Examen 2024

martes, 19 de diciembre de 2023 8:33

1. (a) $n = 20413 = 137 \cdot 149$

$\phi(n) = 136 \cdot 148 = 20128$

$d =$ clave privada $= e^{-1} \bmod 20128$

$$\begin{array}{r|l} 20128 & 13 \\ \hline 71 & 1548 \\ 62 & \\ 108 & \\ 04 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

$\gcd(20128, 13) = 1$

$1 = 13 - 4 \cdot 3 = 13 - 3 \cdot (20128 - 13 \cdot 1548) =$

$= -3 \cdot 20128 + 13 + 4644 \cdot 13$

$= -3 \cdot 20128 + 4645 \cdot 13$

$\boxed{d = 4645}$

(b) $3^{4n} - 2^{4n} = 81^n - 16^n \equiv 1^n - 1^n \pmod 5$

$\boxed{\equiv 0}$

(c) $561_{(7)} = 5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 1 = 288$

$$\begin{array}{r|l} 288 & 5 \\ \hline 38 & 57 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 57 & 5 \\ \hline 07 & 11 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 5 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

$561_{(7)} = \boxed{2123_{(5)}}$

---

2. (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$

$x_2 \geq 1, \quad x_4 \geq 2, \quad x_6 \geq 3.$

Equivale a $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 6$

$y_i \geq 0$

$CR(6,6) = \binom{6+6-1}{6} = \binom{11}{6} = \frac{11!}{6! \cdot 5!} = \boxed{462}$

(b) $\underset{3}{A} \longrightarrow \underset{6}{B}$ $\qquad V(6,3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{120}$

$\underset{6}{C} \longrightarrow \underset{3}{D}$ No hay ninguna aplicación

$|C| > |D|.$

$\underset{6}{C} \longrightarrow \underset{3}{D}$ no hay ...

inyectiva, ya que $|C| > |D|$.

(c) Los rojos $5!$; los azules $3!$; los blancos $4!$

Y entre ellos, RAB, $3!$

$(5!\,3!\,4!)\cdot 3! = 120\cdot 6\cdot 24\cdot 6 = \boxed{103\,680}$

---

3. (a) Cadenas de longitud 1 $\rightarrow$ 23

Cadenas de longitud 2 $\rightarrow$ $23\cdot 22$

a_n cadenas de longitud n

$n-1$ cadena — se usan $n-1$ letras

n cadena — $\underbrace{\qquad\qquad}_{n-1}$ $\downarrow$ a_{n-1}; $\downarrow$ se puede utilizar $23-(n-1) = 24-n$

$$\boxed{a_n = (24-n)\,a_{n-1}} \qquad \boxed{a_1 = 23}$$

Condición INICIAL

Relación de recurrencia de orden 1, LINEAL, PERO SIN COEFICIENTES CONSTANTES

$a_2 = 22\cdot 23 = 506$

Nótese que $a_{24} = 0 \Rightarrow a_{25} = a_{26} = \cdots = 0$

(b) n^2+2n es solución ya que

$n^2+2n \overset{?}{=} (n-2)^2 + 2(n-2) + 4n$

$\qquad \overset{\shortparallel}{n^2 - \cancel{4n} + \cancel{4} + 2n - \cancel{4} + \cancel{4n}}$

$a_n = a_{n-2} + 4n$ Ecuación homogénea: $a_n = a_{n-2}$

Solución homogénea a_n^h: Ecuación característica

$X^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Raíces $r_1 = 1$, $r_2 = -1$

$a_n^h = \alpha_1\cdot(1)^n + \alpha_2(-1)^n$

Solución general: $a_n^h + a_n^p$

$\uparrow$ solución particular n^2+2n

Por lo tanto,

$a_n = \alpha_1\cdot(1)^n + \alpha_2(-1)^n + n^2 + 2n$

Por lo tanto,

$$a_n = \alpha_1 \cdot (1)^n + \alpha_2 (-1)^n + n^2 + 2n$$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 5 = a_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 2 \end{array}\right\}$$

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1$$

$$\boxed{a_n = 3 + (-1)^n + n^2 + 2n}$$

Nótese que la solución particular, sería
$$a_n^P = (\beta_0 + \beta_1 n) \cdot n$$

4\. (a) $$\underbrace{n^3 + 2024 \log(n^6)}_{\Theta(n^3)} + \underbrace{40000 n^2 \log(n^4)}_{\Theta(n^3)} \in \Theta(n^3)$$

$4^n \notin \Theta(2^n)$ ya que $\frac{4^n}{2^n} = 2^n \longrightarrow \infty$

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \in \Theta(2^n)$

(b) Por el criterio de divisibilidad del 11,

$$-\cancel{x} + \cancel{y} - \cancel{z} + \cancel{x} - \cancel{y} + \cancel{z} = 0 \text{ es divisible por } 11$$

