Cursul 12

(*plan de curs*)

Integrale prime

§1 Sisteme diferenţiale autonome. Spaţiul fazelor. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă C^1. Vom considera sistemul diferenţial

$$x' = f(x), \tag{1}$$

care se numeşte *autonom* deoarece câmpul vitezelor f nu depinde de t.

Acest sistem trebuie înţeles ca fiind sistemul

$$x' = \tilde{f}(t, x)$$

cu $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ definită de $\tilde{f}(t, x) = f(x)$ pentru $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Este clar că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi orice $\xi \in \Omega$ sistemul (1) admite o unică soluţie saturată $x : I_{a,\xi} \to \mathbb{R}^n$ care satisface condiţia $x(a) = \xi$, soluţie notată cu $x = x(t, a, \xi)$.

Propoziţia 1. *Mulţimea soluţiilor sistemului* (1) *este închisă la translaţii în raport cu* t.

Demonstraţie. Fie $x = \varphi(t)$ o soluţie definită pe un interval $I = (\alpha, \beta)$ şi fie τ un număr real oarecare. Arătăm că $\psi(t) = \varphi(t + \tau)$ este o soluţie definită pe $I_\tau = (\alpha - \tau, \beta - \tau)$. Într-adevăr

$$\psi'(t) = \varphi'(t + \tau) = f(\varphi(t + \tau)) = f(\psi(t)),$$

pentru orice $t \in I_\tau$.

Definiţie. Prin *traiectorie* sau *orbită* a sistemului (1) înţelegem imaginea unei soluţii oarecare:

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(t), t \in I_\varphi\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Observaţie. Traiectoria unei soluţii constante este formată dintr-un singur punct, numit *punct staţionar* sau *punct de echilibru.* Punctul $\xi \in \Omega$ este staţionar dacă şi numai dacă $f(\xi) = 0$.

Observaţie. Este evident că două soluţii care se obţin una din alta printr-o translaţie în raport cu t au aceeaşi traiectorie.

Propoziţia 2. *Prin orice punct* $\xi \in \Omega$ *trece o traiectorie şi numai una.*

Demonstraţie. Fie $\xi \in \Omega$ şi $\varphi(t) = x(t, 0, \xi)$ soluţia care la momentul iniţial $a = 0$ pleacă din ξ. Arătăm că $\mathrm{Im}(\varphi)$ este singura traiectorie prin ξ. Fie $\mathrm{Im}(\psi)$ o traiectorie oarecare prin ξ, aceasta înseamnă că $x = \psi(t)$ este o soluţie care la un moment dat $t = a$ trece prin ξ, altfel spus $\psi(t) = x(t, a, \xi)$. In acest caz $\psi(t) = \varphi(t - a)$ deoarece ambele sunt soluţii pentru aceeaşi problemă Cauchy. Am arătat că φ şi ψ se obţin una din alta printr-o translaţie în raport cu t, prin urmare au aceeaşi traiectorie.

Atragem atenţia că această proprietate este specifică sistemelor autonome şi ne permite să vorbim despre "traiectoria punctului $\xi \in \Omega$" ca fiind traiectoria oricărei soluţii care trece prin ξ. In cazul neautonom este posibil ca două soluţii care trec la momente diferite prin acelaşi punct $\xi \in \mathbb{R}^n$ să aibă traiectorii diferite. De exemplu, pentru sistemul neautonom

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t, \end{cases}$$

soluţia care trece prin origine la momentul $t = 0$ este

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases}$$

şi are ca traiectorie parabola $y = x^2$, iar soluţia care trece prin origine la momentul $t = 1$ este

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 1, \end{cases}$$

şi are ca traiectorie parabola $y = x^2 + 2x$, diferită de cea precedentă.

