Exame de Fundamentos de Matemáticas, xuño 2014.

Parte de Cálculo.

6a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ danse as desigualdades:

$$e^{-(n+1)} = \frac{e^{-n}}{e} < e^{-n},$$

$$n+1 > n \ ; \ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

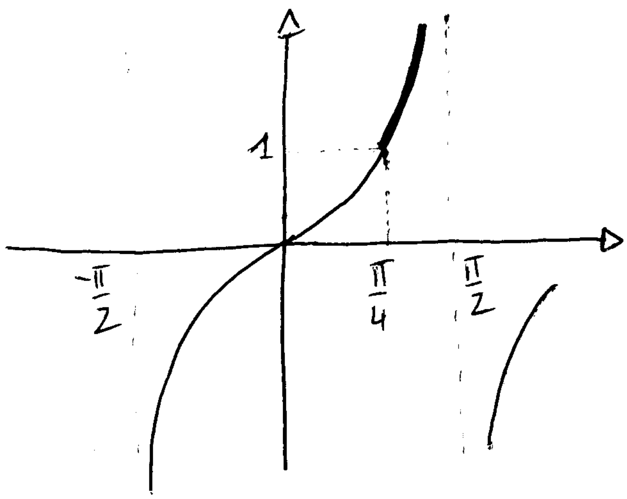
Como a suma dos termos pequenos é menor que a suma dos grandes:

$$e^{-(n+1)} + \frac{1}{n+1} < e^{-n} + \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

6b) O plano que pasa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e é perpendicular a $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \ ; \ 3x + 2y - 3z + 7 = 0.$$

6c) Para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a expresión $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ equivale a $x + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{4}$, como se intúe na gráfica de $y = \tan(x)$:



De $x + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{4}$ dedúcese que $x \geq 0$ que, intersecada co intervalo orixinal, dá como solución $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

6d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ presenta unha indeterminación do tipo $\infty-\infty$.

Multiplicando polo conxugado do denominador,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right) = +\infty.$$

6e) O polinomio interpolante de $y=\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ en 3 nodos de interpolación debe ser de grao 2 ou menor.

Como $y=x$ interpola a $y=\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ nos nodos $x=-1, 0, 1$, daquela é a solución correcta.

6f) A pendente da recta tanxente a $y^2=x^3$ é

$2y\cdot y' = 3x^2$; $y' = \dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{y}$. No punto $(1,1)$, $y'=\dfrac{3}{2}$.

A pendente da recta tanxente a $2x^2+3y^2=5$ é

$4x+6yy'=0$; $y'=-\dfrac{2x}{3y}$. No punto $(1,1)$, $y'=-\dfrac{2}{3}$.

Logo as pendentes son perpendiculares entre si.

6g) A función $y=x+\cos^2(x)$ toma valores de signo oposto en $[-\pi,\pi]$. En efecto,

$$y(-\pi) = -\pi+\cos^2(-\pi) = -\pi+1<0$$
$$y(\pi) = \pi+\cos^2(\pi) = \pi+1>0$$

Como a función é continua no intervalo por ser suma de polinomios e productos de cosenos, ten a lo menos unha raiz nel.

6h) As derivadas de $y = \log(x+1)$ son:

$$y' = \frac{1}{x+1} \qquad y^{IV} = \frac{-2\cdot 3}{(x+1)^4}$$

$$y'' = \frac{-1}{(x+1)^2} \qquad y^{V} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(x+1)^5}$$

$$y''' = \frac{+2}{(x+1)^3} \qquad \ldots$$

En xeral, vemos que as derivadas impares son positivas e as pares negativas; que o coeficiente é un factorial dun grao menor ao da derivada; finalmente, que o denominador é unha potencia de $(x+1)$ do mesmo grao que a derivada. Por tanto,

$$y^{(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O resto de grao $n+1$ ten a forma: $R_{n+1}(x) = \frac{y^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$.

Sustituíndo a expresión da derivada no resto obtense:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!\,(1+c)^{n+1}} x^{n+1} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)\,(1+c)^{n+1}}$$

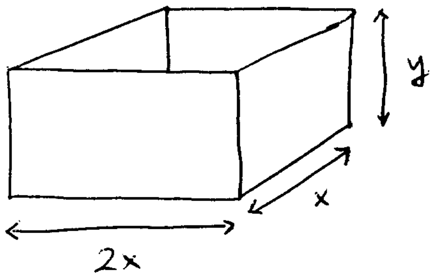
Onde se ten usado que $(n+1)! = (n+1)\,n!$

Observación: por un erro no exame, aparecía a resposta pretendidamente correcta:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!\,(1+c)^n} x^{n+1}.$$

Daremos por correcta tanto esta como "ningunha das anteriores".

7. Volume, $10m^3$



A restricción do volume implica que $2x \cdot x \cdot y = 10$; $y = \frac{5}{x^2}$

A función a minimizar é $C(x,y) = 40 \cdot 2x^2 + 18 \cdot 6xy$ xa que $2x^2$ é a área da base e $6xy$ a área dos laterais.

Substituíndo a restricción, $C(x) = 40 \cdot 2x^2 + 18 \cdot 6 \cdot \frac{5}{x}$

Sacando factor común, $C(x) = 20\left(4x^2 + \frac{27}{x}\right)$.

Posibles mínimos son $x = 0$ e $x \to +\infty$, aínda que xa se ve pola forma de $C(x)$ que, neses valores, a función tende cara $+\infty$.

Queda por comprobar os puntos onde a derivada se anula:

$$C'(x) = 20\left(8x - \frac{27}{x^2}\right) = 0; \quad 8x^3 - 27 = 0; \quad x = \frac{3}{2}$$

Como $C\left(\frac{3}{2}\right) < +\infty$, é aquí onde se da o mínimo. As lonxitudes son $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{20}{9}$.