Teorema Reziduurilor

Tapalaga Ecaterina Simona

Iunie 2013

1 Notiuni introductive

Notatie 1.

$\mathbb{C}$	*planul complex*
$C^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$	
$C_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	
$\mathcal{P}(\mathbb{C})$	*multimea partilor lui* $\mathbb{C}$
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	*multimea partilor lui* $\mathbb{R}$
$\mathcal{U}(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C}\colon \lvert z - z_0\rvert < r\}$	*discul cu centru in* z_0 *si raza* r
$\dot{\mathcal{U}}(z_0; r) := \mathcal{U}(z_0; r) \setminus \{z_0\}$	*discul punctat de raza* r *si centrul in* z_0
$\mathcal{U}(z_0; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < \lvert z - z_0\rvert < r_2\}$	*coroana circulara de centru* z_0 *si raze* r_1, r_2
$\mathcal{U}(z_0; r_2) = \mathcal{U}(z_0; r_1, r_2)$	*cand* $r_1 = 0$
$\overline{U}(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C}\colon \lvert z - z_0\rvert \leq r\}$	*discul inchis de raza* r *si centru* z_0
$\partial\mathcal{U}(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C}\colon \lvert z - z_0\rvert = r\}$	*bordura de raza* r *si zentru* z_0

Definitie 1. *Fie* D *o submultime a lui* $\mathbb{C}$. *Spunem ca este deschisa daca* $\forall z \in D, \exists \mathcal{U}(z; r) \subset D$

Observatie 1. *Multimile* $\emptyset$ *si* $\mathbb{C}$ *se considera deschise*

Definitie 2. *Fie* A *o submultime a lui* $\mathbb{C}$. *Spunem ca* A *este inchisa daca complementara ei* $C(A)$ *este deschisa*

Definitie 3. *Fie* B *o submultime a lui* $\mathbb{C}$. *Spunem ca* B *este conexa daca si numai daca* $\nexists D_1, D_2 \in \mathbb{C}$ *multimi deschise a.i.*

$$\begin{aligned} B \cap D_1 &\neq \emptyset \\ B \cap D_2 &\neq \emptyset \\ B \cap D_1 \cap D_2 &= \emptyset \\ B &\subset D_1 \cup D_2 \end{aligned}$$

Definitie 4. *O submultime* $B \subset \mathbb{C}$ *este conexa daca* $\nexists$ *doua submultimi nevide disjuncte si deschise a lui* B *a.i. reuniunea lor este egala cu* B

Observatie 2. *Daca* B *este o submultime conexa a lui* $\mathbb{C}$ *iar* $B \cap A \cap \overline{B}$, *atunci* A *este conexa. In particular, aderenta* $\forall$ *multimi conexe este conexa.*

Definitie 5. *Fie D o submultime a lui $\mathbb{C}$. D se numeste domeniu daca este deschisa si conexa.*

Notatie 2.

$$\begin{array}{rr} \overline{A} & \text{multimea punctelor aderente ale lui } A \text{ inchiderea} \\ A' & \text{multimea punctelor de acumulare ale lui } A \\ fr(A) = \partial A & \text{frontiera lui } A = \overline{A} \cap \overline{CA} \end{array}$$

Definitie 6. *O submultime A a lui $\mathbb{C}$ se numeste marginita daca $\exists$ un disc $\mathcal{U}(z_0; r)$ a.i. $A \subset \mathcal{U}(z_0; r)$*

Definitie 7. *Un domeniu D din $\mathbb{C}$ care pentru $\forall z \in D$ verifica $[z, z_0] \subset D$ se numeste domeniu stelat in raport cu $z_0 \in D$*

Observatie 3.

