Parte de cálculo do exame de Fu. Ma. (xaneiro 2013)

6a. A recta que une $P(-1,4)$ e $Q(3,2)$ é:

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-4}{2-4}; \quad y-4 = -\frac{1}{2}(x+1).$$

A pendente perpendicular á recta PQ é 2.

O punto medio entre P e Q é $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (1,3)$

logo a recta buscada é $y-3 = 2(x-1)$, é dicir,

$y = 2x+1$.

6b. $$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

6c. $$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+4h+5-5}{h\left(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h+4}{\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

6d. A derivada de $x^{3/2} + 2y^{3/2} = 17$ é

$$\frac{3}{2}x^{1/2} + 2\cdot\frac{3}{2}y^{1/2}\cdot y' = 0; \quad \sqrt{x} + 2\sqrt{y}\cdot y' = 0$$

No punto $(1,4)$ queda $1+4y' = 0$; $y' = -1/4$.

6e. O residuo do polinomio de Taylor do coseno de grao 3 arredor de 0 é

$$R_4(x) = \frac{\cos(c)}{4!}(x-0)^4 \text{ con } c \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

6e (continuación).

Avaliado en $x = 0.5$ e estimando que $|\cos c| \leq 1$, o erro sería:

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{4!}(0.5)^4 = \frac{1}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2^7 \cdot 3} = \frac{1}{384}.$$

6f. A caixa de base rectangular ten volume

$$V = x^2 y$$

A súa superficie (a minimizar) é

$$S = 2x^2 + 4xy$$

Substituíndo V en S, tense que

$$S(x) = 2x^2 + 4x\frac{V}{x^2}$$

Como $S(x)$ é derivable en $(0, +\infty)$ e nos extremos tende a $+\infty$, o mínimo debe acadarse nun punto crítico:

$$S'(x) = 4x - \frac{4V}{x^2}$$

Igualando a cero a expresión anterior queda

$$4x^3 - 4V = 0 \,; \quad x = V^{1/3}$$

e substituíndo na restricción obtense $y = V^{1/3}$.

7. En primeiro lugar, obsérvese que $D(0) = -D(180)$, por definición.

Agora, se $D(0) = 0$, os puntos 0 e 180 teñen a mesma temperatura. Se non é así, daquela $D(0) > 0$ e $D(180) < 0$ ou ben $D(0) < 0$ e $D(180) > 0$.

En calquera dos dous casos podemos aplicar o resultado que afirma a existencia de raíces para as funcións continuas que teñen signos distintos nos extremos do intervalo no que se buscan as raíces.