# ESTATÍSTICA

**Michelle Hanne Soares de Andrade**
michellehanne.andrade@gmail.com

# Teorema do Limite Central

# Teorema do Limite Central - Resumo

| Distribuição de X | Distribuição de $\bar{X}$ | Tamanho de amostra |
|---|---|---|
| $N(\mu;\sigma)$ | $N(\mu;\sigma/\sqrt{n})$ | $n$ qualquer |
| Qualquer | aproximadamente $N(\mu;\sigma/\sqrt{n})$ | $n > 30$ (em geral) |

# Exemplo Binomial

**Corolário 5.3.** *Seja $X$ uma v.a. com distribuição Binomial de parâmetros $n$ e $p$. Se $n \geq 30$ e $p$ tal que $np > 5$ e $n(1-p) > 5$, então:*

$$X \overset{a}{\sim} N(np, np(1-p)).$$

**Exemplo 5.4.** *Considere-se a v.a. $X \sim Bin\,(100, 0.1)$. Calculemos $P(X = 10)$ Como $n = 100 \geq 30$, $np = 100 \times 0.1 = 10 > 5$ e $n(1-p) = 100 \times 0.9 = 90$,*

$$P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) \approx \Phi(\tfrac{10-10}{3}) - \Phi(\tfrac{9-10}{3}) = \Phi(0) - \Phi(-0.33) =$$
$$= 0.5 - 0.3707 = 0.1293.$$

***Nota:*** *O valor exacto é $P(X = 10) = \binom{100}{10} 0.1^{10} 0.9^{90} = 0.1319$.*

$$\mathrm{E}(X_n) = np \qquad \sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

# Exemplo - Poisson

**Corolário 5.5.** *Seja $X$ uma v.a. com distribuição Poisson de parâmetro $\lambda$. Se $\lambda > 5$, então:*

$$X \overset{a}{\sim} N(\lambda, \lambda).$$

**Exemplo 5.6.** *Considere $X \sim P(230)$. Calculemos um valor aproximado de $P(X = 241)$.*

$$P(X = 241) = P(X \leq 241) - P(X \leq 240) \approx P\left(Z \leq \tfrac{241-230}{\sqrt{230}}\right) - P\left(Z \leq \tfrac{240-230}{\sqrt{230}}\right) =$$
$$= \Phi(0.73) - \Phi(0.66) = 0.7673 - 0.7454 = 0.0219$$

***Nota:*** *O valor exacto é $P(X = 241) = e^{-230}.\frac{230^{241}}{241!} = 0.0198$.*

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \lambda$
- Variância
  $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \lambda$,

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

# Distribuição Amostral de uma Proporção

$\hat{p}$ é uma média de variáveis aleatórias $X_i \sim$ Binomial ($m$=1; $p$).

Assim, $\mu = E[X_i] = p$ e $\sigma = \sqrt{Var[X_i]} = \sqrt{p(1-p)}$

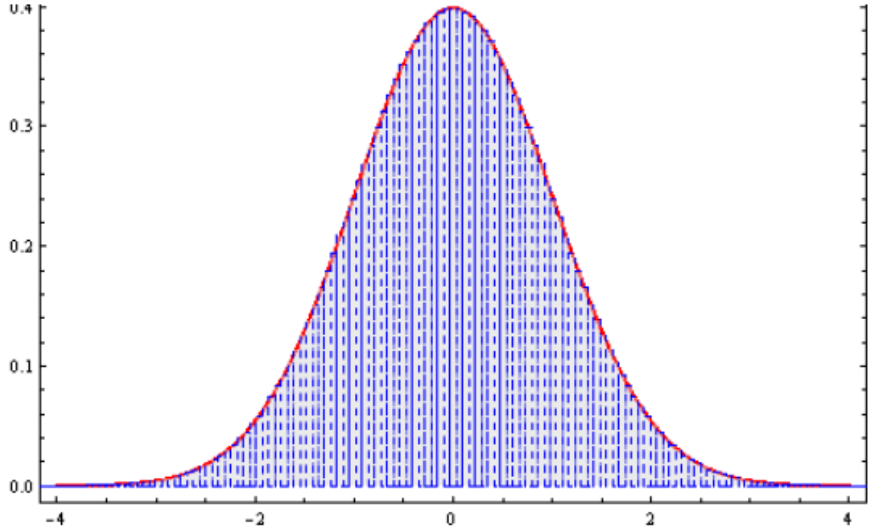
Pelo Teorema Central do Limite, a distribuição amostral de $\hat{p}$ pode ser aproximada por uma Normal com média $p$ e desvio-padrão $\sqrt{p(1-p)}$ quando $np \geq 5$ e $n(1\text{-}p) \geq 5$.