În cazul sistemelor autonome, deoarece toate soluţiile care trec printr-un punct dat au aceeaşi traiectorie, se preferă interpretarea soluţiilor ca fiind *legi orare* care descriu mişcarea unui punct în submulţimea Ω a spaţiului $\mathbb{R}^n$, numit din acest motiv *spaţiul stărilor* sau *spaţiul fazelor* sistemului. De altfel, este uşor de văzut că are loc

Propoziţia 3. *Traiectoria oricărui punct nestaţionar $\xi \in \Omega$ este o curbă regulată de clasă C^1, adică o curbă ce admite o parametrizare $x = \varphi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, cu φ de clasă C^1 şi $\varphi'(t) \neq 0$, pentru orice $t \in (\alpha, \beta)$.*

Traiectoriile punctelor nestaţionare sunt curbe care admit tangentă în orice punct, spre deosebire de cazul neautonom, când această proprietate nu are loc. De exemplu, este uşor de văzut că funcţia $t \in \mathbb{R} \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$ dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2, \ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

este o funcţie de clasă C^1 care verifică sistemul diferenţial neautonom

$$\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 2t, \end{cases}$$

iar traiectoria sa, dată de ecuaţia $y = \sqrt[3]{x^2}$, nu admite tangentă în punctul $(0, 0)$, unde graficul funcţiei $x \to \sqrt[3]{x^2}$ are un *punct de întoarcere*.

Mai mult, traiectoria oricărui punct nestaţionar $\xi \in \Omega$ al unui sistem autonom este parcursă numai într-un singur sens de către orice soluţie care trece prin ξ, schimbarea sensului de parcurs implicând existenţa pe traiectorie a unui punct în care vectorul viteză se anulează, adică a unui punct staţionar, fapt imposibil.

In final precizăm că familia traiectoriilor unui sistem diferenţial autonom formează *portretul fazelor* sistemului.

§2 Integrale prime pentru sisteme autonome. Să analizăm un exemplu. Considerăm sistemul autonom

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 \\ x_2' = x_3 - x_1 \\ x_3' = x_1 - x_2. \end{cases} \tag{2}$$

şi îi adunăm ecuaţiile. Obţinem

$$x_1' + x_2' + x_3' = 0,$$

de unde, *prin integrare*, deducem că

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = c \text{ (const.)}, \tag{3}$$

pentru orice soluţie a sistemului. Am obţinut o primă relaţie integrală constantă a sistemului. De aici se poate continua rezolvarea astfel: din (3) îl explicităm pe x_1 în funcţie de x_2 şi x_3 şi îl înlocuim în ultimile două ecuaţii, obţinem astfel un sistem diferenţial autonom numai în x_2 şi x_3. Pentru acest sistem căutăm iarăşi o integrală constantă şi, dacă o găsim, reducem sistemul la o singură ecuaţie diferenţială. Deoarece la fiecare etapă prima relaţie integrală constantă găsită permite reducerea dimensiunii sistemului cu o unitate, aceste relaţii au fost numite *integrale prime.* În general o astfel de relaţie are forma

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c \text{ (const.)},$$

şi, prin extensie, chiar aplicaţia $U : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este numită *integrală primă.*

Revenind la exemplul dat, am stabilit aşadar că aplicaţia $U_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită de relaţia

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$

este o integrală primă a sistemului, deoarece este constantă pe traiectorii.

Amplificăm acum prima ecuaţie a sistemului cu x_1, a doua cu x_2 şi a treia cu x_3 şi le adunăm. Rezultă

$$x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = 0,$$

de unde obţinem a doua integrală primă:

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c \text{ (const.)} \tag{4}$$

Încercăm acum să schiţăm portretul fazelor, adică să determinăm traiectoriile sistemului.

Punctele staţionare sunt date de sistemul algebric liniar omogen

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

care este compatibil nedeterminat cu soluţiile de forma $x = (x_1, x_2, x_3) = (\lambda, \lambda, \lambda)$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

Să alegem un punct nestaţionar $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, de exemplu $\xi = (0, 0, 2)$. Notăm cu $x = x(t)$ soluţia care la momentul $t = 0$ trece prin ξ. Din relaţia (3) deducem

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 0 + 0 + 2 = 2,$$

pentru orice t, iar din (4)

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4,$$

pentru orice t. Deducem de aici că traiectoria acestei soluţii se află pe curba de intersecţie dintre planul

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

şi sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4,$$

care este un cerc. Acest cerc este parcurs în întregime deoarece are lungime finită şi în vecinătatea lui vectorul viteză este nenul, având prin urmare un minim strict pozitiv. Deducem de aici că mişcarea punctului curent pe traiectorie este periodică.

Este uşor de văzut că toate celelalte traiectorii nestaţionare sunt cercuri aflate în plane perpendiculare pe dreapta de ecuaţie $x = \lambda(1, 1, 1)$, centrate în punctul de intersecţie dintre planul cercului şi această dreaptă.

