C4 Noţiuni de bază (I)

0) Principii de programare: sume şi produse. (vezi pagina următoare)

1) clasificarea datelor:

```
Date<->cuvinte binare
    - numere
        - cardinale (cantitati)
            - intregi
                - char
                - int
            - flotante
                - float
                -double
        - ordinale (adrese)
            -pointeri (C, C++)
            -referinte (C++, Java, C#)
    - coduri
        - codificari de caractere
            - ASCII (pe 8b, doua cifre hexa)
            - UNICODE (pe 16b, patru cifre hexa)
        - codificari de microinstructiuni

Date
    -  constante
        - literali
            -numerici (nu necesita alocare)
            -siruri de caractere (alocare speciala)
        - variabile nemodificabile (C++)
    -  variabile
        - alocate static (la compilare)
        - alocate dinamic (la rulare)

Date    - simple
        - compuse - tablouri, structuri, obiecte
```

2) tipuri aritmetice

3) declaraţii de variabile simple

4) declaraţii de tablouri

0) Principii de programare: sume şi produse.

(A) Verificaţi numeric egalităţile

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}; \tag{1}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}; \tag{3}$$

Observaţie.

$$s=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$$
$$\overset{\text{def}}{=}\lim_n\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\overset{\text{not}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Rezolvare. Se aplică principiul de acumulare (pentru sume) şi de amplificare (pentru produse).

Indicaţie. Folosiţi simbolul de sumare. De exemplu relaţia (3) se scrie

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots\overset{\text{not}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\overset{\text{def}}{=}\lim_n\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

```
#include<iostream>
using namespace std;
double suma3(int n){
    double s = 0, p = 1;
    for (int k = 1; k <= n; k++){
        s += p / (k*k);
        p *= -1;
    }
    return s;
}

int main(){
    double pi = 4.0 * atan(1.0);
    cout.precision(12);
    cout << "s=" << suma3(1000) << endl;
    cout << "s=" << pi*pi / 12.0 << endl;
    return 0;
}
```

Problema din Basel. Demonstraţi egalitatea

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6};$$

Rezolvare. Vezi `https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem`.

Problemă de admitere la Facultatea de Matematică. Ştiind că $s=\frac{\pi^2}{6}$ să se calculeze

$$t=\lim_n\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

Rezolvare. Calcul formal:

$$s=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=$$

$$=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{4\cdot1^2}+\frac{1}{4\cdot2^2}+\frac{1}{4\cdot3^2}+\cdots\right)=$$

$$=t+\frac{1}{4}\,s.$$

Prin urmare

$$t=\frac{3}{4}\,s=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Exerciţiu. Calculaţi

$$w=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots$$

Rezolvare. Calcul formal:

$$w=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)=$$

$$=t-\frac{1}{4}\,s=\frac{3}{4}\,s-\frac{1}{4}\,s=\frac{1}{2}\,s=\frac{\pi^2}{12}.$$

(B) Verificaţi numeric egalitatea

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots = \frac{2}{\pi}; \tag{4}$$

Rezolvare. Notăm cu x_n numărătorii factorilor produsului de mai sus. Avem relaţiile

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
x_1 &= \sqrt{2} = \sqrt{2+x_0}\\
x_2 &= \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1}\\
x_3 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+x_2}\\
&\cdots\\
x_n &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = \sqrt{2+x_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Notăm cu p_n produsul primilor n factori din membrul stâng al egalităţii (4). Avem

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 1\\
p_1 &= \frac{x_1}{2} = p_0 \cdot \frac{x_1}{2}\\
p_2 &= \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2} = p_1 \cdot \frac{x_2}{2}\\
p_3 &= \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2} \cdot \frac{x_3}{2} = p_2 \cdot \frac{x_3}{2}\\
&\cdots\\
p_n &= \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2} \cdot \frac{x_3}{2} \cdots \frac{x_n}{2} = p_{n-1} \cdot \frac{x_n}{2}
\end{aligned}
$$

Prin urmare, avem de evaluat numeric şirurile recurente

$$\begin{cases} x_n = \sqrt{2+x_{n-1}} \\ p_n = p_{n-1} \cdot \frac{x_n}{2} \end{cases}$$

cu datele iniţiale

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ p_0 = 1. \end{cases}$$

```
double prod(int n){
    double x = 0, p = 1;
    for (int k = 1; k <= n; k++){
        x = sqrt(2.0 + x);
        p *= x / 2.0;
    }
    return p;
}
```

Problemă. Justificaţi următoarea egalitate

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

în care apar n radicali suprapuşi.

Rezolvare. Din formula

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

rezultă că, pentru orice $\alpha \in [0, \pi]$, avem

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}$$

Plecăm de la

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

şi alegem pe rând $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$ în formula de mai sus. Obţinem

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{8}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\cdots$$

Problemă. Justificaţi egalitatea

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots, \quad x \neq 0; \tag{5}$$

Rezolvare. Avem relaţiile:

$$\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} =$$

$$= 2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2^2} = \cdots = 2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

Prin urmare

$$\lim_n \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \lim_n \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x},$$

deoarece

$$\lim_n 2^n\sin\frac{x}{2^n} = x\lim_n\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = x.$$

Observaţie. Fixând $x = \frac{\pi}{2}$ în (5) obţinem demonstraţia egalităţii (4).