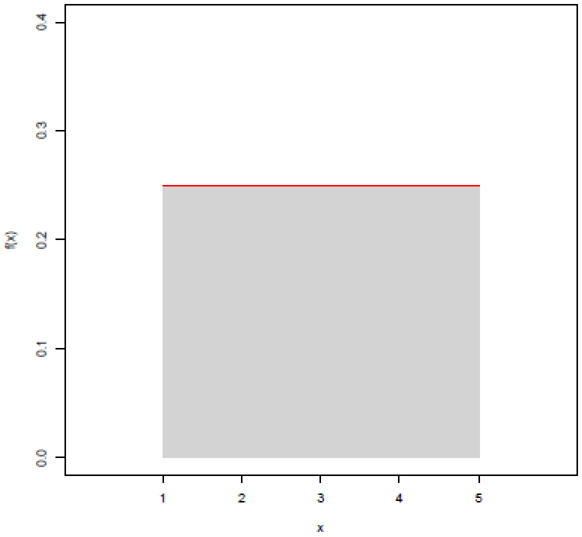
ESTATÍSTICA

Michelle Hanne Soares de Andrade
michellehanne.andrade@gmail.com

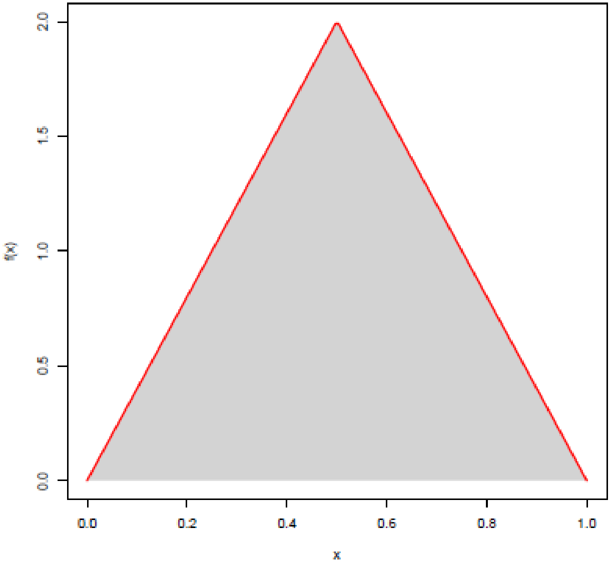
Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuições de Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

