Tema 14. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

Exerciţiul 1. *Aflaţi soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale liniare cu derivate parţiale de ordinul întâi:*

a) $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$ $\qquad u = F(x^2 + y^2)$

b) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} - z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0,$ $\qquad u = F(xz, x\sqrt{y})$

c) $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\sqrt{1-y^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} + (z\sqrt{1-y^2} - xy)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0,$

$$u = F(xe^{-\arcsin y}, 2yz + x(y + \sqrt{1-y^2}))$$

d) $(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0,$ $\qquad u = F\left(\dfrac{z}{(z+x)^2}, \dfrac{z}{(z+y)^2}\right)$

e) $(1 + \sqrt{3z - x - y})\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0,$

$$u = F\left(y - 2z, \sqrt{3z - x - y} - \frac{z}{2}\right)$$

f) $(x_2 + x_3)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + (x_1 + x_3)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + (x_1 + x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0,$

$$u = F\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2},\right)$$

g) $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3} + \cdots x_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$

$$u = F\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

Exerciţiul 2. *Aflaţi soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale cvasiliniare cu derivate parţiale de ordinul întâi:*

a) $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y,$ $\qquad F(x^2 - y^2, x - y + u) = 0$

b) $e^x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = ye^x,$ $\qquad F\left(e^{-x} - \dfrac{1}{y}, u + \dfrac{x - \ln|y|}{e^{-x} - y^{-1}}\right) = 0$

c) $2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - x)\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2,$ $\qquad F\left(x^2 - 4u, \dfrac{y - 2x}{x^2}\right) = 0$

d) $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = yu,$ $\qquad F\left(x^2 + y^2, \dfrac{u}{x}\right) = 0$

e) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2u,$ $\qquad F\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{u}{x^2} - \ln x\right) = 0$

Problema 1. *Demonstraţi că o funcţie* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *de clasă* C^1, *este* omogenă de grad p (*adică* $u(tx, ty, tz) = t^p u(x, y, z)$ *pentru orice* $t > 0$ *şi orice* (x, y, z)) *dacă şi numai dacă verifică ecuaţia*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = pu.$$

Rezolvare. Fie $u = u(x, y, z)$ o funcţie omogenă de grad p. Derivăm în raport cu t egalitatea

$$u(tx, ty, tz) = t^p u(x, y, z)$$

şi obţinem

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(tx, ty, tz) + y\frac{\partial u}{\partial y}(tx, ty, tz) + z\frac{\partial u}{\partial z}(tx, ty, tz) = pt^{p-1}u(x, y, z),$$

pentru orice $t > 0$ şi orice (x, y, z). Fixăm $t = 1$ şi rezultă că u este o soluţie a ecuaţiei date.

Reciproc, fie acum $u = u(x, y, z)$ o soluţie a ecuaţiei cvasiliniare

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = pu.$$

Ataşăm sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{pu},$$

şi din cele trei egalităţi rezultă pe rând următoarele integralele prime

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{y} = C_2, \quad \frac{u}{z^p} = C_3.$$

Soluţia generală a ecuaţiei are forma implicită

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}, \frac{u}{z^p}\right) = 0,$$

şi aceasta poate fi pusă, în condiţii generale, sub forma

$$\frac{u}{z^p} = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}\right).$$

Aşadar, soluţia $u = u(x, y, z)$ este dată explicit ca

$$u = z^p\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}\right),$$

şi avem

$$u(tx, ty, tz) = (tz)^p\Phi\left(\frac{ty}{tx}, \frac{tz}{ty}\right) = t^p z^p\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}\right) = t^p u(x, y, z),$$

pentru orice $t > 0$ şi orice (x, y, z). Am arătat astfel că orice soluţie a ecuaţiei date este o funcţie omogenă de grad p.

Problema 2. *Fie $\Phi = \Phi(t,s)$ un câmp scalar de clasă C^1 cu gradientul nenul în orice punct. Arătaţi, prin calculul direct al derivatelor parţiale, că dacă o funcţie $u = u(x,y,z)$ de clasă C^1 verifică ecuaţia*

$$\Phi\left((x-y)u, (y-z)u\right) = 0 \tag{$*$}$$

pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$, atunci ea este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u. \tag{$**$}$$

Rezolvare. Fie $u = u(x,y,z)$ astfel încât are loc $(*)$. Derivăm pe rând această relaţie în raport cu x, y şi z prin variabilele

$$t = \tilde{t}(x,y,z) = (x-y)u(x,y,z)$$

$$s = \tilde{s}(x,y,z) = (y-z)u(x,y,z).$$

Obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\tilde{t},\tilde{s}) \cdot \left(u + (x-y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\tilde{t},\tilde{s}) \cdot \left((y-z)\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= 0,\\
\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\tilde{t},\tilde{s}) \cdot \left(-u + (x-y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\tilde{t},\tilde{s}) \cdot \left(u + (y-z)\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= 0,\\
\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\tilde{t},\tilde{s}) \cdot \left((x-y)\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\tilde{t},\tilde{s}) \cdot \left(u + (y-z)\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Amplificăm prima relaţie cu $(y+z)$, a doua cu $(z+x)$, a treia cu $(x+y)$ şi le adunăm. Obţinem

$$(x-y)\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\tilde{t},\tilde{s}) \cdot \big(L(u) - u\big) + (y-z)\frac{\partial \Phi}{\partial s}(\tilde{t},\tilde{s}) \cdot \big(L(u) - u\big) = 0,$$

unde am notat

$$L(u) = (y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Avem aşadar relaţia

$$\big(L(u) - u\big)\left[(x-y)\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\tilde{t},\tilde{s}) + (y-z)\frac{\partial \Phi}{\partial s}(\tilde{t},\tilde{s})\right] = 0.$$

Deoarece gradientul lui Φ a fost presupus nenul, paranteza pătrată nu este identic nulă, urmează că, local,

$$L(u) = u,$$

ceea ce trebuia arătat.

Pentru completare, vom rezolva acum ecuaţia cvasiliniară $(**)$. Scriem sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{u},$$

şi aflăm integralele prime prin metoda şirului de rapoarte egale. Din

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{d(x-y)}{y-x},$$

obţinem integrala primă

$$V_1(x,y,z,u) = (x-y)u = C_1,$$

din

$$\frac{du}{u} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y} = \frac{d(y-z)}{z-y},$$

rezultă

$$V_2(x,y,z,u) = (y-z)u = C_2,$$

şi, în final, din

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y} = \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)},$$

găsim

$$V_3(x,y,z,u) = \frac{u^2}{x+y+z} = C_3.$$

Se observă că matricea gradienţilor

$$\begin{pmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \nabla V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -u & 0 & x-y \\ 0 & u & -u & y-z \\ \frac{-u^2}{(x+y+z)^2} & \frac{-u^2}{(x+y+z)^2} & \frac{-u^2}{(x+y+z)^2} & \frac{2u}{x+y+z} \end{pmatrix}$$

are rangul 3 în punctele cu $u \neq 0$, rezultă că cele trei integrale prime sunt funcţional independente, prin urmare ecuaţia $(**)$ are soluţia implicită de forma

$$F\left((x-y)u, (y-z)u, \frac{u^2}{x+y+z}\right) = 0,$$

cu $F = F(t,s,v)$ o funcţie oarecare, de clasă C^1. Observăm că dacă F nu depinde de v obţinem relaţia $(*)$.