

# Weak k-Metric Dimension (kratek opis)

Miha Jan in Sara Žužek

December 2023

## 1 Navodilo naloge

Implement an ILP model for this invariant, and then write separate small programs in Sage to answer each of following questions by exhaustive search.

1. Find graphs for which  $wdim_k(G) = \Delta(x, y)$  for a pair of vertices  $x, y \in V(G)$  such that  $d(x, y) \geq 3$ .
2. Determine  $\kappa(G)$  and  $wdim_k(G)$  for Cartesian products of cycles  $G = C_a \square C_b$ .
3. Determine the graphs  $G$  with  $wdim_k(G) = dim_k(G)$  for various  $k$  with  $k \leq \kappa(G)$ .

For small graphs, apply a systematic search; for larger ones, apply some stochastic search.

## 2 Uporabne definicije

**Definicija 1** Naj bo  $S \subseteq V(G)$  in  $a, b \in V(G) \cup E(G)$ . Definiramo  $\Delta_S(a, b)$  kot vsoto razlik razdalj od  $a$  in  $b$  do vsakega vozlišča  $S$ . Torej je

$$\Delta_S(a, b) = \sum_{s \in S} |d(s, a) - d(s, b)|.$$

Označimo  $\Delta_{V(G)}(a, b) = \Delta(a, b)$ .

**Definicija 2** Šibka (vozliščna)  $k$ -metrična dimenzija grafa  $G$   $wdim_k(G)$ , je kardinalnost/moč najmanjše množice vozlišč  $S$  grafa  $G$ , tako da za vsak par vozlišč  $x, y \in V(G)$  velja  $\Delta_S(x, y) \geq k$ .

**Definicija 3** Največja vrednost parametra  $k$ , za katerega je šibka  $k$ -metrična dimenzija grafa  $G$  smiselno definirana označimo z  $\kappa(G)$

**Definicija 4**  $K$ -metrična dimenzija grafa  $G$   $\dim_k(G)$  je velikost najmanjše množice vozlišč  $S$  grafa  $G$ , ki reši graf  $G$  in ji rečemo  $k$ -rešljiva množica. Za razliko od standardne metrične dimenzije ta zahteva, da vsak par vozlišč reši vsaj  $k$  vozlišč.  $K$ -metrična dimenzija se ujema z običajno dimenzijo, ko je  $k = 1$ .

### 3 Opis problema

Najina celotna projektna naloga se bo navezovala na  $k$ -te šibke dimenzije grafov. Kot glavno gradivo nama bo služil članek [1].

Projekt bova razdelila na več manjših delov potem pa bova za vsakega od njih napisala celoštevilski linearni program (CLP), ki bo rešil posamezne dele problema.

1. V tem delu bova iskala grafe za katere velja  $w\dim_k(G) = \Delta(x, y)$ , pri čemer je  $d(x, y) \geq 3$  za izbrani vozlišči  $x, y \in V(G)$ .
2. Določila bova  $\kappa(G)$  in  $w\dim_k(G)$  za kartezične produkte ciklov  $G = C_a \square C_b$ .
3. Za različne vrednosti  $k$  morava najti grafe  $G$  za katere velja lastnost  $w\dim_k(G) = \dim_k(G)$ , pri čemer  $k \leq K(G)$ .

### 4 Načrt dela

Za pisanje CLP bova uporabljala okolje Sage (SageMath), ki ima vgrajeno podporo za pisanje CLP. V prvem delu se bova osredotočila predvsem na pisanje učinkovitega CLP, ki bo deloval na manjših grafih. Ugotoviti morava kako smiselno izbrati spremenljivke, ki bodo v njem nastopale in jih potem smiselno minimizirati.

V nadaljevanju bova poskušala uporabiti rezultate iz prvega dela in to implementirati na večjih grafih s pomočjo metahevrstike.

### Literatura

- [1] I. Peterin, J. Sedlar, R. Škrekovski, I. G. Yero, *Resolving vertices of graphs with differences*, (2023) arXiv preprint arXiv:2309.00922.