1(1,5pts) – i) **Calcular,** usando el método de Gauss, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente tenga solución no trivial:

$(\lambda+1)x + (\lambda+1)z = 0$
$-x + (\lambda-2)y + z = 0$
$z + 3y + \lambda z = 0$ **Resolver** el sistema en estos casos.

ii) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2b & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

a) **Calcular,** en función de los valores de b, el rango de A.
b) **Calcular,** cuando sea posible, A^{-1} y **expresar** $(A^{-1})^T$ como producto de matrices elementales.

2(1,5pts) – **Justificar,** razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Si AX=D es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, entonces el sistema cuya matriz ampliada se obtiene de (A|D) cambiando $F_2(A|D)$ por $2F_2(A|D) + \beta F_3(A|D)$, con $\beta \in \mathbb{R}$, es equivalente a AX=D

ii) Si $A_1X=D_1$ es un sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas, entonces el sistema cuya matriz ampliada se obtiene de $(A_1|D_1)$ cambiando $F_3(A_1|D_1)$ por $3F_2(A_1|D_1) + \beta F_3(A_1|D_1)$, con $\beta \in \mathbb{R}$, es equivalente a $A_1X=D_1$

iii) Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $|A|=6$, entonces: $\det((-3)E_1(2) \cdot E_{31}(-7) \cdot E_{31} \cdot A^{-1} = -9$

iv) Si A, B $\in \mathcal{M}_n(K)$, son dos matrices cuadradas reales y A es no singular entonces B es equivalente por filas con AB.

3( ) – **Razona** si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a)- En el $\mathbb{R}$ espacio vectorial, V:= {f: $\mathcal{M}_{2x5}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_4[x]$}, de las aplicaciones lineales de $\mathcal{M}_{2x5}(\mathbb{R})$ (matrices reales de orden 2x5) en $\mathbb{R}_4[x]$ (polinomios con coeficientes reales de grado ≤ 4), existe un subespacio de dimensión 45.

b) Sea $Id_{\mathbb{R}3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $Id_{\mathbb{R}3}(v)=v$. La matriz de $Id_{\mathbb{R}3}$ respecto de la base canónica C_3 es $I_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Existen bases B_1 y B_2 en $\mathbb{R}^3$ tales que $(Id_{\mathbb{R}3})_{B1C3} = (Id_{\mathbb{R}3})_{C3B2} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(C_3 la canónica)

c) Considerar el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado ≤ 3 en una variable con coeficientes reales. En el subespacio U:= {p(x) ∈ $\mathbb{R}_3[x]$ | p(2) = 0, p(-3) = 0} que tiene dimensión 2 existe un único polinomio p(x) ≠ 0 tal que p(0) = 0. [p(a) denota el valor que toma p(x) para x = a ∈ $\mathbb{R}$]

d) Si h: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal tal que ker $h \oplus$ Im $h = \mathbb{R}^3$ y dim(Im h) =1, entonces diagonaliza.

4) En $\mathbb{R}_3[x]$ (espacio vectorial de los polinomio de grado ≤ 3 con coeficientes reales), considerar la base canónica C:= $\{1, x, x^2, x^3\}$ y los subespacios *U* y *V* dados por:

U:=$\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid a_0+a_1+2a_2+2a_3=0,\ a_1+a_3=0\}$ y

V:= $\{(-3\alpha+2\beta)+\beta x+(\alpha-\beta)x^2-\beta x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

a) **Halla** bases y ecuaciones implícitas (cartesianas) de: U, V, U∩V, U+V.

b) **Encuentra** un subespacio W, suplementario de V en $\mathbb{R}_3[x]$ y que no contenga al polinomio $q(x)= 1-2x-3x^2+4x^3$. Poner el vector q(x) como suma de un vector V y otro de W.

5) Sea f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas C_3 y C_4 está dada por:

$$f(x,y,z,t) = (x -2y +3z +t,\ x+y\ 3z\ 2t,\ 2x -y -t)$$

i)- **Calcula** $(f)_{C4C3}$ la matriz asociada respecto de las bases canónicas. ¿Qué rango tiene? ¿Es f inyectiva? ¿Es sobreyectiva? Razónese.
Halla bases y ecuaciones lineales del núcleo y de Imf.

ii)-**Considera** los subespacios U_3 y W_4, respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, $U_3 = <\{e_1 - e_2,\ e_1 - 2e_3\}>$ y $W_4 = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z - t = 0\}$. **Calcula** $f^{-1}(U_3)$ y $f^{-1}(W_4)$, y **comprueba** que $f(W_4) =$ Imf. ¿Son $W_4 \cap f^{-1}(U_3)$ y Ker$f$ subespacios complementarios? Razónese.

iii)- Sea g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas C_3 y C_4 está dada por: $g(e'_1) = e_1 - 2e_2 +3e_3 + e_4$, $g(e'_2) = e_1 + e_2 + 3e_3 - 2e_4$ y $g(e'_3) = 2e_1 - e_2 - e_4$.
Comprueba que *diagonaliza* la matriz $(f \circ g)_{C3}$, asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, siendo f la aplicación del apartado i).
Calcula una base de $\mathbb{R}^3$ de vectores propios, B, respecto de la cual la matriz D = $(f \circ g)_B$, de $f \circ g$ respecto a B, es diagonal.
Encuentra una matriz P no singular tal que $P^{-1}DP = A$, siendo $A = (f \circ g)_{C3}$ y **comprueba** que $DP = PA$.