Ou seja, $$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{aproximadamente}{\sim} N(0,1)$$

# Distribuição Amostral de uma Proporção

**Ilustração:** o que acontece com a distribuição dos valores de $Z = \dfrac{\hat{p} - 0.50}{\sqrt{0.50(1-0.50)/n}}$ quando $n$ cresce?

$n = 1000$



# Exemplo - Distribuição Amostral de uma Proporção

Um biólogo está estudando a preferência de uma espécie de aranha (espécie A) quanto ao local de confecção de sua teia em árvores: perto do tronco ou ao final dos galhos.

Em 40 teias de aranha da espécie A, ele observou que 22 delas foram tecidas perto do tronco, ou seja, $\hat{p} = 22/40 = 0.55$ .

Para aranhas de uma espécie B, estudos mostram que a proporção das que preferem fazer teias perto do tronco é igual a 0.75.

Supondo que a proporção populacional das aranhas da espécie A que fazem teias perto do tronco também seja $p$=0.75, qual é a probabilidade de o resultado amostral ter ocorrido?

# Exemplo - Distribuição Amostral de uma Proporção

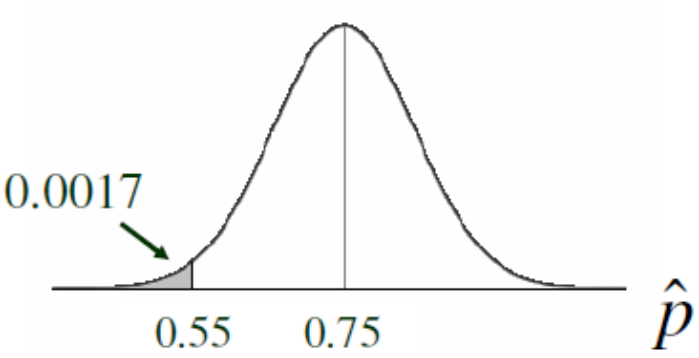
Como a proporção amostral é uma variável aleatória contínua, já sabemos que o cálculo de $P[\hat{p} = 0.55]$ não faz sentido.

Assim, vamos calcular a probabilidade de amostras com proporções ainda mais extremas do que a obtida. Ou seja,

$$P[\hat{p} < 0.55] = P\left[\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{0.55 - 0.75}{\sqrt{0.75(1-0.75)/40}}\right]$$

$$= P[Z < -2.92]$$

$$= 0.0017$$



# Exemplo - Distribuição Amostral de uma Proporção

Sob a hipótese de que a proporção populacional das aranhas da espécie A que fazem teias perto do tronco também seja $p=0.75$, a amostra coletada é pouco verossímil (probabilidade de 0.0017).

Sendo assim, a hipótese de que as duas espécies têm a mesma proporção de aranhas que tecem suas teias perto do tronco deve ser revista.

# Distribuição Qui-Quadrado

# Distribuição Qui-Quadrado

- A distribuição qui-quadrado é obtida diretamente das variáveis aleatórias independentes normais.
- padrões. Sejam $Z_i, i\ \ 1,2, \ldots, n$ variáveis aleatórias independentes, cada uma distribuída como normal padrão. Defina uma nova variável aleatória como a soma dos quadrados de $Z_i$:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2.$$

# Distribuição Qui-Quadrado

- A fdp de uma distribuição qui-quadrado com diversos graus de liberdade é mostrada na próxima Figura.
- Uma variável aleatória qui-quadrada é sempre não-negativa, e que, diferentemente da distribuição normal, a distribuição qui-quadrado não é simétrica em torno de qualquer ponto.

