ESTATÍSTICA

Michelle Hanne Soares de Andrade
michellehanne.andrade@gmail.com

Teoria das Probabilidades

Operações Entre Eventos – Regras Gerais

Sejam A B e C eventos de um mesmo espaço amostral Ω. Então,

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Probabilidade Condicional

- Considerando o lançamento de um dado, qual a probabilidade de em 1 jogada resultar em um número impar e menor que 3?
- Menor que três: 1 e 2 e Impar = 1. Portanto, apenas o número 1 satisfaz ambas as condições.
  - Assim, **P = 1/6**
- Portanto, a probabilidade do resultado ser um **número impar e menor que 3 é a interseção desses eventos:**
- **Menor que três: (1, 2) = 2/6** e **Ímpar = (1, 3, 5) = 3/6**. Assim, P = 1/6

Probabilidade Condicional - Exemplo

Exemplo 1- De um baralho de 52 cartas (13 de ouro, 13 de espadas, 13 de copas e 13 de paus) qual é a probabilidade de, **ao ser retirada uma carta, ser uma dama de copas?**

– P = 1/52

Exemplo 2- De um baralho de 52 cartas (13 de ouro, 13 de espadas, 13 de copas e 13 de paus) qual é a probabilidade de, **ao ser retirada uma carta, ser uma dama, sabendo-se que a carta retirada e de copas.**

– Como há 4 tipos (se não soubesse que naipe é): **P = 1/52 X 4**

– Como já se sabe que a carta é de copas, temos apenas 1 dama em um total de 13 cartas. A probabilidade é então: **P(Q, copas) = 1/13.**

Exercícios

1) Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola ser verde?

Solução: Neste exercício o espaço amostral possui 12 elementos, que é o número total de bolas, portanto a probabilidade de ser retirada uma bola verde esta na razão de 5 para 12.

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)} \rightarrow P(E)=\frac{5}{12}$$

Exercícios

2) Três moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de as três moedas caírem com a mesma face para cima?

Exercícios

- **<u>Solução:</u>** Como cada moeda pode produzir dois resultados distintos, três moedas irão produzir 2x2x2 resultados distintos (8). Este é o nosso espaço amostral.
- Dentre as 8 possibilidades do espaço amostral, o evento que representa todas as moedas com a mesma face para cima possui apenas **2 possibilidades**, ou tudo cara ou tudo coroa:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)} \rightarrow P(E)=\frac{2}{8} \rightarrow P(E)=\frac{1}{4} \rightarrow P(E)=0{,}25$$

- **A probabilidade das três moedas caírem com a mesma face para cima é igual a 1/4, ou 0,25, ou ainda 25%.**

Exercícios

3) Um casal pretende ter filhos. Sabe-se que a cada mês a probabilidade da mulher engravidar é de 20%. Qual e a probabilidade dela vir a engravidar somente no quarto mês de tentativas?

Exercícios

- **Solução:** Sabemos que a probabilidade da mulher engravidar em um mês e de 20%, que na forma decimal e igual a 0,2. A probabilidade dela não conseguir engravidar e igual a 1 - 0,2, ou seja, e igual a 0,8.
- Eventos consecutivos e independentes (pelo menos enquanto ela não engravida). Como a mulher só deve engravidar no quarto mês, então a probabilidade dos três meses anteriores deve ser igual a probabilidade dela não engravidar no mês, logo:

$$P(E) = 0.8 \, x \, 0.8 \, x \, 0.8 \, x \, 0.2 \rightarrow P(E) = 0{,}1024$$

- **0,1024 multiplicado por 100% é igual a 10,24%.**
- **Então: A probabilidade de a mulher vir a engravidar somente no quarto mês e de 10,24%.**

Exercícios

4) Alguns amigos estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas.

  - Em uma delas há 3 pasteis e 5 coxinhas.
  - Na outra ha 2 coxinhas e 4 pastéis.

- Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual a probabilidade de se ter pegado um pastel?

