## ÁLGEBRA ENERO 2020

**1 .-**

a) Considerar una matriz cuadrada real de orden 3, $A \in M_3(\mathfrak{R})$

i) Si $|A| = -5$, calcula $|((-2)A^{-1}) \cdot E_{F1\leftrightarrow F2} \cdot E_{5F3} \cdot A^T \cdot E_{F1+2F2}|$

ii) Si $A = (f_\delta)_{C3}$ con $f_\delta : \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^3$ la aplicación lineal dada por:
$f_\delta(x,y,z) = (\delta x + y + z, x + \delta y + z, x + y + \delta z)$.

1) Encuentra los valores de $\delta$ para los cuales A no tiene inversa.
2) Calcula $f_\delta^{-1}\{(\delta,\delta,\delta)\}$ en función de $\delta$.
3) Si $\delta = 3$ calcula $A^{-1}$ y exprésala como producto de matrices elementales.

b)

i) Enuncia las propiedades de los determinantes de las cuales se deduce en valor del determinante de las matrices elementales de orden n.

ii) Si $B \in M_{mxn}(\mathfrak{R})$, prueba que B y $3{\cdot}B$ son equivalentes por filas.

**2**- Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) En $\mathfrak{R}^9$ todo subespacio U de dimensión 5 es la intersección de 2 subespacios de dimensión 7.

ii) Sea $A \in M_n(\mathfrak{R})$ una matriz cuadrada de orden n y denotemos por $A^t$ su traspuesta.
Considerar $T: M_n(\mathfrak{R}) \to M_n(\mathfrak{R})$ la aplicación lineal dada por $T(A) := A - A^t$, entonces $\dim(Ker(T)) = n(n-1)/2$.

iii) Si $h: \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^5$ es una aplicación lineal no nula y no inyectiva, existe un subespacio de dimensión 4 ($\dim(W) = 4$), tal que $h^{-1}(W)$ tiene dimensión 2 ($\dim(h^{-1}(W)) = 2$).

iv) Existe $g: \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^3$, lineal y no nula, tal que $g^2 = 0$. Esta g tiene un solo valor propio, 0, de multiplicidad 3 entonces g no diagonaliza.

**3**- Sea $f: \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^4$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas $C_3$ y $C_4$ está dada por:

$f(e'_1) = 2e_2 + 2e_3 - e_4$, $f(e'_2) = e_2 - 2e_3 + e_4$ y $f(e'_3) = -e_2$.

i) Calcula la matriz asociada $(f)_{C3C4}$. ¿Qué rango tiene? ¿Es $f$ inyectiva?¿Es sobreyectiva? Razónese.

ii) Halla una base del núcleo y las ecuaciones lineales de Im$f$.

iii) Considerar los subespacios $U_3$ y $W_4$, respectivamente de $\mathfrak{R}^3$ y $\mathfrak{R}^4$, $U_3 = \{(x,y,z)/x + y - z = 0\}$ y $W_4 = \langle\{e_2 + e_3, e_1 + e_3 + e_4\}\rangle$.
Prueba que $U_3$ y $f^{-1}(W_4)$ son subespacios suplementarios. ¿Son $W_4$ y $f(U_3)$ suplementarios?

**4**- Si $g: \mathfrak{R}^4 \to \mathfrak{R}^3$ es la aplicación lineal dada por: $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_2 + 2x_3 - x_4, x_2 - 2x_3 + x_4, -x_2)$.

a) Prueba que tanto *f o g* como *g o f* diagonalizan. Siendo *f* la aplicación del ejercicio anterior.
b) Calcula la base B, de $\mathfrak{R}^3$ de vectores propios respecto de la cual matriz $D = (g \circ f)_B$, de *g o f* respecto a B, es diagonal.
c) Encuentra una matriz P no singular tal que $P^{-1}DP = A$, siendo $A = (g \circ f)_{C3}$.