

# Exame Álgebra Xaneiro 2016

4 de febrero de 2017

1. Resolver razoadamente as seguintes cuestións:

a) Calcular, por medio de operacións elementais, a inversa de  $A$ . Sendo  $A$ , a matriz real  $5 \times 5$  tal que  $A = I_5 + \alpha(e_{12} + e_{23} + e_{34} + e_{54})$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $I_5$  a identidade de orde 5 e  $e_{ij}$  a matriz  $5 \times 5$  con só un valor non nulo, 1, na posición  $ij$

b) Considerar a matriz real  $n \times n$ ,  $D_n = (x - \alpha)I_n + \alpha U_n$ , con  $x, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $I_n$  a identidade de orde  $n$  e  $U_n = (a_{ij})$  con  $a_{ij} = 1 \ \forall i \ \forall j$ . Usando as propiedades dos determinantes, calcular  $|U_n|$

c) Sexa a aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(E_i) = F_i$ , con  $B_1 = \{E_1 = (1, 1), E_2 = (-1, 1)\}$  e  $B_2 = \{F_1 = (1, 2), F_2 = (2, 1)\}$  dúas bases de  $\mathbb{R}^2$  e  $C$  a base canónica. Calcular: i)  $(f)_{B_1 C}$  ii)  $(f)_{B_1 B_2}$  iii)  $(f)_{C B_2}$  iv)  $(f)_{B_2 C}$ .

d) Comproba que a matriz do apartado b)  $D_3$  para  $x = \alpha + 1$  e  $\alpha = -1/3$  é idempotente. Comproba tamén que ten 0 e 1 como valores propios e que é diagonalizable. Atopa unha base ou as ecuacións dos subespacios propios  $V_0$  e  $V_1$ .

2. Sexa  $C = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$  a matriz ampliada de  $S$  un sistema de ecua-

cións lineais con coeficientes reais. Atopa os valores que deben tomar  $a$  e  $b$  para que sucedan os seguintes casos: a)  $S$  ten solución única.

b)  $S$  non ten solución.

c) As solucións de  $S$  veñen dadas en función de un parámetro.

d) As solucións de  $S$  veñen dadas en función de dous parámetros.

3. Sexa  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicación lineal dada por  $h(x, y, z) = (x + 2y + z, x - y, x - y)$ .

a) Calcula  $A = (h)_C$  a matriz de  $h$  respecto da base caónica. Atopar unha base do núcleo e da imaxe de  $h$ , tamén de  $\ker(h) + \operatorname{Im}(h)$ . É directa esta suma? Encontra as ecuacións lineais de  $h(W) \cap h^{-1}(W)$  sendo  $W = \langle e_2, e_3 \rangle$

b) Razona que  $h$  é diagonalizable e atopa a base  $B$  de vectores propios respecto da cal a matriz  $D = (h)_B$  (matriz de  $h$  respecto de  $B$ ) é diagonal. Comproba que  $P^{-1}AP = D$ .

c) Dar unha fórmula para a potencia  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , cando sexa posible calculala.