# Distribuição Qui-Quadrado

- Então, *X* terá o que é conhecido como **distribuição qui-quadrado** com *n* **graus de liberdade** (ou *gl* abreviadamente). Escrevemos isso como $X \sim X_n{}^2$. Os *gl* em uma distribuição qui-quadrado correspondem ao número de termos na fórmula anterior.

# Distribuição Qui-Quadrado

**Representação gráfica**

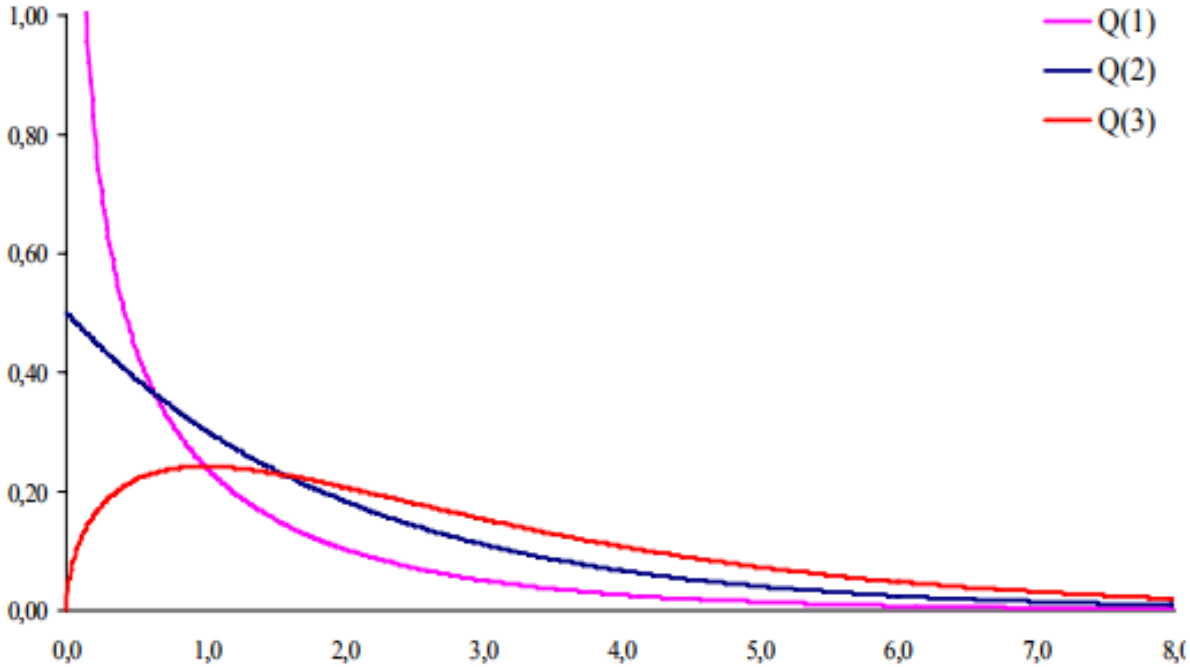



Figura 1.6 - Gráfico da distribuição $\chi^2$ (Qui-Quadrado) para os gl de 1, 2 e 3

# Distribuição Qui-Quadrado

**Definição 9.1:** Uma variável aleatória contínua $X$ tem distribuição qui-quadrado com $n$ graus de liberdade, denotada por $\chi^2_n$, se sua função densidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0, \quad n > 0$$

Sendo, $\Gamma(w) = \int_0^\infty x^{w-1} e^{-x} dx, \quad w > 0.$

**IDEIA Graus de liberdade:** Considere um conjunto de dados qualquer. Graus de liberdade é o número de valores deste conjunto de dados que podem variar após terem sido impostas certas restrições a todos os valores.

# Distribuição Qui-Quadrado

Devido a sua importância a distribuição qui-quadrado está tabulada para diferentes valores do parâmetro *n*.

Assim, poderemos achar na tabela o valor $\chi^2_\alpha$ que satisfaça $P(X \leq \chi^2_\alpha) = \alpha$ ou $P(X \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$, dependendo da tabela.

