Ecuaţia polinomială de gradul trei

Ne propunem să rezolvăm ecuaţia

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \tag{1}$$

unde coeficienţii a, b, c şi d sunt numere oarecare, reale sau complexe, cu $a \neq 0$.

După cum este bine cunoscut, ca o consecinţă a Teoremei Fundamentale a Algebrei[1], în corpul numerelor complexe orice polinom P de grad trei poate fi descompus sub forma

$$P(z) = a(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)$$

unde radăcinile[2] z_0, z_1 şi z_2 sunt numere reale sau complexe, distincte sau nu.

Începem prin a rezolva cazurile cele mai simple.

§1. Rădăcinile cubice ale unităţii. Ecuaţia

$$z^3 = 1 \tag{2}$$

se rezolvă imediat prin calcul algebric:

$$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \Leftrightarrow z_0 = 1,\ z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Peste tot în cele ce urmează vom nota cu ε următoarea rădăcină a ecuaţiei (2)

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}. \tag{3}$$

Am determinat astfel *mulţimea rădăcinilor cubice ale unităţii*:

$$\mathcal{U}_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\} = \{\, 1, \varepsilon, \bar{\varepsilon}\,\} = \left\{\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3},\ k = -1, 0, 1\right\}.$$

Să observăm că

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \bar{\varepsilon},$$

prin urmare mulţimea $\mathcal{U}_3$ poate fi scrisă şi ca

$$\mathcal{U}_3 = \{\, 1, \varepsilon, \varepsilon^2\,\} = \left\{\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2\right\}.$$

[1]vezi `https://mathscholar.org/2018/09/simple-proofs-the-fundamental-theorem-of-algebra/`

[2]Termenul de *rădăcină* este strâns legat de *radical* (din latinescul *radix*) şi desemnează, în mod strict, soluţiile ecuaţiilor de forma $z^n = a$. Denumirea s-a extins însă la orice ecuaţie polinomială, cuvintele *soluţie* şi *rădăcină* fiind în acest caz sinonime. Pentru o funcţie numerică oarecare f, soluţiile ecuaţiei $f(z) = 0$ se numesc *zerourile funcţiei.* Numai pentru funcţii polinomiale zerourile se numesc rădăcini.

§2. Rădăcinile cubice ale unui număr real. Fie r un număr real oarecare, pozitiv sau nu. După cum ştim de la studiul funcţiilor reale, se notează cu $\sqrt[3]{r}$, prin definiţie, singura soluţie reală a ecuaţiei

$$z^3 = r.$$

Prin verificare directă se constată că, pe lângă $z_0 = \sqrt[3]{r}$, celelalte două rădăcini sunt

$$z_1 = \sqrt[3]{r}\varepsilon = \frac{\sqrt[3]{r}(-1+\sqrt{3}i)}{2}$$

şi

$$z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt[3]{r}\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt[3]{r}(-1-\sqrt{3}i)}{2}.$$

În concluzie, mulţimea rădăcinilor cubice ale numărului real $r \in \mathbb{R}$ este

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = r\} = \{\, z_0, z_1, z_2 \,\} = \{\, \sqrt[3]{r}, \sqrt[3]{r}\varepsilon, \sqrt[3]{r}\bar{\varepsilon} \,\} = \{\, \sqrt[3]{r}, \sqrt[3]{r}\varepsilon, \sqrt[3]{r}\varepsilon^2 \,\}.$$

§3. Rădăcinile cubice ale unui număr complex. Fie acum w un număr complex oarecare, real sau nu. În acest caz general ecuaţia

$$z^3 = w$$

poate fi rezolvată numai cu forma trigonometrică a numărului w, fie aceasta

$$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Definim numărul complex

$$\delta = \sqrt[3]{\rho}\big(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\big)$$

şi, folosind formula lui Moivre, constatăm că $\delta^3 = w$. Mai departe, din

$$(\delta\varepsilon)^3 = \delta^3\varepsilon^3 = w$$

şi

$$(\delta\bar{\varepsilon})^3 = \delta^3\bar{\varepsilon}^3 = w,$$

urmează că mulţimea rădăcinilor cubice ale lui $w \in \mathbb{C}$,

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = w\} = \{\, z_0, z_1, z_2 \,\} = \{\, \delta, \delta\varepsilon, \delta\bar{\varepsilon} \,\} = \{\, \delta, \delta\varepsilon, \delta\varepsilon^2 \,\}$$

este dată de formula

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = w\} = \Big\{\sqrt[3]{\rho}\Big(\cos\Big(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\Big)\Big),\ k = 0, 1, 2\Big\}. \quad (4)$$

