care nu sunt pe diagonală au acelaşi semn cu cele corespunzătoare ale matricei $t\mathcal{A}$. Deci condiţia este necesară. Pentru a demonstra suficienţa să observăm că, în virtutea punctului (ii) din Propoziţia 3.3.1, pentru orice $t, s \in \mathbb{R}_+$ avem $e^{t\mathcal{A}} = e^{t(\mathcal{A}+s\mathcal{I})}e^{-st\mathcal{I}}$. Mai mult, dacă s este suficient de mare şi $\mathcal{A}$ satisface condiţia din enunţ, $t(\mathcal{A} + s\mathcal{I})$ are toate elementele pozitive. Atunci şi $e^{t(\mathcal{A}+s\mathcal{I})}$ are aceeaşi proprietate. Cum $e^{-st\mathcal{I}} = e^{-st}\mathcal{I}$ are toate elementele pozitive şi produsul a două matrice cu elemente pozitive este o matrice cu elemente pozitive, demonstraţia este completă.
Problema 3.11 Să definim funcţia $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{R})$ prin $f(\mathcal{X}) = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{X}\mathcal{B}$ pentru orice $\mathcal{X} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{R})$. Urmând aceeaşi cale cu cea utilizată în demonstraţia Consecinţei 2.5.4 se constată că f este global lipschitziană şi ca atare problema CAUCHY considerată are o soluţie globală unică. Pentru a încheia demonstraţia ar fi suficient să arătăm că $\mathcal{X} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definită prin $\mathcal{X}(t) = e^{t\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{t\mathcal{B}}$ este soluţie a problemei CAUCHY. Avem $\mathcal{X}(0) = e^{0\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{0\mathcal{B}} = \mathcal{C}$.

Din Teorema 3.3.1 rezultă

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{X})(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t\mathcal{A}}\right)\mathcal{C}e^{t\mathcal{B}}+e^{t\mathcal{A}}\frac{d}{dt}(\mathcal{C})e^{t\mathcal{B}}+e^{t\mathcal{A}}\mathcal{C}\frac{d}{dt}\left(e^{t\mathcal{B}}\right)=$$
$$=\mathcal{A}e^{t\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{t\mathcal{B}}+e^{t\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{t\mathcal{B}}\mathcal{B}=\mathcal{A}\mathcal{X}(t)+\mathcal{X}(t)\mathcal{B}.$$

Demonstraţia este completă.

Problema 3.12 Să observăm că

$$\mathcal{A}\mathcal{X}+\mathcal{X}\mathcal{B}=-\int_0^{+\infty}\mathcal{A}e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}ds-\int_0^{+\infty}e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}\mathcal{B}\,ds=$$
$$=-\int_0^{+\infty}\frac{d}{ds}\left(e^{s\mathcal{A}}\right)\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}ds-\int_0^{+\infty}e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}\frac{d}{ds}\left(e^{s\mathcal{B}}\right)ds=$$
$$=-2e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathcal{A}e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}ds+\int_0^{+\infty}e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}\mathcal{B}\,ds=2\mathcal{C}-\mathcal{A}\mathcal{X}-\mathcal{X}\mathcal{B},$$

ultima egalitatea având loc dacă şi numai dacă $\lim_{s\to+\infty}e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}=0$. Cum $\lim_{s\to+\infty}e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}$ există, pentru a încheia demonstraţia ar fi suficient să arătăm că, limita inferioară, pentru s tinzând la $+\infty$, a fiecărui element al matricei $e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}$ este 0. În acest scop să observăm că, din convergenţa integralei

$$\int_0^{+\infty}e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}ds,$$

rezultă că

$$\lim_{m\to+\infty}\int_m^{m+1}e^{s\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{s\mathcal{B}}ds=0.$$

De asemenea, din teorema de medie rezultă că, pentru orice element α_{ij} al matricei $e^{t\mathcal{A}}\mathcal{C}e^{t\mathcal{B}}$ există $t_m(ij)\in[\,m,m+1\,]$ astfel încât

$$\int_m^{m+1}\alpha_{ij}(s)\,ds=\alpha_{ij}(t_m(ij)).$$

Din această relaţie şi din precedenta rezultă că

$$\lim_{m\to+\infty}\alpha_{ij}(t_m(ij))=0$$

pentru orice $i,j=1,2\ldots,n$, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 3.13 Seriile de puteri care definesc ambele funcţii $t\mapsto\cos t\mathcal{A}$ şi $t\mapsto\sin t\mathcal{A}$ sunt derivabile termen cu termen. Din această observaţie se constată că

$$\frac{d}{dt}(\cos t\mathcal{A})=-\mathcal{A}\sin t\mathcal{A}=-(\sin t\mathcal{A})\mathcal{A}\quad\text{şi}\quad\frac{d}{dt}(\sin t\mathcal{A})=\mathcal{A}\cos t\mathcal{A}=(\cos t\mathcal{A})\mathcal{A},$$

ceea ce demonstrează punctul (1). De aici rezultă că

$$\begin{pmatrix}\cos t\mathcal{A}&\sin t\mathcal{A}\\-\mathcal{A}\sin t\mathcal{A}&\mathcal{A}\cos t\mathcal{A}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0&\mathcal{I}\\-\mathcal{A}^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t\mathcal{A}&\sin t\mathcal{A}\\-\mathcal{A}\sin t\mathcal{A}&\mathcal{A}\cos t\mathcal{A}\end{pmatrix}$$

ceea ce demonstrează prima parte a punctului (2). Matricea $\mathcal{Z}(t)$ este fundamentală pentru sistemul considerat dacă şi numai dacă $\det\mathcal{Z}(0)\neq0$ ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă $\det\mathcal{A}\neq0$.

Problema 3.14 Să observăm că, din formula variaţiei constantelor (vezi Observaţia 3.3.3), rezultă

$$x_k(t)=e^{(t-a)\mathcal{A}}\xi+\int_a^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\left[f(s,x_{k-1}(s)-\mathcal{A}x_{k-1}(s)\right]ds$$

pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$ şi orice $t\in[\,a,b\,]$. Fie $L_1>0$ constanta Lipschitz corespunzătoare funcţiei f, fie $M>0$ astfel încât $\|x_1(t)-x_0(t)\|\leq M$ pentru orice $t\in[\,a,b\,]$ şi să definim $L=e^{(b-a)\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}}\left[L_1+\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}\right]$. Utilizând faptul că $\|\mathcal{A}\eta\|\leq\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}}\|\eta\|$ pentru orice $\eta\in\mathbb{R}^n$ (vezi

(N_4) din Lema 6.1.1) şi observând că $\|e^{(t-s)\mathcal{A}}\|_{\mathbb{O}} \leq e^{(b-a)\|\mathcal{A}\|_{\mathbb{O}}}$ pentru orice $t, s \in [a, b]$ cu $s \leq t$, se arată prin inducţie completă că

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \frac{ML^k(t-a)^k}{k!}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi orice $t \in [a, b]$. Din acest punct demonstraţia urmează o cale foarte asemănătoare cu cea urmată în rezolvarea Problemei 2.26.

Exerciţiul 3.1 Soluţiile generale ale sistemelor propuse spre rezolvare sunt:

$$(1) \begin{cases} x_1(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{5t} \\ x_2(t) = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{5t}. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ x_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1(t) = c_1e^{-t} \cos t + c_2e^{-t} \sin t \\ x_2(t) = \frac{1}{5}(c_2 - 2c_1)e^{-t} \cos t - \frac{1}{5}(c_1 + 2c_2)e^{-t} \sin t. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{8}(c_1e^{2t} + c_2 - 2t^2 - 2t - 1) \\ x_2(t) = \frac{1}{8}(c_1e^{2t} - c_2 + 2t^2 - 2t - 1). \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x_1(t) = 2 \sin t - (2c_1 + c_2)t + c_1 \\ x_2(t) = -2 \cos t - 3 \sin t + (4c_1 + 2c_2)t + c_2. \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x_1(t) = (c_1 - 4c_2)e^{2t} + 4(c_1 + c_2)e^{-3t} + t^2 + t \\ x_2(t) = (-c_1 + 4c_2)e^{2t} + (c_1 + c_2)e^{-3t} - \frac{t^2}{2}. \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x_1(t) = c_1e^t + c_2e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ x_2(t) = c_1e^t + \left(-\frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right) e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3\right) e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ x_3(t) = c_1e^t + \left(-\frac{1}{2}c_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_3\right) e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right) e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t. \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} x_1(t) = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t} \\ x_2(t) = -c_3e^{-t} + 2c_2e^{2t} \\ x_3(t) = (c_1 + c_3)e^{-t} + 2c_2e^{2t}. \end{cases}$$

Aici $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ şi $t \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 3.2 Soluţiile generale ale ecuaţiilor propuse spre rezolvare sunt:

(1) $x(t) = c_1e^t + c_3e^{4t}$.
(2) $x(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$.
(3) $x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.
(4) $x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} + e^{2t}\left(\frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32} - \frac{1}{144}\right)$.
(5) $x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$.
(6) $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \sin t \ln|\sin t| - t \cos t$, pentru $t \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(7) $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{t^2}{4} \sin t + \frac{t}{8}(4 \sin 2t \sin t + \cos 3t) - \frac{1}{32} \sin 3t + \frac{1}{4} \cos 2t \sin t$.
(8) $x(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + \frac{t^3}{6}e^{2t}$.
(9) $x(t) = c_1e^{\sqrt{2}t} + c_2e^{-\sqrt{2}t} + e^{t^2}$.

Aici $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ şi, exceptând punctul (6), $t \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 3.3 Soluţiile generale ale ecuaţiilor propuse spre rezolvare sunt:

(1) $x(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{12t}$.
(2) $x(t) = c_1 + c_2e^{-t} + c_3e^t$.
(3) $x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$.
(4) $x(t) = c_1e^t \sin t + c_2e^t \cos t + c_3e^{-t} \sin t + c_4e^{-t} \cos t$.
(5) $x(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t - t - 3$.
(6) $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3t \cos t + c_4t \sin t$.