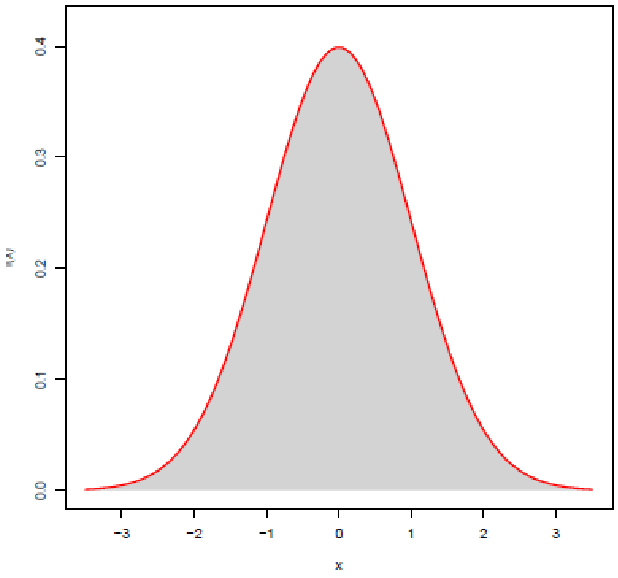


Distribuição Triangular

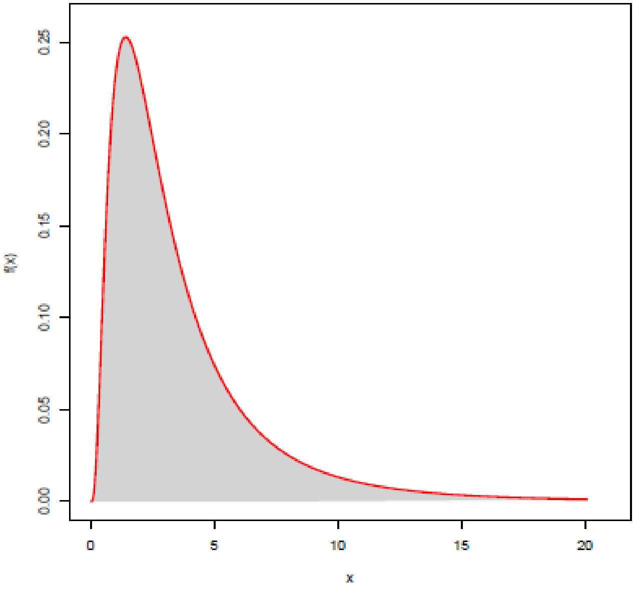


Distribuições de Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Normal

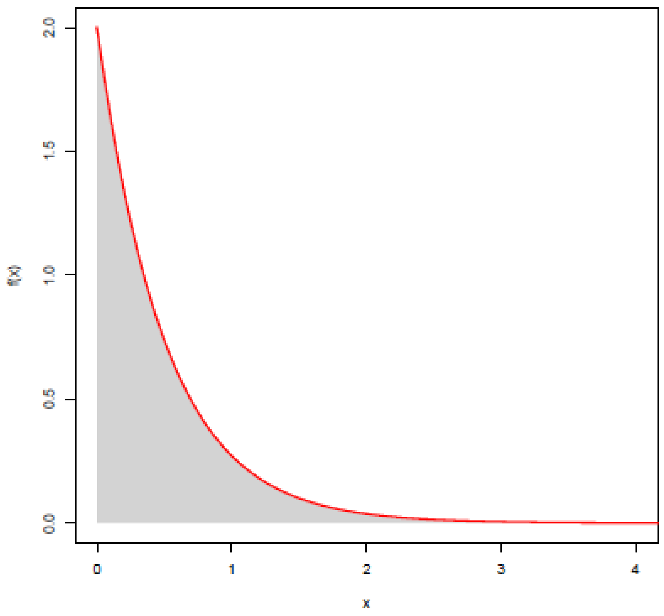


Distribuição Log Normal

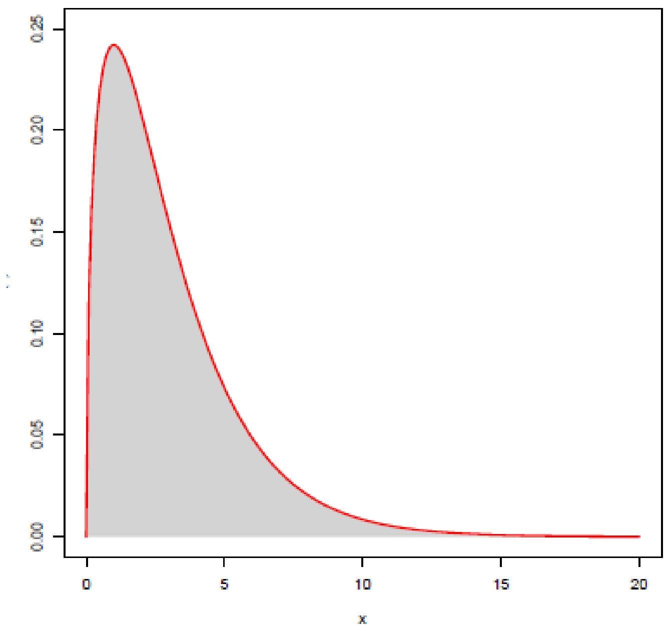


Distribuições de Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Exponencial



Distribuição Qui-Quadrado



Definição

- Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua.
- Exemplos:
  - altura de um adulto
  - custo do sinistro de um carro
  - temperatura mínima diária
  - saldo em aplicações financeiras
  - ganho de peso após dieta
  - distância percorrida

Função de Densidade de Probabilidade

- A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X é uma função $f\,(x)\ \geq\ 0$ cuja área total sob a curva seja igual à unidade. Em termos matemáticos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Modelo Uniforme

- Uma v.a. aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b,$$

  é denominada uma v.a. uniformemente distribuída em (a, b).
- Notação:

$$X \sim U(a, b).$$

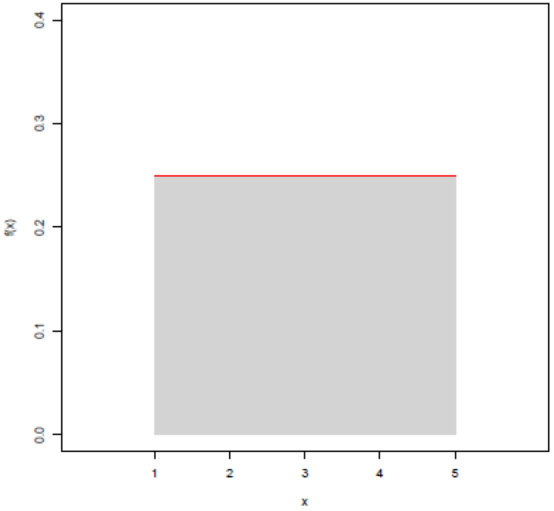
- Trata-se de uma extensão natural do modelo uniforme para o caso contínuo.

Distribuição Uniforme

- Exemplo:

Se X é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[1,5]$, notação $X \sim U[1,5]$, então a função densidade de probabilidade de X é definida por

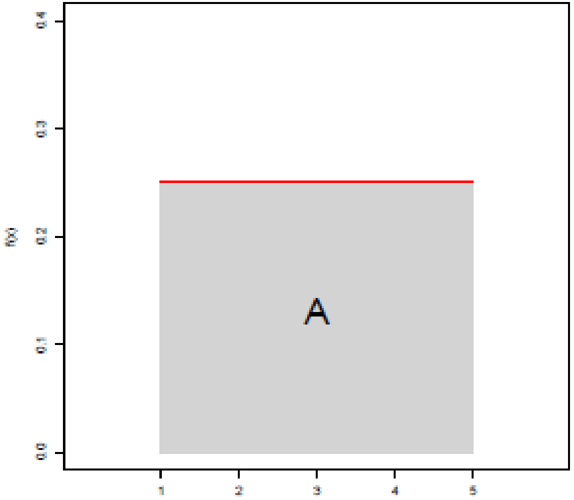
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$



Distribuição Uniforme

A área total sob a curva corresponde à área de um retângulo de base $\Delta = 4$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Logo, a área total fica dada por

$$A = \Delta \times h = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$



Distribuição Uniforme

Distribuição Uniforme

A área total sob a curva pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned}
\int_1^5 \frac{1}{4} dx &= \frac{1}{4} \int_1^5 dx \\
&= \frac{1}{4} x |_1^5 \\
&= \frac{1}{4}(5-1) \\
&= \frac{4}{4} = 1.
\end{aligned}$$

Distribuição Uniforme

Probabilidade de eventos

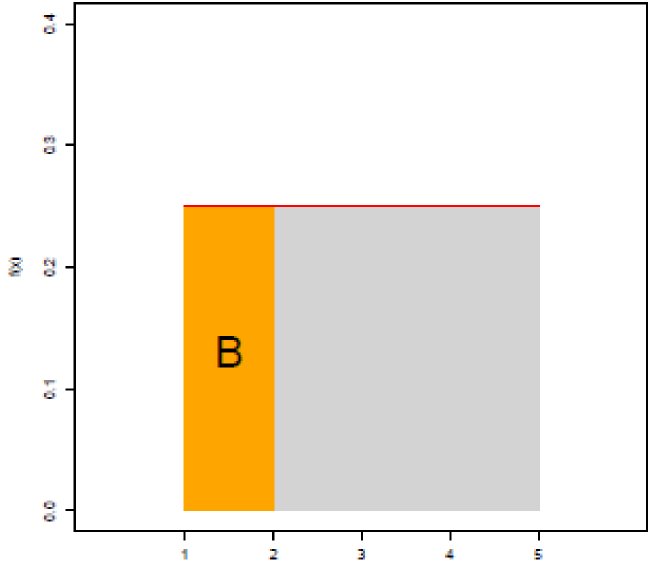
A probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ corresponde à área sob a curva no intervalo $[a, b]$. Em termos matemáticos