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia:

$$z^3 = -2 + 2i.$$

Rezolvare. Avem $w = x + yi = -2 + 2i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ unde

$$\rho = |w| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8}$$

şi

$$\theta = \arccos\frac{x}{\rho} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Obţinem

$$\delta = \sqrt[3]{\rho}\big(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\big) = \sqrt[6]{8}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big) = \sqrt{2}\big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = 1 + i$$

Prin urmare, rădăcinile cubice ale lui $w = -2 + 2i$ sunt

$$z_0 = 1 + i,$$

$$z_1 = z_0\varepsilon = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$$

şi

$$z_2 = z_0\varepsilon^2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$$

Observaţie. In exemplul de mai sus în rezultatul final nu mai apare funcţia cosinus, se impune întrebarea: oare nu există în locul formulei (4) o altă formulă de rezolvare care să furnizeze rădăcinile sub formă algebrică utilizând cel mult radicali din numere reale?

Raspunsul este nu[3]: se ştie că în corpul numerelor complexe ecuaţiile polinomiale până la gradul patru inclusiv sunt rezolvabile prin radicali, dar această afirmaţie este valabilă numai dacă sunt admişi şi radicali din numere complexe.

Este important de menţionat că, în analiza complexă, radicalul unui număr complex este o *multifuncţie*, mai precis

$$\sqrt[n]{w} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = w\} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\},$$

unde, pentru $w = x + iy = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, avem

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Pentru fiecare $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ fixat, funcţia $w \to z_k$ defineşte o *ramură* a radicalului, care este o funcţie bine definită în tot planul complex dar discontinuă în punctele de pe semiaxa reală negativă, deoarece în acele puncte $\theta = \arg w$ are un salt de la $-\pi$ la $+\pi$.

Prin urmare, formula (4) defineşte radicalul de ordin trei dintr-un număr complex: pentru $w = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$$\sqrt[3]{w} = \left\{\sqrt[3]{\rho}\Big(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)\Big),\ k = 0, 1, 2\right\}.$$

[3]vezi `https://en.wikipedia.org/Cubic_equation#Trigonometric_and_hyperbolic_solutions`

§4. Rezolvarea ecuaţiei de gradul 3. Considerăm acum ecuaţia generală (1) scrisă sub forma
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{5}$$
şi căutăm o schimbare de variabilă de tipul
$$x = z - \lambda, \tag{6}$$
astfel încât ecuaţia în noua variabilă z să aibă *forma redusă*
$$z^3 + pz + q = 0. \tag{7}$$

Aplicând substituţia (6), ecuaţia (5) devine
$$a(z-\lambda)^3 + b(z-\lambda)^2 + c(z-\lambda) + d = 0,$$
$$a(z^3 - 3\lambda z^2 + 3\lambda^2 z - \lambda^3) + b(z^2 - 2\lambda z + \lambda^2) + c(z-\lambda) + d = 0,$$
$$az^3 + (-3a\lambda + b)z^2 + (3a\lambda^2 - 2b\lambda + c)z + (-a\lambda^3 + b\lambda^2 - c\lambda + d) = 0,$$
aşadar pentru
$$\lambda = \frac{b}{3a},$$
ecuaţia capătă forma redusă (7), unde
$$p = 3\lambda^2 - \frac{2b\lambda}{a} + \frac{c}{a} = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}, \tag{8}$$
şi
$$q = -\lambda^3 + \frac{b\lambda^2}{a} - \frac{c\lambda}{a} + \frac{d}{a} = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}. \tag{9}$$

Pentru rezolvarea ecuaţiei reduse scriem formula cubului sumei
$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$
sub forma
$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$$
şi o comparăm cu ecuaţia (7). Observăm că dacă au loc egalităţile
$$\begin{cases} p = -3uv \\ q = -(u^3+v^3) \end{cases} \tag{10}$$
atunci suma
$$z = u + v$$
este o soluţie a ecuaţiei. Scriem relaţiile (10) sub forma unui sistem "în sumă şi produs"
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}, \end{cases} \tag{11}$$
prin urmare u^3 şi v^3 sunt soluţiile $w_{1,2}$ ecuaţiei de gradul doi
$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{12}$$