(7) $x(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4te^t + \frac{t^2}{2}e^t - 2te^t + 3e^t$.
(8) $x(t) = c_1e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{2t-3}{8}e^t$.
(9) $x(t) = c_1 + c_2e^{-3t} + c_3te^{-3t} + \frac{t^2}{18} - \frac{2t}{27}$.

Aici $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ şi $t \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 3.4 (1) Este o ecuaţie de tip EULER. Soluţia generală $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este definită prin $x(t) = c_1t^{-1} + c_2t^{-1} \ln |t|$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathbb{I} = (-\infty, 0)$ sau $(0, +\infty)$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Ecuaţia mai admite şi soluţia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \equiv 0$.

(2) Este o ecuaţie de tip EULER. Soluţia generală este $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $x(t) = c_1t^{-1} + c_2t^3$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathbb{I} = (-\infty, 0)$ sau $(0, +\infty)$, unde $c_1 \in \mathbb{R}^*$ şi $c_2 \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai admite şi soluţia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$x(t) = \begin{cases} c_1t^3 & , \ t \geq 0 \\ c_2t^3 & , \ t < 0 \end{cases} \quad \text{cu } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) Ecuaţie EULER cu soluţia generală $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $x(t) = c_1 \cos(\ln t^2) + c_2 \sin(\ln t^2)$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathbb{I} = (-\infty, 0)$ sau $(0, +\infty)$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Ecuaţia mai admite şi soluţia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \equiv 0$.

(4) Este o ecuaţie de tip EULER. Soluţia generală este $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(5) Ecuaţie reductibilă la una de tip EULER prin intermediul substituţiei $3t + 2 = \tau$. Soluţia generală este $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t) = c_1 (3t + 2)^{-\frac{4}{3}} + c_2$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathbb{I} = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ sau $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, iar $c_1 \in \mathbb{R}^*$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai admite şi soluţia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $x(t) = c$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}$.

(6) Ecuaţie reductibilă la una de tip EULER. Soluţia generală $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei iniţiale este definită prin $x(t) = c_1t^{-1} + c_2t^2$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathbb{I} = (-\infty, 0)$ sau $(0, +\infty)$, iar $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(7) Este o ecuaţie reductibilă la una de tip EULER având soluţia generală $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ definită prin $x(t) = c_1 \cos(\ln |t|) + c_2 \sin(\ln |t|)$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathbb{I} = (-\infty, 0)$ sau $(0, +\infty)$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(8) Este o ecuaţie de tip EULER neomogenă. Soluţia generală este

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + c_1t^2 + c_2t^3 & \text{pentru } t \geq 0 \\ \frac{1}{2}t + c_1t^2 + c_3t^3 & \text{pentru } t < 0 \end{cases}, \ \text{cu } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(9) Prin intermediul substituţiei $1 + t = \tau$, ecuaţia se reduce la o ecuaţie de tip EULER neomogenă cu soluţia generală definită prin $x(t) = c_1(1 + t)^2 + c_2(1 + t)^2 \ln |1 + t| + (1 + t)^3$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathbb{I} = (-\infty, -1)$ sau $(-1, +\infty)$, $c_1 \in \mathbb{R}$ şi $c_2 \in \mathbb{R}^*$. Ecuaţia mai are şi soluţia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t) = c(1 + t)^2 + (1 + t)^3$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}$.

(10) Ecuaţia este de tip EULER neomogenă având soluţia generală $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t) = c_1t + c_2t \ln |t| + t \ln^2 |t|$ pentru orice $t \in \mathbb{I}$, unde $\mathbb{I} = (-\infty, 0)$ sau $(0, +\infty)$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Capitolul 4

Problema 4.1 Înainte de a trece la demonstraţia celor patru afirmaţii să observăm că în cazul ecuaţiei considerate orice matrice fundamentală este de tip 1×1 şi de forma

$$\mathcal{X}(t) = \xi e^{\int_0^t a(s)\, ds}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $\xi \in \mathbb{R}^*$.

(1) Conform Teoremei 3.2.2 soluţia nulă a ecuaţiei considerate este stabilă dacă şi numai dacă există o matrice fundamentală mărginită pe $\mathbb{R}_+$, sau echivalent orice matrice fundamentală este mărginită pe $\mathbb{R}_+$. Conform observaţiei de la început, aceasta se întâmplă dacă şi

numai dacă

$$(*)\qquad x(t) = e^{\int_0^t a(s)\,ds} = e^{\int_0^{t_0} a(s)\,ds} e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \leq M$$

pentru orice $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$, $t_0 \leq t$. Dacă este verificată inegalitatea din enunţ, avem atunci $x(t) \leq e^{K(0)}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$ şi ca atare ea este mărginită pe $\mathbb{R}_+$. Deci soluţia nulă este simplu stabilă. Reciproc, dacă există $M > 0$ astfel încât $x(t) \leq M$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$, atunci din $(*)$ se observă că funcţia $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ care satisface inegaliatea din enunţ poate fi luată

$$K(t_0) = \ln M - \int_0^{t_0} a(s)\,ds$$

pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

(2) În virtutea Teoremei 4.2.4 soluţia nulă a ecuaţiei este uniform stabilă dacă şi numai dacă există o matrice fundamentală $\mathcal{X}(t)$ şi există $M > 0$ astfel încât $\|\mathcal{X}(t)\mathcal{X}(t_0)\|_{\mathcal{O}} \leq M$ pentru orice $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$, $t_0 \leq t$. Conform observaţiei iniţiale, soluţia nulă este uniform stabilă dacă şi numai dacă

$$e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \leq M$$

pentru orice $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$, $t_0 \leq t$, sau echivalent

$$\int_{t_0}^t a(s)\,ds \leq \ln M = K$$

pentru orice $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$, $t_0 \leq t$.

(3) Conform Teoremei 4.2.2 soluţia nulă este asimptotic stabilă dacă şi numai dacă

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\int_0^t a(s)\,ds} = 0,$$

ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t a(s)\,ds = -\infty.$$

(4) Conform Teoremei 4.2.5 soluţia nulă a ecuaţiei este uniform asimptotic stabilă dacă şi numai dacă

$$\lim_{t-s\to+\infty} e^{\int_s^t a(\tau)\,d\tau} = 0.$$

Este evident că inegalitatea din enunţ implică relaţia de mai sus şi ca atare stabilitatea uniformă şi asimptotică a soluţiei nule. Invers, să presupunem că soluţia nulă este uniform asimptotic stabilă. Atunci există $\mu > 0$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $T_\varepsilon \geq 0$ astfel încât, pentru orice $t_0 \geq 0$ orice $t \geq t_0 + T_\varepsilon$ şi orice $\xi \in \mathbb{R}$ cu $|\xi| \leq \mu$ să avem

$$|\xi| e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \leq \varepsilon.$$

Să fixăm un număr $q \in (0, 1)$, să luăm $\xi = \mu$, $\varepsilon = q\mu$ şi să notăm cu $T = T_{k\mu}$. Inegalitatea anterioară se rescrie, în acest caz particular, sub forma echivalentă

$$(**)\qquad \int_{t_0}^t a(s)\,ds \leq \ln q$$

pentru orice $t_0 \geq 0$ şi orice $t \geq t_0 + T$. Pe de altă parte soluţia nulă este uniform stabilă, fiind uniform asimptotic stabilă. Conform punctului (2) există $K \geq 0$ astfel încât

$$(***)\qquad \int_{t_0}^t a(s)\,ds \leq K$$

pentru orice $t_0 \geq 0$ şi orice $t \geq t_0$. Fie $t \geq t_0$. Să observăm că există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \in [t_0 + mT, t_0 + (m+1)T)$. Avem

$$\int_{t_0}^t a(s)\,ds = \sum_{p=0}^{m-1} \int_{t_0+pT}^{t_0+(p+1)T} a(s)\,ds + \int_{t_0+mT}^t a(s)\,ds.$$

Să observăm că, in virtutea inegalităţii $(**)$, fiecare din primi m termeni din suma de mai sus se majorează cu $\ln q$, iar ultimul termen cu K (vezi $(***)$). Deducem că

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \leq K + m\ln q.$$

Cum $t - t_0 \leq mT$ rezultă $m \geq \frac{1}{T}(t-t_0)$ şi în consecinţă

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \leq K + \frac{\ln q}{T}(t-t_0).$$

pentru orice $t, t_0 \in \mathbb{R}$ cu $t \geq t_0$. Deci inegalitatea din enunţ are loc pentru $K \geq 0$ şi $\alpha = -\frac{\ln q}{T}$ determinate ca mai sus.

Exerciţiul 4.1 (1) Unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a ecuaţiei (1) satisfăcând condiţia iniţială $x(a, a, \xi) = \xi$ este $x(\cdot, a, \xi) : [\,a, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t, a, \xi) = \xi e^{t-a}$ pentru $t \geq a$. Ca atare $\lim_{t\uparrow+\infty} |x(t, \xi)| = +\infty$ pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^*$ şi în consecinţă soluţia nulă este instabilă.

(2) Unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a ecuaţiei (2) care satisface condiţia $x(a, a, \xi) = \xi$ este $x(\cdot, a, \xi) : [\,a, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t, a, \xi) = \xi$ pentru $t \geq a$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $a \geq 0$ există $\delta(\varepsilon, a) = \varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}$ cu $|\xi| \leq \delta(\varepsilon, a)$ să avem $|x(t, a, \xi)| \leq \varepsilon$ pentru orice $t \geq a$. Deci soluţia nulă este uniform stabilă.

(3) Unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a ecuaţiei (3) care satisface condiţia $x(a, a, \xi) = \xi$ este $x(\cdot, a, \xi) : [\,a, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $x(t, a, \xi) = \xi e^{-(t-a)}$ pentru $t \geq a$. Ca atare $\lim_{t\uparrow+\infty} |x(t, \xi)| = 0$ pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^*$ şi în consecinţă soluţia nulă a ecuaţiei (3) este global şi uniform asimptotic stabilă.

(4) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = -2x + \sin x$, este de clasă C^1 şi verifică $f(0) = 0$ şi $f'_x(0) = -1$. Suntem atunci în ipotezele Teoremei 4.3.3 şi în consecinţă soluţia nulă a ecuaţiei (4) este asimptotic stabilă.

