

Integrala în complex

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție continuă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$. Ne punem problema existenței unei *primitive* a lui f , adică a unei funcții olomorfe $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ astfel încât $F' = f$.

În cazul funcțiilor reale, orice funcție continuă pe un interval are primitive, iar acestea sunt date de formula Leibniz-Newton

$$F(u) = F(u_0) + \int_{u_0}^u f(z) dz.$$

Justificarea acestei formule este imediată: dacă $F' = f$, scriem că pe fiecare subinterval al unei diviziuni $\Delta : u_0 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = u$ are loc aproximarea

$$F(z_k) - F(z_{k-1}) \approx F'(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

și sumăm aceste relații. În stânga avem o sumă telescopică iar în dreapta o sumă Riemann:

$$F(u) - F(u_0) = \sum_{i=1}^n F(z_k) - F(z_{k-1}) \approx \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sigma_{\Delta}(f, \zeta).$$

Aceste relații sunt valabile și în cazul funcțiilor complexe, și urmând această idee am putea încerca să definim direct “integrala de la a la b ” a lui f ca limita sumelor $\sigma_{\Delta}(f, \zeta)$, pentru $\nu(\Delta) = \max |z_k - z_{k-1}| \rightarrow 0$, oricum am alege nodurile $a = z_0, z_1, \dots, z_n = b$ în $D \subset \mathbb{C}$ și oricum am alege “punctele intermediare” ζ_k . Totuși, această libertate totală în alegerea punctelor z_k ar restrânge nepermis de mult clasa funcțiilor integrabile; se poate arăta că nici măcar funcția $f(z) = z$, de exemplu, nu ar fi integrabilă.¹

Problema se rezolvă astfel: definim mai întâi integrala lui f pe o curbă $\gamma \subset \mathbb{C}$, considerând numai diviziuni $\Delta \subset \gamma$, și apoi arătăm că f are primitive dacă și numai dacă valoarea acestei integrale este aceeași pe toate curbele dintre a și b , caz în care are loc formula Leibniz-Newton.

Această cale este ușor de urmat, deoarece integrala lui f pe o curbă se definește ca o integrală Riemann-Stieltjes care se reduce imediat la o pereche de integrale curbilinii de specia a II-a în \mathbb{R}^2 , iar acest tip de integrală este deja studiat.

¹Justificare: pentru aceeași diviziune Δ_n , dacă alegem întâi $\zeta_k = z_k, \forall k$, și apoi $\tilde{\zeta}_k = z_{k-1}, \forall k$, diferența sumelor Riemann corespunzătoare va fi

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \zeta) - \sigma_{\Delta_n}(f, \tilde{\zeta}) = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1})^2.$$

Pentru $a = 0$ și $b = 1$, de exemplu, se pot alege chiar pe axa reală punctele $a = z_0, z_1, \dots, z_n = b$ astfel încât și $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq |z_k - z_{k-1}| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}, \forall k$. Avem $\nu(\Delta_n) \rightarrow 0$ și $\sigma_{\Delta_n}(f, \zeta) - \sigma_{\Delta_n}(f, \tilde{\zeta}) \geq 1$.

§1. Integrale pentru funcții reale

Amintim aici câteva noțiuni și rezultate de calcul integral pentru funcții reale necesare pentru definirea integralei complexe.

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție dată. Prin *diviziune* a intervalului $[a, b]$ vom înțelege o mulțime finită $\Delta_n = \{t_k, k = 0, 1, \dots, n\} \subset [a, b]$, supusă la condiția esențială: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Vom nota *creșterile argumentului* cu $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ și cu $\Delta f(t_k) = f(t_k) - f(t_{k-1})$ *creșterile funcției* (chiar dacă acestea din urmă pot fi negative). Prin *norma* diviziunii înțelegem

$$\nu(\Delta_n) = \max_k \Delta t_k.$$

Notăm cu $\tau = \{\tau_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ o *alegere a punctelor intermediare* cu $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, pentru $\forall k$.