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Distribuição Uniforme

Por exemplo, se $X \sim U[1,5]$, a probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área do retângulo de base $\Delta = 1$ e altura $h = \frac{1}{4}$. Essa área fica dada por

$$B = \Delta \times h = 1 \times \frac{1}{4} = 0,25.$$



Distribuição Uniforme

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{4} dx &= \frac{1}{4} \int_1^2 dx \\
&= \frac{1}{4} x|_1^2 \\
&= \frac{1}{4}(2-1) \\
&= \frac{1}{4} = 0,25.
\end{aligned}$$

Distribuição Uniforme

Vamos supor que X é uma variável aleatória tal que $X \sim U[a, b]$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{(b-a)} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Variância

A variância de X fica dada por

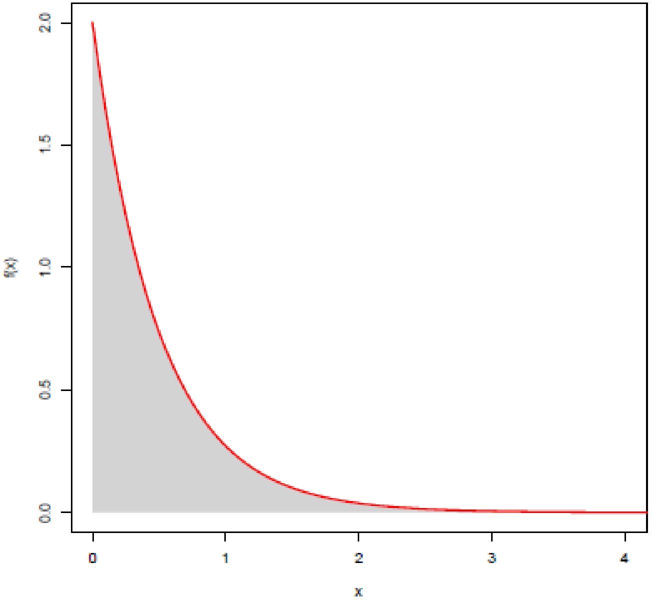
$$Var(X) = \underbrace{\int_a^b \frac{x^2}{(b-a)} dx}_{E(X^2)} - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Distribuição Exponencial

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ ($X \sim \text{Exp}(\lambda)$), a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

em que $x > 0$.



Descrição de $f(x)$ **para** $\lambda = 3$

Distribuição Exponencial

Área total

A área total sob a curva é calculada através da integral

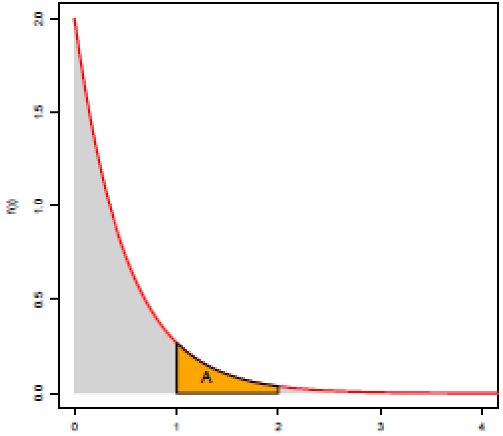
$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 1.$$

Distribuição Exponencial

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ corresponde à área na figura abaixo e pode ser calculada pela integral

$$A = \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$= e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}.$$



Distribuição Exponencial

Vamos supor que X é uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.

Esperança

A esperança de X fica dada por

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Variância

A variância de X fica dada por

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Distribuição Exponencial - Exemplo

- Uma v.a. exponencial pode ser entendida como um modelo para o "espaço" entre a ocorrência de dois sucessos ao longo de um esperimento de Poisson.
- Exemplo: seja X o número de falhas apontado por um processador ao longo de 1h. Dado que uma falha acabou de ocorrer, determine o tempo médio de ocorrência de uma nova falha.

Distribuição Exponencial - Exemplo

- Sabemos que X segue o modelo Poisson com alguma taxa λ.
- Denotando por Y o tempo decorrido até a próxima falha, temos que

$$P(Y > t) = P(X = 0 \text{ nas próximas } t \text{ horas.})$$
$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{\lambda t}.$$

- Logo,

$$P(Y \leq t) = 1 - P(Y > t) = 1 - e^{-\lambda t} \Longrightarrow Y \sim Exp(\lambda)$$

e,

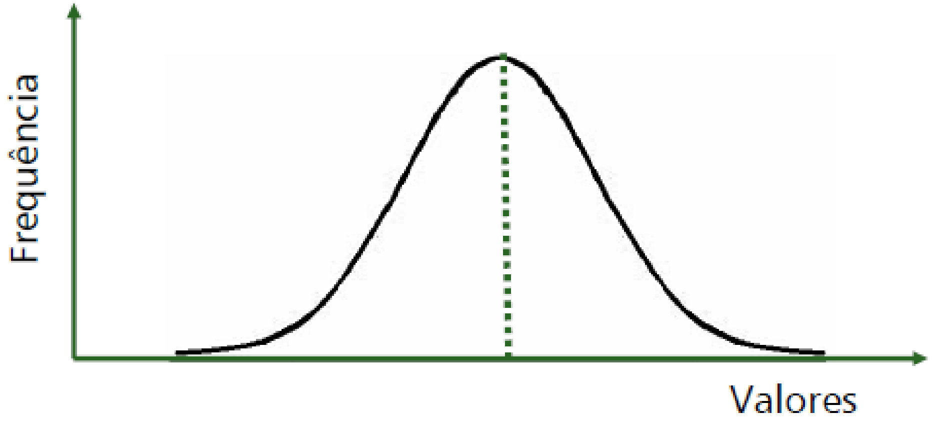
$$E(Y) = \frac{1}{\lambda}.$$

- Ou seja, em média, um nova falha ocorrerá em $1/\lambda$ horas, em que λ é a taxa média de ocorrência de falhas ao longo de 1h.

