

1 Usar árboles semánticos para probar que son válidos los siguientes argumentos:

- $\mathcal{A}_1. - \{(p \rightarrow r), (q \rightarrow s)\} \models (p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$, $\mathcal{A}_2. - \{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r)\} \models (p \rightarrow r)$, $\mathcal{A}_3. - \{(p \rightarrow q) \rightarrow p\} \models p$,
- $\mathcal{A}_4. - \{(p \vee q), (p \rightarrow r), (q \rightarrow s), \neg s\} \models r$. $\mathcal{A}_5. - \{(p \rightarrow (q \rightarrow r)), (p \rightarrow q)\} \models (p \rightarrow r)$, $\mathcal{A}_6. - \{(\neg q \rightarrow \neg p), p\} \models q$,
- $\mathcal{A}_7. - \{(p \rightarrow \neg q), p \rightarrow q\} \models \neg p$, $\mathcal{A}_8. - \{(p \vee q), \neg q\} \models p$, $\mathcal{A}_9. - \{(p \rightarrow q), (p \rightarrow r)\} \models (p \rightarrow q \wedge r)$,
- $\mathcal{A}_{10}. - \{(p \vee q), \neg q\} \models p$, $\mathcal{A}_{11}. - \{(p \rightarrow q), (r \rightarrow q)\} \models (p \vee r \rightarrow q)$ y $\mathcal{A}_{12}. - \{(p \wedge r \rightarrow q), (p \rightarrow q)\} \models (r \rightarrow q)$

2 Ver si son equivalentes los pares de fórmulas siguientes:

- | | |
|--|--|
| 1) $[(p \rightarrow (q \vee r))] \quad y \quad [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$. | 5) $[p \vee q \rightarrow r] \quad y \quad (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ |
| 2) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \quad y \quad [(p \vee q) \rightarrow r]$. | 6) $[(p \rightarrow q) \vee r] \quad y \quad [(p \wedge r) \rightarrow (p \vee q)]$. |
| 3) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \quad y \quad [p \rightarrow (q \wedge r)]$. | 7) $[(\neg r \rightarrow (p \rightarrow q))] \quad y \quad [(p \rightarrow q) \vee r]$. |
| 4) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \quad y \quad [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$. | 8) $[(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)] \quad y \quad [(p \wedge r) \rightarrow (p \vee q)]$. |

Hay muchas formas de expresar una proposición condicional $\mathcal{H} := \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ con \mathcal{F} y \mathcal{G} proposiciones cualesquiera, por ejemplo las siguientes: "Si \mathcal{F} , entonces \mathcal{G} ", "Si \mathcal{F}, \mathcal{G} ", " \mathcal{F} es suficiente para \mathcal{G} ", " \mathcal{G} si \mathcal{F} ", " \mathcal{G} cuando \mathcal{F} ", "una condición necesaria para \mathcal{F} es \mathcal{G} ", " \mathcal{F} implica \mathcal{G} ", " \mathcal{F} sólo si \mathcal{G} ", "una condición suficiente para \mathcal{G} es \mathcal{F} ", " \mathcal{G} siempre que \mathcal{F} ", " \mathcal{G} es necesario para \mathcal{F} " y " \mathcal{G} se deduce de \mathcal{F} ".

3 Considerar las siguiente frases del lenguaje natural: $p :=$ Tienes fiebre; $q :=$ Suspendes el examen final; $r :=$ Apruebas el curso. Expresa en lenguaje natural cada una de las siguientes fórmulas:

- i) $p \rightarrow q$. ii) $\neg q \leftrightarrow r$. iii) $q \rightarrow \neg r$. iv) $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$. v) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

4 Considerar las siguiente frases del lenguaje natural: $p :=$ Conduces a más de 100 Km/h, $q :=$ Te multan por ir a mayor velocidad de la permitida, $r :=$ Te quitan el permiso de conducir. Expresa en lenguaje natural cada una de las siguientes fórmulas:

- i) $r \rightarrow \neg q$. ii) $q \leftrightarrow r$. iii) $p \vee q \rightarrow r$. iv) $(\neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg r)$. v) $(r \leftrightarrow (p \wedge q))$

Definición: Si tenemos una proposición condicional \mathcal{H} , es decir, $\mathcal{H} := \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ con \mathcal{F} y \mathcal{G} proposiciones cualesquiera, $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ se dice **recíproca** de \mathcal{H} , $\neg \mathcal{G} \rightarrow \neg \mathcal{F}$ **contrarecíproca** de \mathcal{H} , y $\neg \mathcal{F} \rightarrow \neg \mathcal{G}$ **inversa** de \mathcal{H} .