Începem acum studiul sistemului autonom oarecare

$$x' = f(x), \tag{5}$$

cu $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definiţia 1 Fie $\Omega_0 \subset \Omega$ nevidă şi deschisă. Aplicaţia $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrală primă* a sistemului (5) pe Ω_0 dacă

(i) U este de clasă C^1 pe Ω_0 ;

(ii) $\nabla U(\xi) = 0$ are numai zerouri izolate $\xi \in \Omega_0$;

(iii) oricare ar fi o soluţie $x : I \to \Omega_0$ a sistemului (5) există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$U(x(t)) = c$$
pentru orice $t \in I$.

Observaţie. În condiţia (ii) am notat cu $\nabla U(\xi)$ *gradientul* câmpului scalar $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ calculat într-un punct $\xi \in \Omega_0$, adică vectorul

$$\nabla U(\xi) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(\xi), \frac{\partial U}{\partial x_2}(\xi), \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}(\xi) \right).$$

Condiţia (ii) asigură faptul că aplicaţia U nu este constantă pe nici o submulţime deschisă din Ω_0.

Teorema 1. *Fie $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, neconstantă pe Ω_0. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca U să fi o integrală primă pentru (5) este ca*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\xi) f_i(\xi) = 0 \tag{6}$$

pentru orice $\xi \in \Omega_0$.

Observaţie. Dacă notăm cu $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ produsul scalar uzual al vectorilor $u, v \in \mathbb{R}^n$, relaţia (6) se scrie sub forma

$$\langle \nabla U(\xi), f(\xi)\rangle = 0$$

şi are următoarea interpretare geometrică remarcabilă: apliaţia U este o integrală primă dacă şi numai dacă vectorii $\nabla U(x)$ şi $f(x)$ sunt ortogonali, pentru orice $x \in \Omega_0$.

Mai mult, ţinând cont că într-un punct $\xi \in \Omega_0$ în care $\nabla U(\xi) \neq 0$ ecuaţia $U(x) = c = U(\xi)$ defineşte local o hipersuprafaţă de clasă C^1 pentru care normala în ξ are direcţia dată de vectorul $\nabla U(\xi)$, obţinem următoarea caracterizare: *aplicaţia U este o integrală primă dacă şi numai dacă în orice $\xi \in \Omega_0$ vectorul viteză $f(\xi)$ este tangent la hipersuprafaţa de nivel constant $U(x) = U(\xi)$.*

Demonstraţie. Fie $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi $x = x(t)$ o soluţie oarecare a sistemului (5). Avem următoarea formulă de derivare:

$$\frac{d}{dt}(U(x(t))) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)) \frac{dx_i}{dt}(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x(t)) f_i(x(t)) = \langle \nabla U(x(t)), f(x(t))\rangle.$$

Necesitatea condiţiei (6). Fie U o integrală primă şi fie $\xi \in \Omega_0$ fixat arbitrar. Considerăm $x : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ o soluţie care trece la un moment dat $t = a$ prin ξ şi, deoarece $U(x(t))$ =const., avem

$$0 = \frac{d}{dt}(U(x(t))) = \langle \nabla U(x(t)), f(x(t))\rangle,$$

pentru orice $t \in (\alpha, \beta)$. De aici, pentru $t = a$, obţinem relaţia (6).

Suficienţa condiţiei (6). Fie $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 care satisface condiţia (6) şi fie $x : (\alpha, \beta) \to \Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ o soluţie orecare. Din

$$\frac{d}{dt}(U(x(t))) = \langle \nabla U(x(t)), f(x(t))\rangle = 0$$

pentru orice $t \in (\alpha, \beta)$ rezultă $U(x(t)$ =const., şi astfel demonstraţia este încheiată.

Revenind la exemplul (2), pentru orice $c > 0$, suprafaţa de nivel constant c pentru integrala primă

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

este sfera de ecuaţie

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c.$$

Normala într-un punct $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ aflat pe sferă are direcţia

$$\nabla U_2(\xi) = (2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3) = 2\xi,$$

adică direcţia razei $O\xi$, aşa cum ne aşteptam, şi este ortogonală pe vectorul viteză $f(\xi) = (\xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1, \xi_1 - \xi_2)$. Intr-adevăr

$$\langle \nabla U_2(\xi), f(\xi) \rangle = 2\xi_1(\xi_2 - \xi_3) + 2\xi_2(\xi_3 - \xi_3) + 2\xi_3(\xi_1 - \xi_2) = 0.$$

