Test 2 ALXEBRA Grao en Enxenería Informática 26 de novembro de 2019 **B**

Apellidos: Méndez Martínez Nombre/DNI: Miguel / 34284950T

1 (3 p.)	2 (3 p.)	3 (4 p.)	NOTA
0	2'6	3'75	6'35

1. Sean V un $K-$espacio vectorial y $u_1, u_2, u_3 \in V$. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   i – Si u_2 y u_3 son linealmente independientes, $u_1 \notin \langle u_2 \rangle$ y $u_1 \notin \langle u_3 \rangle$, entonces u_1, u_2 y u_3 son linealmente independientes.

$(1,1)$ $(1,0)$ $(0,1)$

Def de lin. Indep.

La matriz formada por $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$ no se vería anulada ya que $U_2 - U_1$ no se anularía ya que $U_1 \notin \langle U_2 \rangle$ y $U_3 - U_1$ tampoco ya que $U_1 \notin U_3$, y después la última fila tampoco ya que U_2 y U_3 son linealmente independientes y NO se anulan

   ii – Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ son base de V sean $W_1 = \langle u_2, u_3 \rangle$, $W_2 = \langle u_1, u_3 \rangle$ y $W_3 = \langle u_1, u_2 \rangle$.
   Se cumple: $(W_1+W_2) \cap W_3 = (W_1 \cap W_3)+(W_2 \cap W_3)$, $W_3 \subset W_2+W_1$ pero dim $(W_1 \cap W_2 \cap W_3)=0$.

2. En $\mathbb{R}^2$ considerar la bases: $\mathcal{B}_1 = \{G_1 = (0,1), G_2 = (-1,1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{H_1 = (4,-1), H_2 = (1,0)\}$.

   i- Hallar las coordenadas de los vectores $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$.
   Hallar también las coordenadas de e_1 y e_2 respecto de la base $\mathcal{B}_2$.

e_1:

$(1,0) = \alpha_1(0,1) + \beta_1(-1,1)$ $\begin{cases} 1 = -\beta_1 & \beta_1 = -1 \\ 0 = \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_1 = -\beta_1 \quad \alpha_1 = 1 \end{cases}$ $(1,1)_{B_1}$

$(1,0) = \alpha_2(4,-1) + \beta_2(1,0)$ $\begin{cases} 1 = 4\alpha + \beta & \beta = 1 \\ 0 = -\alpha & \alpha = 0 \end{cases}$ $(0,1)_{B_2}$

e_2: 1',

$(0,1) = \alpha_3(0,1) + \beta_3(-1,1)$ $\begin{cases} 0 = -\beta & \beta = 0 \\ 1 = \alpha + \beta & \alpha = 1 \end{cases}$ $(1,0)_{B_1}$

1

$(0,1) = \alpha_4(4,-1) + \beta_4(1,0)$ $\begin{cases} 0 = 4\alpha + \beta \quad 0 = -4 + \beta & \beta = 4 \\ 1 = -\alpha & \alpha = -1 \end{cases}$ $(-1,4)_{B_2}$

   ii- Usando el anterior apartado, hallar las coordenadas del vector $u_1 = (-2,1)$ respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Comprobar que coinciden. Hallar las coordenadas del vector $\beta u_1 = (-2\beta, \beta)$ respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ y comprobar que también coinciden.

1

Utilizando el ejercicio anterior: $U_1 = (-2,1) = -2e_1 + e_2$

$B_1 \to -2(1,-1) + (1,0) = (-2,2) + (1,0) = (-1,2)$

$B_2 \to -2(0,1) + (-1,4) = (0,-2) + (-1,4) = (-1,2)$

] Coinciden.

1

Con β:

$(-2\beta, \beta) = x(0,1) + y(-1,1) = \begin{cases} y = 2\beta \\ x = -\beta \end{cases}$ $(-\beta, 2\beta)$

$(-2\beta, \beta) = x(4,-1) + y(1,0) = \begin{cases} -2\beta = 4x + y & y = 2\beta \\ \beta = -x & x = -\beta \end{cases}$ $(-\beta, 2\beta)$

} Coinciden

iii- ¿Puede existir otro vector u_2 de $\mathbb{R}^2$ tal que $\{u_1, u_2\}$ sean linealmente independientes y que sus coordenadas, las de u_2, respecto de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ también sean iguales? Razónese.