5 Escribir en lenguaje natural : la recíproca, contrarecíproca e inversa de cada una de las siguientes declaraciones condicionales (o frases implicativas):

- a) Si llueve esta noche, me quedaré en casa.
- b) Voy a la playa siempre que el día amanece soleado.
- c) Cuando me acuesto tarde, es necesario que duerma hasta mediodía.
- d) Si nieva hoy, esquiaré mañana.
- e) Voy a clase si siempre que vaya a haber un control.
- f) Un entero positivo es primo sólo si no tiene otros divisores que 1 y el mismo

6 Traduce cada una de las siguientes frases a fórmulas lógicas para ser interpretadas: primero en el universo de los estudiantes de tu clase de ingeniería y luego si el universo es toda la gente.

- a₁) Todos los compañeros de clase tienen un teléfono móvil
- a₂) No todos los compañeros de clase tienen un smartphone
- b₁) Alguien de tu clase no ha visto una película sueca
- b₂) Nadie de tu clase ha visto una película sueca
- c₁) Una persona de tu clase no sabe nadar
- c₂) Hay una persona que no sabe nadar pero está en tu clase.
- d₁) Mas de un estudiante de tu clase no sabe resolver ecuaciones de segundo grado.
- d₂) No todos los estudiantes de tu clase saben resolver ecuaciones de segundo grado.
- e₁) Solo un estudiante de clase no quiere ser rico.
- e₂) Solo dos estudiantes de clase quieren ser ricos
- e₃) Salvo dos, todos los estudiantes de tu clase quieren ser ricos

7 Expresa cada una de las siguientes frases con cuantificadores. Luego forma la negación de la sentencia de tal forma que las negaciones no aparezcan a la izquierda de los cuantificadores.

Traduce después la sentencia al lenguaje natural respetando en cada caso el universo del discurso. Haz lo mismo con las frases entre paréntesis.

- a) Algunos perros viejos pueden aprender trucos nuevos (Perro viejo no aprende trucos nuevos).
- b) Ningún conejo sabe cálculo (El cálculo no lo entienden los conejos).
- c) Todos los pájaros pueden volar (Todos los que pueden volar son pájaros).
- d) No hay perro alguno que pueda hablar (Un perro habla).
- e) No hay nadie en clase que hable francés y ruso. (Todos en clase hablan francés o ruso).
- f) Algunos conductores no cumplen los límites de velocidad. (Ningún conductor cumple los límites de velocidad).
- g) Nadie en política puede mantener un secreto (Todos los políticos tienen un secreto).

8 Sea $S(x)$ el predicado "x está en el sitio correcto", y sea $E(x)$ el predicado "x está en buen estado".

Traduce cada una de las siguientes frases a fórmulas lógicas para ser interpretadas en el universo de las herramientas de un garage:

- i) Alguna herramienta no está en su sitio. (Alguna herramienta no está en buen estado.)
- ii) Todas las herramientas están en buen estado y en su sitio.
- iii) Todas las herramientas están en buen estado pero no en su sitio.
- iv) No todo está en su sitio y en buen estado.
- v) Nada está en buen estado y en su sitio. (Algo está en buen estado y en su sitio.)
- vi) Solo una de las herramientas no está en su sitio aunque está en buen estado,
- vii) Una de las herramientas que no está en su sitio no está en buen estado.
- viii) Todo lo que está en su sitio no está en buen estado.
- ix) Todo lo que no está en su sitio está en buen estado.

9 Considera los siguientes predicados: $P(x)$ el predicado "x es parvo", $C(x,y)$ el predicado "x e y están casados", $E(x,y)$ el predicado "x engaña a y". Considerando el universo de toda la gente, transcribe en lenguaje corriente las siguientes sentencias :

- i) $\forall x \forall y (C(x,y) \rightarrow (E(x,y) \rightarrow \neg P(y)))$.
- ii) $\forall x \forall y (\neg (C(x,y) \wedge E(x,y)) \rightarrow P(y))$.
- iii) $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow (C(x,y) \wedge E(y,x)))$.
- iv) $\exists x \exists y (P(y) \wedge C(x,y) \wedge \neg E(x,y))$.
- v) $\forall x \forall y (P(y) \rightarrow (E(x,y) \rightarrow C(x,y)))$.
- vi) $\forall x \forall y (C(x,y) \rightarrow (P(y) \rightarrow \neg E(x,y)))$.
- vii) $\forall y \exists x (P(y) \rightarrow (C(x,y) \vee E(x,y)))$.
- viii) $\exists x \forall y (\neg P(x) \wedge E(y,x) \rightarrow \neg C(x,y))$.
- x) $\forall x \exists y ((P(x) \wedge C(x,y)) \rightarrow E(y,x))$.
- ix) $\exists x \exists y (P(x) \wedge \neg C(x,y) \wedge E(x,y))$.