Încercăm acum să mai găsim o integrală primă pentru exemplul (2). Amplificând convenabil ecuaţiile şi adunând rezultatele obţinem, de exemplu,

$$x_2 x_1' + x_1 x_2' + x_3 x_2' + x_2 x_3' + x_1 x_3' + x_3 x_1' = 0,$$

de unde deducem că şi aplicaţia

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$

este o integrală primă pentru (2). Observăm totuşi că

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} U_1(x_1, x_2, x_3)^2 - U_2(x_1, x_2, x_3),$$

adică U_3 este de forma

$$U_3(x) = F(U_1(x), U_2(x)), \tag{7}$$

şi se poate deduce direct din această relaţie că U_3 este constantă pe traiectoriile sistemului, deoarece atât U_1 cât şi U_2 au această proprietate.

Este clar acum că sistemul (2) admite o infinitate de integrale prime de forma (7), dar acestea nu duc nici o informaţie nouă despre soluţiile sistemului.

Cum putem afla dacă există sau nu o *legătură funcţională* de forma (7) între trei aplicaţii U_1, U_2 şi U_3 oarecare? În cazul funcţiilor de clasă C^1 răspunsul este sugerat de următoarea observaţie: dacă are loc (7), atunci, pentru fiecare $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(U_1(x), U_2(x)) \frac{\partial U_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial F}{\partial u_2}(U_1(x), U_2(x)) \frac{\partial U_2}{\partial x_i}(x)$$

adică

$$\nabla U_3(x) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(U_1(x), U_2(x)) \nabla U_1(x) + \frac{\partial F}{\partial u_2}(U_1(x), U_2(x)) \nabla U_2(x).$$

Aşadar, dacă $U_3(x) = F(U_1(x), U_2(x))$ pentru orice $x \in \Omega$, atunci vectorul $\nabla U_3(x)$ este o combinaţie liniară a vectorilor $\nabla U_1(x)$ şi $\nabla U_2(x)$.

Suntem conduşi la următoarea definiţie:

Definiţia 2 Aplicaţiile $U_1, U_2, \ldots, U_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 se numesc *funcţional independente* într-un punct $\xi \in \Omega$ dacă vectorii

$$\nabla U_1(\xi), \nabla U_2(\xi), \ldots, \nabla U_k(\xi),$$

sunt liniar independenţi sau, altfel spus, dacă

$$\operatorname{rang} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(\xi) \right)_{k \times n} = k.$$

Observaţie. Minorul care dă rangul matricei de mai sus este diferit de zero în ξ şi, fiind o funcţie continuă, el va fi diferit de zero pe o vecinătate a lui ξ, şi astfel, dacă aplicaţiile U_i sunt funcţional indendente într-un punct ξ, ele vor fi funcţional independente pe o întreagă vecinătate a lui ξ.

Teorema 2. *În vecinătatea oricărui punct nestaţionar al sistemului* (5) *există exact* $n-1$ *integrale prime funcţional independente în acel punct.*

Demonstraţie. Partea I, există cel mult $n-1$ integrale prime funcţional independente. Fie $\xi \in \Omega$ astfel încât pe o vecinătate a sa să fie definite integralele prime U_1, U_2,..., U_n, funcţional independente în ξ. In acest caz sistemul de n vectori

$$\nabla U_1(\xi), \nabla U_2(\xi), \dots, \nabla U_n(\xi),$$

este liniar independent şi, prin urmare, formează o bază în $\mathbb{R}^n$.

Deoarece U_1, U_2,..., U_n sunt integrale prime, din Teorema 1 urmează că vectorul $f(\xi)$ este ortogonal pe fiecare vector din această bază şi, prin urmare, este vectorul nul, adică ξ este un punct staţionar.

Am arătat că în vecinătatea unui punct nestaţionar există cel mult $n-1$ integrale prime funcţional independente în acel punct.

Partea a II-a, există $n-1$ integrale prime funcţional independente. Fără demonstraţie!

Teorema 3. *Fie* $\xi \in \Omega$ *un punct nestaţionar şi fie* $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ *un sistem de* $n-1$ *integrale prime funcţional independente în* ξ. *Atunci, oricare altă integrală primă* V *a sistemului* (5) *definită în vecinătatea lui* ξ *are forma*

$$V(x) = F(U_1(x), U_2(x), \dots, U_{n-1}(x)), \tag{8}$$

cu F *o funcţie de clasă* C^1 *definită pe o vecinătate din spaţiul* $\mathbb{R}^{n-1}$ *a punctului* $(U_1(\xi), U_2(\xi), \dots, U_{n-1}(\xi))$.