Distribuição Gaussiana

Modelo Gaussiano

Algumas variáveis contínuas exibem um comportamento muito particular quando visualizamos a distribuição de frequências de seus valores.

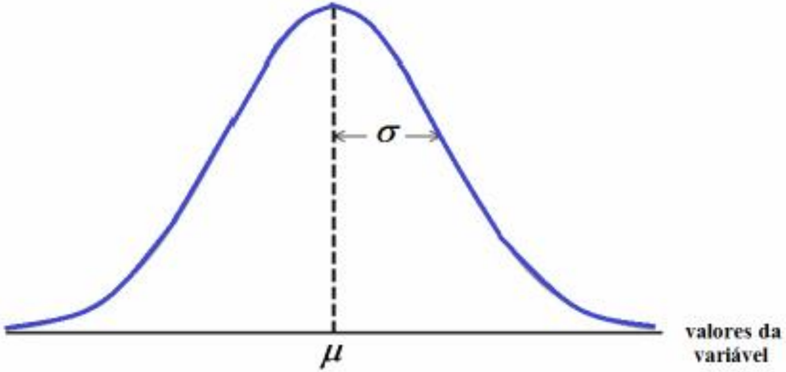


- Concentração de valores em torno de um valor central;
- Simetria em torno do valor central;
- Frequência pequena de valores muito extremos.

Modelo Gaussiano

O matemático alemão **Karl Gauss** popularizou um modelo proposto para a distribuição de probabilidades de variáveis do tipo descrito anteriormente.

A curva descrita por este modelo é conhecida como **Curva de Gauss** (ou também como **Curva Normal**)



Modelo Gaussiano

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

A função de densidade de X só depende de dois valores:

a média μ e o desvio-padrão σ

π e e são constantes conhecidas ($\pi \approx 3{,}14159\ldots$ e $e \approx 2.71828\ldots$)

Modelo Gaussiano

A média μ de uma variável aleatória X que siga o modelo Gaussiano pode assumir qualquer valor na reta real

$$-\infty < \mu < \infty$$

O desvio-padrão σ de qualquer variável aleatória X só pode assumir valores maiores do que zero

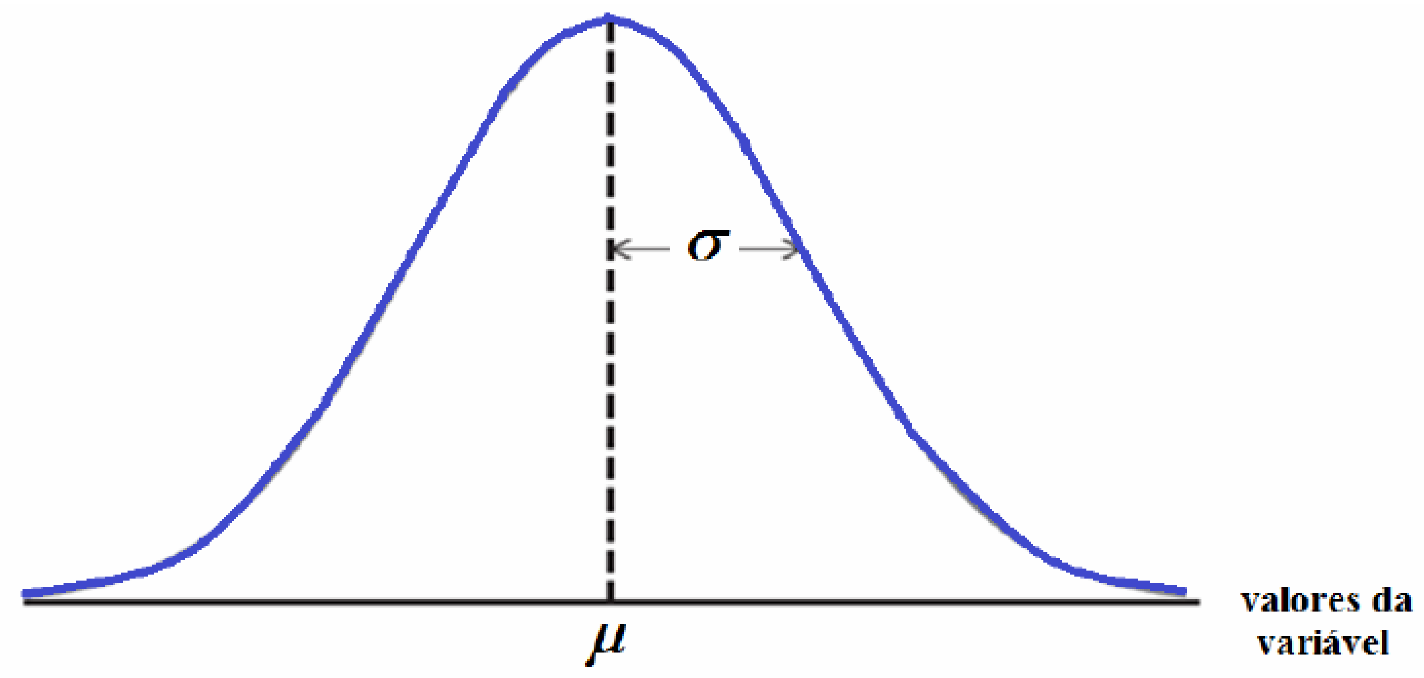
$$\sigma > 0$$

μ e σ são os parâmetros do Modelo Gaussiano

Dizemos que $X \sim$ Normal (μ, σ)