(5) Fie $a \geq 0$ şi $\xi \in \mathbb{R}$. Unica soluţie saturată $x : \mathbb{I}_{a,\xi} \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (5) care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită prin

$$x(t, a, \xi) = \frac{\xi}{1 - \xi(t-a)}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}_{a,\xi}$, unde $\mathbb{I}_{a,\xi} = [\,a, +\infty)$ dacă $\xi \leq 0$ şi $\mathbb{I}_{a,\xi} = [\,a, a + \frac{1}{\xi})$ dacă $\xi > 0$. Deoarece $x(\cdot, a, \xi)$ nu este globală pentru $\xi > 0$, soluţia nulă nu este stabilă. Facem totuşi remarca interesantă că proprietatea de continuitate (ii) cerută în Definiţia 4.1.5 este verificată în acest caz la stânga lui $\xi = 0$. Într-adevăr, aceasta rezultă din inegalitatea

$$|x(t, a, \xi)| \leq \frac{|\xi|}{1 - \xi(t-a)} \leq |\xi|$$

pentru orice $\xi \leq 0$ şi orice $t \geq a$.

(6) Unica soluţie saturată $x : \mathbb{I}_{a,\xi} \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (6) care satisface $x(a, a, \xi) = \xi$ este definită prin

$$x(t, a, \xi) = \frac{\xi}{1 + \xi(t-a)}$$

pentru orice $t \in \mathbb{I}_{a,\xi}$, unde $\mathbb{I}_{a,\xi} = [\,a, a - \frac{1}{\xi})$ dacă $\xi < 0$ şi $\mathbb{I}_{a,\xi} = [\,a, a + \infty)$ dacă $\xi \geq 0$. Deoarece $x(\cdot, a, \xi)$ nu este globală pentru $\xi < 0$, soluţia nulă nu este stabilă. O remarcă analogă celei făcută la sfârşitul rezolvării problemei precedente are loc şi în acest caz.

(7) Funcţia $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = -\operatorname{tg} x$ este de clasă C^1, $f(0) = 0$ şi $f'_x(0) = -1$. Suntem în ipotezele Teoremei 4.3.3 şi ca atare soluţia nulă a ecuaţiei (7) este asimptotic stabilă.

(8) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = -\sin x$ este de clasă C^1, $f(0) = 0$ şi $f'_x(0) = -1$. Suntem, de asemenea, în ipotezele Teoremei 4.3.3 şi drept urmare soluţia nulă a ecuaţiei (7) este asimptotic stabilă.

(9) Aceleaşi argumente folosite în ultimele două exerciţii conduc la concluzia că soluţia nulă a ecuaţiei (9) este asimptotic stabilă.

Exerciţiul 4.2 (1) Rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})=0$ sunt $\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$. Cum $-1+\sqrt{2}>0$ sistemul (1) este instabil. Vezi Teorema 4.2.7.

(2) Rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})=0$ sunt $\lambda_{1,2}=\pm i$. Cum ambele rădăcini au partea reală 0 şi sunt simple, sistemul (2) este uniform stabil. Vezi Teorema 4.2.7.

(3) Rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})=0$ sunt $\lambda_{1,2}=-1\pm i$. Deci matricea $\mathcal{A}$ este hurwitziană şi ca atare sistemul (3) este uniform şi global asimptotic stabil. Vezi Teorema 4.2.6.

(4) Rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})=0$ sunt $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{13})$. Cum $\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})>0$, sistemul (4) este instabil. Vezi Teorema 4.2.7.

(5) Matricea $\mathcal{A}$ este hurwitziană şi în consecinţă sistemului (5) este uniform şi global asimptotic stabil. Vezi Teorema 4.2.6

(6) Rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})=0$ sunt $\lambda_1=-4$ şi $\lambda_2=0$. Cum $\lambda_2=0$ este rădăcină simplă sistemul (6) este uniform stabil. Vezi Teorema 4.2.7.

(7) Se poate folosi Teorema 4.2.7 dar se poate trage concluzia şi direct observând că orice soluţie globală a sistemului (7) având toate componentele egale două câte două este de forma $x(t)=c(e^t,e^t,e^t)$ pentru orice $t\in\mathbb{R}$, unde $c\in\mathbb{R}$. Din această observaţie rezultă că sistemul este instabil.

(8) Să observăm că orice soluţie globală a sistemului (8) având toate componentele egale două câte două este de forma $x(t)=c(e^{2t},e^{2t},e^{2t})$ pentru orice $t\in\mathbb{R}$, unde $c\in\mathbb{R}$. Rezultă că sistemul este instabil.

(9) Rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})=0$ sunt $\lambda_1=0$ şi $\lambda_{2,3}=\pm i\sqrt{3}$. Cum toate aceste rădăcini au partea reală 0 şi sunt simple, sistemul (9) este uniform stabil. Vezi Teorema 4.2.6.

Problema 4.2 Utilizând metoda variaţiei constantelor - vezi Teorema 3.5.7 - deducem că soluţia generală a ecuaţiei considerate este

$$x(t,\xi_1,\xi_2)=\xi_1\cos\omega t+\xi_2\sin\omega t+\frac{1}{\omega}\int_0^t f(s)\sin\omega(t-s)\,ds$$

unde $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$. Avem atunci

$$|x(t,\xi_1,\xi_2)|\leq|\xi_1|+|\xi_2|+\frac{1}{\omega}\int_0^{+\infty}|f(s)|\,ds$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}_+$.

Problema 4.3 Începem prin a sublinia că în cazul ecuaţiei de ordinul al doilea considerate, stabilitatea uniformă a soluţiei nule este echivalentă cu stabilitatea uniformă a soluţiei nule a sistemului de ordinul întâi

$$(\mathcal{S})\qquad \begin{cases} x'(t)=y(t)\\ y'(t)=-[\,\omega^2+f(t)\,]x(t). \end{cases}$$

De asemenea, ecuaţia fiind liniară, orice soluţie saturată a sa este globală. Ca atare, unica soluţie saturată $x(\cdot,a,\xi_1,\xi_2)$ a ecuaţiei considerate, cu $x(a,a,\xi_1,\xi_2)=\xi_1$, $x'(a,a,\xi_1,\xi_2)=\xi_2$, este definită pe $[\,a,+\infty)$. Din metoda variaţiei constantelor - vezi Teorema 3.5.7 - avem

$$x(t,a,\xi_1,\xi_2)=\xi_1\cos\omega(t-a)+\frac{\xi_2}{\omega}\sin\omega(t-a)+\frac{1}{\omega}\int_a^t f(s)x(s,a,\xi_1,\xi_2)\sin\omega(t-s)\,ds$$

pentru orice $t\geq a$. Urmează că

$$|x(t,a,\xi_1,\xi_2)|\leq|\xi_1|+\frac{|\xi_2|}{\omega}+\frac{1}{\omega}\int_a^t|f(s)||x(s,a,\xi_1,\xi_2)|\,ds$$

şi

$$|x'(t,a,\xi_1,\xi_2)| \leq \omega|\xi_1| + |\xi_2| + \int_a^t |f(s)||x(s,a,\xi_1,\xi_2)|\,ds$$

pentru orice $t \geq a$. Din inegalitatea lui Gronwall deducem

$$|x(t,a,\xi_1,\xi_2)| \leq \left(|\xi_1| + \frac{|\xi_2|}{\omega}\right)\exp\left(\frac{1}{\omega}\int_a^t |f(s)|\,ds\right)$$

şi

$$|x'(t,a,\xi_1,\xi_2)| \leq (\omega|\xi_1| + |\xi_2|)\exp\left(\int_a^t |f(s)|\,ds\right)$$

pentru orice $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ şi orice $t \geq a$. Deoarece f este absolut intergrabilă pe $\mathbb{R}_+$ există $m > 0$ astfel încât

$$\int_a^t |f(s)|\,ds \leq m$$

pentru orice $a, t \in \mathbb{R}_+$, $t \geq a$. Din ultimele trei inegalităţi, reamintind că $x' = y$, deducem

$$x^2(t,a,\xi_1,\xi_2) + y^2(t,a,\xi_1,\xi_2) \leq M\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)$$

pentru orice $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ şi orice $a, t \in \mathbb{R}_+$, $t \geq a$, unde $M > 0$ depinde doar de m şi de ω, dar nu de a, t, ξ_1, ξ_2. Această inegalitate arată că soluţia nulă a sistemului $(\mathcal{S})$ este uniform stabilă.

Problema 4.4 Cum $\mathcal{A}$ este hurwitziană, conform lemei 4.2.1, urmează că există $M > 0$ şi $\omega > 0$ astfel încât $\|e^{t\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}} \leq Me^{-\omega t}$ pentru orice $t \geq 0$. Să fixăm un număr $L > 0$ cu proprietatea $ML - \omega < 0$. Utilizând faptul că $\lim_{t\to+\infty} \|\mathcal{B}(t)\|_{\mathcal{O}} = 0$ conchidem că există $c \geq 0$ astfel încât $\|\mathcal{B}(t)\|_{\mathcal{O}} \leq L$ pentru orice $t \geq c$, unde $L > 0$ este fixat ca mai sus. Ca atare $\|\mathcal{B}(t)x\| \leq L\|x\|$ pentru orice $t \geq c$ şi orice $x \in \mathbb{R}^n$. Concluzia urmează dintr-o simplă variantă a Teoremei 4.3.1 care în locul ipotezei $\|F(t,x)\| \leq L\|x\|$ pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ utilizează ipoteza $\|F(t,x)\| \leq L\|x\|$ pentru orice $t \geq c$ şi orice $x \in \Omega$, unde $c \geq 0$.