§1.1. Integrala Riemann. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție dată. Dacă f este pozitivă, atunci *suma Riemann*

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \tau) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta t_k$$

aproximează aria cuprinsă între graficul lui f și axa orizontală, deoarece ea reprezintă suma ariilor fâșiilor dreptunghiulare $[t_{k-1}, t_k] \times [0, f(\tau_k)]$, determinate de o diviziune Δ_n și o alegere τ a punctelor intermediare. Intuitiv, aproximarea este cu atât mai bună cu cât norma diviziunii este mai mică. Suntem conduși astfel la următoarea definiție:

Definiție. *Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă există numărul $I \in \mathbb{R}$, notat $I = \int_a^b f(t)dt$, astfel încât:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ a. i. } \forall \Delta_n \text{ cu } \nu(\Delta_n) < \eta, |\sigma_{\Delta_n}(f, \tau) - I| < \varepsilon, \forall \tau.$$

Dacă $I = \int_a^b f(t)dt$, se spune că sumele Riemann *au limita I* când norma diviziunilor tinde la 0, independent de modul de alegere a punctelor intermediare.

Se arată că o funcție este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă este mărginită și continuă aproape peste tot în $[a, b]$ (*criteriul lui Lebesgue*). Consecință: orice funcție *continuă pe porțiuni*, adică continuă pe $[a, b]$ cu excepția unui număr finit de puncte, este integrabilă. Proprietățile integralei Riemann (liniaritate în raport cu integrandul, aditivitate în raport cu intervalul, etc.) sunt binecunoscute și nu le mai amintim aici.

Este clar că pentru o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = u(t) + iv(t)$, integrala Riemann se definește ca limită a sumelor

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \tau) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta t_k = \sum_{k=1}^n u(\tau_k) \Delta t_k + i \sum_{k=1}^n v(\tau_k) \Delta t_k,$$

iar f este integrabilă Riemann dacă și numai dacă u și v sunt integrabile, caz în care

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (u(t) + iv(t))dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

§1.2. Integrala Riemann-Stieltjes. O generalizare imediată a integralei Riemann reale se obține considerând acum două funcții $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și înlocuind sumele $\sigma_{\Delta_n}(f, \tau)$ din definiția integralei Riemann din paragraful precedent cu *sume Riemann-Stieltjes*

$$\sigma_{\Delta_n}(f, g, \tau) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta g(t_k) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k) (g(t_k) - g(t_{k-1})).$$

Obținem astfel definiția *integralei Riemann-Stieltjes*, notată

$$I = \int_a^b f dg = \int_a^b f(t) dg(t).$$

Această integrală are multe proprietăți asemănătoare integralei Riemann, dar și unele specifice datorate considerării funcției g .

Continuitatea funcțiilor f și g nu asigură existența integralei $I = \int_a^b f dg$, criteriul uzual fiind următorul: orice funcție f continuă este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu orice funcție g cu variație mărginită.

Amintim că o funcție $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este cu *variație mărginită* dacă există $M \geq 0$ astfel încât

$$\sum_k |\Delta g(t_k)| \leq M,$$

pentru orice diviziune Δ_n a intervalului $[a, b]$. Are loc următoarea caracterizare: o funcție $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este cu variație mărginită dacă și numai dacă poate fi scrisă ca diferența a două funcții monotone de același sens.

Este ușor de văzut că orice funcție g lipschitziană este cu variație mărginită, în particular funcțiile de clasă C^1 , caz în care integrala Riemann-Stieltjes se reduce la o integrală Riemann obișnuită

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t) g'(t) dt.$$

§1.3. Curbe rectificabile. Orice funcție continuă $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ este *legea de mișcare* a unui *punct curent* $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Două legi de mișcare, $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2$, sunt echivalente dacă punctele lor curente trec prin aceleași locuri, în aceeași ordine și tot de atâtea ori, mai precis: dacă există o schimbare de argument $t = \varphi(s)$, $s \in [a_2, b_2]$, $t \in [a_1, b_1]$, bijectivă, continuă și strict crescătoare, astfel încât $\gamma_1(\varphi(s)) = \gamma_2(s)$, pentru orice $s \in [a_2, b_2]$.