O que é tabelado é a função inversa, em relação a área à direita ou à esquerda de cada curva. Isto é, dado um valor de área na cauda direita, a tabela retorna um valor $\chi^2_\alpha$ tal que $P(X \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$ e dado um valor de área na cauda esquerda a tabela retorna um valor $\chi^2_\alpha$ tal que $P(X \leq \chi^2_\alpha) = \alpha$.

# Tabela Qui-Quadrado

$P(X^2_{(2)} \geq 0{,}2107) = 0{,}90$

Distribuição Qui-Quadrado


| gl | 0,990 | 0,950 | 0,900 | 0,500 | 0,100 | 0,050 | 0,025 | 0,010 | 0,005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0002 | 0,0039 | 0,0158 | 0,4549 | 2,7055 | 3,8415 | 5,0239 | 6,6349 | 7,8794 |
| 2 | 0,0201 | 0,1026 | 0,2107 | 1,3863 | 4,6052 | 5,9915 | 7,3778 | 9,2104 | 10,5965 |
| 3 | 0,1148 | 0,3518 | 0,5844 | 2,3660 | 6,2514 | 7,8147 | 9,3484 | 11,3449 | 12,8381 |
| 4 | 0,2971 | 0,7107 | 1,0636 | 3,3567 | 7,7794 | 9,4877 | 11,1433 | 13,2767 | 14,8602 |
| 5 | 0,5543 | 1,1455 | 1,6103 | 4,3515 | 9,2363 | 11,0705 | 12,8325 | 15,0863 | 16,7496 |
| 6 | 0,8721 | 1,6354 | 2,2041 | 5,3481 | 10,6446 | 12,5916 | 14,4494 | 16,8119 | 18,5475 |
| 7 | 1,2390 | 2,1673 | 2,8331 | 6,3458 | 12,0170 | 14,0671 | 16,0128 | 18,4753 | 20,2777 |
| 8 | 1,6465 | 2,7326 | 3,4895 | 7,3441 | 13,3616 | 15,5073 | 17,5345 | 20,0902 | 21,9549 |
| 9 | 2,0879 | 3,3251 | 4,1682 | 8,3428 | 14,6837 | 16,9190 | 19,0228 | 21,6660 | 23,5893 |
| 10 | 2,5582 | 3,9403 | 4,8652 | 9,3418 | 15,9872 | 18,3070 | 20,4832 | 23,2093 | 25,1881 |
| 11 | 3,0535 | 4,5748 | 5,5778 | 10,3410 | 17,2750 | 19,6752 | 21,9200 | 24,7250 | 26,7569 |
| 12 | 3,5706 | 5,2260 | 6,3038 | 11,3403 | 18,5493 | 21,0261 | 23,3367 | 26,2170 | 28,2997 |
| 13 | 4,1069 | 5,8919 | 7,0415 | 12,3398 | 19,8119 | 22,3620 | 24,7356 | 27,6882 | 29,8193 |
| 14 | 4,6604 | 6,5706 | 7,7895 | 13,3393 | 21,0641 | 23,6848 | 26,1189 | 29,1412 | 31,3194 |
| 15 | 5,2294 | 7,2609 | 8,5468 | 14,3389 | 22,3071 | 24,9958 | 27,4884 | 30,5780 | 32,8015 |
| 16 | 5,8122 | 7,9616 | 9,3122 | 15,3385 | 23,5418 | 26,2962 | 28,8453 | 31,9999 | 34,2671 |
| 17 | 6,4077 | 8,6718 | 10,0852 | 16,3382 | 24,7690 | 27,5871 | 30,1910 | 33,4087 | 35,7184 |
| 18 | 7,0149 | 9,3904 | 10,8649 | 17,3379 | 25,9894 | 28,8693 | 31,5264 | 34,8052 | 37,1564 |
| 19 | 7,6327 | 10,1170 | 11,6509 | 18,3376 | 27,2036 | 30,1435 | 32,8523 | 36,1908 | 38,5821 |
| 20 | 8,2604 | 10,8508 | 12,4426 | 19,3374 | 28,4120 | 31,4104 | 34,1696 | 37,5663 | 39,9969 |
| 21 | 8,8972 | 11,5913 | 13,2396 | 20,3372 | 29,6151 | 32,6706 | 35,4789 | 38,9322 | 41,4009 |
| 22 | 9,5425 | 12,3380 | 14,0415 | 21,3370 | 30,8133 | 33,9245 | 36,7807 | 40,2894 | 42,7957 |
| 23 | 10,1957 | 13,0905 | 14,8480 | 22,3369 | 32,0069 | 35,1725 | 38,0756 | 41,6383 | 44,1814 |
| 24 | 10,8563 | 13,8484 | 15,6587 | 23,3367 | 33,1962 | 36,4150 | 39,3641 | 42,9798 | 45,5584 |
| 25 | 11,5240 | 14,6114 | 16,4734 | 24,3366 | 34,3816 | 37,6525 | 40,6465 | 44,3140 | 46,9280 |
| 26 | 12,1982 | 15,3792 | 17,2919 | 25,3365 | 35,5632 | 38,8851 | 41,9231 | 45,6416 | 48,2898 |
| 27 | 12,8785 | 16,1514 | 18,1139 | 26,3363 | 36,7412 | 40,1133 | 43,1945 | 46,9628 | 49,6450 |
| 28 | 13,5647 | 16,9279 | 18,9392 | 27,3362 | 37,9159 | 41,3372 | 44,4608 | 48,2782 | 50,9936 |
| 29 | 14,2564 | 17,7084 | 19,7677 | 28,3361 | 39,0875 | 42,5569 | 45,7223 | 49,5878 | 52,3355 |