Problema 4.5 Din formula variaţiei constantelor - vezi Observaţia 3.3.3 - avem că unica soluţie globală $x(\cdot,\xi) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ a sistemului care verifică $x(0,\xi) = \xi$ satisface

$$x(t,\xi) = e^{t\mathcal{A}}\xi + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{B}(s)x(s,\xi)\,ds$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Deoarece $\mathcal{A}$ este hurwitziană, conform lemei 4.2.1, există $M > 0$ şi $\omega > 0$ astfel încât $\|e^{t\mathcal{A}}\|_{\mathcal{O}} \leq Me^{-\omega t}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Avem atunci

$$\|x(t,\xi)\| \leq Me^{-\omega t}\|\xi\| + Me^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega s}\|\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{O}}\|x(s,\xi)\|\,ds$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Înmulţind această inegalitate cu $e^{\omega t}$ şi notând cu $y(t) = \|x(t)\|e^{\omega t}$ deducem

$$y(t) \leq M\|\xi\| + M\int_0^t \|\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{O}}y(s)\,ds$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Din inegalitatea lui Gronwall urmează că

$$y(t) \leq M\|\xi\|\exp\left(M\int_0^t \|\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{O}}ds\right)$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Cum

$$\int_0^{+\infty} \|\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{O}}ds = m < +\infty,$$

din inegalitatea precedentă, deducem că $y(t) \leq k\|\xi\|$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$, unde $k = Me^{Mm}$. Înmulţind această inegalitate cu $e^{-\omega t}$ şi reamintind definiţia lui $y(t)$, obţinem concluzia.

Problema 4.6 Schimbarea de variabilă $s = \frac{t^{m+1}}{m+1}$ conduce la un sistem de tipul celui considerat în Problema 4.4 cu singura excepţie că, în acest caz, intervalul de definiţie al funcţiei $\mathcal{B}$ este $(0, +\infty)$ şi nu $[\,0, +\infty)$. Într-adevăr, punând $x(t) = y(s)$ avem

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}(t) = \frac{dy}{ds}(s)[(m+1)s]^{\frac{m}{m+1}}$$

şi sistemul iniţial este echivalent cu

$$\frac{dy}{ds}(s) = [\,\mathcal{A} + \mathcal{B}(s)\,]y(s)$$

unde $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ şi $\mathcal{B}(s) = [(m+1)s]^{-\frac{1}{m+1}}\mathcal{A}_1 + [(m+1)s]^{-\frac{2}{m+1}}\mathcal{A}_2 + \cdots + [(m+1)s]^{-\frac{m}{m+1}}\mathcal{A}_m$. Din ipoteză ştim că $\mathcal{A}$ este hurwitziană. Evident $\lim\limits_{s\to+\infty} \|\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{O}} = 0$. Din acest punct, urmând aceaşi cale cu cea utilizată în rezolvarea Problemei 4.4, se arată că pentru orice $a > 0$ există $\delta(a) > 0$ astfel încât $\lim\limits_{s\to+\infty} y(s, a, \xi) = 0$ pentru orice $\xi \in B(0, \delta(a))$. Demonstraţia se încheie reamintind legătura dintre $y(s)$ şi $x(t)$.

Problema 4.7 Cum $\xi_1 < \xi_2$, din Problema 2.8, deducem că $x(t, \xi_1) < x(t, \xi_2)$ pentru orice $t \geq 0$ şi de asemenea că, pentru orice $a \geq 0$ şi orice $\xi \in (x(a, \xi_1), x(a, \xi_2))$, unica soluţie saturată $x(\cdot, a, \xi)$ a ecuaţiei considerate care verifică $x(a, a, \xi) = \xi$ satisface $x(t, a, \xi) \in (x(t, \xi_1), x(t, \xi_2))$ pentru orice t din intervalul de definiţie. Presupunând că această soluţie nu este globală, rezultă că ea este mărginită pe intervalul $[\,a, T_m)$ de existenţă. În conformitate cu consecinţa 2.5.3 urmează că ea este continuabilă. Contradicţia la care am ajuns poate fi eliminată numai dacă $x(\cdot, \xi)$ este globală. Din condiţia din enunţ şi din inegalitatea precedentă rezultă că, pentru orice $a \geq 0$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon, a) > 0$ astfel încât pentru orice $a \geq a_\varepsilon$, orice $t \geq a_\varepsilon$ şi orice $\eta \in (x(a, \xi_1), x(a, \xi_2))$ avem $|x(t, a, \eta) - x^*| \leq \varepsilon$. Distingem două cazuri: $a \geq a_\varepsilon$ şi $a < a_\varepsilon$. Dacă $a \geq a_\varepsilon$, luând $\delta(\varepsilon, a) = \min\{x(a, \xi) - x(a, \xi_1), x(a, \xi_2) - x(a, \xi)\}$ rezultă că $|x(t, a, \eta) - x(t, \xi)| \leq \varepsilon$ pentru orice $t \geq a$, adică tocmai condiţia de stabilitate simplă. Dacă $a < a_\varepsilon$, atunci, din Teorema 2.6.2 de continuitate a soluţiei în raport cu datele iniţiale, rezultă că există $\delta(\varepsilon, a) > 0$ astfel încât, pentru orice $\eta \in \mathbb{R}$ cu $|x(a, \xi) - \eta| \leq \delta(\varepsilon, a)$, să avem $|x(t, a, \xi) - x(t, a, \eta)| \leq \varepsilon$ pentru orice $t \in [\,a, a_\varepsilon]$. Să obsevăm că, din modul cum a fost definit a_ε şi apoi $\delta(\varepsilon, a)$, avem $|x(t, a, \eta) - x(t, \xi)| \leq \varepsilon$ pentru orice $\eta \in \mathbb{R}$ cu $|x(a, \xi) - \eta| \leq \delta(\varepsilon, a)$ şi orice $t \geq a$. În concluzie, soluţia $x(\cdot, \xi)$ este simplu stabilă. În sfârşit, cum $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t, a, \eta) = x^*$ pentru orice $\eta \in (x(a, \xi_1), x(a, \xi_2))$, deducem că $x(\cdot, \xi)$ este asimptotic stabilă

Problema 4.9 Din formula lui LAGRANGE avem

$$f(x) = \lambda x + g(x)$$

unde

$$(*) \qquad \lim_{x\downarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0.$$

Înmulţind ecuaţia cu x obţinem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2\right) = \lambda x^2 + g(x)x = 0.$$

Din $(*)$ rezultă că există $r > 0$ astfel încât $\lambda x + g(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| \leq r$. Drept urmare, orice soluţie, care "intră sau se găseşte" în intervalul $[\,-r, r\,]$, tinde să părăsească aceste interval. De aici urmează că soluţia nulă a ecuaţiei nu poate fi asimptotic stabilă.

Exerciţiul 4.3 (1) Funcţia din membrul drept a sistemului $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este definită prin $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (-x_1 + x_2^2, -x_1^3 - 2x_2)$ pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se constată că matricea

$$f_x(0) = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

are ambele rădăcini strict negative. Conform Teoremei 4.3.3 soluţia nulă este asimptotic stabilă.

(2) Cu notaţiile din exerciţiul anterior avem

$$f_x(0) = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Deoarece matricea de mai sus are una dintre rădăcinile caracteristice strict pozitivă, în virtutea Teoremei 4.3.4, soluţia nulă este instabilă.

(3) Matricea

$$f_x(0) = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

are ambele rădăcini caracteristice strict negative. Conform Teoremei 4.3.3 soluţia nulă este asimptotic stabilă.

(4) Avem

$$f_x(0) = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cum această matrice are o rădăcină caracteristică strict pozitivă, din Teorema 4.3.4 rezultă că soluţia nulă este instabilă.

(5) Matricea

$$f_x(0) = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

are ambele rădăcini caracteristice strict negative. Conform Teoremei 4.3.3 soluţia nulă este asimptotic stabilă.

(6) Matricea

$$f_x(0) = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

are o rădăcină caracteristică nulă. În aceste caz, nici una dintre teoremele demonstrate în Secţiunea 3 nu ne poate oferi informaţii utile cu privire la stabilitate.

Exerciţiul 4.4 Începem cu observaţia că pentru toate sistemele considerate în cadrul acestui exerciţiu vom căuta funcţii LIAPUNOV independente de t, aceasta deoarece toate aceste sisteme sunt autonome.

(1) Sistemul este de forma $x' = f(x)$, unde funcţia din membrul drept $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este definită prin $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (-x_1^3 + x_2, -x_1 - 2x_2^3)$ pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se constată că $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$ este de clasă C^1, $V(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$ şi satisface

$$f_1(x)\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial V}{\partial x_2}(x) = -x_1^4 - 2x_2^4 \leq 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$. Drept urmare V este o funcţie LIAPUNOV pentru sistem. Din Teorema 4.4.1 urmează că soluţia nulă este simplu stabilă. Să observăm că funcţia V are şi cele două proprietăţi suplimentare cerute în Teorema 4.4.2. Mai precis V satisface $V(x) \leq \lambda(\|x\|) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ şi

$$f_1(x)\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial V}{\partial x_2}(x) = -x_1^4 - 2x_2^4 \leq -\frac{1}{2}\|x\|^4 = -\eta(\|x\|)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$. Evident funcţiile $\lambda, \eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definite prin $\lambda(r) = \frac{1}{2}r^2$ şi $\eta(r) = \frac{1}{2}r^4$ sunt continue, crescătoare şi satisfac $\lambda(r) = \eta(s) = 0$ dacă şi numai dacă $r = s = 0$. Conform Teoremei 4.4.2, rezultă că soluţia nulă este asimptotic stabilă. Mai mult, deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$ avem $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \omega(\|x\|)$ şi $\lim\limits_{r\to+\infty} \omega(r) = +\infty$, din Teorema 4.4.3, conchidem că sistemul considerat este global asimptotic stabil.

(2) În cazul acestui sistem funcţia din membrul drept $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este definită prin $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (-x_1^5 - 3x_2, 3x_1 - 4x_2^3)$ pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se constată

că $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$ este o funcţie LIAPUNOV. Într-adevăr, V este de clasă C^1, $V(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$ şi satisface

$$f_1(x)\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial V}{\partial x_2}(x) = -x_1^6 - 4x_2^4 \leq 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$. Să observăm că restricţia acestei funcţii la vecinătatea deschisă a originii $\Omega_0 = \{(x_1, x_2);\ |x_1| < 1,\ |x_2| < 1\}$ satisface toate ipotezele Teoremei 4.4.3. Aceasta rezultă din observaţia că, pe această mulţime, avem

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^4 \leq x_1^8 + x_2^8 \leq x_1^6 + 4x_2^4,$$

ceea ce implică

$$f_1(x)\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \leq -\frac{1}{2}\|x\|^8$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$. Pentru a completa demonstraţia trebuie să mai remarcăm că funcţiile $\lambda, \eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definite prin $\lambda(r) = \frac{1}{2}r^2$ şi $\eta(r) = \frac{1}{2}r^4$ sunt continue, crescătoare şi satisfac $\lambda(r) = \eta(s) = 0$ dacă şi numai dacă $r = s = 0$. Conform Teoremei 4.4.2, rezultă că soluţia nulă este asimptotic stabilă.