Notăm cu

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}. \tag{13}$$

discriminantul ecuaţiei (12) şi avem

$$w_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

de unde obţinem rădăcinile ecuaţiei reduse sunt forma

$$z = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}. \tag{14}$$

In relaţia de mai sus, numită *formula lui Cardano*[4], intervin radicali din numere complexe care, aşa cum am menţionat, sunt multifuncţii. Cei doi radicali de ordin trei au fiecare câte trei valori, pentru formarea lui z sunt posibile şase moduri. Vom vedea în continuare cum alegem termenii sumei $z = u + v$ astfel încât să obţinem numai cele trei rădăcini ale ecuaţiei.

Metoda este următoarea: notăm cu δ_1 una dintre soluţiile ecuaţiei $u^3 = w_1$ şi cu δ_2 una dintre soluţiile ecuaţiei $u^3 = w_2$, fixate astfel încât $\delta_1\delta_2 = -\frac{p}{3}$. Această alegere este totdeauna posibilă deoarece, pentru δ_1 fixat,

$$\Big(-\frac{p}{3\delta_1}\Big)^3 = -\frac{p^3}{27} \cdot \frac{1}{\delta_1^3} = w_1 w_2 \cdot \frac{1}{w_1} = w_2,$$

prin urmare

$$\delta_2 = -\frac{p}{3\delta_1} \in \sqrt[3]{w_2}$$

verifică cerinţele.

In formula (14), scrisă sub forma

$$z = u + v = \sqrt[3]{w_1} + \sqrt[3]{w_2},$$

trebuie să avem

$$u \in \sqrt[3]{w_1} = \{\delta_1, \delta_1\varepsilon, \delta_1\varepsilon^2\}, \quad v \in \sqrt[3]{w_2} = \{\delta_2, \delta_2\varepsilon, \delta_2\varepsilon^2\}.$$

Notăm $u_k = \delta_1\varepsilon^k$ şi $v_h = \delta_2\varepsilon^h$. Perechea (u_k, v_h) o vom forma astfel încât

$$u_k v_h = -\frac{p}{3}.$$

Avem următorul calcul

$$u_k v_h = \delta_1\varepsilon^k\delta_2\varepsilon^h = \delta_1\delta_2\varepsilon^{k+h} = -\frac{p}{3}\varepsilon^{k+h},$$

deci vom alege h şi k astfel încât $\varepsilon^{k+h} = 1$.

[4]Această formulă a fost publicată de Gerolamo Cardano în *Ars Magna* (1545) şi atribuită lui Scipione del Ferro (1515), dar forma publicată a fost găsită de Niccolo Tartaglia (1541). *Ars Magna* este printre primele lucrări în care apar calcule formale cu radicali din numere negative, marcând astfel începutul dezvoltării teoriei numerelor complexe.

Obţinem cele trei rădăcini ale ecuaţiei reduse sub forma

$$\begin{cases} z_0 = \delta_1 + \delta_2, \\ z_1 = \delta_1 \varepsilon + \delta_2 \bar{\varepsilon}, \\ z_2 = \delta_1 \bar{\varepsilon} + \delta_2 \varepsilon, \end{cases} \tag{15}$$

unde am ţinut cont că $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$.

In practică, pentru rezolvarea numerică a ecuaţiei de gradul trei, se poate folosi următoarea strategie: după rezolvarea ecuaţiei (12), notăm cu w una dintre cele două rădăcini, fixată aleator, şi rezolvăm ecuaţia $u^3 = w$, obţinând rădăcinile $\{u_0, u_1, u_2\}$, iar pe v îl determinăm din $uv = -\frac{p}{3}$. Cele trei rădăcini ale ecuaţiei reduse vor fi calculate astfel

$$z_k = u_k - \frac{p}{3u_k}, \;\; k = 0, 1, 2.$$

Dacă notăm cu w cealaltă soluţie a ecuaţiei (12), obţinem aceleaşi rădăcini, dar în altă ordine.

