

Cursul 14

(plan de curs)

Modele matematice descrise de ecuații diferențiale

Ecuațiile diferențiale ordinare au apărut odată cu noțiunea de derivată, înțelesă ca fiind viteza de schimbare a valorilor unei mărimi, și au constituit de la bun început principalul instrument matematic pentru modelarea evoluției unor mărimi fizice, inițial din mecanică și apoi din toate științele exacte: fizică, chimie, biologie, economie și altele.

În aceste modele matematice se consideră că mărimile care intervin sunt descrise de funcții continue și derivabile, chiar dacă, de exemplu, mărimea modelată reprezintă numărul de indivizi (atomi, molecule, bani sau iepuri) dintr-o anumită populație. Modelul este realist pentru populații cu un număr mare de indivizi, când unitatea de măsură poate fi luată suficient de mare, de exemplu “milionul de locuitori”. În cazul populațiilor mici sunt de preferat modelele discrete, în care derivarea $x \rightarrow x'$ este înlocuită cu diferența finită $(x_n) \rightarrow (\Delta x_n)$, cu $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, de exemplu.

§1 Dezintegrarea unei substanțe radioactive. Legea dezintegrării atomilor radioactivi afirmă că viteza instantanee de dezintegrare a unui element radioactiv este direct proporțională cu numărul de atomi radioactivi existenți la momentul considerat. Dacă notăm cu $x(t)$ numărul de atomi nedezintegrați la momentul t , rezultă că

$$x' = -ax$$

pentru orice $t \geq 0$, unde $a > 0$ este *constantă de dezintegrare*, specifică fiecărui element radioactiv.

Acest model foarte simplu, dat de o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul întâi, cu soluția generală

$$x(t) = x(0)e^{-at}$$

pentru $t \geq 0$, cu $c \in \mathbb{R}_+$, descrie foarte precis fenomenul fizic considerat și are numeroase aplicații practice.

§2 Ecuația logistică. Cel mai simplu model de evoluție cantitativă a unei populații biologice, inspirat din modelul de mai sus, este dat de ipoteza că viteza instantanee de variație a numărului de indivizi la momentul t , notat cu $x(t)$, este direct proporțională cu acest număr, ipoteză care conduce la ecuația diferențială

$$x' = \lambda x \tag{1}$$

cu λ o constantă dată de diferența dintre rata natalității și cea a mortalității.

În consecință, obținem iarăși pentru $x(t)$ o lege de variație exponențială, lege acceptabilă în practică numai pentru predicții de scurtă durată, cât timp se poate presupune că cele două rate sunt constante.

Un model mai adecvat fenomenului studiat, deși la fel de simplu, se obține considerând că λ depinde de x sub forma $\lambda = \alpha - \beta x$, cu $\alpha > 0$ și $\beta > 0$. Ecuația (1) devine

$$x' = (\alpha - \beta x)x,$$

care, scrisă sub forma

$$x' = ax(b - x), \quad (2)$$

cu $a = \beta > 0$ și $b = \alpha/\beta > 0$, poartă numele de *ecuația logistică*.

În acest model semnificația numărului b este evidentă, el reprezintă pentru numărul de indivizi pragul peste care resursele de subzistență ale populației sunt atât de mici încât rata mortalității depășește rata natalității, și astfel derivata x' este negativă.

Ecuația (2) este autonomă, de forma

$$x' = f(x),$$

cu $f(x) = ax(b - x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, f funcție de clasă C^1 . Se observă imediat că spațiul fazelor, \mathbb{R}^1 , este despărțit de punctele staționare $x_0 = 0$ și $x_1 = b$ în trei traiectorii nestaționare: segmentele $(-\infty, 0)$, $(0, b)$ și $(b, +\infty)$. Prima traiectorie este parcursă în jos, de la 0 către $-\infty$, a doua în sus, de la 0 către b , iar a treia iarăși în jos, de la $+\infty$ către b .

Soluțiile care pleacă dintr-un $\xi > b$ rămân mai mari decât b și sunt descrescătoare, prin urmare sunt mărginite. Rezultă că intervalul lor maximal de definiție (la dreapta) este întreaga semiaxă $[0, +\infty)$ și, mai mult, tind la b pentru $t \rightarrow +\infty$.