(c) A = números múltiplos de 4

B = números múltiplos de 6

$$|A \cup B| = |A| + |B| - \underbrace{|A \cap B|}_{\text{múltiplos de } lcm(4,6) = 12}$$

$$|A| = \frac{1000}{4} = 250$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$

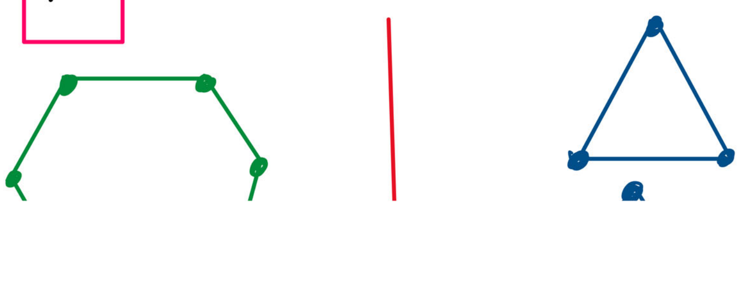
$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor = 83$$

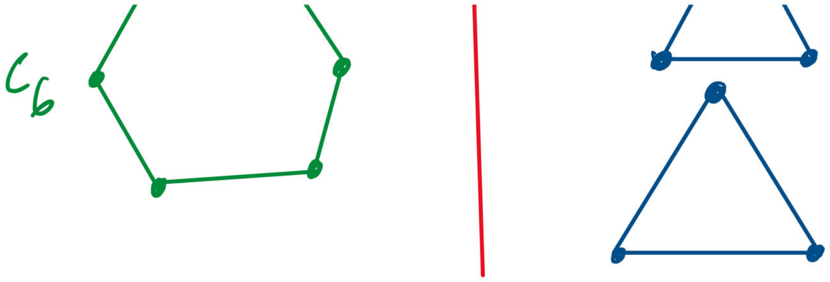
$$|A \cup B| = 250 + 166 - 83 = \boxed{333}$$

(d) $\boxed{\text{No}}$ es cierto. Por ejemplo

$C_3 \sqcup C_3$

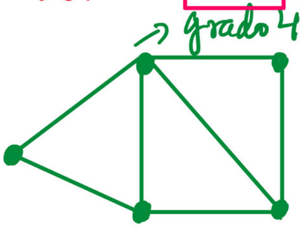
C_6

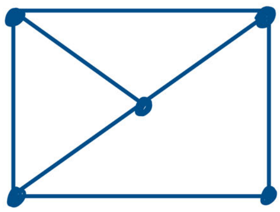




La sucesión de grados es $\{2, 2, 2, 2, 2, 2\}$
y NO son isomorfos.

(e) $\boxed{\text{No}}$ son isomorfos.



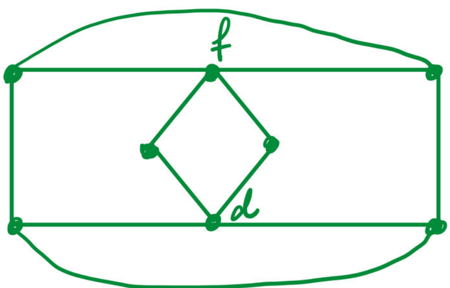


No hay ningún vértice de grado 4.

---

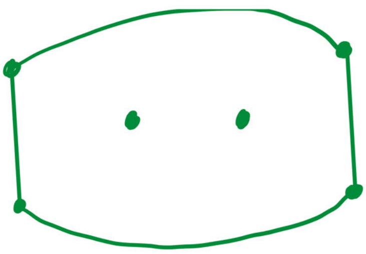
5. (a) Sea G un grafo conexo, euleriano y bipartito.
Por ser euleriano todos los vértices tienen grado par.
Si G es bipartito $G = V_1 \sqcup V_2$,
el número de ejes es la suma de los grados de V_1 (o de V_2)
Ya que todos los grados de V_1 son pares, su suma
es un número par.

(b)



(i) No es euleriano ya que hay vértices de grado 3.
No es hamiltoniano ya que si suprimimos
los vértices f y d, nos queda el grafo:

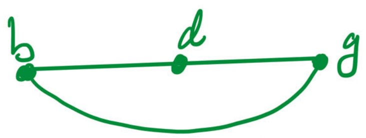
tiene 3 componentes conexas.



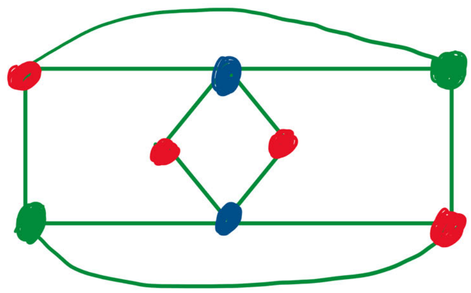
tiene 3 componentes conexas.

