

1(1,5pts) – i) **Calcular**, usando el método de Gauss, los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente tenga solución no trivial:

$$(\lambda+1)x + (\lambda+1)z = 0$$

$$-x + (\lambda-2)y + z = 0$$

$$x + 3y + \lambda z = 0$$

Resolver el sistema en estos casos.

ii) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2b & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

a) **Calcular**, en función de los valores de b , el rango de A .

b) **Calcular**, cuando sea posible, A^{-1} y **expresar** $(A^{-1})^T$ como producto de matrices elementales.

2(1,5pts) – **Justificar**, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Si $AX=D$ es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, entonces el sistema cuya matriz ampliada se obtiene de $(A|D)$ cambiando $F_2(A|D)$ por $2F_2(A|D) + \beta F_3(A|D)$, con $\beta \in \mathbb{R}$, es equivalente a $AX=D$

ii) Si $A_1X=D_1$ es un sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas, entonces el sistema cuya matriz ampliada se obtiene de $(A_1|D_1)$ cambiando $F_3(A_1|D_1)$ por $3F_2(A_1|D_1) + \beta F_3(A_1|D_1)$, con $\beta \in \mathbb{R}$, es equivalente a $A_1X=D_1$

iii) Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $|A|=6$, entonces: $\det((-3)E_1(2) \cdot E_{31}(-7) \cdot E_{31} \cdot A^{-1}) = -9$

iv) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, son dos matrices cuadradas reales y A es no singular entonces B es equivalente por filas con AB .

3() – **Razona** si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a)- En el \mathbb{R} espacio vectorial, $V := \{f: \mathcal{M}_{2 \times 5}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_4[x]\}$, de las aplicaciones lineales de $\mathcal{M}_{2 \times 5}(\mathbb{R})$ (matrices reales de orden 2×5) en $\mathbb{R}_4[x]$ (polinomios con coeficientes reales de grado ≤ 4), existe un subespacio de dimensión 45.

b) Sea $Id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / Id_{\mathbb{R}^3}(v)=v$. La matriz de $Id_{\mathbb{R}^3}$ respecto de la base canónica C_3 es

$I_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Existen bases B_1 y B_2 en \mathbb{R}^3 tales que $(Id_{\mathbb{R}^3})_{B_1 C_3} = (Id_{\mathbb{R}^3})_{C_3 B_2} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(C_3 la canónica)

c) Considerar el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios de grado ≤ 3 en una variable con coeficientes reales. En el subespacio $U := \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(2) = 0, p(-3) = 0\}$ que tiene dimensión 2 existe un único polinomio $p(x) \neq 0$ tal que $p(0) = 0$. [$p(a)$ denota el valor que toma $p(x)$ para $x = a \in \mathbb{R}$]

d) Si $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal tal que $\ker h \oplus \text{Im } h = \mathbb{R}^3$ y $\dim(\text{Im } h) = 1$, entonces diagonaliza.

4) En $\mathbb{R}_3[x]$ (espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales), considerar la base canónica $C := \{1, x, x^2, x^3\}$ y los subespacios U y V dados por:

$$U := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 + a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0, a_1 + a_3 = 0\}$$

$$V := \{(-3\alpha + 2\beta)x + (\alpha - \beta)x^2 - \beta x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

a) **Halla** bases y ecuaciones implícitas (cartesianas) de: U , V , $U \cap V$, $U + V$.

b) **Encuentra** un subespacio W , suplementario de V en $\mathbb{R}_3[x]$ y que no contenga al polinomio $q(x) = 1 - 2x - 3x^2 + 4x^3$. Poner el vector $q(x)$ como suma de un vector V y otro de W .

5) Sea $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas C_3 y C_4 está dada por:

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + 3z + t, x + y - 3z - 2t, 2x - y - t)$$

i)- **Calcula** $(f)_{C_4 C_3}$ la matriz asociada respecto de las bases canónicas. ¿Qué rango tiene?

¿Es f inyectiva? ¿Es sobreyectiva? Razónese.

Halla bases y ecuaciones lineales del núcleo y de $\text{Im } f$.

ii)- **Considera** los subespacios U_3 y W_4 , respectivamente de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 , $U_3 = \langle \{e_1 - e_2, e_1 - 2e_3\} \rangle$ y $W_4 = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z - t = 0\}$. **Calcula** $f^{-1}(U_3)$ y $f^{-1}(W_4)$, y **comprueba** que $f(W_4) = \text{Im } f$. ¿Son $W_4 \cap f^{-1}(U_3)$ y $\text{Ker } f$ subespacios complementarios? Razónese.

iii)- Sea $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que respecto de las bases canónicas C_3 y C_4 está dada por: $g(e'_1) = e_1 - 2e_2 + 3e_3 + e_4$, $g(e'_2) = e_1 + e_2 + 3e_3 - 2e_4$ y $g(e'_3) = 2e_1 - e_2 - e_4$.

Comprueba que *diagonaliza* la matriz $(f \circ g)_{C_3}$, asociada a la base canónica de \mathbb{R}^3 , siendo f la aplicación del apartado i).

Calcula una base de \mathbb{R}^3 de vectores propios, B , respecto de la cual la matriz $D = (f \circ g)_B$, de $f \circ g$ respecto a B , es diagonal.

Encuentra una matriz P no singular tal que $P^{-1}DP = A$, siendo $A = (f \circ g)_{C_3}$ y **comprueba** que $DP = PA$.