Clasa de echivalență a unei legi de mișcare $\gamma = \gamma(t)$ o numim *curbă* (orientată) în plan, și o vom nota, de obicei, tot cu γ . Spunem că $\gamma = \gamma(t)$ este o *parametrizare*, sau o *parcursare* a curbei γ . Uneori, când nu există pericolul confuziei, notăm tot cu γ și *suportul* curbei γ , dat de *traectoria* oricărei parametrizări $\gamma = \gamma(t)$ a curbei, adică imaginea aplicației $t \rightarrow \gamma(t)$, și scriem

$\gamma \subset \mathbb{R}^2$. Atenție, două curbe distincte pot avea același suport, de exemplu, curba γ^- dată de parametrizarea $\gamma^-(t) = \gamma(-t)$ este distinctă de curba γ dar are aceeași traiectorie ca γ , parcursă însă în sens invers. Vom spune că γ^- este *curba de sens opus* lui γ .

Capetele $A = \gamma(a)$ și $B = \gamma(b)$ nu depind de parametrizarea curbei, spunem că A este punctul de plecare iar B punctul de sosire. Egalitatea $\gamma(a) = \gamma(b)$ definește o *curbă închisă*.

Numai continuitatea parametrizării $\gamma = \gamma(t)$ nu asigură *uni-dimensionalitatea* curbei γ . Există exemple celebre de curbe care trec prin toate punctele unui pătrat, deci a căror mulțime suport are arie nenulă, dintre aceste exemple unele vor fi prezentate într-un curs viitor: *curba lui Peano*, *curba lui Lebesgue* și *curba lui Hilbert*.

În încercarea de a înlătura astfel de comportări stranii, vom cere ca $\gamma = \gamma(t)$ să fie un *homeomorfism*, adică o bijecție bicontinuă, caz în care spunem că γ este o *curbă simplă*, o curbă fără autointersecții. În general, imaginea în \mathbb{R}^2 a unui interval $[a, b]$ printr-un homeomorfism se numește *arc Jordan*. Orice arc Jordan este suportul a două curbe simple, corespunzătoare celor două sensuri de parcurs.

Imaginea homeomorfă a unui cerc se numește *curbă Jordan*. Dacă pe o curbă Jordan se fixează un punct A , există exact două curbe simple și închise care pleacă din A și ajung tot în A , corespunzătoare celor două sensuri de parcurs.

Teorema lui Jordan. *Orice curbă simplă și închisă separă planul în două domenii și este frontiera lor comună.*

Acest enunț trebuie înțeles astfel: dacă $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ este o curbă Jordan, atunci mulțimea $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ este compusă din exact două componente conexe, una mărginită, numită *domeniul interior al curbei* și alta nemărginită, *domeniul exterior*, iar γ este frontiera fiecărui domeniu.

Fie $\gamma = \gamma(t)$ o parametrizare a unei curbe γ . Lungimea parcursului total al punctului curent poate fi aproximată cu suma

$$\ell_{\Delta_n}(\gamma) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x(t_k))^2 + (\Delta y(t_k))^2},$$

în care Δ_n este o diviziune a lui $[a, b]$ cu norma suficient de mică, această sumă fiind egală cu lungimea liniei poligonale cu vârfurile $\gamma(t_k)$, luate în ordinea de parcurs.

Curba γ se numește *rectificabilă* dacă admite o parcurgere continuă pentru care sumele $\ell_{\Delta_n}(\gamma)$ sunt mărginite, caz în care *lungimea* lui γ ,

$$\ell(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \ell_{\Delta_n}(\gamma) < +\infty.$$

Se arată că definiția lui $\ell(\gamma)$ nu depinde de parametrizarea aleasă.

Criteriul lui Jordan. *Curba $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ este rectificabilă dacă și numai dacă funcțiile componente $x = x(t)$ și $y = y(t)$ sunt cu variație mărginită.*

Consecință: orice *curbă netedă pe porțiuni*, adică dată de o parametrizare γ continuă pe tot intervalul $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) cu excepția unui număr finit de puncte, este rectificabilă. Mai mult, în acest caz avem

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Exemplu. Fie $A = (-1, -1)$ și $B = (1, 1)$. Pe segmentul AB din plan vom defini următoarele parcurgeri de la A la B :

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, t), \\ \gamma_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (t^3, t^3), \\ \gamma_3 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (\sin t, \sin t)\end{aligned}$$