Demonstraţie. Etapa I, forma soluţiei. Fie V şi U_1, U_2, ..., U_{n-1} cele n integrale prime din ipoteza teoremei. Presupunem că există F astfel încât are loc relaţia (8) şi dorim să aflăm forma acestei funcţii. Dacă transformarea

$$\begin{cases} y_1 = U_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = U_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_{n-1} = U_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \tag{9}$$

ar fi inversabilă,

$$y = \tilde{U}(x) \ \Leftrightarrow x = \tilde{W}(y)$$

atunci din (8) ar rezulta următoarea formă pentru funcţia F:

$$F(y) = V(\tilde{W}(y)).$$

Dificultatea constă în faptul că inversa transformării (9), dacă există, nu poate fi de clasă C^1, pentru că în acest caz transformarea ar fi un difeomorfism de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^{n-1}$, iar difeomorfismele păstrează dimensiunea spaţiilor de lucru.

Vom completa transformarea (9) cu încă o ecuaţie de forma

$$y_n = U_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

astfel încât transformarea obţinută să devină un difeomorfism de clasă C^1 pe o vecinătate a lui ξ. Acest lucru este todeauna posibil în ipotezele teoremei, deoarece $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ sunt funcţional independente în ξ, şi prin urmare

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}(\xi)\right)_{(n-1)\times n} = n-1.$$

Renumerotând eventual variabilele x_i, putem presupune fără să restrângem generalitatea că minorul format din primele $n-1$ coloane în matricea de mai sus este nenul. În acest caz, definim

$$U_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Cu această alegere matricea jacobiană a transformării completate este

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial U_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial U_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_n}(x) \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

şi are, în mod evident, determinantul nenul în $x = \xi$. Aplicăm Teorema de inversare locală şi obţinem că, local, exită aplicaţiile W_1, W_2, $\ldots$, W_n de clasă C^1 astfel încât să aibă loc echivalenţa

$$\begin{cases} y_1 = U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = U_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ y_n = U_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = W_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ x_2 = W_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ x_n = W_n(y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{10}$$

pentru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dintr-o vecinătate a lui ξ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dintr-o vecinătate a lui $\eta = U(\xi) = (U_1(\xi), U_2(\xi), \ldots, U_n(\xi))$.

Definim, în sfârşit, funcţia $\tilde{F}$ de clasă C^1 prin

$$\tilde{F}(y) = V(W_1(y), W_2(y), \ldots, W_n(y)) \tag{11}$$

şi atunci avem egalitatea

$$V(x) = \tilde{F}(U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x)) \tag{12}$$

pentru orice x dintr-o vecinătate a lui ξ.

Etapa a II-a, verificarea formei găsite. Fie $\tilde{F}$ funcţia definită de relaţia (11). Comparând relaţia (12) cu relaţia (8), observăm că pentru a încheia demonstraţia teoremei mai trebuie să arătăm doar că $\tilde{F}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nu depinde de ultimul argument, y_n. Mai precis, vom arăta că

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_n} = 0.$$

Derivăm şi obţinem

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_n}(y) = \frac{\partial}{\partial y_n} V(W_1(y), W_2(y), \ldots, W_n(y)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(W(y)) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y).$$

Acum folosim faptul că integralele prime U_1, U_2, ..., U_{n-1} sunt funcţional independente în ξ, deci funcţional independente în orice x dintr-o vecinătate a lui ξ. Din Teorema 2 rezultă că sistemul format din integralele prime U_1, U_2, ..., U_{n-1} şi V este funcţional dependent în orice x, deci vectorii

$$\nabla U_1(x), \nabla U_2(x), \ldots \nabla U_{n-1}(x), \nabla V(x),$$

sunt liniar dependenţi iar primii $n-1$ sunt liniar independenţi. De aici urmează că există funcţiile α_j astfel încât

$$\nabla V(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(x) \nabla U_j(x),$$

adică

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(x) \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(x)$$

pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$.