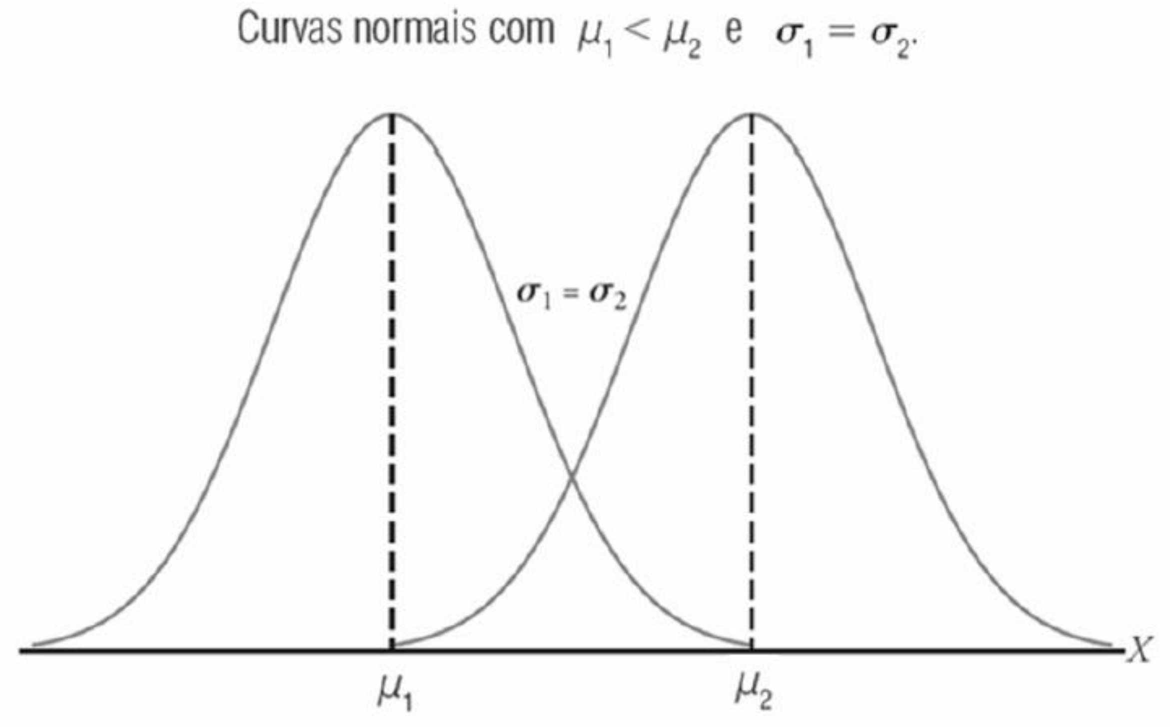
Modelo Gaussiano

A curva gaussiana (ou curva Normal) é definida pela média μ e pelo desvio-padrão σ.



Modelo Gaussiano

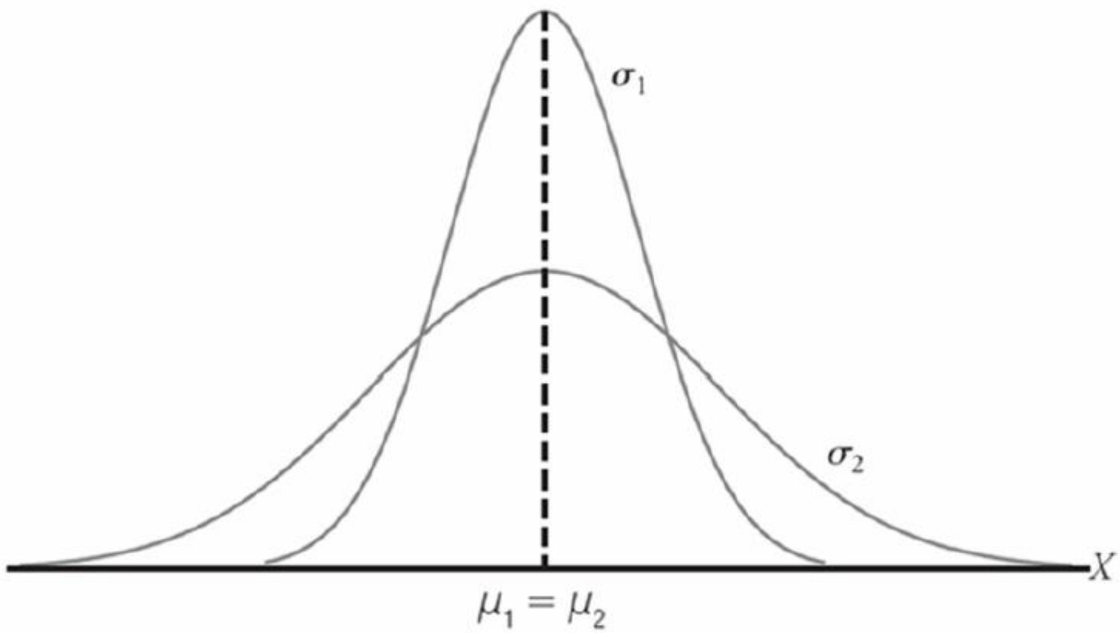
- **O parâmetro μ informa onde está centrada a curva gaussiana**