Analog, soluțiile care pleacă dintr-un $\xi \in (0, b)$ rămân între 0 și b , sunt definite pentru orice $t \in [0, +\infty)$, sunt crescătoare și tind la b pentru $t \rightarrow +\infty$.

Rezultă de aici că soluția staționară $x = b$ este asimptotic stabilă, și chiar mai mult: pentru orice dată inițială $\xi > 0$ soluția care pleacă din ξ tinde la b pentru $t \rightarrow +\infty$. Acest comportament are, pentru sistemul modelat, următoarea interpretare: oricare ar fi valoarea sa inițială, mărimea populației se stabilizează lent și fără oscilații la valoarea de prag b .

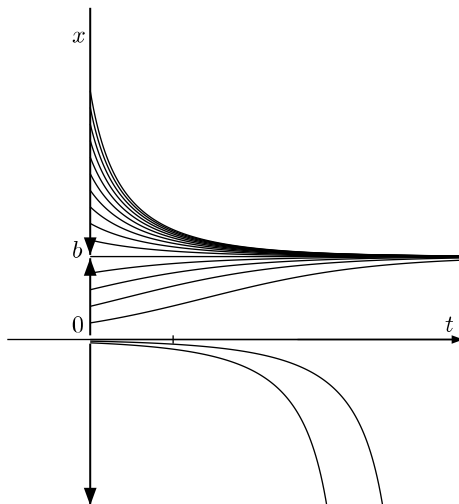


Figura 1: Ecuația logistică: graficele soluțiilor

Soluția nulă este instabilă, deoarece pot fi alese date inițiale $\xi > 0$ oricât de mici pentru care soluțiile corespunzătoare tind la $b > 0$.

Soluțiile care pleacă dintr-un $\xi < 0$ sunt descrescătoare și au limita $-\infty$ la capătul din dreapta al intervalului maximal de existență, dar fiind nemărginite nu mai putem spune dacă acesta este finit sau nu.

În sfârșit, ecuația logistică este o ecuație rezolvabilă prin cuadraturi, fie ca ecuație cu variabile separabile, fie ca ecuație Bernoulli. Pentru problema Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax(b - x), \\ x(0) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

obținem soluția saturată la dreapta

$$x(t) = \frac{b\xi e^{abt}}{b + \xi(e^{abt} - 1)}, \quad x : [0, T_\xi) \rightarrow \mathbb{R},$$

cu $T_\xi = +\infty$ pentru $\xi \geq 0$, și $T_\xi = \frac{1}{ab} \ln \left(1 - \frac{b}{\xi}\right) < +\infty$, pentru $\xi < 0$. Graficele acestor funcții sunt reprezentate în Figura 1 și confirmă pe deplin *analiza calitativă* efectuată mai sus.

§3 Modelul pradă-răpitor. Pentru studiul evoluției numărului de indivizi din speciile unui ecosistem oarecare au fost propuse și sunt analizate și în prezent numeroase modele matematice, dintre acestea cel mai cunoscut fiind cel inițial, *modelul pradă-răpitor* prezentat în continuare.

Considerăm un ecosistem format din două specii, una “pradă” și alta “răpitor”, de exemplu o specie ierbivoră x , și una carnivoră y , și presupunem, prin analogie cu modelul dat de ecuația logistică de mai sus, că rata de creștere pentru fiecare specie este determinată de numărul de indivizi din cealaltă specie astfel încât au loc relațiile

$$\begin{cases} \tilde{x}' = (a - \alpha\tilde{y})\tilde{x}, \\ \tilde{y}' = (\beta\tilde{x} - b)\tilde{y}, \end{cases} \quad (3)$$

cu α, β, γ și δ coeficienți constanți strict pozitivi.

Prima ecuație arată că în absența carnivorelor (când y este funcția nulă) numărul ierbivorelor crește exponențial, cu rata $a > 0$, iar prezența carnivorelor face ca această rată să scadă până la valori posibil negative. Analog, a doua ecuație arată că în absența ierbivorelor (când $x \equiv 0$) carnivorele sunt amenințate de extincție, numărul lor descrescând exponențial cu rata $-b < 0$, această rată fiind pozitivă numai dacă sunt suficient de multe ierbivore.

