Teorema Reziduurilor

Tapalaga Ecaterina Simona

Iunie 2013

Rezumat

Aplicatii ale teoremei reziduurilor in calulul unor chestii interesante. In prima parte avem introducere apoi exemple din x urmate de aplicatii de tip y.

Cuprins

1 Notiuni introductive

Notatie 1.

$\mathbb{C}$	*planul complex*
$C^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$	
$C_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	
$\mathcal{P}(\mathbb{C})$	*multimea partilor lui* $\mathbb{C}$
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	*multimea partilor lui* $\mathbb{R}$
$\mathcal{U}(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} \colon \lvert z - z_0 \rvert < r\}$	*discul cu centru in* z_0 *si raza* r
$\dot{\mathcal{U}}(z_0; r) := \mathcal{U}(z_0; r) \setminus \{z_0\}$	*discul punctat de raza* r *si centrul in* z_0
$\mathcal{U}(z_0; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} \colon r_1 < \lvert z - z_0 \rvert < r_2\}$	*coroana circulara de centru* z_0 *si raze* r_1, r_2
$\mathcal{U}(z_0; r_2) = \mathcal{U}(z_0; r_1, r_2)$	*cand* $r_1 = 0$
$\overline{\mathcal{U}}(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} \colon \lvert z - z_0 \rvert \le r\}$	*discul inchis de raza* r *si centru* z_0
$\partial\mathcal{U}(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} \colon \lvert z - z_0 \rvert = r\}$	*bordura de raza* r *si zentru* z_0

Definitie 1. *Fie* D *o submultime a lui* $\mathbb{C}$*. Spunem ca este deschisa daca* $\forall z \in D, \exists \mathcal{U}(z; r) \subset D$

Observatie 1. *Multimile* $\emptyset$ *si* $\mathbb{C}$ *se considera deschise*

Definitie 2. *Fie* A *o submultime a lui* $\mathbb{C}$*. Spunem ca* A *este inchisa daca complementara ei* $C(A)$ *este deschisa*

Definitie 3. *Fie* B *o submultime a lui* $\mathbb{C}$*. Spunem ca* B *este conexa daca si numai daca* $\nexists D_1, D_2 \in \mathbb{C}$ *multimi deschise a.i.*

$$\begin{aligned} B \cap D_1 &\neq \emptyset \\ B \cap D_2 &\neq \emptyset \\ B \cap D_1 \cap D_2 &= \emptyset \\ B &\subset D_1 \cup D_2 \end{aligned}$$

Definitie 4. *O submultime* $B \subset \mathbb{C}$ *este conexa daca* $\nexists$ *doua submultimi nevide disjuncte si deschise a lui* B *a.i. reuniunea lor este egala cu* B

Observatie 2. *Daca* B *este o submultime conexa a lui* $\mathbb{C}$ *iar* $B \cap A \cap \overline{B}$*, atunci* A *este conexa. In particular, aderenta* $\forall$ *multimi conexe este conexa.*

Definitie 5. *Fie* D *o submultime a lui* $\mathbb{C}$*.* D *se numeste domeniu daca este deschisa si conexa.*

Notatie 2.

$\overline{A}$	*multimea punctelor aderente ale lui* A *inchiderea*
A'	*multimea punctelor de acumulare ale lui* A
$fr(A) = \partial A$	*frontiera lui* $A = \overline{A} \cap \overline{CA}$

Definitie 6. *O submultime* A *a lui* $\mathbb{C}$ *se numeste marginita daca* $\exists$ *un disc* $\mathcal{U}(z_0; r)$ *a.i.* $A \subset \mathcal{U}(z_0; r)$

Definitie 7. *Un domeniu D din $\mathbb{C}$ care pentru $\forall z \in D$ verifica $[z, z_0] \subset D$ se numeste domeniu stelat in raport cu $z_0 \in D$*

Observatie 3.

1. *Un domeniu stelat in raport cu $\forall$ punct al sau se numeste domeniu convex*
2. *$\forall$ disc este stelat si convex*
3. *Discurile punctate sunt domenii , dar nu sunt si stelate: nu exista nici un punct $z_1 \in \dot{\mathcal{U}}(z_0; r)$ in raport cu care sa fie stelat*

Definitie 8. *Spunem ca A este compacta $\iff$ $\forall$ sir (z_u) din A contine un subsir (Z_{n_m}) din A care converge catre un punct $z_0 \in A$*

Definitie 9. *Fie A, B multimi din $\mathbb{C}$. Distanta de la A la B este*

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \colon a \in A, b \in B\} \tag{1}$$

Observatie 4.