Exercícios

- **Solução**: A probabilidade de escolhermos 1 dentre 2 travessas e igual 1/2.
- A probabilidade de escolhermos um pastel na primeira travessa e 3 em 8, ou seja, e 3/8 e como a probabilidade de escolhermos a primeira travessa e 1/2, temos:

$$P(A)=\frac{1}{2}x\frac{3}{8}\rightarrow P(A)=\frac{3}{16}$$

- A probabilidade de escolhermos um pastel na segunda travessa e 4 em 6, isto e 4/6 e como a probabilidade de escolhermos a segunda travessa e igual a 1/2, temos:

$$P(B)=\frac{1}{2}x\frac{4}{6}\rightarrow P(B)=\frac{1}{3}$$

- Então a probabilidade de escolhermos um pastel e igual a: A probabilidade de se ter pegado um pastel é 25/48

$$P(E)=P(A)+P(B)\rightarrow P(E)=\frac{3}{16}+\frac{1}{3}=\frac{25}{48}$$

Exercícios

5) Qual a probabilidade de se ganhar o primeiro prêmio da Mega-Sena?

- Devem ser extraídos 6 números diferentes, em qualquer ordem, de um total de 60 possibilidades.

Solução:

$_{60}C_{6} = 60! \,/\, (60-6)!\ 6! = 50.063.860$

$P(\text{ganhar}) = 1\ /50.063.860$

Probabilidade Condicional - Continuação

- **Probabilidade condicional** trata da probabilidade de **ocorrer um evento A, tendo ocorrido um evento B**, ambos do espaço amostral S, ou seja, ela é calculada sobre o evento B e não em função o espaço amostral S.
- A probabilidade de ocorrência de um evento A em relação a um evento ocorrido B e expressa como: $P(\frac{A}{B})$
- Para calcular utilizamos a fórmula: $P(\frac{A}{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Probabilidade Condicional - Continuação

- Sabendo que, a probabilidade da intersecção $P(A \cap B)$ é a razão do seu número de elementos, para o número de elementos do espaço amostral:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

- A probabilidade de B é a razão do seu número de elementos, para o número de elementos do espaço amostral:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

Probabilidade Condicional - Continuação

- Logo

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad \Rightarrow P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \qquad \Rightarrow P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

Probabilidade Condicional

- O evento em que ambos, A e B, ocorrem é chamado A interseção com B; portanto, a probabilidade do evento A ocorrer, dado que B ocorreu, e de:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **Isso significa que a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu, é igual a probabilidade de ocorrência simultânea de A e B dividida pela probabilidade de ocorrência de B. (Note-se que essa definição não se aplica quando P(B)=0.**

Probabilidade Condicional - Exemplos

Exemplo 1) Dois dados são lançados. Consideremos os eventos

$A=\{(x_1, x_2) \,/\, x_1 + x_2 = 10\}$ e

$B=\{(x_1, x_2) \,/\, x_1 > x_2\}$,

onde x_1 é o resultado do dado 1 e x_2 é o resultado do dado 2.

Calcular:

P(A);

P(B);

P(A/B);

P(B/A).

$$
\begin{matrix}
\{1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\
2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\
3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\
4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\
5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\
6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6\,\}
\end{matrix}
$$

Probabilidade Condicional - Exemplos

$A=\{(x_1, x_2) / x_1 + x_2 = 10\}$

$B=\{(x_1, x_2) / x_1 > x_2\}$, onde x_1 é o resultado do dado 1 e x_2 é o resultado do dado 2.

Solução:

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

P(A)= 3/36 =1/12

P(B) =15/36 =5/12

P(A/B)=(1/36) / (15/36) = 1/15

P(B/A)=(1/36) / (3/36) = 1/3

{1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6 }

Probabilidade Condicional - Exemplos

Exemplo 2) A probabilidade de um voo regular partir no horário é P (D) = 0,83; a probabilidade desde voo chegar no horário é P (A) = 0,82; a probabilidade de que parta e chegue no horário P (D∩A) = 0,78.

Calcule:

a) A probabilidade do voo chegar no horário tendo saído no horário e

b) A probabilidade do voo ter saído no horário dado que chegou no horário.

