Student:		Baza	I.	II.	III.	Nota
Grupa:	**Data**:	1p				

Teză la ecuaţii diferenţiale

-

I. Aflaţi şi reprezentaţi grafic soluţia saturată a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

cu $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x > t^2, \\ t^2 - x, & \text{dacă } x \leq t^2. \end{cases}$$

II. Rezolvaţi ecuaţia

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha u(x - y), \quad x > 0, y > 0,$$

cu α un parametru nenul. Aflaţi valoarea lui α pentru care funcţia

$$u(x,y) = (x - y)\sin\frac{x^2 - y^2}{y}$$

verifică ecuaţia dată.

III. Verificaţi că graficul funcţiei $x(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ are proprietatea că segmentul de normală determinat de axele de coordonate are ca mijloc exact punctul de pe grafic din care s-a dus normala. Determinaţi toate curbele de clasă C^1 cu această proprietate.

Rezolvări:

I. Observăm că funcţia f este continuă, cele două forme ale ei având aceeaşi valoare, zero, pe frontiera comună a celor două domenii de definiţie, formată din parabola de ecuaţie $x = t^2$. Prin urmare este îndeplinită condiţia minimală pentru existenţa soluţiilor de clasă C^1, şi anume continuitatea lui f.

Fie $x = x(t)$ o soluţie oarecare. Când graficul ei se află deasupra parabolei $x = t^2$ soluţia respectă ecuaţia $x' = 0$, deci este constantă pe intervale, iar când graficul se află sub parabolă ea respectă ecuaţia

$$x' = t^2 - x.$$

Aceasta este o ecuaţie liniară de ordinul întâi şi poate fi rezolvată cu formula

$$x = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt\right),$$

dar, având coeficientul funcţiei necunoscute o constantă, preferăm să o scriem sub forma

$$x' + x = t^2$$

şi să o rezolvăm cu formula

$$x_{S.G.N} = x_{S.G.O} + \tilde{x}_{S.P.N}.$$

Avem $x_{S.G.O} = Ce^{-t}$, iar soluţia $\tilde{x}_{S.P.N}$ o căutăm sub forma $\tilde{x}(t) = At^2 + Bt + C$ şi găsim imediat $\tilde{x}(t) = t^2 - 2t + 2$. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei $x' = t^2 - x$ este

$$x = Ce^{-t} + t^2 - 2t + 2.$$

Notăm acum cu $x = x(t)$ soluţia saturată a problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

pe care o vom construi prin prelungire, pornind de la data iniţială.

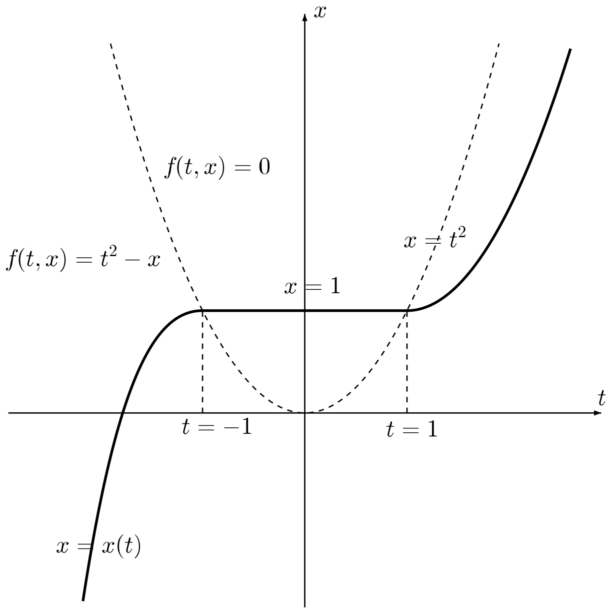
Punctul iniţial, $(t = 0, x = 1)$, se află deasupra parabolei $x = t^2$, prin urmare soluţia este constantă, $x(t) = 1$, atât timp cât graficul său rămâne deasupra parabolei. Din $x(t) > t^2$ rezultă $1 > t^2$, deci $t \in (-1, 1)$. Din contiuitatea soluţiei, obţinem

$$x(t) = 1, \text{ pentru } t \in [-1, 1].$$

Considerând sensul de prelungire la dreapta, am plecat din punctul $(t = 0, x = 1)$ şi am ajuns în $(t = 1, x = 1)$. Vom prelungi soluţia noastră cu soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^2 - x, & t \geq 1, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Din $1 = Ce^{-1} + 1^2 - 2 \cdot 1 + 2$ obţinem $C = 0$, deci $x(t) = t^2 - 2t + 2$ pentru $t \geq 1$, cât timp graficul rămâne sub parabola $x = t^2$.