Modelo Gaussiano

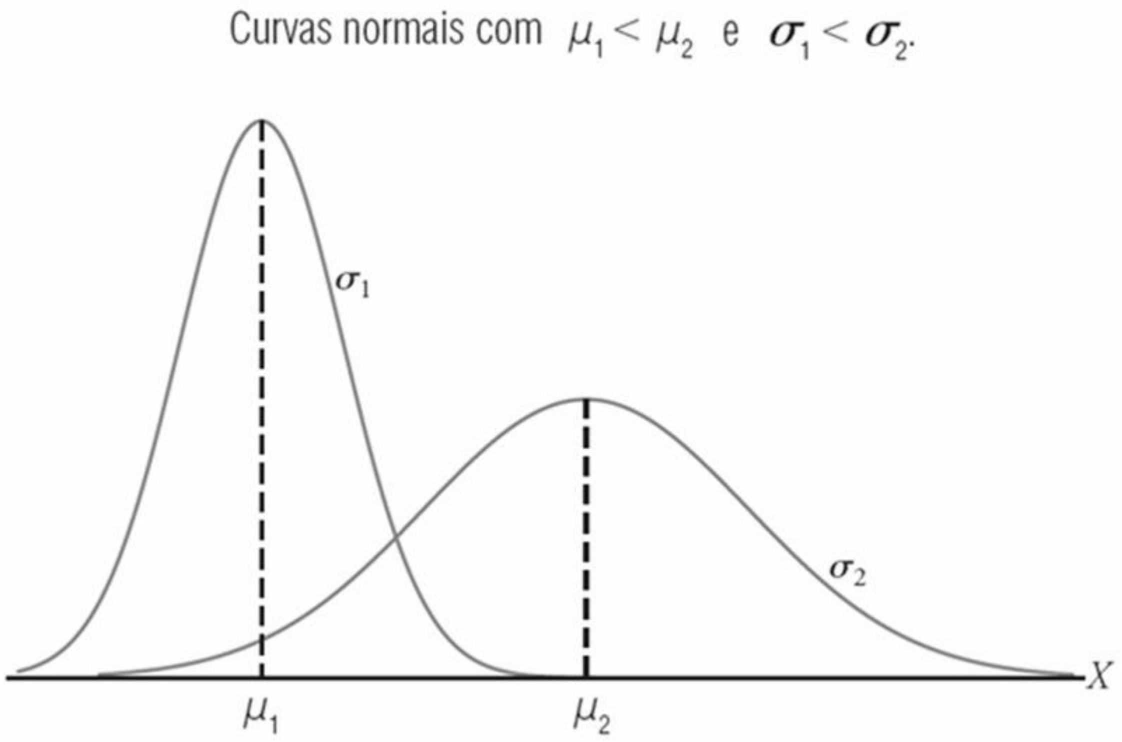
- **A forma do sino (mais "achatado" ou mais "alongado") é dada pelo valor do desvio-padrão σ**

Curvas normais com $\mu_1 = \mu_2$ e $\sigma_1 < \sigma_2$.



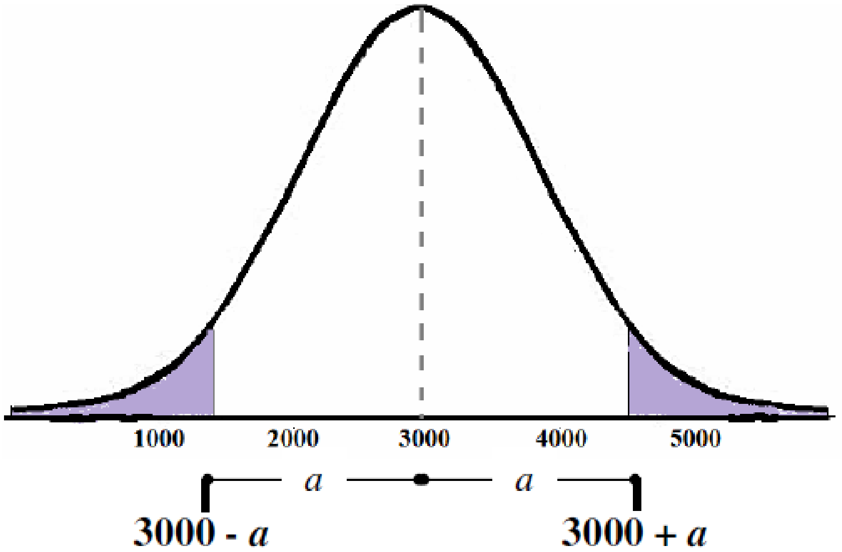
Modelo Gaussiano

- **Para cada combinação de μ e σ, existe uma curva gaussiana diferente**



Modelo Gaussiano

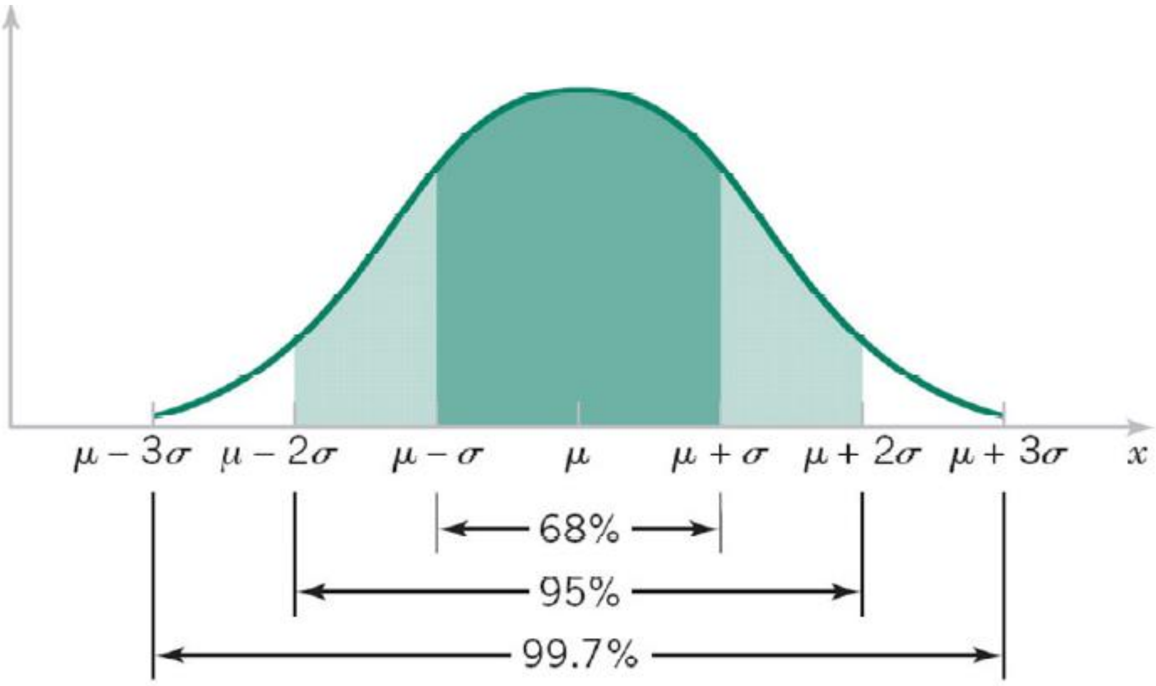
- **A curva gaussiana tem a forma de um sino e é simétrica em torno da média μ;**