Pentru a ușura calculele, efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \frac{\beta}{b}\tilde{x} \\ y = \frac{\alpha}{a}\tilde{y}. \end{cases}$$

și aducem acest sistem diferențial la forma mai simplă:

$$\begin{cases} x' = ax(1 - y), \\ y' = -by(1 - x) \end{cases} \quad (4)$$

cu $a > 0$ și $b > 0$.

Sistemul pradă-răpitor (4) este un sistem diferențial autonom de forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases} \quad (5)$$

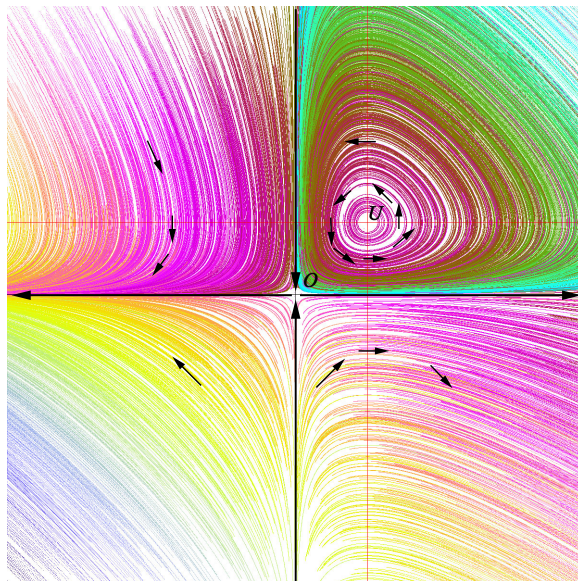


Figura 2: Sistemul pradă-răpitor: portretul fazelor

cu $f(x, y) = ax(1 - y)$ și $g(x, y) = -by(1 - x)$ funcții de clasă C^1 definite pe tot spațiul fazelor, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Observăm că sistemul admite numai două soluții staționare, date de punctele $O(0, 0)$ și $U(1, 1)$, a căror stabilitate încercăm să o determinăm prin metoda primei aproximații. Matricea jacobiană atașată sistemului este

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1 - y) & -ax \\ by & -b(1 - x) \end{pmatrix},$$

astfel că în punctul $O(0, 0)$ avem matricea

$$A = J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix},$$

cu rădăcinile caracteristice $\lambda_1 = a > 0$ și $\lambda_2 = -b$, deci originea este un punct staționar instabil.

În $U(1, 1)$ metoda primei aproximații este în cazul de dubiu: matricea

$$A = J(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

are rădăcinile caracteristice $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}$. Pentru a determina stabilitatea acestui punct va trebui să aflăm mai multe despre soluțiile sistemului.

Este ușor de văzut că sistemul admite soluții particulare cu una dintre componente funcția nulă, mai precis soluțiile de forma

$$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = ce^{-bt} \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x(t) = ce^{at}, \\ y(t) = 0, \end{cases}$$

cu c o constantă oarecare. Traiectoriile acestor soluții sunt cele patru semiaxe ale sistemului de coordonate xOy , parcurse după cum urmează: cele două semiaxe verticale sunt parcurse în sensul “spre origine”, iar cele orizontale în sensul

“dinspre origine”. Aceste patru traiectorii nestaționare separă spațiul fazelor în patru domenii invariante, și anume cele patru cadrane. O soluție care pleacă dintr-un punct din primul cadran, de exemplu, va rămâne în acest cadran pe întreg intervalul de existență.

Încercăm acum să schițăm portretul fazelor, adică familia traiectoriilor, prin *metoda izoclinelor*, specifică sistemelor diferențiale autonome în plan. Traietoriile sistemului (5) sunt date de graficele soluțiilor $y = y(x)$ ale ecuației diferențiale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad (6)$$

iar prin *izoclina de pantă m* se înțelege locul punctelor (x_0, y_0) în care tangenta la soluția care trece prin (x_0, y_0) are panta m , aceste puncte fiind date așadar de ecuația

$$\frac{g(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} = m.$$

Pentru sistemul pradă-răpitor, izoclina de pantă 0, locul punctelor cu tangentă orizontală, este format din dreptele $y = 0$ și $x = 1$, iar izoclina de pantă infinită, locul punctelor cu tangentă verticală, este dat de dreptele $x = 0$ și $y = 1$.