(3) Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ din membrul drept al sistemului considerat este definită prin $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (-x_1 + 5x_2^3, -x_1^3 - 3x_2)$ pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se constată că $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $V(x) = \frac{1}{4}(x_1^4 + 5x_2^4)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$ este o funcţie LIAPUNOV. Într-adevăr, V este de clasă C^1, $V(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$ şi satisface

$$f_1(x)\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial V}{\partial x_2}(x) = -x_1^4 - 15x_2^4 \leq 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$. Să observăm că V satisface toate ipotezele Teoremelor 4.4.2 şi 4.4.3. Într-adevăr, V este minorată de funcţia $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\omega(r) = \frac{1}{8}r^4$ pentru orice $r \in \mathbb{R}_+$ şi care satisface condiţia $\lim\limits_{r \to +\infty} \omega(r) = +\infty$. În sfârşit să observăm că funcţiile $\lambda, \eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ din Teorema 4.4.2 pot fi luate $\lambda(r) = \frac{5}{4}r^4$ şi $\eta(r) = \frac{1}{2}r^4$. Conform Teoremei 4.4.2 rezultă că soluţia nulă a sistemului este asimptotic stabilă iar din Teorema 4.4.3 deducem că sistemul este global asimptotic stabil.

(4) Să observăm că unica soluţie globală a sistemului considerat $x(\cdot, 0, (\xi, 0))$ care satisface $x(0, 0, (\xi, 0)) = (\xi, 0)$ este definită prin $x(t, 0, (\xi, 0)) = \xi(e^t, 0)$ pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. Ca atare soluţia nulă a sistemului este instabilă.

(5) Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ din membrul drept al sistemului considerat este definită prin $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (-\sin x_1 + x_2, -4x_1 - 3\operatorname{tg} x_2)$ pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Se constată că $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $V(x) = 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$ este o funcţie LIAPUNOV pentru sistem pe mulţimea $\Omega_0 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Într-adevăr, V este de clasă C^1, $V(x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$ şi satisface

$$f_1(x)\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial V}{\partial x_2}(x) = -x_1 \sin x_1 - 3x_2 \operatorname{tg} x_2 \leq 0$$

pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Conform Teoremei 4.4.1 soluţia nulă este simplu stabilă. Observând că pe o vecinătate suficient de mică a originii $(-\delta, \delta)$ avem $y \sin y \geq \frac{y^2}{2}$ şi $y \operatorname{tg} y \geq \frac{y^2}{2}$, deducem că sistemul satisface şi ipotezele Teoremei 4.4.2 cu $\lambda(r) = 2r^2$ şi $\eta(r) = \frac{1}{2}r^2$ pentru orice $r \in \mathbb{R}_+$. Deci soluţia nulă este asimptotic stabilă.

(6) Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ din membrul drept al sistemului considerat este definită prin $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (-2\operatorname{sh} x_1 + 4x_2^3, -x_1^3 - 2x_2)$ pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Se constată că $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $V(x) = x_1^4 + 4x_2^4$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$ este o funcţie LIAPUNOV pentru sistem pe $\mathbb{R}^2$. Această funcţie satisface pe $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\| < 1\}$ toate condiţiile Teoremei 4.4.2. Deci soluţia nulă este asimptotic stabilă.

Capitolul 5

Exerciţiul 5.1 (1) Adunând membru cu membru cele trei ecuaţii obţinem $x_1' + x_2' + x_3' = 0$. Deci orice soluţie a sistemului satisface $x_1 + x_2 + x_3 = c_1$. Ca atare o integrală primă este funcţia $U_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Înmulţind ecuaţia de rang i cu x_i, $i = 1, 2, 3$, şi apoi adunând egalităţile astfel obţinute deducem $x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = 0$. Deci funcţia $U_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este de asemenea o integrală primă. Întrucât

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{2\times 3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix},$$

urmează că U_1, U_2 sunt independente în jurul oricărui punct nestaţionar. Într-adevăr, să observăm că (x_1, x_2, x_3) este nestaţionar dacă şi numai dacă $x_1 \neq x_2$ sau $x_1 \neq x_3$ sau $x_2 \neq x_3$, situaţii în care rangul matricei de mai sus este 2.

(2) Din sistem deducem $x_1' - x_2' + x_3' = 0$ şi $x_1x_1' - x_2x_3' = 0$. Ca atare funcţiile $U_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, definite prin $U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$ şi respectiv $U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2$ sunt integrale prime pentru sistem. Singurele puncte staţionare ale sistemului sunt de forma $(0, 0, x_3)$. Cum rangul matricei

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{2\times 3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

este 2 în orice punct (x_1, x_2, x_3) cu $x_1 \neq x_2$ sau $x_1 = x_2 \neq 0$, urmează că cele două integrale prime sunt independente în jurul oricărui punct nestaţionar.

(3) Din primele două ecuaţii deducem $x_1x_1' + x_2x_2' = 0$, iar din prima şi ultima ecuaţie $x_1'/x_1 = x_3'/x_3$. Atunci, două integrale prime sunt $U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ şi $U_2(x_1, x_2, x_3) = x_3/x_1$ definite pe $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ;\ x_1 \neq 0\}$. Avem

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{2\times 3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ \dfrac{-x_3}{x_1^2} & 0 & \dfrac{1}{x_1} \end{pmatrix}.$$

Evident rangul acestei matrici este 2 în orice punct nestaţionar şi ca atare cele două integrale prime sunt independente pe Ω.

(4) Scăzând primele două ecuaţii deducem $x_1' - x_2' = (x_1 - x_2)(x_3 - 1)$ egalitate care împreună cu cea de-a treia ecuaţie conduce la

$$\frac{x_1' - x_2'}{x_1 - x_2} = \frac{x_3'}{x_3 + 1}.$$

Deci funcţia U_1 definită pe $\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3) ;\ x_3 \neq -1\}$ prin

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - x_2}{x_3 + 1}$$

este o integrală primă pentru sistem. Adunând primele două ecuaţii şi repetând manevrele de mai sus deducem că funcţia U_2 definită pe $\Omega_2 = \{(x_1, x_2, x_3) ;\ x_3 \neq 1\}$ prin

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2}{x_3 - 1}$$

este de asemenea o integrală primă pentru sistem. Un punct (x_1, x_2, x_3) este staţionar pentru sistem dacă şi numai dacă $x_1 = -x_2$ şi $x_3 = 1$ sau $x_1 = x_2$ şi $x_3 = -1$. Se constată imediat că rangul matricei

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{2\times 3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_3+1} & -\dfrac{1}{x_3+1} & -\dfrac{x_1-x_2}{(x_3+1)^2} \\ \dfrac{1}{x_3-1} & \dfrac{1}{x_3-1} & -\dfrac{x_1+x_2}{x_3-1} \end{pmatrix}$$

este 2 în toate punctele nestaţionare.

(5) Pentru orice soluţie a sistemului avem $x_1'x_2 - x_1x_2' = 0$ şi $x_1'x_2 + x_1x_2' + x_3' = 0$. Cele două integrale prime, definite pe $\mathbb{R}^3$, sunt $U_1(x_1,x_2,x_3) = x_1/x_2$ şi $U_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_3$. Punctele staţionare ale sistemului sunt de forma $(0,0,x_3)$. Ca atare rangul matricei

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{2\times 3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2} & -\dfrac{x_1}{x_2^2} & 0 \\ x_2 & x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

este 2 în orice punct nestaţionar al sistemului.

(6) Din primele două ecuaţii deducem $x_1'x_2+x_1x_2' = 0$ ceea ce arată că funcţia $U_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $U_1(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2$ este o integrală primă pentru sistem. Cum pe soluţiile sistemului avem $x_1x_2 = c$, din prima şi din ultima ecuaţie rezultă $-x_1(1+x_1^2)x_1' = cx_3'$. Ca atare avem $cx_3 + x_1^2/2 + x_1^4/4 = c_2$. Atunci, pe soluţiile sistemului, avem $x_1x_2x_3 + x_1^2/2 + x_1^4/4 = c_2$. O altă integrală primă este $U_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $U_2(x_2,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 + x_1^2/2 + x_1^4/4$. Punctele staţionare ale sistemului sunt de forma $(0,0,x_3)$, iar rangul matricei

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{2\times 3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ x_2x_3+x_1+x_1^3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}$$

este 2 în orice punct nestaţionar al sistemului pentru care $x_1 \neq 0$.

(7) Din primele două ecuaţii deducem $x_1'x_2-x_1x_2' = 0$. Deci funcţia $U_1(x_1,x_2,x_3) = x_1/x_2$, definită pe $\Omega_1 = \{(x_1,x_2,x_3)\,;\ \mathbb{R}^3,\ x_2 \neq 0\}$, este o integrală primă pentru sistem. Să mai observăm că $x_1'/x_1 + x_2'/x_2 = x_3'/x_3$, ceea ce arată că funcţia $U_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2)/x_3$, definită pe $\Omega_2 = \{(x_1,x_2,x_3)\,;\ \mathbb{R}^3,\ x_3 \neq 0\}$, este de asemenea o integrală primă pentru sistem. Punctele staţionare ale sistemului sunt de forma $(x_1,0,0)$ sau $(0,x_2,0)$. În orice punct nestaţionar al sistemului pentru care $x_1x_2x_3 \neq 0$, rangul matricei

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{2\times 3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2} & -\dfrac{x_1}{x_2^2} & 0 \\ \dfrac{x_2}{x_3} & \dfrac{x_1}{x_3} & -x_1x_2x_3^2 \end{pmatrix}$$

este 2.