Este evident că parcurgerile γ_1 și γ_2 sunt echivalente, ele definesc curba “segmentul AB parcurs o singură dată de la A la B ”, a cărei lungime poate fi calculată așa

$$\int_{-1}^1 \sqrt{t'^2 + t'^2} dt = 2\sqrt{2},$$

sau așa

$$\int_{-1}^1 \sqrt{(t^3)'^2 + (t^3)'^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{18t^4} dt = 3 \int_{-1}^1 t^2 dt = 2\sqrt{2},$$

în timp ce γ_3 este o parcurgere a curbei “segmentul AB parcurs în ordinea $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B$ ”, și care are lungimea

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t + \cos^2 t} dt = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} |\cos t| dt = 6\sqrt{2}.$$

În final, atragem atenția că, deși este frontiera unui domeniu mărginit, o curbă Jordan poate să nu aibe lungime finită, adică să nu fie rectificabilă, mai mult, există curbe Jordan care au arie nenulă, un exemplu celebru fiind curba lui Osgood.

§1.4. Integrala curbilinie de specia a II-a. În mecanică, pentru calcularea energiei necesare deplasării unui punct M sub acțiunea unei forțe \vec{F} , s-a introdus noțiunea de *lucru mecanic*. Atunci când M parcurge un segment M_1M_2 sub acțiunea unei forțe constante, lucrul mecanic L este egal cu *produsul scalar* dintre vectorul \vec{F} și vectorul deplasare $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$,

$$L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \alpha.$$

În cazul general, când M parcurge o curbă γ din plan sub acțiunea unui câmp de forțe variabil, lucrul mecanic total se aproximează considerând pe curbă o succesiune finită de puncte, $\Delta = \{M_k\}$, cu norma $\nu(\Delta) = \max \|M_{k-1}M_k\|$ suficient de mică, și înlocuind deplasarea de pe fiecare arc cu una rectilinie pe segmentul corespunător, efectuată sub acțiunea unei forțe constante \vec{F}_k , egală cu

valoarea câmpului \vec{F} într-un punct oarecare de pe acel arc. Notând câmpul de forțe cu

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$$

și vectorul de poziție al punctului $M_k(x_k, y_k)$ cu

$$\vec{r}_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j},$$

obținem aproximarea

$$L(\gamma) \approx \sum_{k=1}^n \Delta L_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^n (P_k \Delta x_k + Q_k \Delta y_k).$$

Dacă deplasarea lui M are legea orară $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, cu $t \in [a, b]$, atunci orice diviziune $\Delta_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ a intervalului $[a, b]$ determină o diviziune $\{M_k(x(t_k), y(t_k))\}$ pe curba γ , iar oricărei alegeri de puncte intermediare $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ îi corespunde o alegere $\vec{F}_k = \vec{F}(x(\tau_k), y(\tau_k))$ pentru câmpul de forțe. Observăm că sumele

$$\sum_{k=1}^n P_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x(t_k)$$

și

$$\sum_{k=1}^n Q_k \Delta y_k = \sum_{k=1}^n Q(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta y(t_k)$$

devin sume Riemann-Stieltjes pentru integralele

$$\int_a^b P(x(t), y(t)) dx(t) \quad \text{și} \quad \int_a^b Q(x(t), y(t)) dy(t).$$

Suntem astfel conduși spre următoarea

Definiție. Fie $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ un câmp vectorial definit pe un domeniu D din \mathbb{R}^2 , cu P și Q continue, și fie $\gamma \subset D$ o curbă dată de parametrizarea $\vec{r} = \vec{r}(t)$, cu $t \in [a, b]$. Prin integrala curbilinie (de specia a doua)

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{not}}{=} \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

înțelegem următoarea sumă a două integrale Riemann-Stieltjes

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b P(x(t), y(t)) dx(t) + \int_a^b Q(x(t), y(t)) dy(t).$$

Pentru un câmp vectorial oarecare \vec{F} , cantitatea $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ este numită *circulația* lui \vec{F} pe γ , și, dacă \vec{F} este o forță, este egală cu lucrul mecanic efectuat pe γ .