0/1

$(x, y) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1)$ $\quad x = -\beta \quad y = \alpha + \beta$

$(x, y) = \alpha(4,-1) + \beta(1,0)$ $\quad x = 4\alpha + \beta \quad y = -\alpha$

$-\beta = 4\alpha + \beta \quad 0 = 4\alpha + 2\beta$

$-\alpha = \alpha + \beta \quad 0 = 2\alpha + \beta \quad \beta = -2\alpha$

$0 = 4\alpha - 4\alpha \quad \alpha = 0$

$\beta = 0$

$\boxed{\text{Al ser el } (0,0) \text{ no existirá ya que no es l. independiente respecto a } U_1}$

Mal vuentas, yo no usan GAUSS

3. En $\mathbb{R}^5$ sean $C_5 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y W el subespacio generado por el conjunto de vectores $T_1 = \{w_1 = (1,-1,0,1,1), w_2 = (1,0,1,0,1), w_3 = (1,-1,1,1,2)\}$, es decir $W = \langle T_1 \rangle$.

Razonar si son ciertas o falsas las afirmaciones:

(a) $e_1 \in W$, $e_1 = (1,1,-1)_{T_1}$ y entonces $T_2 = \{e_1, w_2, w_3\}$ es base de W.

?

Si $(1,0,0,0,0) \in W$, ese vector se anulará en la matriz:

1'25

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{?} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como se anula, $e_1 \in W$

$e_1 = (1,1,-1)_{T_1}$ dando $e_1 = (1,0,0,0,0)$

Con lo cual, si la matriz de los generadores escalona, será una base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \Leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W como escalona, los vectores son l. independientes y forman una base.

$\boxed{\text{Verdadera}}$

(b) $e_3 \notin W$ y $e_5 \notin W$ pero $\langle e_3 + e_5 \rangle \subset W$. Además $\langle e_4, e_3 - e_5 \rangle \oplus W = \mathbb{R}^5$.

Para comprobar si los vectores existen volveremos a hacer la matriz:

1'3

ya escalonado como en el anterior

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \to e_3 \\ \to e_5 \end{matrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ambas cumplen, en cambio la suma: $(0,0,1,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$] iguales

Está contenida

en el segundo caso:

$\langle e_4, e_3 - e_5 \rangle = \langle (0,0,0,1,0), (0,0,1,0,-1) \rangle$ $\quad \langle e_4, e_3 - e_5 \rangle + W$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

en el caso de la suma da un espacio de $\mathbb{R}^5$. Verdadera

(c) $W \subseteq (U_1 \cap U_2)$ si, y sólo si $\alpha = \beta = 1$, para U_1 y U_2 subespacios de $\mathbb{R}^5$ dados por $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) / x_3 - \alpha x_4 + \beta x_5 = 0\}$ y $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) / \alpha x_2 + \beta x_5 = 0\}$

1'2

Para calcular $(U_1 \cap U_2)$ debemos hacer el cierre de todos los vectores que cumplan las ecuaciones.

$x_3 - \alpha x_4 + \beta x_5 = 0 \qquad x_3 - \alpha x_4 - \alpha x_2 = 0$ vectores $\langle (x_1, x_2, \alpha x_4 + \alpha x_2, x_4, -\alpha x_2) \rangle$

$\alpha x_2 + \beta x_5 = 0 \quad \beta x_5 = -\alpha x_2 \qquad x_3 = \alpha x_4 + \alpha x_2$ $\quad U_1 \cap U_2 = \langle (1,0,0,0,0), (0,1,\alpha,0,-\alpha), (0,0,\alpha,1,0) \rangle$

Para $\alpha = 1$, si está contenida, los vectores se anulan en la matriz:*

$$* \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No se anula una, por lo que no se cumple que $W \subseteq (U_1 \cap U_2)$ y por lo tanto es FALSA

Esta hoja se entregará cubierta, con apellidos, nombre y DNI, en ese orden como prueba de asistencia al examen.

