EXAME ÁLXEBRA XANEIRO 2022 CONVOCATORIA ORDINARIA

1. **(1.5 puntos)** Realizar as seguintes operacións:
   (a) **(0.75 puntos)** Discutir e resolver, segúndo os valores de a e $b \in \mathbb{R}$, o sistema de ecuacións lineais cuxa matriz ampliada é a seguinte: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & 1 & b-2 & a+1 \end{pmatrix} \in M_{(3\times 3)}(\mathbb{R})$
   (b) **(0.75 puntos)** Calcular, empregando transformacións elementais a inversa da matriz real.

   A $= \begin{pmatrix} b & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{(3\times 3)}(\mathbb{R})$. Ademais, expresa A^T como producto de matrices elementais.

2. **(1.5 puntos)** Responde razoadamente ás seguintes preguntas:
   (a) **(0.75 puntos)** Indica se son verdadeiras ou falsas as seguintes afirmacións:
      1. O sistema cuxa matriz ampliada se obtén de $(A|B)$ cambiando $F_3(A|B)$ por $2F_3(A|B) + \alpha F_3(A|B)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ é equivalente a $AX = B$.

      2. O sistema cuxa matriz ampliada se obtén de $(A|B)$ cambiando $F_3(A|B)$ por $2F_3(A|B) + \alpha F_2(A|B)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ é equivalente a $AX = B$.

      3. Se $det(A) = 3$, $A \in \mathbb{R}$ entonces, $det(E_{F_2+pF_1} \cdot E_{F_2 \longleftrightarrow F_3} \cdot E_{1/4F_2} \cdot -2A^{-1} = -12$.
   (b) **(0.75 puntos)** Demostra que se $B \in M_n(\mathbb{K})$ es no singular verifícase que $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$.

3. **(2 puntos)** Razoa se as seguintes afirmacións son verdadeiras ou falsas:
   (a) **(0.5 puntos)** O $\mathbb{R}$ espazo vectorial $V := \{f : \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{M}_3(\mathbb{R})\}$, das aplicacións lineares $\mathbb{R}_5[x]$ (polinomios de grao ≤ 5 en $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, ten dimensión 45.
   (b) **(0.5 puntos)** Sexa $Id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / Id_{\mathbb{R}^3}(v) = v$. ¿Existen bases B_1 e B_2 tales que $Id_{\mathbb{R}^3})_{B_1 C_3} = (Id_{\mathbb{R}^3})_{C_3 B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?
   (c) **(0.5 puntos)** No espazo vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ dos polinomios de grao ≤ 3 nunha variable con coeficientes reais, o subespazo $U := \{p(x) \in \mathbb{R}^3[x] | p(0) = 0, p(2) = 0, p(-1) = 0\}$ ten dimensión 1 e está xerado polo polinomio $x - 2x^2 - x^3$.
   (d) **(0.5 puntos)** Se $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ unha aplicación lineal tal que $Ker(h) = Im(h)$, entón, non diagonaliza.

4. **(2 puntos)** En $\mathbb{R}_3[x]$ (o espazo vectorial de polinomios de grao ≤ 3 con coeficientes reais), considerar a base canónica $C := \{1, x, x^2, x^3\}$ e os subespazos U e V dados por:

   $$U := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \quad | \quad 3a_1 + a_2 - a_3 = 0, \quad a_0 + 2a_1 - a_3 = 0\}$$
   $$V := \{2\alpha + (\alpha - \beta)x + (\alpha + \beta)x^2 + \beta x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \quad | \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

   (a) **(1 punto)** Acha bases e ecuacións implícitas de: $U, V, U \cap V, U \cup V$.
   (b) **(1 punto)** Atopa un subespazo de W, suplementario de V en $\mathbb{R}_3[x]$ e que non contexa ó polinomio $q_1(x) := 1 + 2x + 3x^2 + 4x^2$. Poñer o vector $q_1(x)$ como suma dun vector de V e outro de W.

5. **(3 puntos)** Sexa $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicación lineal que respecto das bases canónicas C_3 e C_4 está dada por:

$$f(x, y, z, t) = (x - y - t, -x - y + 2z + t, y - z - t) \tag{1}$$

(a) **(1 punto)** Calcula $(f)_{C_4C_3}$ a matriz asociada respecto das bases canónicas C_3 e C_4. Qué rango ten? É f inxectiva? É sobrexectiva? Razoa as respostas.

(b) **(1 punto)** Considera os subespazos de U_3 e W_4, respectivamente de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, $U_3 = \prec \{e_1 + e_3, e_2 - e_3\} \succ$ e $W_4 = \{(x, y, z, t) | 2x + y + z - t = 0\}$. Calcula $f^{-1}(U_3)$ e $f(W_4)$ e comproba que $f(W_4)$ é igual á imaxe de f.

(c) **(1 punto)** Sexa $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicación lineal respecto das bases canónicas está dada por:

$$g(e_1') = e_1 - e_2 + e_4 \qquad g(e_2') = -e_1 - e_2 + 2e_3 + e_4 \qquad g(e_1') = e_2 - e_3 - e_4$$

Comproba que *diagonaliza* a matriz $(f \circ g)$.

Calcula a base de $\mathbb{R}^3$ de vectores propios, B, respecto da cal a matriz $D = (f \circ g)$, respecto de B é diagonal

Atopa unha matriz P non singular tal que $P^{-1}DP = A$.