# Propriedades do Qui-Quadrado

## Propriedades

$$E(X) = n$$

$$Var(X) = 2n$$

# Aplicação – Teste de Hipótese

Se um dado não viciado for jogado 6 vezes, espera-se obter 1 vez cada face (1, 2, 3, 4, 5 e 6) já que a probabilidade de cair qualquer face é 1/6.

Supondo que um dado foi jogado 186 vezes e se obteve:

| Face 1 | Face 2 | Face 3 | Face 4 | Face 5 | Face 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 29 | 30 | 32 | 28 | 33 |

*a*. Qual será o valor de $\chi^2$?

*b*. Como se pode interpretar esse valor?

# Aplicação – Teste de Hipótese

**Como calcular**

*Karl Pearson* propôs a seguinte fórmula para medir as possíveis discrepâncias entre proporções observadas e esperadas:

$$\chi^2 = \Sigma\,[(o - e)^2 / e]$$

em que

- o = frequência observada para cada classe,
- e = frequência esperada para aquela classe.

Note-se que (o - e) = desvio (*d*), portanto a fórmula também pode ser escrita como

$$\chi^2 = \Sigma(d^2 / e)$$

# Aplicação – Teste de Hipótese

Resolvendo:

As frequências esperadas em cada classe são calculadas por: *p.N*. Portanto:

$E_{(face\ 1)} = E_{(face\ 2)} = E_{(face\ 3)} = E_{(face\ 4)} = E_{(face\ 5)} = E_{(face\ 6)} = p.N = 1/6 .186 = 31$

*a*. Qual será o valor de $\chi^2$?

Assim, os valores parciais são somados: e chega-se ao valor de $\chi^2$ :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| observado | 34 | 29 | 30 | 32 | 28 | 33 |
| esperado | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| $\chi^2$ parcial | 0,2903 | 0,1290 | 0,0322 | 0,0322 | 0,2903 | 0,1290 |

$\chi^2 = ( 0,2903 + 0,1290 + 0,0322 + 0,0322 + 0,2903 + 0,1290) = 0,903$

*b*. Como se pode interpretar esse valor?

Lembrando que G.L. = número de classes -1, como há há 6 classes, G.L. = 5.

Verificando-se a tabela de $\chi^2$ na linha em *G.L.* = 5 encontra-se $\chi^2_c$ igual a 11,070. Como o valor de Qui Quadrado obtido ( *0,903* ) foi *menor* que o esperado ao acaso ( 11,070) admite-se que o dado seja honesto.

