Álxebra (Grao en Enxeñaría Informática) 1^a oportunidade - 10/xaneiro/2024

1)- **Calcular**, usando el método de Gauss, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que tenga solución no trivial el sistema: **Resolver** el sistema en esos casos

$(\lambda-1)x+(\lambda-1)z=0$
$-2x+(\lambda-5)y+2z=0$
$x+2y-\lambda z=0$

Calcular, utilizando transformaciones elementales, la inversa de la matriz real:

$A = \begin{pmatrix} b & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. **Expresa** A^T como producto de matrices elementales.

2)- **Justificar**, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i- Si $AX = D$ es un sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas, entonces el sistema cuya matriz ampliada se obtiene de $(A \mid D)$ cambiando $F_2(A \mid D)$ por $4F_2(A \mid D) + \beta F_4(A \mid D)$, con $\beta \in \mathbb{R}$, es equivalente a $AX = D$. `(Es verdadera)`

ii- Si $A_1X = D_1$ es un sistema de 5 ecuaciones lineales con 5 incógnitas, entonces el sistema cuya matriz ampliada se obtiene de $(A_1 \mid D_1)$ cambiando $F_5(A_1 \mid D_1)$ por $5F_2(A_1 \mid D_1) + \beta F_5(A_1 \mid D_1)$, con $\beta \in \mathbb{R}$, es equivalente a $A_1X = D_1$.

iii- Si $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ y $|A| = -12$, entonces $\det[(-3)E_3(-\frac{2}{9}) \cdot E_{31}(-\frac{1}{6}) \cdot E_{13} \cdot A^{-1}] = -\frac{9}{2}$.

iv- Si $A, B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$, son dos matrices cuadradas reales y B no es singular entonces A es equivalente por filas con BA.

3)- **Razona** si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a)- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden n y denotemos por A^t su traspuesta.

Considerar $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por $T(A) := A + A^t$.

Se cumple que: $\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T) \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\dim\ \mathrm{Ker}(T) = \frac{n(n-1)}{2}$

b)- Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid h(v) = -2v$. La matriz de h respecto de la base canónica C_3 es $-2I_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

¿Existen bases B_1 y B_2 en $\mathbb{R}^3$ tales que $(h)_{B_1C_3} = (h)_{C_3B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$?

(C_3 la canónica)

c)- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios, $p(x)$ de grado ≤ 3 en una variable con coeficientes reales, los subespacios $V := \{p(x) \mid p(1) = 0, p(2) = 0\}$ y $U := \{q(x) \mid q(-1) = 0, q(-2) = 0\}$ son suplementarios y en V existe $p(x)$ tal que $p(0) = 0$ pero en U no existe $q(x)$ tal que $q(0) = 0$. [$p(a)$ denota el valor que toma $p(x)$ para $x = a \in \mathbb{R}$]

d)- La aplicación lineal de la cuestión a) para $n = 3$, $T_3 : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con $T_3(A) := A + A^t$, tiene sólo 2 valores propios distintos, pero no diagonaliza.

4)- En $\mathbb{R}_4[x]$ (espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 4 con coeficientes reales), considerar la base canónica $C := \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y los subespacios U y V dados por:

$U := \{p(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}_4[x] \mid a_0 - a_1 - a_3 = 0,\ 2a_1 + 2a_2 - 2a_4 = 0\}$

$V := \{4\beta + (\alpha + \beta + \gamma)x - 4\alpha x^2 - 4\beta x^3 + 2\gamma x^4 \in \mathbb{R}_4[x] \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

(a) **Halla** bases y ecuaciones implícitas (cartesianas) de: $U, V, U \cap V, U + V$

(b) **Prueba** que el subespacio $W = \langle \{p_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4, p_2(x) = x + x^3\} \rangle$ es suplementario de V en $\mathbb{R}_4[x]$ y no contiene al polinomio $q_1(x) := 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 - 5x^4$. Poner el vector $q_1(x)$ como suma de un vector de V y otro de W.

5)- Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas C_3 y C_4 está dada por:

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y - z + 3t,\ 2x - y + z + 2t,\ -x + 3y - 2z + t).$$

i.- **Calcula** $(f)_{C_4C_3}$ la matriz asociada respecto de las bases canónicas. ¿Qué rango tiene?

¿Es f inyectiva? ¿Es sobreyectiva? Razónese.

Halla bases y ecuaciones lineales del núcleo y de $\operatorname{Im} f$.

ii.- **Considera** los subespacios U_3 y W_4, respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, $U_3 = \langle \{e_1 + e_2 + e_3, e_2\} \rangle$ y $W_4 = \{(x, y, z, t) \mid 2x + y + z - t = 0\}$. **Calcula** $f^{-1}(U_3)$ y $f(W_4)$, y **comprueba** que $f(W_4) = \operatorname{Im} f$. ¿Son $W_4 \cap f^{-1}(U_3)$ y $\operatorname{Ker} f$ subespacios suplementarios? Razónese

iii.- Sea $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas C_3 y C_4 está dada por:

$$g(e_1') = e_1 + 2e_2 - e_3 + 3e_4, \quad g(e_2') = 2e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4 \quad \text{y} \quad g(e_3') = -e_1 + 3e_2 - 2e_3 + e_4.$$

Comprueba que diagonaliza la matriz $(f \circ g)_{C_3}$, asociada a la composición de g con f, respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Calcula la base de $\mathbb{R}^3$ de vectores propios, B, respecto de la cual la matriz $D = (f \circ g)_B$, de $f \circ g$ respecto a B, es diagonal.

Encuentra una matriz P no singular tal que $P^{-1}DP = A$, siendo $A = (f \circ g)_{C_3}$