Teorema Reziduurilor

Tapalaga Ecaterina Simona

Iunie 2013

Rezumat

Aplicatii ale teoremei reziduurilor in calulul unor chestii interesante. In prima parte avem introducere apoi exemple din x urmate de aplicatii de tip y.

Cuprins

1 Teorema Reziduurilor

Teorema 1. *Fie functia $f \in \mathcal{H}(G)$, unde $G \subset \mathbb{C}$ multime deschisa. Notam cu ρ mutimea tuturor punctelor singulare izolate ale lui f Fie $\widetilde{G} := G \cup S$, iar γ un contur in G omotop cu zero in $\widetilde{G}$*

$$\textit{Atunci suma: } \sum_{z \in \widetilde{G}} n(\gamma; z) Rez(f; z) \textit{ este finita si}$$

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z \in \widetilde{G}} n(\gamma; z) Rez(f; z)$$

Demonstraţie. $\exists \varphi : [0;1]^2 \mapsto G$ deformare continuua, $k = \varphi([0;1]^2) \subset \widetilde{G}$ compact.

Fie

$$r := \frac{1}{2} \mathrm{d}\left(k, \mathbb{C} \setminus \widetilde{G}\right)$$
$$D := \bigcup_{z \in k} \mathcal{U}(z; r)$$

$k \subset D \subset \overline{D} \subset \widetilde{G}$
γ omotop cu 0 in D
$\overline{D} \cap \rho$ finita $\implies \exists \{b_1, \ldots, b_k\} = \overline{D} \cap \rho$
Fie $\Pi_k(z)$ partea principala a dezvoltarii lui f in b_k

Deci, functia $g := f - \sum_{k=1}^{n} \Pi_k$ olomorfa mai putin in b_k admite o prelungire olomorfa g_1 la D .

$$\int_\gamma g = \int_\gamma g_1 = 0$$
$$g = g_1|_{D=\{b_1,\ldots,b_k\}}$$
$$\implies \int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma \Pi_k$$

Calculam

$$\int_\gamma \Pi_k \text{ , unde } \Pi_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{(k)} - m}{(z - b_k)^m}$$

Seria este uniform convergenta pe $\forall$ parte compacta din $\mathbb{C} \setminus \{b_a\} \implies$ uniform convergenta pe $\{\gamma\} \implies$ putem integra termen cu termen si

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}}{z - b_k} m = 0, \forall m > 1$$

Functia $\dfrac{1}{(z - b_n)^m}$ admite primitiva si $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - b_k} = 2\pi i \cdot n(\gamma; b_n) \cdot a_{-1}^{(k)}$ deci

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1} nn(\gamma; b_k) Rez(f; b_n)$$

Trebuie sa mai aratam ca $\forall z_0 \in \widetilde{G} \setminus (D \cap \rho) \colon n(\gamma; z_0) \cdot Rez(f; z_0) = 0$

Intr-adevar, daca pentru $z_0 \in \widetilde{G} \setminus (D \cap \rho)$ avem $Rez(f; z_0) \neq 0 \implies z_0 \in \rho$, deci $z_0 \notin D$ si

$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z_0} = 0$$

caci $h(\xi) = \frac{1}{\xi - z_0}$ olomorfa pe D si γ omotop cu zero

$$\implies \int_\gamma f = 2\pi i \sum_{z \in \widetilde{G}} n(\gamma; z) \cdot Rez(f; z)$$

□

2 Puncte singulare izolate

Definitie 1. *Fie $G \subset \mathbb{C}$ multime deschisa si $f \in \mathcal{H}(G)$. Punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeste punct singular izolat pentru functia f daca $z_0 \notin G$, dar $\exists p > 0$ a.i $\dot{\mathcal{U}}(z_0; p) \subset G \implies f \in \mathcal{H}(\dot{\mathcal{U}}(z_0; p))$*

Observatie 1. *De exemplu functiile $\frac{\sin(z)}{z}$, $\frac{1}{z}$, $e^{\frac{1}{z}}$ au singularitati izolate in $z = 0$*

Observatie 2. *Daca z_0 este un punct singular izolat pentru $f \in \mathcal{H}(G)$, iar $p > 0$ a.i $\dot{\mathcal{U}}(z_0; p) \subset G$, atunci f admite o dezvoltare in serie Laurent de forma*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in \dot{\mathcal{U}}(z_0; p)$$

Coeficientul a_{-1} al termenului $(z - z_0)^{-1}$ se numeste reziduul functiei f in z_0 si se noteaza cu $a_{-1} = Rez(f; z_0)$

Definitie 2. *Fie $G \subset \mathbb{C}$ multime deschisa, $f \in \mathcal{H}(G)$, iar z_0 punct singular izolat al functiei f. Spunem ca:*

1. *z_0 este punct eliminabil daca f se extinde olomorf la $\Omega \cup \{z_0\}$*
2. *z_0 este pol daca $lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$*
3. *z_0 este punct esential izolat daca $\nexists$ limita a lui f in z_0*
4. *Un punct z este regular pentru f daca z este eliminabil pentru f sau f este derivabila in z*

3 Calcularea reziduului intr-un pol

1. Daca z_0 este un pol de ordin k pentru f atunci

$$Rez(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}$$

2. In cazul unui punct singular esential reziduul se calculeaza cu ajutoril dezvoltarii in serie Laurent
3. Intr-un punct regular reziduul este 0

4 Aplicatii ale teoriei reziduurilor la calculul unor integrale definite reale

Tipul 1 (1). *Fie integrala* $I = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, *unde* $R(u, v)$ *este o functie rationala reala ce nu are poli pe cercul* $u^2 + v^2 = 1$