Aceste patru drepte împart spațiul fazelor în 9 domenii în care funcțiile continue $f(x, y)$ și $g(x, y)$ nu se anulează, având, prin urmare, semn constant. Analizând semnul acestor funcții obținem pentru vectorul viteză orientările date prin săgeți în Figura 2. De exemplu, în domeniul cu $x > 1$ și $y > 1$ orientarea vitezei este “către nord-vest”, deoarece $x' = ax(1 - y) < 0$ și $y' = -by(1 - x) > 0$.

Din aceste informații despre direcția vectorului viteză, pentru cadranele II, III și IV obținem schița traiectoriilor dată de Figura 2, iar pentru cadranul I deducem numai că soluțiile se rotesc în jurul punctului staționar $U(1, 1)$ în sens trigonometric, fără să putem decide dacă traiectoriile sunt închise sau dacă sunt spirale care se înfășoară către U sau se desfășoară îndepărtându-se U .

Portretul fazelor final, cel din Figura 2, va fi decis cu ajutorul unei integrale prime definite pe tot cadranul $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. În cazul sistemului pradă-răpitor ecuația (6) este cu variabile separabile și, pentru $x > 0$, $y > 0$, are soluția generală

$$b(x - \ln x) + a(y - \ln y) = C,$$

cu C o constantă oarecare. Altfel spus,

$$V(x, y) = b(x - \ln x) + a(y - \ln y)$$

este o integrală primă definită pe tot domeniul invariant $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, iar traiectoriile din acest domeniu sunt curbele de nivel constant ale lui V .

Notăm $\varphi(t) = t - \ln t$, pentru $t > 0$, și observăm că funcția φ are în $t_0 = 1$ o valoare minimă globală, fiind strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$ și strict crescătoare pe $(1, +\infty)$, având limitele

$$\lim_{t \searrow 0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty.$$

Urmează de aici că funcția

$$V(x, y) = b\varphi(x) + a\varphi(y), \quad x > 0, y > 0,$$

cu $a > 0$ și $b > 0$, are un singur punct de minim, punctul $U(1, 1)$, iar valorile ei tind la $+\infty$ când (x, y) se apropie de frontiera cadranelor I sau când tinde la infinit. Deducem că, pentru orice $C > V(1, 1)$, intersecția în \mathbb{R}^3 dintre suprafața $z = V(x, y)$ și planul orizontal de ecuație $z = C$ este o curbă închisă, altfel spus curbele de nivel constant ale lui V sunt curbe închise, cu U situat în domeniul interior. Pe o astfel de orbită închisă viteza punctului curent

$$v(x, y) = \sqrt{f^2(x, y) + g^2(x, y)},$$

are o valoare minimă $v(x_0, y_0) > 0$, fiind o funcție continuă definită pe o mulțime compactă din \mathbb{R}^2 , și cum orbita are o lungime finită rezultă că este parcursă în întregime în timp finit, mișcarea fiind așadar periodică.

Pentru modelul nostru inițial, dat de sistemul (3), obținem următorul comportament numeric: dacă populațiile celor două specii au la momentul inițial valorile de echilibru

$$\tilde{x}(t_0) = \frac{b}{\beta} \text{ și } \tilde{y}(t_0) = \frac{a}{\alpha},$$

atunci populațiile rămân constante în timp, altfel ele oscilează în mod periodic în jurul valorilor de echilibru.

În final, să arătăm că valorile medii ale celor două populații sunt constante. Pentru o soluție cu perioada $T > 0$ avem

$$\int_t^{t+T} \frac{\tilde{x}'(s)}{\tilde{x}(s)} ds = \ln \tilde{x}(t+T) - \ln \tilde{x}(t) = 0,$$

pentru orice t . Dar

$$\int_t^{t+T} \frac{\tilde{x}'(s)}{\tilde{x}(s)} ds = \int_t^{t+T} (a - \alpha \tilde{y}(s)) ds = aT - \alpha \int_t^{t+T} \tilde{y}(s) ds,$$

prin urmare

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \tilde{y}(s) ds = \frac{a}{\alpha},$$

pentru orice t , deci valoarea medie a populației $y = \tilde{y}(t)$ pe orice interval de timp de durată T este constantă, egală cu valoarea de echilibru, comportament valabil și pentru $x = \tilde{x}(t)$.

§4 Problema traiectoriilor balistice constă, în esență, în determinarea mișcării unui bolovan catapultat de către o balistă romană. Problema a devenit importantă în Evul Mediu, odată cu apariția armelor de foc, în special pentru tragerile de artilerie.