Această metodă este implementată în următorul program Python:

```
import cmath
import math

def ComplexToString(z):
    x = round(z.real, 3)
    y = round(z.imag, 3)
    if y == 0:
        return f"{x:g}"
    if x == 0:
        return f"{y:g}j"
    return f"{x:g}{y:+g}j"

def RezolvareEcuatie(a, b, c, d):
    def Radix3(w):
        rho, theta = cmath.polar(w)
        return [cmath.rect(math.pow(rho, 1 / 3), (theta + 2 * k * math.pi) / 3)
                for k in range(3)]

    assert a != 0
    p = c / a - b * b / (3.0 * a * a)
    q = 2.0 * b ** 3 / (27.0 * a ** 3) - b * c / (3.0 * a * a) + d / a
    Delta = q * q + 4.0 * p ** 3 / 27.0
    w = (-q + cmath.sqrt(Delta)) / 2
    # w = (-q - cmath.sqrt(Delta)) / 2
    for k, u in enumerate(Radix3(w)):
        z = u - p / (3 * u)
        z -= b / (3.0 * a)
        print(f"z{k} = {ComplexToString(z)}")

def main():
    a = 1
```

```
    b = -1 + 1j
    c = 2 - 1j
    d = -2
    RezolvareEcuatie(a, b, c, d)

if __name__ == '__main__':
    main()

# Rezultat:
# z0 = 1
# z1 = 1j
# z2 = -2j
```

§5. Cazul coeficienţilor reali. Considerăm acum ecuaţia de gradul trei

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

cu coeficienţii a, b, c şi d numere reale şi suntem interesaţi să stabilim natura celor trei rădăcini ale acesteia.

Deoarece rădăcinile ecuaţiei generale se obţin din cele ale ecuaţiei reduse prin scăderea termenului $\frac{b}{3a}$, un număr real, discuţia se rezumă la natura rădăcinilor ecuaţiei reduse (7).

Observăm că în acest caz ecuaţia de gradul doi (12) are coeficienţi reali, deci discuţia va fi dată de semnul discriminantului Δ.

Cazul $\Delta > 0$. Ecuaţia (12) are soluţiile reale şi distincte

$$w_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in \mathbb{R}.$$

Notăm

$$\delta_{1,2} = \sqrt[3]{w_{1,2}} = \sqrt[3]{\frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2}} \in \mathbb{R}$$

Deoarece

$$\delta_1\delta_2 = \sqrt[3]{w_1 w_2} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}$$

suntem în condiţiile de aplicare a formulei de rezolvare (15) şi obţinem pentru ecuaţia redusă rădăcinile

$$z_0 = \delta_1 + \delta_2 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}, \tag{16}$$

$$z_1 = \delta_1\varepsilon + \delta_2\bar{\varepsilon},$$

şi

$$z_2 = \delta_1\bar{\varepsilon} + \delta_2\varepsilon = \bar{z}_2.$$

Din (3), după efectuarea calculelor se obţine

$$z_{1,2} = -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm i \cdot \frac{(\delta_1 - \delta_2)\sqrt{3}}{2}. \tag{17}$$

În concluzie, în cazul $\Delta > 0$ ecuaţia are o soluţie reală şi două complexe conjugate şi toate aceste soluţii pot fi exprimate prin radicali din numere reale.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia:

$$z^3 - 3z - 4 = 0.$$

Rezolvare. Avem $p = -3$ şi $q = -4$, iar din (13) obţinem $\Delta = 12$, de unde urmează

$$w_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

In final, ecuaţia are soluţiile

$$z_0 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}},$$

şi

$$z_{1,2} = -\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}{2} \pm i \cdot \frac{(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{3}})\sqrt{3}}{2}$$

Cazul $\Delta = 0$. Pentru ecuaţia (12) avem $w_1 = w_2 = -\frac{q}{2}$, prin urmare

$$\delta_1 = \delta_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

iar din (16) şi (17) urmează că

$$z_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\ z_2 = z_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Să observăm că pentru $p \neq 0$ avem echivalenţele

$$\Delta = 0 \ \Leftrightarrow\ q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{27q^2}{4p^3} = -1 \Leftrightarrow \frac{27q^3}{8p^3} = -\frac{q}{2},$$

de unde obţinem

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \frac{3q}{2p},$$

ecuaţia redusă având aşadar soluţiile reale

$$z_1 = \frac{3q}{p},\ z_2 = z_3 = -\frac{3q}{2p}.$$

Dacă $p = 0$, din $\Delta = 0$ rezultă imediat că şi $q = 0$, ecuaţia redusă are forma $z^3 = 0$, cu rădăcinile $z_1 = z_2 = z_3 = 0$.