# Distribuição T - Student

# T- Student

- Padronizar variável aleatória normal requer que o $\mu$ e $\sigma$ sejam conhecidos. Na prática, porém, não podemos calcular $z = (x - \mu)/ \sigma$ porque $\sigma$ é desconhecido. Em vez disso, substituímos $\sigma$ por $s$ e calculamos a estatística $t$.

$$t = \frac{x - \mu}{s}$$

# Distribuição Amostral da Média e da variância

- Se discrepâncias nas observações sobre a média são aleatórios e independentes, então a distribuição amostral da média tem $\mu$ e variância, $\sigma^2/n$.
- A quantidade $\sigma^2/n$ é a variância da média.
- Sua raiz quadrada é chamada o ***erro padrão da média***:

$$\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- A estimativa do **erro padrão da média** é:

$$s = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

# Distribuição t

- Normalmente, a variância da população, $\sigma^2$ não é conhecida e não podemos usar a distribuição normal como a distribuição de referência para a média da amostra. Em vez disso, substituir e usar a distribuição $t$.
- Se a distribuição de referência é normal e a variância da população é estimado por $s^2$, a quantidade:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

- que é conhecido como a média padronizada ou como a estatística t, terá à distribuição com $v = n - 1$ graus de liberdade.

# Exemplo:

Exemplo para a tabela: supõe-se uma distribuição t-student com 5 graus de liberdade e área A (ou probabilidade de valores acima) de 0,1 ou 10%:

Na interseção da coluna v = 5 e A = 0,1000, o valor é t = 1,476. Isso significa que

$P( t > 1,476 ) = 0,1000$ ou $P( t \leq 1,476) = 1 - 0,1000 = 0,9$.

Considerando a simetria da distribuição,

$P( t < -1,476 ) = 0,1000$ e também $P( -1,476 \leq t \leq 1,476 ) = 1 - 2 \times 0,1 = 0,8$.

| v / A | 0,2500 | 0,2000 | 0,1500 | 0,1000 | 0,0500 | 0,0250 | 0,0100 | 0,0050 | 0,0025 | 0,0010 | 0,0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 001 | 1,000 | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,710 | 31,820 | 63,660 | 127,300 | 318,300 | 636,600 |
| 002 | 0,816 | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 14,090 | 22,330 | 31,600 |
| 003 | 0,765 | 0,978 | 1,250 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 7,453 | 10,210 | 12,920 |
| 004 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 5,598 | 7,173 | 8,610 |
| 005 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 4,773 | 5,893 | 6,869 |
| 006 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 4,317 | 5,208 | 5,959 |
| 007 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,029 | 4,785 | 5,408 |
| 008 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 3,833 | 4,501 | 5,041 |
| 009 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 3,690 | 4,297 | 4,781 |
| 010 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 3,581 | 4,144 | 4,587 |
| 011 | 0,697 | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 3,497 | 4,025 | 4,437 |
| 012 | 0,695 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,428 | 3,930 | 4,318 |
| 013 | 0,694 | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,372 | 3,852 | 4,221 |
| 014 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 3,326 | 3,787 | 4,140 |

# Distribuição T

- Suponhamos que *Z* tenha uma distribuição normal padrão e que *X* tenha uma distribuição qui-quadrado com *n* graus de liberdade. Adicionalmente, suponhamos que *Z* e *X* sejam independentes. Então, a variável aleatória terá uma **distribuição *t*** com *n* graus de liberdade.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$$

# Distribuição T

$T \sim tn$. A distribuição $t$ obtém seus graus de liberdade da variável aleatória qui-quadrada no denominador da equação anterior.

A fdp da distribuição $t$ tem uma forma semelhante à da distribuição normal padrão, exceto pelo fato de que ela é mais espalhada e, portanto, tem mais área nos extremos.

**O valor esperado** de uma variável aleatória com distribuição ***t* é zero** (no sentido exato, o valor esperado somente existirá para $n > 1$).

A **variância será** $\boldsymbol{n/(n-2)}$ **para** $\boldsymbol{n > 2}$. Não existe variância de $\boldsymbol{n \leq 2}$ devido à distribuição ser tão espalhada.