$$P(X < 3000-a) = P(X > 3000+a)$$

Simetria

Propriedades da Distribuição Normal

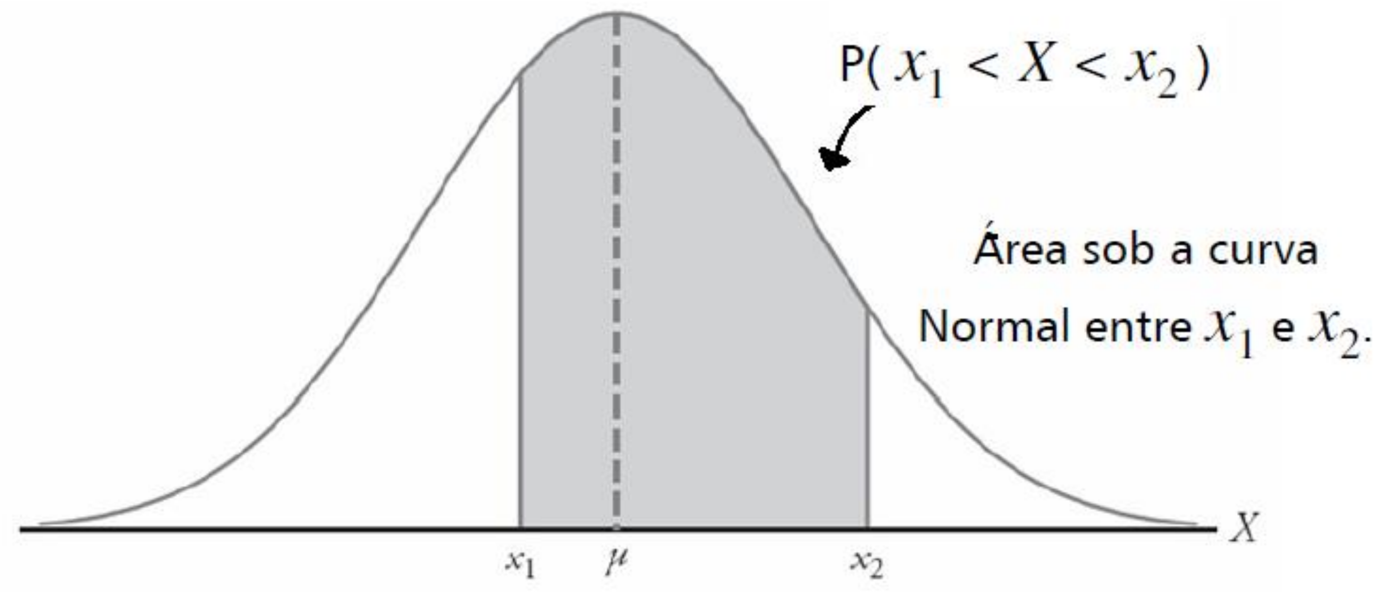


Área fixa entre intervalos simétricos

Cálculo de Probabilidade na Curva Normal

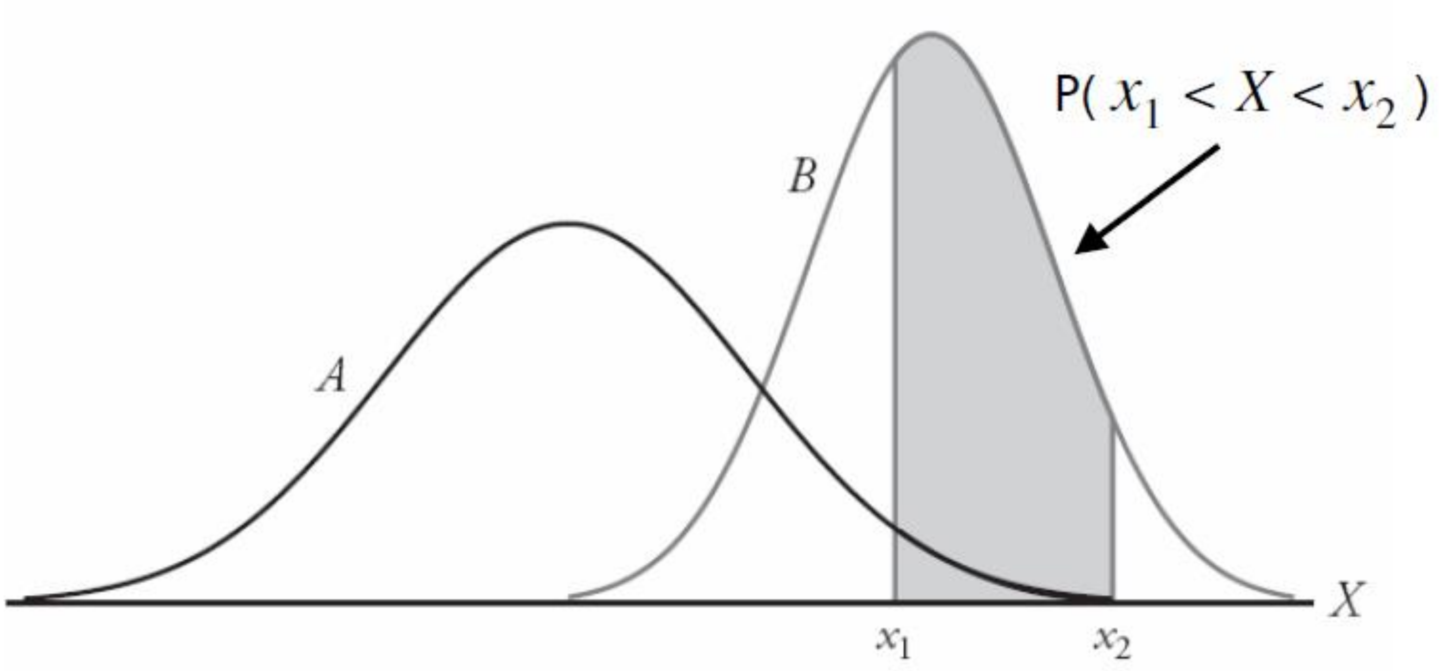
Considere uma variável aleatória X com distribuição Normal (μ,σ). Ou seja, $X \sim \text{Normal}(\mu,\sigma)$