(8) Din prima şi ultima ecuaţie avem $x_1'/(2-x_1) + 2x_3'/x_3 = 0$, iar din cele trei ecuaţii şi ultima $(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')/(x_1^2+x_2^2+x_3^2) = -x_3'/(2x_3)$. Din aceste relaţii rezultă că funcţiile $U_1, U_2 : \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\,;\ x_3 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, definite prin $U_1(x_1,x_2,x_3) = (2-x_1)/x_3^2$ şi respectiv prin $U_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)/x_3$, sunt integrale prime pentru sistem. Punctele staţionare ale sistemului sunt toate punctele cercului de ecuaţii $x_2 = 0$ şi $(x_1-2)^2 + x_3^2 = 4$. Rangul matricei

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{2\times 3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x_3^2} & 0 & -\dfrac{4-2x_1}{x_3^3} \\ \dfrac{2x_1}{x_3} & \dfrac{2x_2}{x_3} & -\dfrac{x_1^2+x_2^2-x_3^2}{x_3^2} \end{pmatrix}$$

este 2 în toate punctele staţionare mai puţin $(2,0,2)$ şi $(2,0,-2)$.

Problema 5.1 Să observăm că funcţia U este integrală primă pentru sistem dacă şi numai dacă funcţia $V : (0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $V=\ln(U)$ are aceeasi proprietate. Să mai observăm că V este neconstantă, de clasă C^1 şi satisface

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)(a-ky)x+\frac{\partial V}{\partial y}(x,y)(-1)(b-hx)y=\left(h-\frac{b}{x}\right)(a-ky)x-\left(k-\frac{a}{y}\right)(b-hx)y=0.$$

Conform Teoremei 5.1.1 rezultă că V sau, echivalent U, este o integrală primă.
Problema 5.2 Se constată că $U_1, U_2 : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definite prin $U_1(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$ şi respectiv prin $U_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ pentru orice $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ sunt integrale prime pentru sistem. Ca atare orice traiectorie a sistemului este inclusă în intersecţia dintre planul de ecuaţie $x_1+x_2+x_3=c_1$ şi sfera de ecuaţie $x_1^2+x_2^2+x_3^2=c_2$, intersecţie care este un cerc. Demonstraţia se completează observând că orice soluţie saturată este globală.
Problema 5.3 Să observăm că integrala primă V definită în cadrul rezolvării Problemei 5.1 are graficul cu alura unui paraboloid cu vârful de coordonate $(b/h, a/k, U(b/h,a/k)$. Vezi Figura 6.1.2 de mai jos.

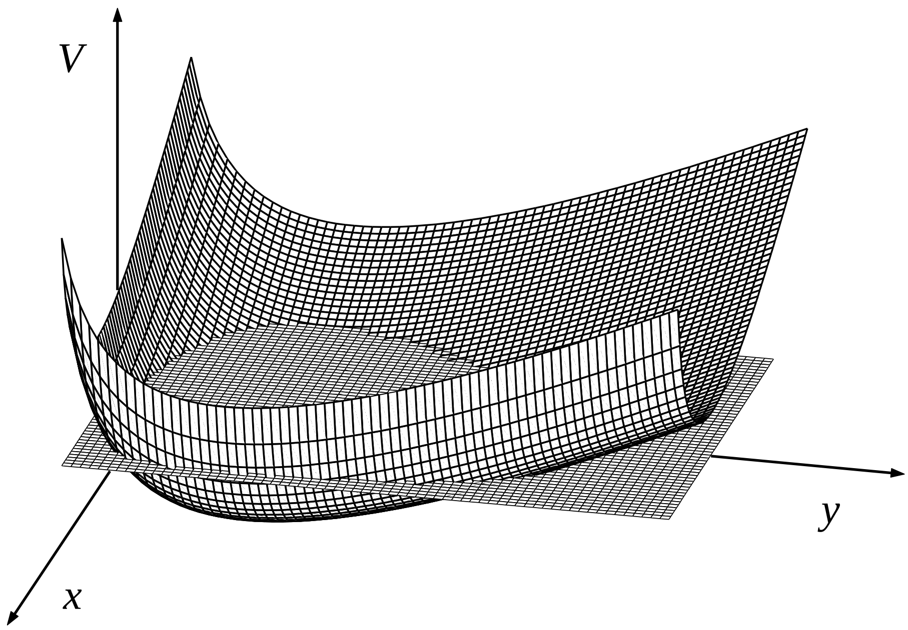

FIGURA 6.1.2

Ca atare, intersecţia acestui grafic cu orice plan paralel cu planul xOy este o curbă simplă închisă. Cum traiectoria oricărei soluţii a sistemului este proiecţia unei astfel de curbe pe planul xOy, ea este la rândul ei o curbă simplă închisă.
Problema 5.4 Împărţind prima ecuaţie la x deducem

$$\frac{x'}{x}=a-ky.$$

Integrând această egalitate pe $[\,t, t+T\,]$ şi ţinând cont că x este periodică de perioadă T deducem

$$aT-k\int_t^{t+T}y(s)ds=0,$$

sau, echivalent $y_m=a/k$. Analog se obţine $x_m=b/h$
Problema 5.5 Să observăm că, dacă U este o integrală primă a sistemului care are un minim local strict în ξ, atunci $V(x)=U(x)-U(\xi)$ este tot o integrală primă. Printr-un simplu

argument de translaţie putem presupune, fară a restrânge generalitatea că $\xi = 0$. Evident V este pozitiv definită (vezi Lema 4.4.1), $V(0) = 0$ şi satisface

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Ca atare V este o funcţie LIAPUNOV pentru sistem. Suntem atunci în ipotezele Teoremei 4.4.1 de unde rezultă concluzia. Dacă ξ este un punct de maxim local strict pentru integrala primă U şi ξ este soluţie staţionară pentru sistem, atunci ξ este un punct de minim local pentru $-U$ care este de asemenea o integrală primă pentru sistem. Suntem deci în ipotezele primei părţi a problemei de unde rezultă că şi în acest caz soluţia este simplu stabilă.

Problema 5.6 Concluzia rezultă din Problema 5.5, observând că integrala primă, definită în rezolvarea Problemei 5.1 prin $V(x, y) = \ln(U(x, y))$, are un minim local strict în $(b/h, a/k)$.

Problema 5.7 Dacă sistemul autonom $x' = f(x)$ admite o integrală primă injectivă rezultă că toate soluţiile sistemului sunt constante. Deci sistemul este de forma $x' = 0$. Să presupunem pentru reducere la absurd că există un sistem neautonom $x' = f(t, x)$ care admite o integrală primă injectivă U. La fel ca şi în cazul autonom şi în acest caz toate soluţiile sunt constante. Deci sistemul este de forma $x' = 0$ şi ca atare sistemul este autonom ceea ce este absurd.

Problema 5.8 Fie $x : [\,a, T_m) \to \mathbb{R}^n$ o soluţie a sistemului cu $T_m < +\infty$. Cum $U(x(\cdot))$ este constantă pe $[\,a, T_m)$ iar U este coercivă, rezultă că x este mărginită pe $[\,a, T_m)$. Conform Consecinţei 2.5.3 urmează că x nu este saturată. Deci orice soluţie saturată este globală. Dacă $\lim \|x\| \to +\infty U(x) = -\infty$ atunci $-U$ este integrală primă coercivă pentru sistem. Deci rezultatul se păstrează şi în acest caz.

Problema 5.9 Rezultă imediat că

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\partial H}{\partial q_i}(p,q)\frac{\partial H}{\partial p_i}(p,q) + \frac{\partial H}{\partial p_i}(p,q)\frac{\partial H}{\partial q_i}(p,q)\right] = 0.$$

Conform Teoremei 5.1.1 H este o integrală primă pentru sistem.

Problema 5.10 Se constată că, o funcţie de clasă C^1, $U : \Omega_0 \subset \Omega \to \mathbb{R}$, verifică condiţia (1.2) din Teorema 5.1.1 împreună cu funcţia f dacă şi numai dacă ea verifică aceeaşi condiţie împreună cu funcţia λf.

Problema 5.11 Să presupunem pentru reducere la absurd că există $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, integrală primă pentru sistem. Cum soluţia generală a sistemului este $x_1(t) = \xi e^{2t}, x_2(t) = \eta e^t$ pentru $t \in \mathbb{R}$ avem că $U(\xi e^{2t}, \eta e^t) = U(\xi, \eta)$ pentru orice $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ şi orice $t \in \mathbb{R}$. Făcând t să tindă la $-\infty$ conchidem că $U(\xi, \eta) = U(0, 0)$ pentru orice $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, adică U este o funcţie constantă. Această contradicţie poate fi eliminată numai dacă nu există nici o integrală primă a sistemului considerat definită pe $\mathbb{R}^2$. Pe de altă parte, funcţia $U : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 > 0\} \to \mathbb{R}$, definită prin $U(x_1, x_2) = x_2^2/x_1$, este o integrală primă pentru sistem.

Problema 5.12 Prima parte a problemei rezultă din faptul că funcţia $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin $U(x) = \|x\|^2$, este o integrală primă pentru sistem. Deci traiectoria oricărei soluţii este situată pe o sferă cu centrul în origine şi cu raza depinzând de soluţie. În plus, dacă $\mathbb{I} = [\,0, +\infty)$, cum orice soluţie saturată a sistemului este mărginită, conform Teoremei 4.2.2, urmează că sistemul este simplu stabil.

Exerciţiul 5.2 (1) Sistemul caracteristic sub forma simetrică este

$$\frac{dx_1}{x_2^2 - x_3^2} = \frac{dx_2}{x_3^2 - x_1^2} = \frac{dx_3}{x_1^2 - x_2^2}.$$

Avem $dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$ şi $x_1^2 dx_1 + x_2^2 dx_2 + x_3^2 dx_3 = 0$. Deci funcţiile $U_1, U_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin $U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ şi respectiv prin $U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, sunt integrale prime pentru acest sistem. Punctele staţionare ale sistemului sunt de forma (x_1, x_2, x_3) cu $x_1 = \pm x_2 = \pm x_3$. Este uşor de constatat că integralele prime de mai sus sunt independente în jurul oricărui punct nestaţionar. Ca atare, soluţia generală a ecuaţiei este $z(x_1,x_2,x_3) = F(x_1+x_2+x_3, x_1^3+x_2^3+x_3^3)$, unde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1.