În studiul integralei curbilinii, pentru a nu mai face referire la câmpuri vectoriale, se preferă să se asocieze integrala curbilinie direct unei *forme diferențiale*, adică unei expresii de forma

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

definind

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{not}}{=} \int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b P(x(t), y(t))dx(t) + \int_a^b Q(x(t), y(t))dy(t).$$

Pentru a asigura existența integralelor Riemann-Stieltjes implicate, cerința minimă pentru curba γ este să fie rectificabilă iar forma ω să fie de clasă C^0 pe D , altfel spus, componentele P și Q să fie continue.

Se arată că valoarea integralei nu depinde de parametrizarea curbei γ , iar pentru o parametrizare de clasă C^1 calculul ei se reduce la integrala Riemann:

$$\int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt.$$

Alte proprietăți: integrala curbilinie de specia a doua este aditivă în raport cu juxtapunerea curbelor:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega,$$

își schimbă semnul la schimbarea sensului de parcurs

$$\int_{\gamma^-} \omega = - \int_{\gamma} \omega,$$

și este liniară în raport cu integrandul:

$$\int_{\gamma} \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 = \alpha_1 \int_{\gamma} \omega_1 + \alpha_2 \int_{\gamma} \omega_2, \quad \forall \alpha_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Din mecanică, se știe că lucrul mecanic efectuat de forța de greutate, de exemplu, nu depinde de drum, adică este același pentru toate curbele care unesc două puncte date. În acest caz, spunem că lucrul mecanic este dat de o integrală *independentă de drum*. Deoarece integrala își schimbă semnul la schimbarea sensului de parcurgere a curbei, este clar că ea va fi independentă de drum dacă și numai dacă

$$\int_{\gamma} \omega = 0,$$

pentru orice curbă rectificabilă închisă $\gamma \subset D$.

Tot din mecanică se știe că această proprietate o au toate câmpurile de forțe \vec{F} *conservative*, adică pentru care există un câmp scalar U , numit *potențialul forței*, astfel încât

$$\vec{F} = \text{grad } U \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j}.$$

Într-adevăr, în acest caz $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ și $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, și avem

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} y'(t) \right) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)).$$

În limbajul formelor diferențiale, cazul conservativ de mai sus corespunde cazului când ω este o *formă diferențială exactă*, adică atunci când admite o *primitivă* $\Omega = \Omega(x, y)$, de clasă C^1 , astfel încât

$$\omega = d\Omega \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy,$$

caz în care

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} d\Omega = \Omega(x(b), y(b)) - \Omega(x(a), y(a)).$$

Reciproc, dacă pentru o formă $\omega = Pdx + Qdy$ integrala nu depinde de drum, atunci pentru orice pereche de puncte $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in D$ se poate nota cu

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

valoarea comună a integralei pe curbele γ care pleacă din (x_0, y_0) și ajung în (x_1, y_1) , și se poate arăta destul de ușor că, pentru orice $(x_0, y_0) \in D$ fixat, funcția

$$\Omega(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} + Q(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{y}$$

este o primitivă a formei $Pdx + Qdy$ definită pe o vecinătate a lui (x_0, y_0) .

Pentru a găsi un criteriu care să asigure că forma $Pdx + Qdy$ este exactă, să observăm că în cazul în care Ω este o primitivă de clasă C^2 , avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

deoarece în acest caz derivatele mixte comută. Această condiție caracterizează independența de drum a integralei curbilinii de specia a doua în cazul în care D este un domeniu *simplu conex*, adică un deschis conex D cu proprietatea că oricare două curbe având aceleași capete se pot obține una din alta printr-o deformare continuă în D . Mai precis, are loc următorul rezultat:

Teoremă. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex și $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții de clasă C^1 . Atunci, forma diferențială $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ este exactă dacă și numai dacă

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

pentru orice $(x, y) \in D$.

În concluzie, în cazul domeniilor simplu conexe, integrala unei forme diferențiale $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ de clasă C^1 este independentă de drum dacă și numai dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

§2. Integrale pentru funcții complexe

Peste tot în cele ce urmează, vom considera că $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$ este o funcție continuă definită pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$, iar $\gamma \subset D$ o curbă rectificabilă.