# Distribuição T

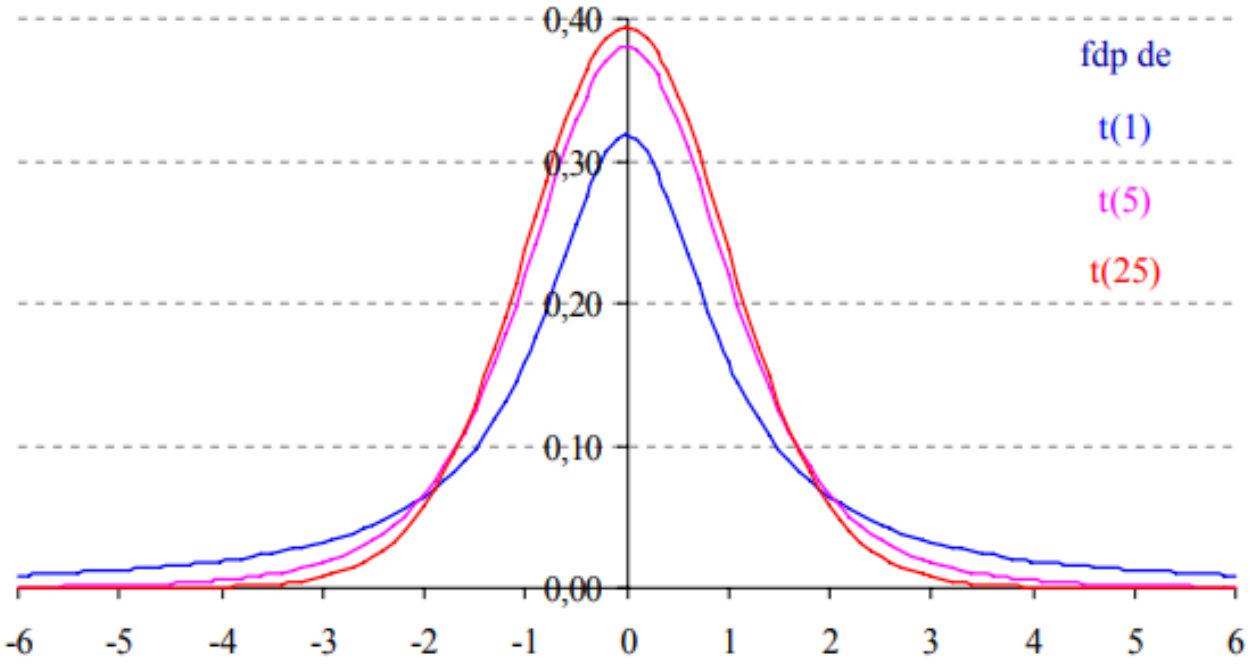



Figura 1.5 - Gráfico da distribuição t (de Student) para os gl de 1, 5 e 25

# Distribuição T

A distribuição t de Student é uma das distribuições mais utilizadas na estatística, com aplicações que vão desde a modelagem estatística até testes de hipóteses.

**Definição 9.2:** Uma variável aleatória contínua $X$ tem distribuição t de Student com $\nu$ graus de liberdade, denotada por $t_\nu$, se sua função densidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, \quad \nu = 1,2,3,\ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

A expressão acima é assustadora????

Boa Notícia: Não precisaremos dela para calcular probabilidades.

Mais uma vez, o parâmetro $\nu$, chamado de graus de liberdade, está associado ao número de parcelas independentes em uma soma.

# Distribuição T

## Propriedades

$$E(X) = 0 \quad para \quad \nu > 1$$

$$Var(X) = \frac{\nu}{\nu - 2}, \quad para \quad \nu > 2$$

# Distribuição T

Ao contrário da distribuição normal, não existe uma relação entre as diferentes distribuições t, assim seria necessária uma tabela para cada valor de v.

**É comum que os livros didáticos apresentem tabelas da distribuição t que envolvem os valores críticos.**

O motivo para isso é que a maioria das aplicações da distribuição t envolve a construção de intervalos de confiança ou de testes de hipóteses.

