

Soluções ao exame de Fuma, fev 2011  
Parte de Análise.

- Calcular  $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

- Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16} \text{ é, por L'Hôpital, o } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{4x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4x} = \frac{3}{8}$$

- Polinômio de interpolação de  $(1, 4)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(3, 10)$ :

$$l_0(x) = \frac{x-2}{1-2} \frac{x-3}{1-3} = \frac{1}{2} (x-2)(x-3) = \frac{1}{2} (x^2 - 5x + 6)$$

$$l_1(x) = \frac{x-1}{2-1} \frac{x-3}{2-3} = - (x-1)(x-3) = -x^2 + 4x - 3$$

$$l_2(x) = \frac{x-1}{3-1} \frac{x-2}{3-2} = \frac{1}{2} (x-1)(x-2) = \frac{1}{2} (x^2 - 3x + 2)$$

Com polinômios de Lagrange anteriores, construímos  
o polinômio de interpolação,  $P(x)$ :

$$P(x) = 4l_0(x) + 6l_1(x) + 10l_2(x) =$$

$$= 2x^2 - 10x + 12 +$$

$$- 6x^2 + 24x - 18 +$$

$$+ 5x^2 - 15x + 10 =$$


---


$$x^2 - x + 4.$$

O polinómio é  $P(x) = x^2 - x + 4$ . Avaliada em  $x=0,5$ ,

$$P(0,5) = 0,25 - 0,5 + 4 = 3,75.$$

- Calcular a aproximação centrada da derivada dos dados anteriores em  $x = 2 \mu B$ .

$$\text{A fórmula é } \frac{10 - 4}{3 - 1} = 3 \text{ s}/\mu B.$$

- Calcular a tangente de  $y^2(2-x) = x^3$  em  $(1,1)$   
Derivando implicitamente,

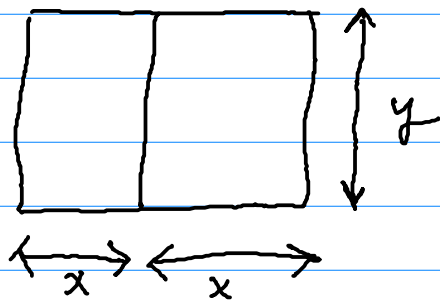
$$2yy'(2-x) + y^2(-1) = 3x^2. \text{ Em } (1,1) \text{ queda,}$$

$$2y'(2-1) + 1 \cdot (-1) = 3 \cdot 1; 2y' - 1 = 3; y' = 2.$$

A recta tangente passa por  $(1,1)$  com pendente 2:

$$y - 1 = 2(x - 1); 2x - y - 1 = 0$$

- Valado para unha leira rectangular con separación:



Área:  $2x \cdot y = 216 \text{ m}^2$

Perímetro: exterior:  $4x + 2y$   
interior:  $y$  } Total:  $4x + 3y$ .

Hai que minimizar  $4x + 3y$  considerando que  $y = \frac{108}{x}$ . É dicir, minimizar  $P(x) = 4x + \frac{324}{x}$ .

Cando  $x$  tende a infinito,  $P(x)$  tamén. Logo, podemos traballar no intervalo  $[0, M]$  para  $x$ , con  $M$  suficientemente grande.

Por ser  $P(x)$  continua no intervalo pechado e limitado  $[0, M]$ , debe existir o mínimo absoluto. Basta buscar entre os candidatos.

$x = 0$  desbótase, pois  $P(x) \rightarrow \infty$  se  $x \rightarrow 0$

$x = M$  desbótase, pois  $P(M)$  é moi grande cando  $M$  é grande.

Queda mirar onde se anula a derivada:

$$P'(x) = 4 - \frac{324}{x^2} = 0; \quad x^2 = 81; \quad x = 9$$

As dimensións para o valado mínimo son

$$x = 9 \text{ m}, \quad y = 12 \text{ m}.$$