Probabilidade Condicional - Exemplos

P (D) = 0,83

P (A) = 0,82

P (D∩A) = 0,78

Solução:

a) A probabilidade do vôo chegar no horário tendo saído no horário e

$$P\left(\frac{A}{D}\right)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}\Rightarrow\frac{0{,}78}{0{,}83}=0{,}94$$

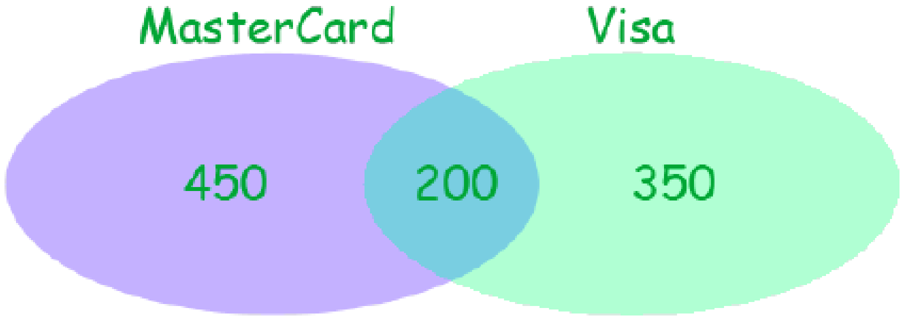
b) A probabilidade do vôo ter saído no horário dado que chegou no horário.

$$P\left(\frac{D}{A}\right)=\frac{P(D\cap A)}{P(A)}\Rightarrow\frac{0{,}78}{0{,}82}=0{,}95$$

Probabilidade Condicional - Exemplos

Exemplo 3) Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de credito da bandeira MasterCard, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras.

- **Qual a probabilidade de ao escolhermos deste grupo uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?**
- Observe a figura abaixo e a compare com as informações do enunciado.



Probabilidade Condicional - Exemplos

Observe que:

$n(A) = 450 + 200 = 650$

$n(A \cap B) = 200$

$n(B) = 200 + 350 = 550$

$n(S) = 1000$

A probabilidade procurada é dada pela fórmula:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Lembrando que a probabilidade da intersecção é a razão do seu número de elementos, para o número de elementos do espaço amostral, então a fórmula acima pode ser reduzida a:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Probabilidade Condicional - Exemplos

O número de pessoas que utilizam as duas bandeiras, ou seja, a quantidade de elementos da intersecção é igual a 200, já o número de consumidores que utilizam ao menos a bandeira VISA é 550, portanto:

Portanto:

A probabilidade de escolher uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um usuário da bandeira MASTERCARD é 4/11.

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \Rightarrow P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{200}{550} \Rightarrow P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{4}{11}$$

Probabilidade Condicional - Exemplos

Exemplo 4) Um agente sanitarista precisa decidir se vai ou não investigar um restaurante. Sabe-se que:

- Metade dos restaurantes são ruins
- Num restaurante ruim, 1/3 dos cardápios são sujos
- Num restaurante bom, 3/4 dos cardápios são sujos

- O agente pede para ver um cardápio selecionado aleatoriamente. Qual a probabilidade do Restaurante ser bom e o Cardápio ser sujo? $P(B|S)$

Probabilidade Condicional - Exemplos

$$P(B \mid S) = \frac{P(B \text{ and } S)}{P(S)} = \frac{P(S \text{ and } B)}{P(S)}$$

$$= \frac{P(S \text{ and } B)}{P(S \text{ and } B) + P(S \text{ and not } B)}$$

$$= \frac{P(S \mid B)P(B)}{P(S \text{ and } B) + P(S \text{ and not } B)}$$

$$= \frac{P(S \mid B)P(B)}{P(S \mid B)P(B) + P(S \mid \text{not } B)P(\text{not } B)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{9}{13}$$

69,23% dos Restaurantes são bons com cardápios sujos.

Probabilidade Condicional - Exemplos

Situação	Significado	No exemplo	Valor no Exemplo
Estado Real	É o que queremos saber	O restaurante é bom?	Não se sabe
Priori	P(estado real=x)	P(Ruim) P(Bom)	50% 50%
Evidência	Coisas observáveis	Sujeira no cardápio	
Condição	Probabilidade de ver a evidência	P(Sujo|Bom)	4/13
Posterior	P(est.real=x|evidência)	R(Bom|Sujo)	9/13
Inferência	Encontrar o Posterior, dado que se tem a priori e evidências		