Nessas aplicações, nosso interesse está no valor crítico associado a um nível de significância α que, como visto no gráfico a seguir, é o valor da abscissa que deixa probabilidade (área) α acima dela.

# Distribuição T

- Na tabela t, cada linha corresponde a um número diferente de graus de liberdade e cada coluna corresponde a uma área α na cauda superior. No corpo da tabela temos a abscissa tα que deixa a área α acima dela

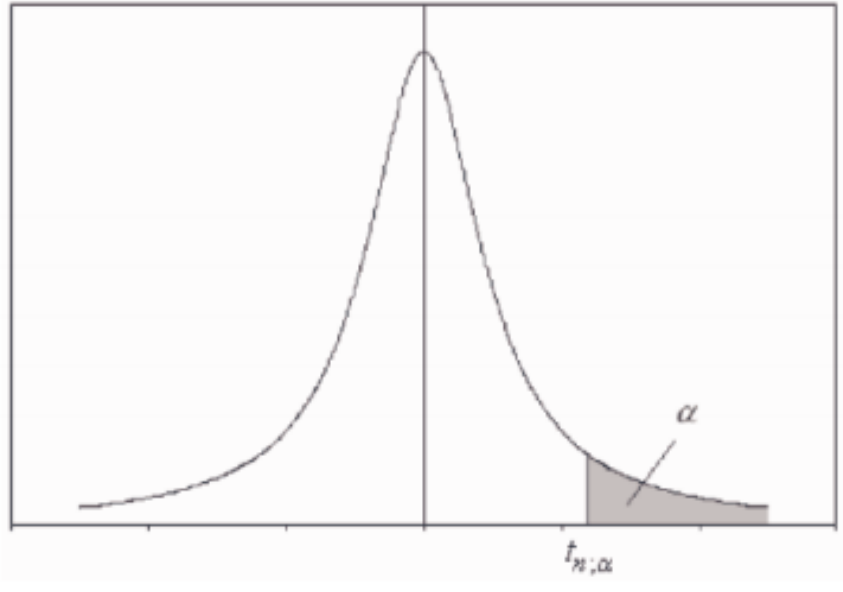



Figura : Ilustração do valor crítico t $\nu$ ; $\alpha$ da distribuição t( $\nu$ ).

# Distribuição T

**P(t de Student ≥ valor tabelado) = α ⇔ Valores unilaterais**

| | 0.5000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0500 | 0.0400 | 0.0200 | 0.0100 | 0.0050 | 0.0010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 15.894 | 31.821 | 63.656 | 127.321 | 636.578 |
| 2 | 0.816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 4.849 | 6.965 | 9.925 | 14.089 | 31.600 |
| 3 | 0.765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 3.48 | | | | 12.924 |
| 4 | 0.741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 2.9 | | | | 8.610 |
| 5 | 0.727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 2.7 | | | | 6.869 |
| 6 | 0.718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 2.61 | | | | 5.959 |
| 7 | 0.711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.517 | 998 | 3.499 | 4.029 | 5.408 |
| 8 | 0.706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 9 | 2.896 | 3.355 | 3.833 | 5.041 |
| 9 | 0.703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.398 | 2.821 | 3.250 | 3.690 | 4.781 |
| 10 | 0.700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.359 | 2.764 | 3.169 | 3.581 | 4.587 |
| 11 | 0.697 | 1.363 | 1 | 2.201 | 2.328 | 2.718 | 3.106 | 3.497 | 4.437 |
| 12 | 0.695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.303 | 2.681 | 3.055 | 3.428 | 4.318 |
| 13 | 0.694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.282 | 2.650 | 3.012 | 3.372 | 4.221 |
| 14 | 0.692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.264 | 2.624 | 2.977 | 3.326 | 4.140 |
| 15 | 0.691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.249 | 2.602 | 2.947 | 3.286 | 4.073 |

$P(T_9 < -2{,}262) = 2{,}5\%$ ou $P(T_9 > 2{,}262) = 2{,}5\%$

$P(|T_9| \geq 2{,}262) = 5\%$