Cazul $\Delta < 0$. Ecuaţia (12) are soluţiile complexe conjugate

$$w_{1,2} = \frac{-q \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = \rho(\cos\theta \pm i\sin\theta).$$

Definim

$$\delta = \sqrt[3]{\rho}\big(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\big)$$

şi notăm $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = \bar{\delta}$. Este evident că $\delta_{1,2}^3 = w_{1,2}$ şi, deoarece

$$\delta_1\delta_2 = \delta\bar{\delta} = |\delta|^2 = \sqrt[3]{\rho^2} = \sqrt[3]{w_1, w_2} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}$$

suntem iarăşi în condiţiile de aplicare a formulei (15), în consecinţă obţinem pentru ecuaţia redusă rădăcinile reale

$$\begin{cases} z_0 = \delta + \bar{\delta} = 2\,\mathrm{Re}(\delta) \\ z_1 = \delta\varepsilon + \bar{\delta}\bar{\varepsilon} = 2\,\mathrm{Re}(\delta\varepsilon), \\ z_2 = \delta\bar{\varepsilon} + \bar{\delta}\varepsilon = 2\,\mathrm{Re}(\delta\bar{\varepsilon}) = 2\,\mathrm{Re}(\delta\varepsilon^2) \end{cases} \tag{18}$$

pe care le putem scrie compact sub forma

$$z_k = 2\,\mathrm{Re}(\delta\varepsilon^k) = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\Big(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\Big),\ k = 0, 1, 2, \tag{19}$$

unde ρ şi θ sunt modulul şi argumentul numărului complex w_1.

Am arătat mai sus că

$$\rho^2 = -\frac{p^3}{27},$$

de unde găsim

$$\sqrt[3]{\rho} = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Deoarece partea imaginară a lui w_1 este strict pozitivă, rezultă că $\theta \in (0, \pi)$, prin urmare el poate fi determinat din egalitatea

$$-\frac{q}{2} = \rho\cos\theta,$$

de unde găsim

$$\theta = \arccos\Big(-\frac{q}{2\rho}\Big) = \arccos\Big(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\Big) = \arccos\Big(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\Big).$$

In concluzie, în cazul $\Delta < 0$ ecuaţia redusă are toate rădăcinile reale, date formula

$$z_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\Big(\frac{1}{3}\arccos\Big(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\Big) + \frac{2k\pi}{3}\Big),\ k = 0, 1, 2. \tag{20}$$

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia:

$$z^3 - 7z + 6 = 0.$$

Rezolvare. Observăm imediat că suma coeficienţilor este zero, deci ecuaţia admite rădăcina 1, iar pe celelalte două le aflăm imediat: 2 şi -3. Folosim acest exemplu numai ca să verificăm formula (20).

Avem $p = -7$ şi $q = 6$, iar din (13) obţinem $\Delta = -\frac{400}{27}$. Suntem în cazul $\Delta < 0$, aşa cum era de aşteptat deoarece ştim că ecuaţia are toate rădăcinile reale şi distincte între ele, deci rădăcinile sunt date de formula (20) care devine

$$z_k = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2.$$

Deoarece este greu de crezut că formula de mai sus are ca rezultat numerele întregi 1, 2 şi -3, o verificăm printr-un program Python:

```python
import math
def VerficareDeltaMinus(p, q):
    delta = q * q + 4.0 * p ** 3 / 27.0
    assert delta < 0,  "Nu suntem in cazul Delta < 0"
    theta = math.acos(3 * q * math.sqrt(-3 / p) / (2 * p))
    rho = math.sqrt(-p / 3)
    print(f"Ecuatia z**3{p:+}z{q:+}=0")
    print(f"are solutiile:")
    for k in range(3):
        zk = 2*rho*math.cos((theta + 2 * k * math.pi) / 3)
        print(f"z{k}={zk: .3g}")

if __name__ == '__main__':
    VerficareDeltaMinus(-7, 6)

# Rezultat:
# Ecuatia z**3-7z+6=0
# are solutiile:
# z0= 2
# z1=-3
# z2= 1
```