1. *Un domeniu stelat in raport cu $\forall$ punct al sau se numeste domeniu convex*
2. *$\forall$ disc este stelat si convex*
3. *Discurile punctate sunt domenii , dar nu sunt si stelate: nu exista nici un punct $z_1 \in \dot{\mathcal{U}}(z_0; r)$ in raport cu care sa fie stelat*

Definitie 8. *Spunem ca A este compacta $\iff$ $\forall$ sir (z_u) din A contine un subsir (Z_{n_m}) din A care converge catre un punct $z_0 \in A$*

Definitie 9. *Fie A, B multimi din $\mathbb{C}$. Distanta de la A la B este*

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \colon a \in A, b \in B\} \tag{1}$$

Observatie 4.

1. *Fie $A, B \subset \mathbb{C}, A \cap B \neq \emptyset$.*
   Atunci $d(A, B) = 0$
2. *Fie $A, B \subset \mathbb{C}, A \cap B = \emptyset$.*
   Atunci $d(A, B) \geq 0$
3. *Fie A o multime compacta si B o multime inchisa a.i. $A \cap B = \emptyset$.*
   Atunci $d(A, B) > 0$

Consecinta 1. *Fie G o multime deschisa si K compacta , $K \subset G$.*
Atunci $d(K, \partial B) > 0$

Consecinta 2. *Fie G o multime deschisa si K compacta , $K \subset G$. Atunci $\exists \mathcal{U}(z_n; r), 0 < r < d(K, \partial G), z_n \in K, k = \overline{1, n}$ a.i discul compact $\overline{\mathcal{U}}(z_n; r) \subset G$ si $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}(z_n; r)$*

Definitie 10. *Fie functia $f : A \mapsto C$, unde $A \subset \mathbb{C}$ multime deschisa . Functia f se numeste derivabila in z_0 daca $\exists$ si este finita urmatoarea limita:*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2}$$

Daca $\exists$, aceasta se noteaza cu $f'(z_0)$ si se numeste derivata functiei f in z_0

Definitie 11. *Spunem ca f este olomorfa pe $A(A \subset \mathbb{C} deschisa)$ daca este derivabila in orice punct din A. Notam cu $\mathcal{H}(A)$ multimea tuturor functiilor olomorfe pe A*

Definitie 12. *Spunem ca functia f este $\mathbb{R}$ diferentiabila (real-diferentiabila) in $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ daca functiile $u = Ref$ si $v = Imf$ sunt diferentiabile in (z_0, y_0)*

Definitie 13. *Spunem ca functia f este $\mathbb{C}$ diferentiabila (complex-diferentiabila) in $z_0 \in A$ daca $\exists$ un numar complex N si o functie $g : A \setminus \{z_0\} \mapsto \mathbb{C}$ a.i. $lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ si $f(z) = f(z_0) + N(z - z_0) + g(z)(z - z_0), z \in A \setminus \{z_0\}$*

Observatie 5. *Functia f este derivabila in $z_0 \iff f$ este $\mathbb{C}$ diferentiabila in z_0*

Teorema 1. *Cauchy - Riemann*

O functie $f : A \mapsto C$ este derivabila in punctul $z_0 \in A$ daca si numai daca

1. *f este $\mathbb{R}$ diferentiabila in z_0*
2. *este satisfacut sistemul Cauchy-Riemann in z_0*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

unde $u = Ref, v = Imf$ si $z_0 = x_0 + iy_0$

Ex 1. *Fie $f : \mathbb{C} \mapsto C, f(z) = az + b\overline{z}$. Sa ser determine $a, b \in \mathbb{R}$ a.i. f sa fie derivabila in $z, \forall z \in \mathbb{C}$*

Rez. Cautam u si v

Fie $z = x + iy \implies f(z) = a(x + iy) + b(x - iy)$

Deci $u = x(a + b)$ si $v = y(a - b)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= a + b \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= a - b \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} a + b = 0 \\ -(a - b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b - a = 0 \quad |_+ \\ \qquad \implies b = a = 0 \end{cases}$$

Deci $f(z) = 0$ $\square$