(2) Din egalitatea primului raport cu ultimul în sistemul caracteristic:

$$\frac{dx_1}{-x_1 e^{x_2}} = \frac{dx_2}{1} = \frac{dx_3}{x_3 e^{x_2}},$$

deducem $x_3 dx_1 + x_1 dx_3 = 0$, iar din din egalitatea primelor două rapoarte $x_1^{-1} dx_1 + e^{x_2} dx_2 = 0$. Avem integralele prime $U_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_3$ şi $U_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 e^{e^{x_2}}$ definite pe $\mathbb{R}^3$. Sistemul nu are puncte singulare iar cele două integrale prime sunt independente în orice punct. Soluţia generală a ecuaţiei este $z(x_1,x_2,x_3) = F(x_1x_3, x_1 e^{e^{x_2}})$, unde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ parcurge mulţimea funcţiilor de clasă C^1.

(3) Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx_1}{x_1(x_2-x_3)} = \frac{dx_2}{x_2(x_3-x_1)} = \frac{dx_3}{x_3(x_1-x_2)}.$$

Avem

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{d_1}{x_1} + \frac{d_2}{x_2} + \frac{d_3}{x_3} = 0.$$

În consecinţă, funcţiile $U_1(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3$ şi $U_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$, definite pe $\mathbb{R}^3$, sunt integrale prime pentru sistem. Un punct (x_1,x_2,x_3) este staţionar pentru sistem dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = x_3$, sau $x_i = x_j = 0$ pentru $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$. Cele două integrale prime sunt independente în jurul oricărui punct nestaţionar şi ca atare soluţia generală este $z(x_1,x_2,x_3) = F(x_1+x_2+x_3, x_1x_2x_3)$, unde F parcurge mulţimea funcţiilor reale, de clasă C^1, definite pe $\mathbb{R}^2$.

(4) Ecuaţia este cvasiliniară. Ca atare căutăm soluţia ca o funcţie x_3 definită implicit de o relaţie de forma $\phi(x_1,x_2,x_3(x_1,x_2)) = c$, unde funcţia ϕ este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare

$$(x_1-x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + (x_2-x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + 2x_3\frac{\partial\phi}{\partial x_3} = 0.$$

Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx_1}{x_1-x_3} = \frac{dx_2}{x_2-x_3} = \frac{dx_3}{2x_3}.$$

Avem

$$\frac{dx_1+dx_2}{x_1+x_2} = \frac{dx_3}{2x_3} \quad \text{şi} \quad \frac{dx_2}{dx_3} = \frac{x_2}{2x_3} - \frac{1}{2}.$$

Ca atare funcţiile $U_1(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1+x_2}{2x_3}$ şi $U_2(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{(x_2+x_3)^2}{x_3}$, definite pe mulţimea $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_3 \neq 0\}$, sunt integrale prime pentru sistemul caracteristic. Singurul punct singular al sistemului este originea. Se constată cu uşurinţă că integralele de mai sus sunt independente în jurul oricărui punct nestaţionar pentru care $x_3 \neq 0$ şi $x_2 \neq -x_3$. Soluţia generală este definită implicit de o relaţie de forma $F\left(\dfrac{x_1+x_2}{2x_3}, \dfrac{(x_2+x_3)^2}{x_3}\right) = c$, unde F parcurge mulţimea funcţiilor reale, de clasă C^1, definite pe $\mathbb{R}^2$, iar c parcurge $\mathbb{R}$.

(5) Ecuaţia este cvasiliniară. Ca atare căutăm soluţia ca o funcţie x_3 definită implicit de o relaţie de forma $\phi(x_1,x_2,x_3(x_1,x_2)) = c$, unde funcţia ϕ este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare

$$x_3\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - x_3\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + (x_2-x_1)\frac{\partial\phi}{\partial x_3} = 0.$$

Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx_1}{x_3} = \frac{dx_2}{-x_3} = \frac{dx_3}{x_2-x_1}.$$

Pe soluţiile sistemului avem $x_1-x_2=c_1$ şi $x_1^2-x_2^2+x_3^2=c_2$ şi ca atare funcţiile $U_1,U_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definite prin $U_1(x_1,x_2,x_3)=x_1-x_2$ şi $U_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$, sunt integrale prime pentru sistemul caracteristic. Punctele singulare ale sistemului sunt de forma $(a,a,0)$, iar cele două integrale prime sunt independente în orice punct nesingular diferit de origine. Deci soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este definită implicit de o relaţie de forma $F(x_1-x_2,x_1^2-x_2^2+x_3^2)=c$, unde $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ parcurge mulţimea funcţiilor de clasă C^1 iar $c\in\mathbb{R}$.

(6) Căutăm soluţia ca o funcţie definită implicit de $\phi(x_1,x_2,x_3(x_1,x_2))=c$, unde ϕ este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară

$$x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2}+\left(x_3+\frac{x_1x_2}{x_3}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}=0.$$

Sistemul caracteristic ataşat este

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{x_3dx_3}{x_3^2+x_1x_2}.$$

Pe soluţiile sistemului avem $\dfrac{x_1}{x_2}=c_1$. Ca atare o integrală primă a sistemului caracteristic este $U_1:\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\ x_2\neq 0\}\to\mathbb{R}$, definită prin $U_1(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_2}$. Avem totodată

$$\frac{d(x_1x_2)}{x_1x_2}=\frac{d(x_3^2)}{x_3^2+x_1x_2}.$$

Notând

$$\begin{cases} x_1x_2=u\\ x_3^2=v\end{cases}$$

ecuaţia de mai sus se rescrie sub forma

$$\frac{dv}{du}=\frac{v}{u}+1.$$

Integrând această ecuaţie deducem $\dfrac{v}{u}-\ln|u|=c_2$. În consecinţă o a doua integrală primă este $U_2:\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\ x_1x_2\neq 0\}\to\mathbb{R}$, definită prin $U_2(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_3^2}{x_1x_2}-\ln|x_1x_2|$. Sistemul nu are puncte singulare, iar cele două integrale prime sunt independente în orice punct (x_1,x_2,x_3) pentru care $x_1x_2x_3\neq 0$. În concluzie soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este definită implicit de o relaţie de forma $F\left(\dfrac{x_1}{x_2},\dfrac{x_3^2}{x_1x_2}-\ln|x_1x_2|\right)=c$, unde $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ parcurge mulţimea funcţiilor de clasă C^1, iar $c\in\mathbb{R}$.

(7) Soluţia generală este definită implicit de $F(x_1^2-x_2^2,2x_2^2-x_3^2)=c$, unde $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ parcurge mulţimea funcţiilor de clasă C^1, iar $c\in\mathbb{R}$.

(8) Căutăm soluţia definită implicit de $\phi(x_1,x_2,x_3,z(x_1,x_2,x_3))=c$, unde ϕ este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară

$$(1+\sqrt{z-a_1x_1-a_2x_2-a_3x_3})\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}+(a_1+a_2+a_3)\frac{\partial\phi}{\partial z}=0.$$

Sistemul caracteristic ataşat este

$$\frac{dx_1}{1+\sqrt{z-a_1x_1-a_2x_2-a_3x_3}}=\frac{dx_2}{1}=\frac{dx_3}{1}=\frac{dz}{a_1+a_2+a_3}.$$

Din egalitatea ultimelor trei rapoarte deducem că funcţiile $U_1,U_2:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, definite prin $U_1(x_1,x_2,x_4,z)=x_2-x_3$ şi respectiv prin $U_2(x_1,x_2,x_3,z)=x_3-\dfrac{z}{a_1+a_2+a_3}$ sunt integrale prime pentru sistem. Din proporţia derivată

$$\frac{dx_2}{1}=\frac{a_1dx_1+a_2sx_2+a_3dx_3-dz}{a_1\sqrt{z-a_1x_1-a_2x_2-a_3x_3}}$$

deducem că funcţia $U_3 : \{(x_1, x_2, x_3, z) \in \mathbb{R}^4;\ z > a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3\} \to \mathbb{R}$, definită prin $U_3(x_1, x_2, x_3, z) = a_1x_2 + 2\sqrt{z - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3}$ este de asemenea o integrală primă. Sistemul nu are puncte singulare. Cele trei integrale prime sunt independente în toate punctele domeniului comun de definiţie. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este definită implicit de

$$F\left(x_2 - x_3, x_3 - \frac{z}{a_1 + a_2 + a_3}, a_1x_2 + \sqrt{z - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3}\right) = c,$$

unde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ parcurge mulţimea funcţiilor de clasă C^1, iar $c \in \mathbb{R}$. Ecuaţia mai admite şi soluţia "specială" $z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, eliminată în cursul determinării integralei prime U_3.