10 Considera P y Q dos predicados unarios. Ver si cada par de fórmulas son equivalentes (tienen siempre los mismos valores de verdad, en cualquier universo), en caso de que no lo sean dar un contraejemplo.

- i) $\forall y (Q(y) \vee P(y)) ; \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
- ii) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) ; \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$
- iii) $\exists y (P(y) \vee Q(y)) ; \exists y P(y) \vee \exists y Q(y)$
- iv) $\exists y (P(y) \wedge Q(y)) ; \exists y P(y) \wedge \exists y Q(y)$
- v) $\exists y (P(y) \wedge \neg Q(y)) ; \neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
- vi) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) ; \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
- vii) $\exists y (P(y) \rightarrow Q(y)) ; \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$

11 Considerar dos subconjuntos A y B de un conjunto X , de n elementos, $\text{card}(X)=n$, $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Cualquier subconjunto de X puede representarse en un ordenador por una cadena de n bits, dígitos binarios.

Así $A \equiv a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ siendo para cada i , $a_i \in \{0,1\}$ de forma que: si $a_i=1$ eso indica que $x_i \in A$ y si $a_i=0$, $x_i \notin A$. Análogamente para $B \equiv b_1 b_2 b_3 \dots b_n$ / $b_i \in \{0,1\}$, si $b_i=1$ indica que $x_i \in B$ y si $b_i=0$, $x_i \notin B$.

- a) Describe con bits el subconjunto $A \setminus B$ diferencia de A y B , definido por $A \setminus B := \{x / (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, es decir, usando una cadena de bits $A \setminus B \equiv c_1 c_2 c_3 \dots c_n$ / $c_i \in \{0,1\}$, describir c_i , en función de los valores de a_i y b_i .
- b) Describe con bits el subconjunto $A \oplus B$ diferencia simétrica de A y B , definido por $A \oplus B := \{x / (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B\}$, es decir, usando una cadena de bits $A \oplus B \equiv c_1 c_2 c_3 \dots c_n$ / $c_i \in \{0,1\}$, describir c_i , en función de los valores de a_i y b_i .

12 Determinar (razonadamente) si es verdadera o falsa cada una de las sentencias: i) $\{\{1\}\} \subseteq \{1,\{1\}\}$, ii) $0 \in \emptyset$. iii) $\emptyset \in \{0\}$. iv) $\{0\} \subset \emptyset$. vi) $\{0\} \in \{0\}$. vii) $\{0\} \subset \{0\}$. viii) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$.

13 Si $P(X) := \{C / C \subseteq X\}$ es el conjunto de partes del conjunto X . Para A y B dos conjuntos cualesquiera:

- i) Probar que $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$. ¿Son iguales los conjuntos $P(A \cap B)$ y $P(A) \cap P(B)$? Razónese.
- ii) Probar que $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. ¿Son iguales los conjuntos $P(A \cup B)$ y $P(A) \cup P(B)$? Razonar la respuesta.

14 Sea X un conjunto no vacío. Considerar A y B dos subconjuntos de X . Los subconjuntos de X ,

$A \setminus B$ (diferencia de A y B), $A \oplus B$ (diferencia simétrica de A y B) y $C_X(A)$ (complementario de A en X)

se definen: $A \setminus B := \{x \in X / (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, $A \oplus B := \{x \in X / (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$ y $C_X(A) := \{x \in X / x \notin A\}$

- i) Probar que $A \setminus B = C_A(A \cap B)$, $A \setminus B = A \cap C_X(B)$, $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $B \oplus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, $B \oplus A = C_{A \cup B}(A \cap B)$, $A \oplus A = \emptyset$, $A \oplus \emptyset = A$,
- ii)- Hallar: $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \oplus B$, $C_X(A)$, $C_X(B \setminus A)$ y $C_X(A \oplus B)$ para los casos: $A \oplus C_X(A) = X$ y $A \oplus X = C_X(A)$

a) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $X = \{x \in N / (x \leq 20) \wedge (x \text{ es primo})\}$

b) A el conjunto de los estudiantes del Grado de Matemáticas de la USC, B el de los estudiantes del Grado de Ingeniería Informática de la USC y X el conjunto de todos los estudiantes de la USC.

15 Considerar las aplicaciones f y g del conjunto de los números reales \mathbb{R} en \mathbb{R} , es decir, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = (x^2 - 1)$ y $g(x) = (x^2 + 1)$. Considerar $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$ la unión disjunta de los reales negativos, el cero y los reales positivos.