Test 3 ALXEBRA Grao en Enxenería Informática 17 de decembro de 2019 **B**

Apellidos: Méndez Martínez **Nombre/DNI:** Miguel 34294850T

1a (1,5 p.)	1b (2,5 p.)	2 (3 p.)	3 (3 p.)	NOTA
1	0	0'15	3	4'15

1. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   (a) No existe un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, no nulo tal que dim(Ker $f \cap$ Im f)=1 y $f \circ f \neq 0$.

$3 = \dim \text{Im} + \dim \text{Ker } F$

si $\dim(\text{Ker } F \cap \text{Im } F) = 1$

debería igual con la cual la dim de cada una es AL MENOS 1 y una de ellas tendrá dim 2

y si $f \circ f \neq 0$ significa que las dimensiones de Ker F y Im F no son iguales.

Juntando esto podemos afirmar que SI existe y que por lo tanto es FALSA

dim Ker f = ? dim Im f = ?

   (b) Considerar la aplicación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tal que:
   $g(e_1) = 3 \cdot g(e_3) = 6\, e'_3 \qquad$ y $\qquad g(e_2) = 2\, e'_4$.

   i) Hallar la matriz de g respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, es decir, $(g)_{C_3C_4}$.

   ii) Hallar bases B_3 y B_4 respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, tal que $(g)_{B_3B_4} = \text{Diag}\,[0, 1, 1]$.

ii) $(g)_{B_3B_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_4 = 0 \cdot g(B_{3\,1}) + 0 \cdot g(B_{3\,2}) + 0 \cdot g(B_{3\,3})$

$B_4 = 0 \cdot g(B_{3\,1}) + g(B_{3\,2}) + 0 \cdot g(B_{3\,3})$

$B_4 = 0 \cdot g(B_{3\,1}) + 0 \cdot g(B_{3\,2}) + g(B_{3\,3})$

$(g)_{C_3C_4} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$

2. Si en $\mathbb{R}^2$ consideramos la base $B_2 = \{w_1 = (1, -2), w_2 = (1, 1)\}$, halla la matriz asociada a la aplicación lineal $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto de la base B_2, siendo $h(w_i) = (-1)^i e_{3-i}$, es decir, lleva los vectores w_1 y w_2 de la base B_2, respectivamente en, $-e_2$ y e_1 de la base canónica C de $\mathbb{R}^2$, es decir calcular $(h)_{B_2B_2}$.

   ¿Cuales son las matrices $(h)_{CB_2}$ y $(h)_{B_2C}$? Razónese

Tenemos que $h(w_1) = -e_2 = (0,-1)$ y $h(w_2) = e_1 = (1,0)$, entonces sacaremos $(h)_{B_2B_2}$ poniendo B_2 como CL de su imagen:

$(1,-2) = \alpha(0,-1) + \beta(1,0)$ → $1 = \beta$, $\beta = 1$; → $-2 = -\alpha$, $\alpha = 2$

$(1,1) = \alpha(0,-1) + \beta(1,0)$ → $1 = \beta$, $\beta = 1$; → $1 = -\alpha$, $\alpha = -1$

$(h)_{B_2B_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(h)_{B_2C}$

$(h)_{B_2C}$ es poner B_2 como CL de las canónicas y queda

$(h)_{B_2C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$(h)_{CB_2}$ → es poner las canónicas como CL de la imagen de B_2

$(1,0) = \alpha(0,-1) + \beta(1,0)$ → $\beta = 1$, $\alpha = 0$

$(0,1) = \alpha(0,-1) + \beta(1,0)$ → $\beta = 0$, $\alpha = -1$

$(h)_{CB_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. En $\mathbb{R}^2$ considera el triángulo T de vértices los puntos $b_1=(2,-1)$, $b_2=(2,3)$ y $b_3=(-1,1)$.

i) Encuentra $g_1(b_3)$, la imagen de b_3 por la aplicación lineal g_1 que lleva b_1 en b_2 y b_2 en b_3.
Es decir: Si $g_1(2,-1)=(2,3)$ y $g_1(2,3)=(-1,1)$, ¿quién es $g_1(-1,1)$?

ii) Hallar un triángulo T_1 de vértices c_1, c_2 y c_3 tal que $g_1(T_1)=T$, es decir $g_1(c_i)=b_i$ $i=1$, 2 y 3.