Avem

$$x(t) < t^2 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 2t + 2 < t^2 \;\Leftrightarrow\; 1 < t,$$

prin urmare

$$x(t) = t^2 - 2t + 2 \text{ pentru } t \in (1, +\infty).$$

Considerând acum sensul de prelungire la stânga, am plecat din $(t = 0, x = 1)$ şi am ajuns în $(t = -1, x = 1)$. Vom prelungi la stânga soluţia noastră cu soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^2 - x, & t \leq -1, \\ x(-1) = 1. \end{cases}$$

Din $1 = Ce^{+1} + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2$ obţinem $C = -4e^{-1}$, deci $x(t) = -4e^{-t-1} + t^2 - 2t + 2$ pentru $t \leq -1$, cât timp graficul rămâne sub parabola $x = t^2$.

Deoarece $f(t,x) = t^2 - x > 0$ sub parabola $x = t^2$, rezultă că soluţiile sunt strict crescătoare în această regiune.

Observăm că

$$\lim_{t\to-\infty} -4e^{-t-1} + t^2 - 2t + 2 = -\infty,$$

deci, considerând sensul de mers către stânga, graficul funcţiei $x(t) = -4e^{-t-1} + t^2 - 2t + 2$ pleacă din punctul $(t = -1, x = 1)$ şi apoi scade către $(t = -\infty, x = -\infty)$, rămânând tot timpul sub dreapta $x = 1$, deci şi sub parabolă.

In final, soluţia căutată este

$$x(t) = \begin{cases} -4e^{-t-1} + t^2 - 2t + 2, \quad \text{pentru } x \in (-\infty, -1), \\ 1, \quad \text{pentru} \quad t \in [-1, 1], \\ t^2 - 2t + 2 \text{ pentru } t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

II. Începem cu partea a două a subiectului, mai uşoară, care constă în simpla verificare a unei ecuaţii diferenţiale. Calculăm

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin\frac{x^2 - y^2}{y} + (x - y)\cos\frac{x^2 - y^2}{y} \cdot \frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin\frac{x^2 - y^2}{y} + (x - y)\cos\frac{x^2 - y^2}{y} \cdot \frac{-x^2 - y^2}{y^2}$$

şi introducem în ecuaţie:

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = (x - y)^2 \sin\frac{x^2 - y^2}{y} = u(x - y),$$

de unde obţinem că $u = u(x, y)$ este soluţie dacă $\alpha = 1$.

Rezolvăm acum ecuaţia dată, care este o ecuaţie cvasiliniară cu derivate parţiale de ordinul întâi. Trebuie să aflăm două integrale prime funcţional independente pentru sistemul caracteristic ataşat

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{du}{\alpha u(x - y)}.$$

Prima integrală primă o aflăm din egalitatea

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy},$$

pe care o interpretăm ca o ecuaţie diferenţială în variabilele x şi y. Ea poate fi integrată ca ecuaţie omogenă, cu substituţia $x = vy$, de exemplu, sau, scrisă sub forma

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x},$$

poate fi rezolvată ca ecuaţie Bernoulli, cu substituţia $v = x^2$. Se găseşte soluţia generală

$$x^2 = y(C + y),$$

de unde obţinem integrala primă

$$\frac{x^2 - y^2}{y} = C_1.$$

Pentru a doua integrală primă folosim metoda şirului de rapoarte egale:

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{du}{\alpha u(x + y)} = \frac{dx - dy}{x^2 + y^2 - 2xy} = \frac{d(x - y)}{(x - y)^2}.$$

Notăm $v = x - y$ şi obţinem ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{du}{\alpha uv} = \frac{dv}{v^2}$$

care are soluţia generală

$$u = Cv^\alpha,$$

de unde obţinem integrala primă

$$\frac{u}{(x-y)^\alpha} = C_2.$$

Cum cele două integrale prime sunt în mod evident funcţional independente (prima nu depinde de u), soluţia generală a ecuaţiei date este, sub formă implicită

$$F\left(\frac{x^2-y^2}{y}, \frac{u}{(x-y)^\alpha}\right) = 0,$$

cu $F = F(t, s)$ o funcţie oarecare de clasă C^1.

Observaţie. Presupunând că ecuaţia $F(t, s) = 0$ poate fi explicitată ca $s = \Psi(t)$, forma implicită a soluţiilor devine

$$\frac{u}{(x-y)^\alpha} = \Psi\left(\frac{x^2-y^2}{y}\right),$$

de unde obţinem forma explicită a soluţiilor:

$$u = (x-y)^\alpha \Psi\left(\frac{x^2-y^2}{y}\right).$$

Observăm acum că pentru $\alpha = 1$ şi $\Psi(t) = \sin t$ obţinem chiar soluţia $u = u(x, y)$ din enunţ.

