Weak k-Metric Dimension
(kratek opis)

Miha Jan in Sara Žužek

December 2023

1 Navodilo naloge

Implement an ILP model for this invariant, and then write separate small programs in Sage to answer each of following questions by exhaustive search.

1. Find graphs for which $wdim_k(G) = \Delta(x, y)$ for a pair of vertices $x, y \in V(G)$ such that $d(x, y) \geq 3$.
2. Determine $\kappa(G)$ and $wdim_k(G)$ for Cartesian products of cycles $G = C_a \square C_b$.
3. Determine the graphs G with $wdim_k(G) = dim_k(G)$ for various k with $k \leq \kappa(G)$.

For small graphs, apply a systematic search; for larger ones, apply some stochastic search.

2 Uporabne definicije

Definicija 1 *Naj bo $S \subseteq V(G)$ in $a, b \in V(G) \cup E(G)$. Definiramo $\Delta_S(a, b)$ kot vsoto razlik razdalj od a in b do vsakega vozlišča S. Torej je*

$$\Delta_S(a, b) = \sum_{s \in S} |d(s, a) - d(s, b)|.$$

Označimo $\Delta_{V(G)}(a, b) = \Delta(a, b)$.

Definicija 2 **Šibka (vozliščna) k-metrična dimenzija** *grafa G $wdim_k(G)$, je kardinalnost/moč najmanjše množice vozlišč S grafa G, tako da za vsak par vozlišč $x, y \in V(G)$ velja $\Delta_S(x, y) \geq k$.*

Definicija 3 *Največja vrednost parametra k, za katerega je Šibka k-metrična dimenzija grafa G smiselno definirana označimo z $\kappa(G)$*

Definicija 4 **K-metrična dimenzija** *grafa G $dim_k(G)$ je velikost najmanjše množice vozlišč S grafa G, ki reši graf G in ji rečemo k-rešljiva množica. Za razliko od standardne metrične dimenzije ta zahteva, da vsak par vozlišč reši vsaj k vozlišč. K-metrična dimenzija se ujema z običajno dimenzijo, ko je $k = 1$.*

3 Opis problema

Najina celotna projektna naloga se bo navezovala na k-te šibke dimenzije grafov. Kot glavno gradivo nama bo služil čanek [1].

Projekt bova razdelila na več manjših delov. Napisala bova CLP, ki bo za dan graf določil množico S, katere moč bo predstavljala šibko dimenzijo obravnavanega grafa. Potem bova ločila najino delo na 3 primere glede navodila

1. V tem delu bova iskala grafe za ketere velja $wdim_k(G) = \Delta(x, y)$, pri čemer je $d(x, y) \geq 3$ za izbrani vozlišči $x, y \in V(G)$.

2. Določila bova $\kappa(G)$ in $wdim_k(G)$ za kartezične produkte ciklov $G = C_a \Box C_b$.

3. Za različne vrednosti k morava najti grafe G za katere velja lastnost $wdim_k(G) = dim_k(G)$, pri čemer $k \leq \kappa(G)$. V tem delu bova uporabila algoritem, ki ga je napisala skupina 4 in izračuna $dim_k(G)$. Na istem grafu pa bova pognala še najin CLP in opazovala za kakšne grafe se ti dimenziji ujemata.

4 Načrt dela

Za pisanje CLP bova uporabljala okolje Sage (SageMath), ki ima vgrajeno podporo za pisanje CLP. V prvem delu se bova osredotočila predvsem na pisanje učinkovitega CLP, ki bo deloval na manjših grafih. Ugotoviti morava kako smisleno izbrati spremenljivke, ki bodo v njem nastopale in jih potem smiselno minimizirati.

V nadaljevanju bova poskušala uporabiti rezultate iz prvega dela in to implementirati na večjih grafih s pomočjo metahevristike.