Para sacar $g_1(b_3)$ debemos ver como ~~se hace~~ b_3 es una C.L de b_1 y b_2, que se mantendrá en las imágenes.

$b_1=(2,-1) \longrightarrow g(b_1)=(2,3)$

$b_2=(2,3) \longrightarrow g(b_2)=(-1,1)$

$(-1,1)=\alpha(2,-1)+\beta(2,3)$ $\rightarrow$ $-1=2\alpha+2\beta$

$1=-\alpha+3\beta$

$\alpha=3\beta-1$

$-1=2(3\beta-1)+2\beta$ $\quad \alpha=3/8-1=-5/8$

$-1=-2+8\beta$ $\quad 1=8\beta$ $\quad \beta=1/8$

$(x,y)=\alpha(2,3)+\beta(-1,1)$

$x=-5/8\cdot 2+1/8\cdot(-1)=-11/8$

$y=-5/8\cdot 3+1/8\cdot 1=-14/8$ $\quad \boxed{g(B_3)=(-11/8,\ -14/8)}$ 1

ii) Para sacar c_1, c_2, c_3 debemos sacar la aplicación lineal g_1

Sabiendo que

$(2,-1)\longrightarrow(2,3)$

$(2,3)\longrightarrow(-1,1)$

$(x,y)=\alpha(2,-1)+\beta(2,3)$

$x=2\alpha+2\beta$ $\quad \boxed{\alpha=\frac{3x-2y}{8}}$

$y=-\alpha+3\beta$ $\quad \boxed{\beta=\frac{x+2y}{8}}$

$f(x,y)=\left(2\left(\frac{3x-2y}{8}\right)-\left(\frac{x+2y}{8}\right),\ 3\left(\frac{3x-2y}{8}\right)+\frac{x+2y}{8}\right)=$

$f(x,y)=\alpha(2,3)+\beta(-1,1)=\left(\frac{5x-6y}{8},\ \frac{10x-4y}{8}\right)=g_1$

Teniendo g_1, y las imágenes sacamos:

$g_1(c_1)=(2,-1)$ $\quad 2=\frac{5x-6y}{8}$ $\quad 16=5x-6y$ $\quad x=\frac{16+6y}{5}$ $\quad x=-14/5$

$-1=\frac{10x-4y}{8}$ $\quad -1=\frac{10\left(\frac{16+6y}{5}\right)-4y}{8}$ $\quad y=-5$

~~$c_1(-14/5,-5)$~~ $\quad \boxed{c_1=(-14/5,\ -5)}$ 1

$g_1(c_2)=(2,3)$

$2=\frac{5x-6y}{8}$ $\quad x=\frac{16+6y}{5}$ $\quad$ ~~$x=13/8$~~ $\quad x=2$

$3=\frac{10x-4y}{8}$ $\rightarrow$ ~~$y=11/2$~~ $\quad y=-1$

~~$c_2=(13/5,\ 11/2)$~~ $\quad \boxed{c_2=(2,-1)}$ 1

$g_1(c_3)=(-1,1)$ $\rightarrow$ $x=\frac{6y-8}{5}$ $\quad x=2$

$-1=\frac{5x-6y}{8}$ $\quad 1=\frac{10x-4y}{8}$ $\rightarrow$ $y=3$

$\boxed{c_3(2,3)}$ 1

Triángulo solución

Solamente esta hoja debe entregarse. Escriba apellidos, nombre y DNI, en ese orden.