SOLUCIÓNS DO EXAME DE MATEMÁTICA DISCRETA
24/1/2012

1. (a) Existe o inverso de 19 módulo 141? En caso afirmativo, calculalo.
(b) Ten solucións a congruencia $19x \equiv 3 \bmod 141$? En caso afirmativo, calcular as soluciones que hai entre -200 e 200.

Solución:
(a) mcd(19, 141)=1. O inverso é 52, aplicando o algoritmo de Euclides.
(b) $19x \equiv 3 \bmod 141 \iff x \equiv \frac{1}{19} \cdot 3 \bmod 141 \iff x \equiv 52 \cdot 3 \bmod 141 \iff x \equiv 156 \bmod 141 \iff x \equiv 15 \bmod 141$.
As soluciones que hai entre -200 e 200 son:

$$-141 + 15 = -126, \quad 15, \quad 141 + 15 = 156\,.$$

2. Xustificar a igualdade $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

Solución: Polo teorema do binomio: $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.
En particular, $\big(1+(-1)\big)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}$.
Pero, $1+(-1)=0$, e así $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

3. (a) Determinar as soluciones da relación de recorrencia

$$a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n\,.$$

(b) Determinar a solución do apartado anterior coas condiciones iniciais $a_1 = 56$ e $a_2 = 278$.

Solución:
(a) Ecuación característica: $r^2 + 5r + 6 = 0$. $(r+2)(r+3) = 0$. raíces: -3,-2.
Solución xeral da homoxénea: $a_n = \alpha_1(-3)^n + \alpha_2(-2)^n$.
Solución particular da ecuación no homoxénea: $a_n^p = C \cdot 4^n$.

$$C \cdot 4^n = -5C \cdot 4^{n-1} - 6C \cdot 4^{n-2} + 42 \cdot 4^n\,.$$

Dividindo por 4^{n-2},

$$C \cdot 4^2 = -5C \cdot 4 - 6C + 42 \cdot 4^2 \iff 42 \cdot C = 42 \cdot 4^2 \iff C = 4^2 = 16\,.$$

A solución da ecuación de recorrencia é:

$$a_n = \alpha_1(-3)^n + \alpha_2(-2)^n + 16 \cdot 4^n\,.$$

.

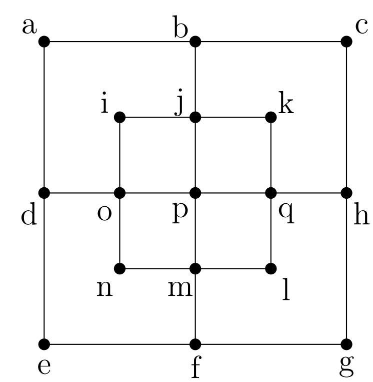
(b) $\left\{ \begin{array}{rcl} 56 & = & \alpha_1(-3) + \alpha_2(-2) + 16 \cdot 4 \\ 278 & = & \alpha_1(-3)^2 + \alpha_2(-2)^2 + 16 \cdot 4^2 \end{array} \right.$

Resolvendo o sistema, obtemos $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$.
Así, a solución é:

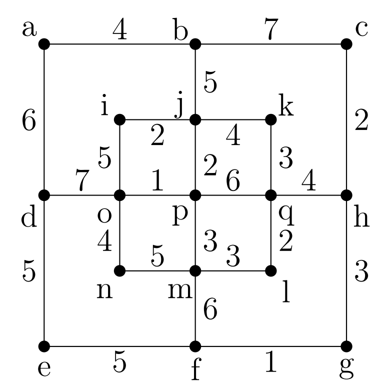
$$a_n = 2(-3)^n + (-2)^n + 16 \cdot 4^n \,.$$

.

4. Dado o seguinte grafo G



(a) Comprobar o teorema de apertón de mans. Calcular a sucesión de graos do grafo G.
(b) É bipartito? Cal é o número crómatico do grafo G?
(c) É conexo? Describir un camiño simple de lonxitude 6. É isomorfo ao grafo K_5?
(d) É euleriano? É hamiltoniano?
(e) É plano? Comprobar a fórmula de Euler para o grafo G.
(f) Calcular unha árbore xeradora minimal de G usando o algoritmo de Kruskal, sendo os pesos do grafo os que se indican a continuación



Solución:

(a) e= número de eixos: 24
Teorema de apertón de mans:

$2e = \text{grao}(a)+\text{grao}(b)+\text{grao}(c)+\text{grao}(d)+\text{grao}(e)+\text{grao}(f)+\text{grao}(g)+\text{grao}(h)+ \text{grao}(i)+\text{grao}(j)+\text{grao}(k)+\text{grao}(l)+\text{grao}(m)+\text{grao}(n)+\text{grao}(o)+\text{grao}(p)+ \text{grao}(q)$.

$2 \cdot 24 = 48 = 2+3+2+3+2+3+2+3+2+4+2+2+4+2+4+4+4.$

A sucesión de graos é: (2,2,2,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4).

(b) É bipartito, xa que se pode colorear con dúas cores. O número crómatico é 2.
Unha partición é: $\{a, c, e, g, j, m, o, q\}$ é $\{b, d, f, h, i, k, l, n, p\}$.

(c) G é conexo xa que para cada par de vértices existe un camiño que os une.
Hai moitos, por exemplo: i, j, k, q, l, m, n.
Non é isomorfo a K_5 xa que K_5 ten 5 vértices e G ten 17 vértices.

(d) G non é euleriano xa que ten vértices de grao impar.
G non é hamiltoniano pois $G - \{b, d, f, h\}$ ten 5 compoñentes conexas.

(e) Si, G é plano xa que no debuxo non se cortan ningún par de arestas.
Fórmula de Euler: $r = e - v + 2$. $e=$ eixos $= 24$ $v=$ vértices $= 17$.
$r=$ rexións $= 24 - 17 + 2 = 9$.

(f) Eliximos os eixos:
$fg, op,$ $ij, ql, ch, jp,$ gh, lm, pm, qk $ab, no, qh,$ bj, de, ef.