# Teorema Reziduurilor si aplicatii

*Autor:* Tapalaga Ecaterina Simona
*Conducator stiintific:* Prof. Dr. Salagean Grigore

Universitatea Babes-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematica si Informatica

Iulie 2013

# Despre Teorema reziduurilor

- Teorema reziduurilor e o unealta puternica a analizei complexe.
- Este utilizata in evaluarea integralelor functiilor analitice pe contururi.
- Reduce calculul integralei la mult mai simpla evaluare a rezidurilor.
- Adesea poate fi folosita la calculul integralelor reale.

# Structura lucrarii

- Lucrarea ilustreaza asemenea aplicatii. Unele integrale prezentate nu pot fi evaluate prin metode elementare.
- Lucrarea este impartita in trei capitole:
  - Notiuni introductive
  - Teorema reziduurilor
  - Aplicatii ale teoremei reziduurilor

# Aplicatii ale teoriei reziduurilor la calculul unor integrale definite reale

$(*)$ Fie integrala $I = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$, unde $R(u, v)$ este o functie rationala reala ce nu are poli pe cercul $u^2 + v^2 = 1$ .

$$\text{Atunci : } \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{z \in \mathcal{U}(0;1)} \operatorname{Rez}(f; z)$$

$$\text{unde } f(z) = \frac{1}{z} R\left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \ \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right)$$

$(**)$ Fie integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} \, \mathrm{d}x$$

unde $f = P/Q$ , $Q(x) \neq 0$ , $x \in \mathbb{R}$ , $grad\ P = k$ , $grad\ Q = p$, iar $p \geq k+1$ .

Daca $\alpha > 0$, atunci:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} \, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ z > 0} \mathrm{Rez}(g; z)$$

, unde $g(z) = f(z) e^{i\alpha z}$.

# Aplicatii concrete

Sa se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x, \text{ unde } a > 0.$$

$$\text{Fie } I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{si } I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x (= 0 \text{ pe ca e impara})$$

$$\text{si fie } I = I_1 + iI_2$$

$$\Longrightarrow \; I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= 1 \\ Q(x) &= a^2 + x^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} grad\ Q &\geq grad\ P + 1 \\ 2 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{a^2 + z^2}$$

$a^2 + z^2 = 0 \implies z_{1,2} = \pm ia$ , dar doar $z_1 = ia$ pol de gradul I $\in$ semiplanul superior

$$\implies I = 2\pi i \ \operatorname{Rez}(f; z_1) = 2\pi i \ \operatorname{Rez}(f; ia)$$

$$\mathrm{Rez}(f; ia) = \lim_{z \to ia} (z - ia) \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} = \frac{e^{-a}}{z + ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

$$\implies I = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{e^{-a}\pi}{a}$$

$$I_1 = \mathrm{Re}\ I \quad I_2 = \mathrm{Im}\ I \implies I_1 = \frac{e^{-a}\pi}{a}; \quad I_2 = 0$$