Până la Newton se considera că traiectoriile sunt parabole, fapt ușor de explicat acum deoarece pe distanțe scurte forța de greutate poate fi considerată constantă, de forma $\vec{G} = m\vec{g}$, iar la viteze mici rezistența întâmpinată de proiectil din partea aerului este neglijabilă, așa că în acest caz *ecuația fundamentală a mecanicii*, numită și *ecuația lui Newton*,

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

are forma

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g},$$

și conduce după două integrări succesive la o lege de mișcare dată de funcția polinomială de gradul doi:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= t\vec{g} + \vec{v}_0 \\ \vec{r}(t) &= \frac{t^2}{2}\vec{g} + t\vec{v}_0 + \vec{r}_0.\end{aligned}$$

Aici am luat timpul inițial $t_0 = 0$ și am notat cu $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ poziția inițială și cu $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$ viteza inițială.

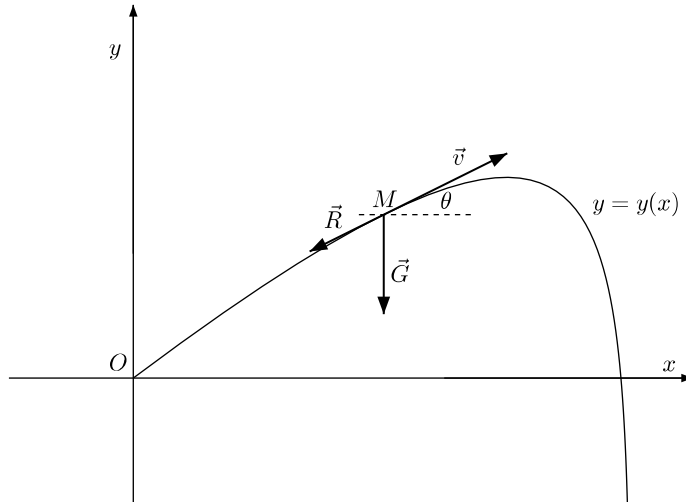


Figura 3: Traiectorii balistice

Primul model matematic în care a fost luată în calcul și rezistența mediului a fost formulat și rezolvat chiar de către Newton în *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687).

Newton a modelat frecarea cu aerul printr-o *forță de rezistență* proporțională cu vectorul viteză, având sensul opus acestuia, caz care, după cum vom vedea, conduce la ecuații diferențiale liniare. În cazul general, pentru problema traiectoriilor balistice, se consideră că mărimea R a forței de rezistență \vec{R} depinde numai de mărimea v a vectorului viteză $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ după o lege de forma $R = mg\varphi(v)$, unde φ este o funcție netedă strict crescătoare, cu $\varphi(0) = 0$ și $\lim_{v \rightarrow +\infty} \varphi(v) = +\infty$. Mai precis, forța de rezistență are forma

$$\vec{R} = -mg\varphi(v)\vec{\tau},$$

unde $\vec{\tau} = \frac{1}{v}\vec{v}$ este versorul vectorului viteză. Cele două constante, $m > 0$, masa, și $g = |\vec{g}|$, accelerația gravitațională, apar în expresia lui \vec{R} numai pentru simplificarea calculelor.

Funcția φ depinde în principal de aerodinamicitatea proiectilului, problema de modelare constând de fapt în determinarea funcției φ pentru care soluțiile modelului matematic se potrivesc cât mai bine cu măsurătorile din teren. De regulă sunt luate în considerare funcții de forma $\varphi(v) = v^{1+\gamma}$, cu $\gamma > 0$, care aproximează destul de bine fenomenul studiat și au avantajul că ecuațiile diferențiale la care conduc sunt integrabile prin cuadraturi.

În concluzie, modelul nostru este dat de mișcarea unui punct material M de masă m sub acțiunea câmpului de forțe

$$\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) = m\vec{g} - mg\frac{\varphi(v)}{v}\vec{v},$$

model pentru care ecuația $m\vec{a} = \vec{F}$ are forma

$$\vec{a} = \vec{g} - g \frac{\varphi(v)}{v} \vec{v}, \quad (7)$$

cu \vec{g} un vector constant nenul.