III. Derivăm funcţia $x(t) = \sqrt{t^2+1}$ şi obţinem $x'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.

Fie $M(\tau, x(\tau))$ un punct oarecare pe grafic. Tangenta la grafic în acest punct are panta $m_{tg} = x'(\tau)$, iar normala, fiind dreapta perpendiculară pe tangentă în acest punct, are are panta $m_\perp = -\frac{1}{m_{tg}} = -\frac{1}{x'(\tau)}$, prin urmare ecuaţia normalei este

$$x - x(\tau) = -\frac{1}{x'(\tau)}(t - \tau),$$

adică, în cazul nostru,

$$x - \sqrt{\tau^2+1} = -\frac{\sqrt{\tau^2+1}}{\tau}(t - \tau).$$

Notăm cu $A(\alpha, 0)$ şi $B(0, \beta)$ punctele de intersecţie ale normalei cu axele şi avem:

$$t = 0 \;\Rightarrow\; x = 2\sqrt{\tau^2+1} = \beta$$

şi

$$x = 0 \;\Rightarrow\; t = 2\tau = \alpha.$$

Observăm că mijlocul segmentului AB este punctul

$$\left(\frac{\alpha+0}{2}, \frac{0+\beta}{2}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) = \left(\tau, \sqrt{\tau^2+1}\right) = M\left(\tau, x(\tau)\right),$$

ceea ce trebuia arătat.

Determinăm acum toate funcţiile cu proprietatea cerută. Fie $x = x(t)$ una dintre acestea şi $M(\tau, x(\tau))$ un punct oarecare pe graficul său. Cu notaţiile de mai sus, calculăm intersecţiile normalei cu axele. Avem:

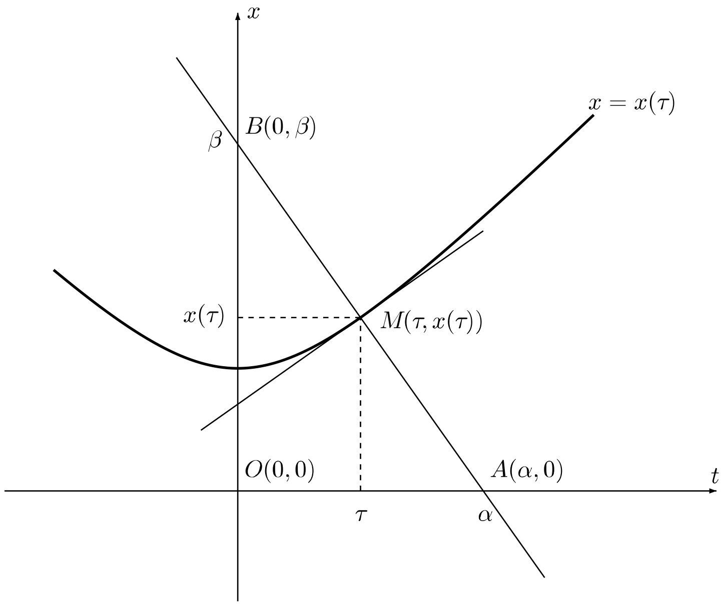
$$t = 0 \;\Rightarrow\; x = x(\tau) + \frac{\tau}{x'(\tau)} = \beta$$

şi

$$x = 0 \;\Rightarrow\; t = x(\tau)x'(\tau) + \tau = \alpha.$$

In triunghiul ΔAOB se observă că M este mijlocul lui AB dacă şi numai dacă $\alpha = 2\tau$. Avem[1]

$$\alpha = 2\tau \;\Leftrightarrow\; x(\tau)x'(\tau) + \tau = 2\tau \;\Leftrightarrow\; x(\tau)x'(\tau) = \tau.$$



Cum punctul $M(\tau, x(\tau))$ a fost fixat arbitrar pe grafic, renotând parametrul τ cu t, obţinem pentru funcţia $x = x(t)$ ecuaţia diferenţială

$$xx' = t,$$

care, fiind o ecuaţie cu variabile separabile, se integrează uşor şi conduce la soluţia generală

$$x = \pm\sqrt{t^2 + C}.$$

Observaţie. Acest subiect este o reformulare a unei probleme din Tema 4. Nu se cere în mod explicit trasarea graficului funcţiei $x(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, dar schiţarea acestuia uşurează mult rezolvarea, după cum se vede mai sus.

---

[1]Dacă în loc de $\alpha = 2\tau$ folosim $\beta = 2x(\tau)$ obţinem tot ecuaţia $x(\tau)x'(\tau) = \tau$.