1. *Fie $A, B \subset \mathbb{C}, A \cap B \neq \emptyset$.*
   Atunci $d(A, B) = 0$
2. *Fie $A, B \subset \mathbb{C}, A \cap B = \emptyset$.*
   Atunci $d(A, B) \geq 0$
3. *Fie A o multime compacta si B o multime inchisa a.i. $A \cap B = \emptyset$.*
   Atunci $d(A, B) > 0$

Consecinta 1. *Fie G o multime deschisa si K compacta , $K \subset G$.*
Atunci $d(K, \partial B) > 0$

Consecinta 2. *Fie G o multime deschisa si K compacta , $K \subset G$. Atunci $\exists \mathcal{U}(z_n; r), 0 < r < d(K, \partial G), z_n \in K, k = \overline{1, n}$ a.i discul compact $\overline{\mathcal{U}}(z_n; r) \subset G$ si $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}(z_n; r)$*

2 Derivata complexa

Definitie 10. *Fie functia $f : A \mapsto C$, unde $A \subset \mathbb{C}$ multime deschisa . Functia f se numeste derivabila in z_0 daca $\exists$ si este finita urmatoarea limita:*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2}$$

Daca $\exists$, aceasta se noteaza cu $f'(z_0)$ si se numeste derivata functiei f in z_0

Definitie 11. *Spunem ca f este olomorfa pe $A(A \subset \mathbb{C}$deschisa) daca este derivabila in orice punct din A. Notam cu $\mathcal{H}(A)$ multimea tuturor functiilor olomorfe pe A*

Definitie 12. *Spunem ca functia f este $\mathbb{R}$ diferentiabila (real-diferentiabila) in $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ daca functiile $u = Ref$ si $v = Imf$ sunt diferentiabile in (z_0, y_0)*

Definitie 13. *Spunem ca functia f este $\mathbb{C}$ diferentiabila (complex-diferentiabila) in $z_0 \in A$ daca $\exists$ un numar complex N si o functie $g : A \setminus \{z_0\} \mapsto \mathbb{C}$ a.i. $lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ si $f(z) = f(z_0) + N(z - z_0) + g(z)(z - z_0), z \in A \setminus \{z_0\}$*

Observatie 5. *Functia f este derivabila in $z_0 \iff f$ este $\mathbb{C}$ diferentiabila in z_0*

Teorema 1. *Cauchy - Riemann*

O functie $f : A \mapsto C$ este derivabila in punctul $z_0 \in A$ daca si numai daca

1. *f este $\mathbb{R}$ diferentiabila in z_0*
2. *este satisfacut sistemul Cauchy-Riemann in z_0*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

unde $u = Ref, v = Imf$ si $z_0 = x_0 + iy_0$

Ex 1. *Fie $f : \mathbb{C} \mapsto C, f(z) = az + b\overline{z}$. Sa ser determine $a, b \in \mathbb{R}$ a.i. f sa fie derivabila in $z, \forall z \in \mathbb{C}$*

Rez. Cautam u si v

Fie $z = x + iy \implies f(z) = a(x + iy) + b(x - iy)$

Deci $u = x(a + b)$ si $v = y(a - b)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = a + b \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = a - b \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} a + b = a - b & |_{-a+b} \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Deci $f(z) = az$

Obs

$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = b = 0$, adica $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = a, \forall z \in \mathbb{C}$

□

Observatie 6. *Daca f este de k ori derivabila in z_0 o notam cu $f^{(k)}_{(z_0)}$ si se numeste derivata de ordin k a lui f in z_0*

Observatie 7. *Daca functia $f \in \mathcal{H}(A)$ si $f'(z) \neq 0, z \in A$, atunci f este o transformare conforma care pastreaza sensul de parcurs si marimea unghiurilor*

Definitie 14. *Fie functia $f : A \mapsto C$. Se numeste local constanta daca ea este constanta pe fiecare componenta conexa a lui A*

Observatie 8.