Problema 5.13 Vom considera pentru început problema omogenă ataşată

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + a\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \\ z(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

a cărei sistem caracteristic este

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a}.$$

O integrală primă pentru acest sistem este $U(t, x) = x - at$ pentru orice $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este atunci $z(t, x) = F(x - at)$, unde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1. Din condiţia CAUCHY rezultă că unica soluţie a problemei CAUCHY omogene este

$$z(t, x) = \varphi(x - at)$$

pentru $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pentru a determina soluţia ecuaţiei neomogene vom utiliza metoda variaţiei constantelor. Mai precis, vom căuta soluţia sub forma

$$z(t, x) = \psi(t, x - at),$$

unde $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 ce urmează a fi determinată impunând condiţia ca z să fie soluţia problemei neomogene. Avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t, x) = \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t, x - at) - a\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(t, x - at) \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}(t, x) = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}(t, x - at), \end{cases}$$

de unde

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) = f(t, y + at).$$

Din această ecuaţie deducem

$$\psi(t, y) = \psi(0, x) + \int_0^t f(s, y + as)\, ds$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. În sfârşit, din ultima egalitate şi din condiţia iniţială rezultă

$$z(t, x) = \varphi(x - at) + \int_0^t f(s, x - a(t - s))\, ds$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Problema 5.14 Să considerăm pentru început problema omogenă ataşată

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + a(t)\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \\ z(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

a cărei sistem caracteristic este

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a(t)}.$$

O integrală primă pentru acest sistem este

$$U(t,x) = x - \int_0^t a(s\,ds)$$

pentru $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este $z(t,x) = F(x - \int_0^t a(s)\,ds)$, unde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1. Din condiţia CAUCHY rezultă că unica soluţie a problemei CAUCHY omogene este

$$z(t,x) = \varphi\left(x - \int_0^t a(s)\,ds\right)$$

pentru $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vom căuta soluţia ecuaţiei neomogene sub forma

$$z(t,x) = \psi\left(t, x - \int_0^t a(s)\,ds\right),$$

unde $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie de clasă C^1 care satisface

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial \psi}{\partial t}\left(t, x - \displaystyle\int_0^t a(s)\,ds\right) - a(t)\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\left(t, x - \displaystyle\int_0^t a(s)\,ds\right) \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\left(t, x - \displaystyle\int_0^t a(s)\,ds\right), \end{cases}$$

de unde

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,y) = f\left(t, y + \int_0^t a(s)\,ds\right).$$

Din această ecuaţie deducem

$$\psi(t,y) = \psi(0,x) + \int_0^t f\left(s, y + \int_0^s a(\tau)\,d\tau\right)\,ds$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. În sfârşit, din ultima egalitate şi din condiţia iniţială rezultă

$$z(t,x) = \varphi\left(x - \int_0^t a(\tau)\,d\tau\right) + \int_0^t f\left(s, x - \int_s^t a(\tau)\,d\tau\right)\,ds$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Problema 5.15 Sistemul caracteristic ataşat ecuaţiei omogene este

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n}.$$

Soluţia generală a acestui sistem este

$$z(t,x) = U(x - ta),$$

unde $x - ta = (x_1 - a_1 t, x_2 - a_2 t, \ldots, x_n - a_n t)$ şi $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parcurge mulţimea tuturor funcţiior de clasă C^1. Soluţia ecuaţiei omogene care satisface condiţia iniţială precizată este

$$z(t,x) = \varphi(x - ta)$$

pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Căutând soluţia ecuaţiei neomogene sub forma

$$z(t,x) = \psi(t, x - ta)$$

pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, deducem

$$z(t,x) = \varphi(x - ta) + \int_0^t f(s, x - (t-s)a)\,ds$$

pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Problema 5.16 Urmând o cale analogă celei utilizată în rezolvarea Problemei 5.14 deducem că

$$z(t,x)=\varphi\left(x-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right)+\int_0^t f\left(s,x-\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right)\,ds$$

pentru orice $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Problema 5.17 Vom considera pentru început problema omogenă ataşată

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial t}+ax\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\[2mm] z(0,x)=\varphi(x)\end{cases}$$

a cărei sistem caracteristic este

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{ax}.$$

O integrală primă pentru acest sistem este $U(t,x)=xe^{-at}$ pentru orice $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este atunci $z(t,x)=F(xe^{-at})$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este de clasă C^1. Din condiţia Cauchy rezultă că unica soluţie a problemei Cauchy omogene este

$$z(t,x)=\varphi(xe^{-at})$$

pentru $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Pentru a determina soluţia ecuaţiei neomogene vom utiliza metoda variaţiei constantelor. Mai precis, vom căuta soluţia sub forma

$$z(t,x)=\psi(t,xe^{-at}),$$

unde $\psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 ce urmează a fi determinată impunând condiţia ca z să fie soluţia problemei neomogene. Avem

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial t}(t,x)=\dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t,xe^{-at})-axe^{-at}\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(t,xe^{-at})\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial x}(t,x)=e^{-at}\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(t,xe^{-at}),\end{cases}$$

de unde

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,y)=f(t,ye^{at}).$$

Din această ecuaţie deducem

$$\psi(t,y)=\psi(0,y)+\int_0^t f(s,ye^{as})\,ds$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}$. În sfârşit, din ultima egalitate şi din condiţia iniţială rezultă

$$z(t,x)=\varphi(e^{-at}x)+\int_0^t f(s,xe^{-a(t-s)})\,ds$$

pentru orice $t\in\mathbb{R}$.

Problema 5.18 Soluţia este dată de

$$z(t,x)=\varphi\left(e^{-\int_0^t a(\tau)\,d\tau}x\right)+\int_0^t f\left(s,e^{-\int_s^t a(\tau)\,d\tau}x\right)\,ds$$

pentru orice $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Problema 5.19 Avem

$$z(t,x)=\varphi\left(e^{-t\mathcal{A}}x\right)+\int_0^t f\left(s,e^{-(t-s)\mathcal{A}}x\right)\,ds$$

pentru orice $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, unde $e^{-t\mathcal{A}}$ este exponenţiala matricei $-t\mathcal{A}$.

Problema 5.20 Soluţia este

$$z(t,x) = \varphi\left(\mathcal{X}^{-1}(t)x\right) + \int_0^t f\left(s, \mathcal{X}^{-1}(t)\mathcal{X}(s)x\right)\, ds$$

pentru orice $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, unde $\mathcal{X}(t)$ este o matrice fundamentală a sistemului diferenţial liniar de ordinul întâi $x'(t) = \mathcal{A}(t)x(t)$.

Bibliografie

[1] D. K. Arrowsmith, C. M. Place, *Ordinary Differential Equations*, Chapman and Hall, London-New York, 1982.
[2] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.
[3] C. Corduneanu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Universitatea "Al. I. Cuza" Iaşi, 1971.
[4] M. Craiu, M. Roşculeţ, *Ecuaţii diferenţiale aplicative. Probleme de ecuaţii cu derivate partiale de ordinul întîi*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
[5] B. Demidovich Editor, *Problems in Mathematical Analysis*, MIR Publishers.
[6] V. Glăvan, V. Guţu, A. Stahl, *Ecuaţii diferenţiale prin probleme*, Editura Universitas, Chişinău, 1993.
[7] A. Halanay, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.
[8] D. V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.
[9] G. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Biblioteca profesorului de matematică, Editura Academiei R. S. R., Bucureşti, 1989.
[10] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Analiză matematică*, Vol.I, ediţia a patra, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
[11] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Analiză matematică*, Vol.II, ediţia a doua, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
[12] S. Nistor, I. Tofan, *Introducere în teoria funcţiilor complexe*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi, 1997.
[13] A. Precupanu, *Analiză matematică. Funcţii reale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.
[14] I. Rus, Gh. Micula, P. Pavel, B. P. Ionescu, *Probleme de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.
[15] C. Udrişte, C. Radu, C. Dicu, O. Mălăncioiu, *Algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.
[16] V. S. Vladimirov, V. P. Mihailov, A. A. Varaşin, H. H. Karimova, Iu. V. Sidorov, M. I. Şabunin, *Culegere de probleme de ecuaţiile fizicii matematice*, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1981.
[17] I. I. Vrabie, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura MATRIXROM, Bucureşti, 1999.
[18] I. I. Vrabie, *Differential equations. An introduction to basic results, concepts and applications*, Second Edition, World Scientific, New Jersey – London – Singapore – Beijing – Shanghai – Hong Kong – Taipei –Chennai, 2011.
[19] H. Wieleitner, *Istoria Matematicii. De la Déscartes până în mijlocul secolului al XIX-lea*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1964.

Bibliografie complementară

[20] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1976.
[21] O. Cârjă, *Elemente de analiză funcţională neliniară*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi, 1998.
[22] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.
[23] M. W. Hirsch, The Dynamical System Approach to Differential Equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. **11**(1984), 1-64.
[24] I. G. Malkin, *Teoriya ustoychivosti dvizhenia*, Gostekhizdat, 1952.
[25] N. H. Pavel, *Differential equations, flow invariance and applications*, Research Notes in Mathematics 113, Pitman, Boston-London- Melbourne, 1984.

[26] L. C. PICCININI, G. STAMPACCHIA, G. VIDOSSICH, *Ordinary Differential Equations in* $\mathbb{R}^n$, Applied Mathematical Sciences 39, Springer Verlag, New York Berlin Heildelberg Tokyo, 1984.
[27] I. I. VRABIE, *Compactness methods for nonlinear evolutions*, Second Edition, Addison-Wesley and Longman, 75, 1995.

Index

Lista de simboluri

$\mathcal{A}^*$ sau $\mathcal{A}^\tau$ - transpusa matricei $\mathcal{A}$
$B(\xi, r)$ - sfera închisă de centru ξ şi rază r
$C([\,a, b\,]; \mathbb{R}^n)$ - spaţiul funcţiilor continue de la $[\,a, b\,]$ în $\mathbb{R}^n$
$\overset{\circ}{D}$ - interiorul mulţimii D
$\overline{D}$ - aderenţa sau închiderea mulţimii D
$\partial\Omega$ - frontiera mulţimii Ω
$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ - derivata parţială a funcţiei u în raport cu variabila t
$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ derivata parţială de ordinul al doilea a funcţiei u în raport cu variabila x
$f_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}$ - matricea jacobiană a funcţiei $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ în raport cu ultimele n variabile
$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ - mulţimea matricelor de tip $n \times m$ cu elemente reale
$\mathbb{N}$ - mulţimea numerelor naturale
$\mathbb{N}^*$ - mulţimea numerelor naturale strict pozitive
$\mathbb{R}$ - mulţimea numerelor reale
$\mathbb{R}^*$ - mulţimea numerelor reale fără zero
$\mathbb{R}_+$ - mulţimea numerelor reale pozitive
$\mathbb{R}_+^*$ - mulţimea numerelor reale strict pozitive
$\mathbb{R}^n$ - spaţiul liniar real al tuturor n-uplelor de numere reale
$\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ sau $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - produsul scalar standard pe $\mathbb{R}^n$ definit prin

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\|\cdot\|_n$ sau $\|\cdot\|$ - norma euclidiană în $\mathbb{R}^n$ definită prin

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

$\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ - norma operatorială a unei matrice definită prin

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{O}} = \sup\{\|\mathcal{A}x\|_n;\ \|x\|_m \leq 1\}$$

pentru orice $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$