Revenim la derivarea lui $\tilde{F}$ în raport cu y_n şi avem mai departe:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_n}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(W(y)) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(W(y)) \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(W(y)) \right) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(W(y)) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(W(y)) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y) \right) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(W(y)) \frac{\partial y_j}{\partial y_n} = 0.$$

Aici am folosit faptul că, din echivalenţa (10), avem

$$y_j = U_j(W_1(y), W_2(y), \ldots, W_n(y))$$

pentru orice $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dintr-o mulţime deschisă, de unde, derivând în raport cu y_n obţinem că

$$\frac{\partial y_j}{\partial y_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(W(y)) \frac{\partial W_i}{\partial y_n}(y) = 0,$$

pentru fiecare $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Observaţie. Fie $\xi \in \Omega$ un punct nestaţionar pentru sistemul (5) şi fie U_1, U_2, $\ldots$, U_{n-1} cele $n-1$ integrale prime funcţional independente în ξ a căror existenţa este asigurată de Teorema 2. Considerând difeomorfismul (10) ca fiind o schimbare de variabile, sistemul iniţial $x' = f(x)$ se transformă în sistemul $y' = g(y)$ de forma

$$\begin{cases} y_1' = 0 \\ y_2' = 0 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = 0 \\ y_n' = g_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

cu $g_n \neq 0$ pe o vecinătate a punctului $\eta = U(\xi)$. Acest sistem are soluţia generală de forma

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_2 \\ \ldots \\ y_{n-1} = c_{n-1} \\ y_n = G(t, c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{cases}$$

iar familia traiectoriilor acestuia este un fascicol de segmente paralele cu axa Oy_n care trec prin toate punctele unei mulţimi deschise din hiperplanul de ecuaţie $y_n = \eta_n$.

În concluzie, în vecinătatea unui punct nestaţionar, familia traiectoriilor poate fi *îndreptată* în mod continuu şi neted, adică poate fi transformată printr-un difeomorfism de clasă C^1 într-o familie de segmente paralele.

Observaţie. Dacă se cunosc efectiv k integrale prime independente într-un $\xi \in \Omega$, fie acestea $U_1, U_2, \ldots, U_k$, atunci pe o vecinătate a lui ξ dimensiunea sistemului poate fi redusă cu k unităţi.

Justificarea se bazează pe Teorema funcţiilor implicite: interpretăm cele k relaţii integrale constante ca fiind un sistem algebric,

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 \\ U_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2 \\ \ldots \\ U_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_k, \end{cases}$$

şi, deoarece matricea jacobiană ataşată are rangul k, cele k variabile corespunzătoare minorului care dă rangul pot fi explicitate în funcţie de celelalte $n-k$ şi astfel acestea fi eliminate din sistemul diferenţial iniţial.

Observaţie. Pentru ecuaţii diferenţiale autonome de ordin n de forma

$$y^{(n)} = g(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

noţiunea de integrală primă se defineşte prin intermediul sistemului de n ecuaţii de ordinul întâi obţinut prin transformarea

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

şi, prin urmare, aplicaţia $U : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrală primă* a ecuaţiei date dacă este de clasă C^1 şi, pentru orice soluţie $y = y(t)$ a ecuaţiei,

$$U(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) = \text{const.}$$

Exemplu. Să considerăm mişcarea unui punct material M de masă m, care la momentul t are poziţia $x(t) \in \mathbb{R}^3$, supus unui câmp de forţe F care derivă dintr-un potenţial, adică pentru care există un câmp scalar $U : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$F = -\nabla U(x).$$

În acest caz, din principiul forţei stabilit de Newton, urmează că mişcarea lui M este descrisă de ecuaţia vectorială de ordinul doi

$$mx'' = -\nabla U(x), \tag{13}$$

care este echivalentă cu un sistem format din trei ecuaţii scalare de ordin doi şi, în final, cu un sistem de şase ecuaţii scalare de ordinul întâi. Amplificăm ecuaţia (13) prin produs scalar cu x' şi obţinem

$$0 = m\langle x''(t), x'(t)\rangle + \langle \nabla U(x(t)), x'(t)\rangle =$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\langle x'(t), x'(t)\rangle + \frac{d}{dt}U(x(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|x'(t)|^2 + U(x(t))\right),$$

şi astfel găsim integrala primă

$$\frac{1}{2}m|x'(t)|^2 + U(x(t)) = \text{const.}$$

care arată că energia mecanică totală, egală cu suma dintre energia cinetică şi energia potenţială, se conservă pe timpul mişcării.