No es regular, ya que hay vértices de grado 2, 3 y 4.

(ii) El número cromático es 3. No puede ser 2 ya que hay ciclos de longitud 3

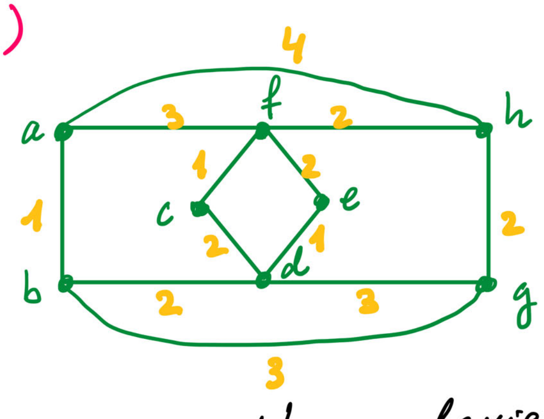


Una coloración sería:



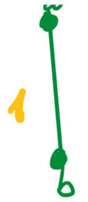
No es bipartito ya que no se puede colorear con 2 colores.

(iii)

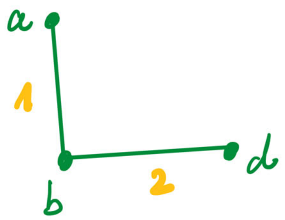


Elegimos un vértice cualquiera: a $T_0 = \{a\}$

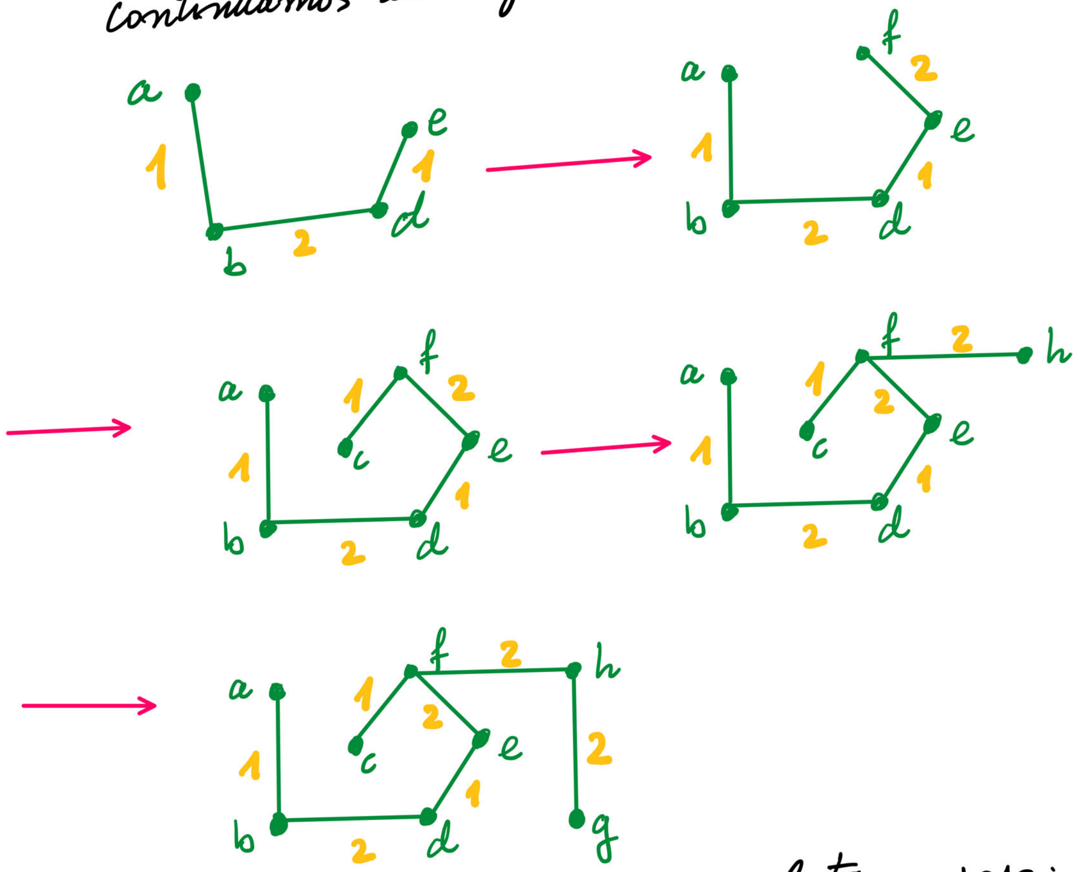
De todos los ejes incidentes con él, se elige el de menor peso $T_1 = \{ab\}$



De todos los ejes incidentes con T_1, se elige el de menor peso:



continuamos el algoritmo:



El árbol generador minimal tiene peso:

$$1+2+1+2+1+2+2 = \boxed{11}$$