§2.1. Integrala scalară. Amintim că în \mathbb{C} am definit *produsul scalar* a două numere complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ și $z_2 = x_2 + iy_2$ prin

$$z_1 \cdot z_2 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = |z_1| |z_2| \cos \theta,$$

unde $\theta = \arg z_2 - \arg z_1$, și el corespunde produsului scalar dintre vectorii de poziție ai punctelor $z_{1,2}$ din plan.

Interpretând funcția complexă $f = u + iv$ ca un câmp de forțe în plan, lucrul mecanic efectuat de f pe curba γ de ecuație $z(t) = x(t) + iy(t)$ se calculează, după cum știm, cu integrala curbilinie de specia a doua

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} u dx + v dy,$$

care este limita sumelor Riemann-Stieltjes

$$\sum_k f(z(\tau_k)) \cdot \Delta z(t_k) = \sum_k u(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta x(t_k) + \sum_k v(x(\tau_k), y(\tau_k)) \Delta y(t_k),$$

asociate diviziunilor $\Delta_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ și punctelor intermediare (τ_k) . Suntem conduși spre următoarea noțiune:

Definiție. Numărul real I , dat de integrala curbilinie de specia a doua

$$I = \int_{\gamma} u dx + v dy,$$

se numește integrala scalară a funcției complexe $f = u + iv$ pe curba γ , și se notează cu

$$\int_{\gamma} f \cdot dz \stackrel{\text{not.}}{=} I.$$

Proprietățile integralei scalare ale unei funcții complexe sunt exact cele ale integralei curbilinii de specia a doua, dintre care reamintim: pentru orice funcție continuă f și orice curbă rectificabilă γ , integrala scalară $\int_{\gamma} f \cdot dz$ există, iar dacă $\gamma = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, este de clasă C^1 , atunci

$$\int_{\gamma} f \cdot dz = \int_a^b (ux' + vy') dt.$$

Această egalitate justifică următorul calcul formal:

$$z \in \gamma \rightarrow z(t) = x(t) + iy(t) \rightarrow dz = dx + idy = x' dt + iy' dt$$

și, prin urmare

$$\int_{\gamma} f \cdot dz = \int_{\gamma} (u + iv) \cdot (dx + idy) = \int_a^b (ux' + vy') dt.$$

Mai mult, cu această definiție a lui dz , produsul scalar $f \cdot dz$ devine chiar forma diferențială

$$f \cdot dz = u dx + v dy.$$

Integrala $\int_{\gamma} f \cdot dz$ este independentă de drum dacă și numai dacă $\int_{\gamma} f \cdot dz = 0$ pentru orice curbă închisă $\gamma \subset D$.

O altă caracterizare: integrala $\int_{\gamma} f \cdot dz$ este independentă de drum dacă și numai dacă forma diferențială $f \cdot dz$ admite primitive, adică există Ω de clasă C^1 astfel încât

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy = u dx + v dy = f \cdot dz.$$

În cazul domeniilor simplu conexe, dacă u și v sunt de clasă C^1 , integrala scalară

$$\int_{\gamma} f \cdot dz = \int_{\gamma} u dx + v dy$$

este independentă de drum dacă și numai dacă $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$.

§2.2. Integrala complexă. Vom defini acum integrala complexă a funcției $f = u + iv$ pe curba γ de ecuație $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, înlocuind produsul scalar din suma Riemann-Stieltjes

$$\sum_k f(z(\tau_k)) \cdot \Delta z(t_k)$$

care apare în definiția integralei scalare, cu produsul a două numere complexe:

$$\sum_k f(z(\tau_k)) \Delta z(t_k) = \sum_k (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_k (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k),$$

unde am notat cu $u_k = u(x(\tau_k), y(\tau_k))$, $\Delta x_k = \Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_{k-1})$ și analog pentru v și y .