Vom considera cazul general în care viteza inițială v_0 este nenulă și nu este dirijată pe verticala locului de lansare M_0 , caz în care traiectoria mobilului M este situată în planul în definit de verticala locului și de vectorul vitezei inițiale \vec{v}_0 . Considerăm acest plan ca plan Oxy , alegând ca axă Oy verticala ascendentă. Notăm cu θ_0 unghiul de tragere, unghiul lui \vec{v}_0 cu axa Ox ; vom nota în general prin θ unghiul lui \vec{v} cu această axă orizontală.

Ecuația vectorială de mișcare (7), proiectată pe axele de coordonate, conduce la sistemul diferențial

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g \frac{\varphi(v)}{v} \dot{x} \\ \ddot{y} = -g - g \frac{\varphi(v)}{v} \dot{y}, \end{cases} \quad (8)$$

unde $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Derivăm relațiile

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta,$$

care dau proiecțiile vectorului viteză pe cele două axe de coordonate și, din (8), avem

$$\dot{v} \cos \theta - v \sin \theta \cdot \dot{\theta} = -g \varphi(v) \cos \theta,$$

$$\dot{v} \sin \theta + v \cos \theta \cdot \dot{\theta} = -g - g \varphi(v) \sin \theta,$$

de unde obținem sistemul diferențial în necunoscutele $v = v(t)$ și $\theta = \theta(t)$

$$\begin{cases} \dot{v} &= -g \sin \theta - g \varphi(v) \\ v \dot{\theta} &= -g \cos \theta \end{cases} \quad (9)$$

care, prin eliminarea variabilei t , conduce la ecuația diferențială

$$\frac{dv}{d\theta} = v \left(tg\theta + \frac{\varphi(v)}{\cos \theta} \right), \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad (10)$$

numită *ecuația fundamentală a balisticii exterioare*¹.

Această ecuație, scrisă de cele mai multe ori sub forma

$$d(v \cos \theta) = v \varphi(v) d\theta,$$

a fost studiată de matematicieni de talia lui Euler, Jean Bernoulli, D'Alambert și mulți alții, studiile lor conducând, pe de o parte, la apariția și dezvoltarea *teoriei calitative* a ecuațiilor diferențiale, care constă în stabilirea proprietăților soluțiilor fără rezolvarea ecuației, și, pe de altă parte, la apariția și dezvoltarea *metodelor numerice* de aproximare a soluțiilor.

¹ *Balistica interioară* studiază fenomenele legate de explozia din interiorul camerei de ardere.

Să presupunem acum că am reușit să integrăm ecuația (10) și am găsit funcția $v = v(\theta)$. Să observăm că din a doua ecuație din (9) rezultă că $\theta = \theta(t)$ este strict descrescătoare pe traiectorie și, prin urmare, inversabilă cu

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{v}{g \cos \theta},$$

de unde îl putem afla pe t ca funcție de θ

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{v d\theta}{\cos \theta}.$$

Revenind la proiecțiile vitezei pe axe vom exprima pe x și pe y ca funcții de θ . Avem în continuare

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \dot{x} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{v^2}{g}, \\ \frac{dy}{d\theta} &= \dot{y} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{v^2}{g} t g \theta, \end{aligned}$$

de unde urmează că

$$x = x_0 - \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} v^2 d\theta$$

și

$$y = y_0 - \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} v^2 t g \theta d\theta.$$

Să observăm că în cazul $\varphi(v) = v^{1+\gamma}$, cu $\gamma > 0$, ecuația (10) este integrabilă prin cuadraturi, fiind o ecuație de tip Bernoulli, caz pe care îl lăsăm spre studiu cititorului.

Ca exemplu de studiu calitativ, ne propunem să arătăm că dacă

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(v)}{v} = +\infty, \quad (11)$$

cum se întâmplă în cazul Bernoulli de mai sus, atunci viteza este mărginită și are limită finită.

Vom reduce ordinul sistemului (8) notând $p = \dot{x}$ și $q = \dot{y}$. Obținem sistemul

$$\begin{cases} \dot{p} = -g \frac{\varphi(v)}{v} p \\ \dot{q} = -g \left(1 + \frac{\varphi(v)}{v} q \right), \end{cases} \quad (12)$$

unde $v = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Sistemul (12) este un sistem diferențial de ordinul întâi autonom cu spațiul fazelor $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ în care nu are puncte staționare. Mai mult, $\dot{p} < 0$ în orice punct (p, q) și $\dot{q} < 0$ pentru orice punct cu $q \geq 0$.