- a) Hallar i) $f(\{0, -1, 2\})$. ii) $f(\mathbb{N})$. iii) $f(\mathbb{R}^-)$. iv) $f(\mathbb{R}^+)$. v) $f(\mathbb{R})$. vi) $f^{-1}(\{0, -1, 2\})$. vii) $f^{-1}(\mathbb{N})$. viii) $f^{-1}(\mathbb{Z})$. ix) $f^{-1}(\mathbb{R})$. x) $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$. xi) $f^{-1}(\mathbb{R})$. x) $f(f^{-1}(\mathbb{Z}))$
- b) Hallar i) $g(\{0, -1, 3\})$. ii) $g(\mathbb{N})$. iii) $g(\mathbb{R}^-)$. iv) $g(\mathbb{R}^+)$. v) $g(\mathbb{R})$. vi) $g^{-1}(\{0, -1, 3\})$. vii) $g^{-1}(\mathbb{N})$. viii) $g^{-1}(\mathbb{Z})$. ix) $g^{-1}(\mathbb{R})$. x) $g^{-1}(\mathbb{R}^-)$. xi) $g^{-1}(\mathbb{R})$. x) $g(g^{-1}(\mathbb{Z}))$

16

Considerar una aplicación $f: X \rightarrow Y$. Si S y T son subconjuntos de Y ($S \subseteq Y, T \subseteq Y$) y si A y B son subconjuntos cualesquiera de X ($A \subseteq X, B \subseteq X$).

Probar que se cumple:

- a₁) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ y a₂) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.
- b₁) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. y b₂) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, son iguales si f es inyectiva.
- c₁) $f^{-1}(T) = f^{-1}(T \cap f(X))$ y $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$ para todo $T \in P(Y)$. c₂) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ para todo $A \in P(X)$.

[Nota: Si $K \subseteq X$, la imagen (directa) de K por f , $f(K) := \{f(a) / a \in K\}$, $f(K) \subseteq Y$]

Si $C \subseteq Y$, la imagen recíproca de C por f , $f^{-1}(C) := \{x \in X / f(x) \in C\}$]

17 Considerar dos aplicaciones f y g , $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ siendo X, Y y Z conjuntos arbitrarios no vacíos. a₁) Si la composición $g \circ f$ es inyectiva, probar que f es inyectiva.

a₂) Si la composición $g \circ f$ es sobreyectiva, probar que g es sobreyectiva.

b₁) Dar un ejemplo de aplicaciones f y g , tal que la composición $g \circ f$ sea biyectiva, pero f no sea sobreyectiva. Indicación: *Ensayar con conjuntos finitos*

b₂) Dar un ejemplo de aplicaciones f y g , tal que la composición $g \circ f$ sea biyectiva, pero g no sea inyectiva. Indicación: *Ensayar con conjuntos finitos*

c₁) Probar que f es inyectiva si, y sólo si $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \in P(X)$.

c₂) Prueba que f es sobreyectiva si, y sólo si $f(f^{-1}(T)) = T$ para todo $T \in P(Y)$

18 Considerar la aplicación $f: X \rightarrow Y$, si $x \in X, f(x) \in Y$.

Determinar en cada caso si f es inyectiva o sobre :

- i) $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{Q}, f(x) = 2x + 1$. ii) $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x) = (x-1, 1)$.
- iii) $X = \mathbb{R}^+, Y = \mathbb{R}, f(x) = +\sqrt{x}$. iv) $X = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}, Y = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}, f(x) = (x+3)/(1+2x)$
- v) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$.

19 Considerar las aplicaciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas :

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g = \begin{cases} 3x & \text{si } x \geq 0 \\ x + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{Probar que } g \circ f \text{ es biyectiva.}$$

Dar una fórmula para su inversa $(g \circ f)^{-1}$. Probar además que $f \circ g$ no es inyectiva ni sobre

20 Considerar la aplicación de los naturales en los naturales $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n + 1$

a) Probar que no existe ninguna aplicación $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$, pero que existen infinitas aplicaciones $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que $h \circ f = 1_{\mathbb{N}}$.

b) Si f está definida por: $f(n) = n/2$ si n es par y $f(n) = (n-1)/2$ si n es impar. Probar que no existe ninguna aplicación $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$, pero que existen infinitas aplicaciones $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que $f \circ h = 1_{\mathbb{N}}$.

21 a) Conjetura una fórmula para la suma de los cubos de los n primeros números naturales.

Probar por inducción que dicha fórmula es correcta.

b) Probar por inducción que $\forall n, n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ se cumple: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (n(n+1)(2n+1))/6$.