1. *Daca $f \in \mathcal{H}(A)$, atunci f este local constanta $\iff f' \equiv 0$*
2. *Daca avem A domeniu si $f \in \mathcal{H}(A)$, atunci f este local constanta $\iff f$ este constanta*

3 Drumuri in $\mathbb{C}$

Definitie 15. *Numim drum o functie* $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ *continuua, unde* $\gamma(0) = z_0$ *si se numeste punct initial , iar* $\gamma(1) = z_1$ *si se numeste punct final*

Observatie 9. *Daca* $z_0 = z_1$ *, atunci* γ *este un drum inchis*

Definitie 16. *Numim suportul drumului* γ *, imaginea segmentului* $[0,1]$ *prin* γ*, adica* $\gamma[0,1]$*. Suportul se noteaza cu* $\{\gamma\}$*, unde* $\{\gamma\} := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} \colon t \in [0,1]\}$

Definitie 17. *Numim deformatie continuua a unui drum* $\gamma_0 : [0,1] \mapsto A$*,* $A \subset \mathbb{C}$ *in drumul* $\gamma_1 : [0,1] \mapsto A$ *o functie* $\varphi : [0,1] \times [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ *cu proprietatea ca* $\varphi(0,t) = \gamma_0(t)$ *si* $\varphi(1,t) = \gamma_1(t)$

Notatie 3. $\mathcal{D}(z_0, z_1)$ *drum care porneste din* z_0 *cu varful in* z_1

Definitie 18. *Fie* γ_0 *si* $\gamma_1 \in A$ *doua drumuri. Spunem ca* γ_0 *este omotop cu* γ_1 *(in sens larg) si notam* $\gamma_0 TODO \gamma_1$ *daca* $\exists$ *o deformatie continuua in* A *a lui* γ_0 *in* γ_1

Definitie 19. *Fie* $\gamma_0 \in \mathcal{D}(z_0, z_1)$ *si* $\gamma_1 \in \mathcal{D}(z_1, z_1)$
Definim drumul $(\gamma_0 \cup \gamma_1)$ *astfel*

$$(\gamma_0 \cup \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-1), t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Acesta se numeste compunerea drumului γ_0 *cu* γ_1

Definitie 20. *Fie* γ *drum din* $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(z_0, z_1)$ *, iar* γ^- *din* $\mathcal{D}(z_1, z_0)$*. Atunci* $\gamma^-(t) = \gamma(1-t), t \in [0,1]$ *si se numeste inversul drumului* γ

Definitie 21. *Fie* $z \in A$*, iar* $e_z(t) = z$ *pt* $t \in [0,1]$*. Spunem ca* $\gamma \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(z,z)$ *este omotop cu zero daca* $\gamma TODO e_z$

Definitie 22. *Un domeniu* D *se numeste simplu conex daca* $\forall$ *drum inchis din acest domeniu este omotop cu zero in* D

Observatie 10. *Daca* D *este un domeniu din* $\mathbb{C}$ *stelat fata de unul dintre punctele sale, atunci spunem despre* D *ca este simplu conex*

4 Functii elementare

Definitie 23. *Constantele, functia identitate, functia exponentiala si cea logasritmica se numesc Functii elementare fundamentale. Functile elementare sunt obtinute din acestea prin aplicarea repetata de un numar finit de ori a operatiilor algebrice (*$+ \times : \sqrt{}$*) si compunerea cu alte functii elementare.*

Observatie 11. *Functia exponentiala complexa este* $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^*$*, unde* $f(z) := e^z$ *si* $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ *pentru* $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Proprietati:

1. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

2. $f(z+2\pi i) = f(z), z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$

3. $f(-z) = \frac{1}{f(z)}, z \in \mathbb{C}$

4. f *este olomorfa pe* $\mathbb{C}$ *si* $f^n(z) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$

Observatie 12.

1. *Functia exponentiala este periodica, avand perioada* $T = 2\pi i$*; deci nu este injectiva dacat restransa la intervalul* $\alpha, \alpha + 2\pi$

$$I = \{z \in \mathbb{C} \colon \alpha < im\, z < \alpha + 2\pi, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

2. *Consideram* $t \in \mathbb{C}^*$. *Ecuatia* $e^z = t$ *are o infinitate de solutii in* $\mathbb{C}$. *deci,* $e^z = t \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ *astfel incat*

$$z = \log|t| + i(arg\, t + 2k\pi)$$

unde $Argt \in (pi, \pi]$ *si este argumentul lui* t

Stim ca $a = Arg(t)$ *este solutia unica din* $(-\pi, \pi]$ *a ecuatiei*

$$\cos a + i \sin a = \frac{t}{|t|}$$

Din aceste solutii ajungem la aplicatia multivoca logaritm

$$\log : \mathbb{C}^* \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{C})$$

$$Log(z) = ln\,|z| + i\, arg\, z, z \in \mathbb{C}^*$$

iar $Arg : \mathbb{C}^* \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{C})$ *este aplicatia multivoca argument unde* $Arg(z) := \{arg(z) + 2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$

3. *Inversa functiei exponentiale definita pe* $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ *este ramura principala a aplicatiei Log de mai sus*

$$log\, z = ln|z| + iarg(z), z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

4. *Functia log este olomorfa pe* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$