Vom arăta că din (11) rezultă că există $L < 0$ astfel încât, pentru orice p , $q < L$ implică $\dot{q} > 0$.

Într-adevăr, fie $\tilde{q} < 0$ fixat arbitrar. Din (11) rezultă că există $\tilde{v} > 0$ astfel încât

$$\frac{\varphi(v)}{v} > -\frac{1}{\tilde{q}}, \quad (13)$$

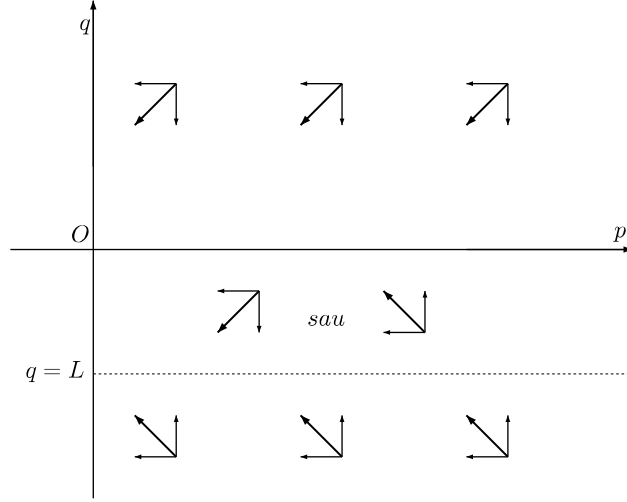


Figura 4: Vectorii (\dot{p}, \dot{q})

pentru orice $v > \tilde{v}$. Definim $L = \min\{\tilde{q}, -\tilde{v}\} < 0$. Pentru orice $(p, q) \in (0, +\infty) \times (-\infty, L)$ avem $v = \sqrt{p^2 + q^2} > |q| = -q \geq \tilde{v}$, prin urmare are loc (13), de unde obținem

$$\frac{\varphi(v)}{v}q < -\frac{q}{\tilde{q}},$$

și, în continuare,

$$1 + \frac{\varphi(v)}{v}q < \frac{\tilde{q} - q}{\tilde{q}} < 0,$$

de unde rezultă $\dot{q} > 0$, ținând cont de a doua ecuație a sistemului studiat.

Obținem pentru câmpul vitezelor în spațiul fazelor $(p, q) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ orientările date de săgețile din Figura 4, de unde rezultă că traiectoriile sunt mărginite, iar orice soluție tinde la un punct finit situat pe axa Oq , prin urmare viteza proiectilului pe traiectorie tinde la o valoare finită.

Rezolvăm acum cazul lui Newton, care a considerat $\varphi(v) = \lambda v$, cu $\lambda > 0$. Observăm că sistemul (8) se decuplează în două ecuații liniare cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\lambda g \dot{x} \\ \ddot{y} = -g - \lambda g \dot{y}, \end{cases} \quad (14)$$

pe care le integrăm separat alegând $t_0 = 0$. Obținem pentru început componentele vitezei

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\lambda g t} \\ \dot{y} = (\dot{y}_0 + \frac{1}{\lambda}) e^{-\lambda g t} - \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

și apoi, din

$$\begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 \int_0^t e^{-\lambda g s} ds \\ y = y_0 + (\dot{y}_0 + \frac{1}{\lambda}) \int_0^t e^{-\lambda g s} ds - \frac{1}{\lambda} \int_0^t ds, \end{cases}$$

obținem în final componentele vectorului de poziție

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\lambda g} (1 - e^{-\lambda g t}) \\ y = y_0 + \frac{\dot{y}_0 + \frac{1}{\lambda}}{\lambda g} (1 - e^{-\lambda g t}) - \frac{t}{\lambda}, \end{cases}$$

pentru orice t .

Să observăm că graficele $y = y(x)$ au asimptotă verticală, deoarece limita

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\lambda g}$$

este finită iar

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty.$$

Mai mult, și în acest model rezultă că viteza mobilului pe traiectorie are limită finită

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \frac{1}{\lambda},$$

în concordanță cu experimentele efectuate asupra căderii corpurilor în aer de la înălțimi suficient de mari.