Definiție. Numărul complex $I + iJ$, dat de integralele curbilinii de specia a doua

$$I = \int_{\gamma} u dx - v dy \text{ și } J = \int_{\gamma} v dx + u dy,$$

se numește integrala funcției complexe $f = u + iv$ pe curba γ , și se notează cu

$$\int_{\gamma} f dz \stackrel{\text{not.}}{=} I + iJ.$$

Să observăm că cele două integrale curbilinii reale, I și J , din definiția mai sus, pot fi scrise ca integrale scalare pentru funcțiile $\bar{f} = u - iv$ și $i\bar{f} = v + iu$:

$$I = \int_{\gamma} \bar{f} \cdot dz = \int_{\gamma} u dx - v dy \text{ și } J = \int_{\gamma} i\bar{f} \cdot dz = \int_{\gamma} v dx + u dy,$$

astfel că avem egalitatea:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} \bar{f} \cdot dz + i \int_{\gamma} i \bar{f} \cdot dz$$

care reduce integrala complexă la două integrale scalare.

Exemplu. Fie $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ cercul unitate. Calculăm direct cu definiția:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_{\gamma} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\cos t \sin t + \sin t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt + i \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

Să observăm că, în cazul unei curbe netede $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, cu x și y de clasă C^1 , din proprietățile integralei Riemann-Stieljes rezultă egalitatea

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (vx' + uy') dt$$

care poate fi regăsită prin următorul calcul formal:

$$z \in \gamma \rightarrow z(t) = x(t) + iy(t) \rightarrow dz = dx + idy = (x' + iy') dt$$

de unde

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_a^b [(ux' - vy') + i(vx' + uy')] dt.$$

Exemplu. Calculăm din nou integrala funcției $f(z) = \frac{1}{z}$ pe cercul unitate, $\gamma(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, folosind acum: $z = e^{it} \rightarrow dz = ie^{it} dt$. Avem:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i.$$

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție continuă, $f = u + iv$. Studiem acum existența unei primitive a funcției $f = u + iv$, adică a unei funcții olomorfe $F = U + iV$ astfel încât $F' = f$. Conform condițiilor Cauchy-Riemann scrise sub formă matriceală, $F' = f$ dacă și numai dacă

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix},$$

adică

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = u dx - v dy = \bar{f} \cdot dz,$$

și

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = v dx + u dy = i \bar{f} \cdot dz.$$

Obținem că f admite primitive dacă și numai dacă formele diferențiale $\bar{f} \cdot dz$ și $i\bar{f} \cdot dz$ sunt exacte, deci dacă și numai dacă integrala complexă $\int_{\gamma} f(z) dz$ este independentă de drum. Sintetizăm aceste rezultate astfel:

Teoremă. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție continuă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$. Dacă f admite primitiva F , atunci pentru orice curbă $\gamma \subset D$,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

În particular, dacă γ este o curbă închisă, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Reciproc, dacă $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pentru orice curbă închisă $\gamma \subset D$, atunci f admite primitive. Mai mult, în acest caz, integrala $\int_{\gamma} f(z) dz$ este independentă de drum și, pentru orice $z_0 \in D$ fixat,

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$$

este unica primitivă a lui f pentru care $F(z_0) = 0$.

Exemplu. Aplicând regulile de derivare, vedem că $f(z) = z^2$ are ca primitivă funcția $F(z) = \frac{z^3}{3}$ definită pe \mathbb{C} , iar $f(z) = z^{-2}$ are ca primitivă $F(z) = \frac{z^{-1}}{-1}$, definită pe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dacă pe un domeniu D există o determinare a logaritmului, $F(z) = \ln z$, atunci aceasta este o primitivă a funcției $f(z) = \frac{1}{z}$ și, prin urmare,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0,$$

pentru orice γ curbă închisă din D .

Deoarece

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0,$$

rezultă că nu există nici o determinare a logaritmului definită pe tot domeniul $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Teorema fundamentală a lui Cauchy. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex și $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție olomorfă cu f' continuă pe D . Atunci, pe orice curbă rectificabilă și închisă $\gamma \subset D$,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demonstrație. Este suficient să arătăm că, în ipotezele teoremei, cele două integrale scalare din egalitatea

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} \bar{f} \cdot dz + i \int_{\gamma} i\bar{f} \cdot dz,$$

sunt independente de drum. Domeniul D fiind simplu conex, prima integrală este independentă de drum dacă

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x},$$

iar a doua dacă

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

adică exact condițiile Cauchy-Riemann satisfăcute de funcția olomorfă $f = u+iv$.