4.1 Načrt dela za majhne grafe (sistematično)

Prva naloga je, da napiševa CLP. Tega se bova lotila tako, da bova v Sage prepisala sledeči CLP (ideja zanj je zapisana v [1]):

Naj bo $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ množica vozlišč grafa G. Naj bo $S \subseteq V(G)$. Definiramo celoštevilske spremenljivke x_i za vsako vozlišče grafa po sledečem predpisu

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{if } v_i \in S \\ 0 & \text{if } v_i \notin S \end{cases}$$

iskani CLP je naslednje oblike

$$\begin{array}{ll} & \min \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} \left| d\left(v_a, v_i\right) - d\left(v_b, v_i\right) \right| \cdot x_i \geq k \text{ za vsak par } v_a, v_b \in V(G), \\ & x_i \in \{0, 1\} \text{ za vse } 1 \leq i \leq n. \end{array}$$

Ob rešitvi zgornjega CLP nam bodo spremenljivke x_i povedale katera vozlišča so v množici S (če je $x_i = 1$, potem $v_i \in S$). Torej potem preprosto razberemo tudi moč S, kar je iskana $wdim_k(G)$.

Ob proučevanju zgornjega CLP so se pojavila naslednja vprašanja (in opažanja):

- Kako definirati dodatne spremenljivke, da se bova lahko znebila absolutnih vrednosti v CLP.
- v članku je navedena ocena $k \leq wdim_k(G)$. Ali bi torej z dodatnim pogojem $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$ pospešili iskanje rešitve? (Pogoj bi omejil moči množic S)
- V CLP bo potrebno izračunati razdalje med vsemi pari vozlišč. To bi naredila z vgrajeno funckijo v sage z Floyd-Warshallovim algoritmom (št. operacij $O(n^3)$)

4.1.1 Posebnosti za 1. del naloge

Za vsak grah G, ki ga bova obravnavala bo seveda treba izračunati $wdim_k(G)$ za vse smiselne k.

Poleg tega bo seveda treba izračunati $\Delta(x, y) = \sum_{s \in V(G)} |d(s, x) - d(s, y)|$ za vse pare vozlišč. Tega bi se lotila na sledeči način:

- Najprej izvedeva FW algoritem na grafu, da dobiva tabelo razdalj med vsakim parom vozlišč. (Matrika bo simetrična, ker so grafi neusmerjeni-to bo morda koristilo.)

- Z dvojno zanko se sprehodimo čez vse pare vrstic matrike dobljene prek FW in sproti pišemo novo matriko, recimo da jo označimo A (tudi A bo simetrična). Na (i,j)-tem mestu A bo izračun $\Delta(i, j)$, ta je izračunan prek vsote razlik absolutnih vrednostih ob sprehodu čez stolpce vrstic i in j.
- prek A bomo v 2. delu naloge dobili tudi $\kappa(G)$, ki je kar minimalni element matrike A
- zaradi pogoja $d(x, y) \geq 3$ bova obravnavala (opazovala ali obstaja enakost z šibko dimenzijo) vrednosti v matriki A le za tiste elemente za katere je istoležna vrednost v matriki FW ≥ 3
- z nekaj if in for zankami se bova torej sprehodila čez tabelo in opazovala ali graf zadošča tem pogojem sicer nadaljevala na naslednjih

4.1.2 Posebnosti za 2. del naloge

Enako kot je opisano v prejšnjem podrazdelku bova izračunala $\kappa(G)$. Zaradi simetrij karteizčnih produktov ciklov bi bilo smiselno ugotoviti kako bi lahko le te uporabila in zmanjšala časovno zahtevnost programa.

4.1.3 Posebnosti za 2. del naloge

Najprej bi želela določiti $\kappa(G)$, da bova vedela za katere k je smiselno dimenzije sploh računati. Potem bi na istem grafu računala svojo šibko dimenzijo z najinim CLP in navadno k-to dimenzijo z uporabo kode skupine 4.

Literatura

[1] I. Peterin, J. Sedlar, R. Škrekovski, I. G. Yero, *Resolving vertices of graphs with differences*, (2023) arXiv preprint arXiv:2309.00922.