Probabilidade de X estar entre x_1 e x_2: $P(x_1 < X < x_2)$



Cálculo de Probabilidade na Curva Normal

- Curvas Normais diferentes -> áreas diferentes



Distribuição Normal

Distribuição Normal

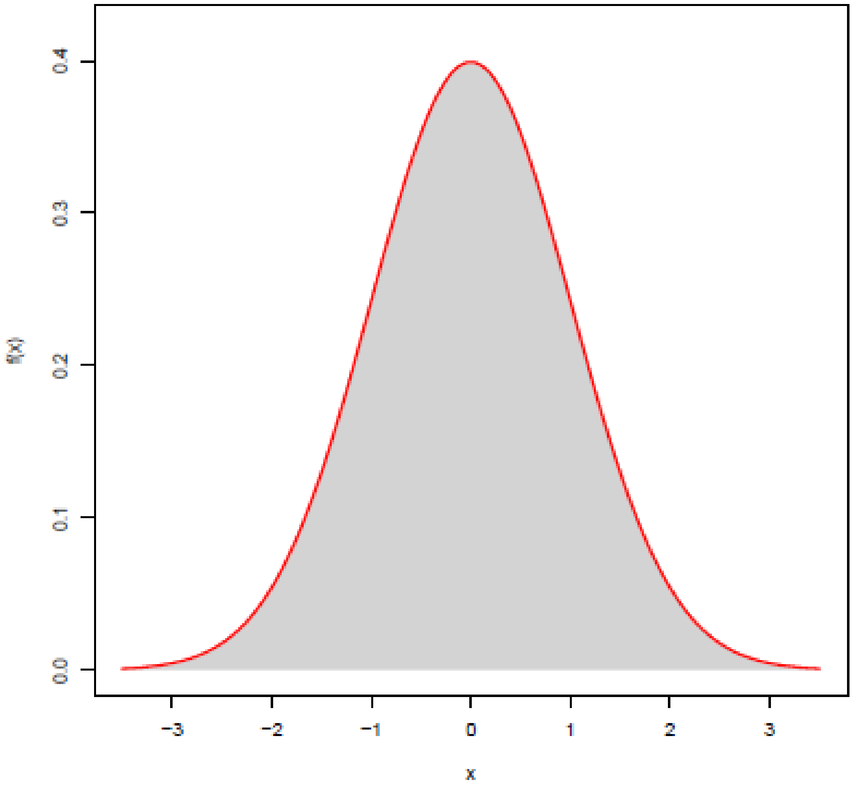
Distribuição Normal

Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2},$$

para $-\infty < x, \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$. Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Descrição de $f(x)$ de uma N(0,1)



Distribuição Normal

Padronização

Se $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim \text{N}(0, 1)$ (normal padrão), então

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

ou seja, todos os cálculos podem ser feitos pela normal padrão.

Distribuição Padrão Normal

Distribuição Padrão Normal

As probabilidades na curva Normal são calculadas com o auxílio de uma tabela.

Como existem infinitas combinações dos valores para μ e σ, seria inviável tabelar as probabilidades de todas as distribuições Normais possíveis.

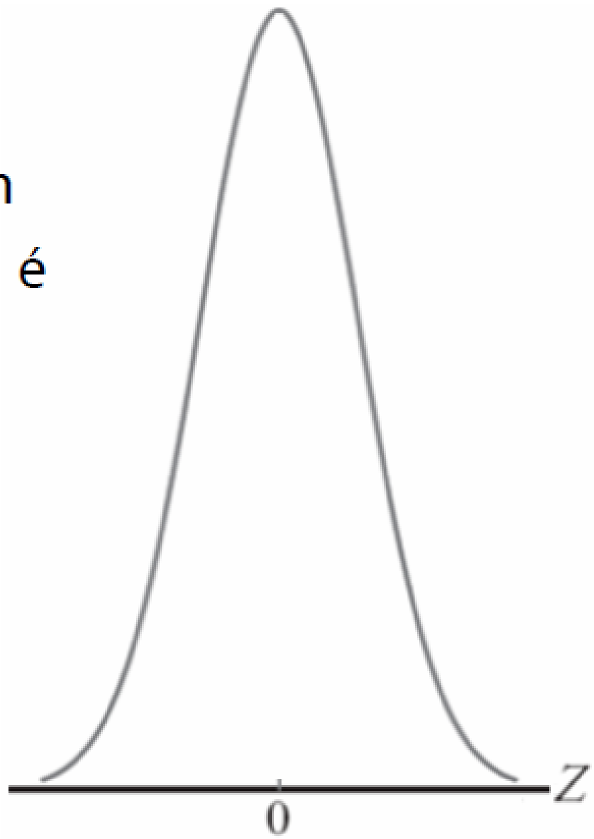
Sendo assim, uma única variável Normal possui suas probabilidades tabeladas: a variável Z com média igual a 0 e desvio-padrão igual a 1.

$$Z \sim \text{Normal}\ (\mu=0\ ;\ \sigma=1)$$

Distribuição Padrão Normal

A variável aleatória Normal com média $\mu=0$ e desvio-padrão $\sigma=1$ é chamada de

Variável Normal Padrão



Distribuição Padrão Normal

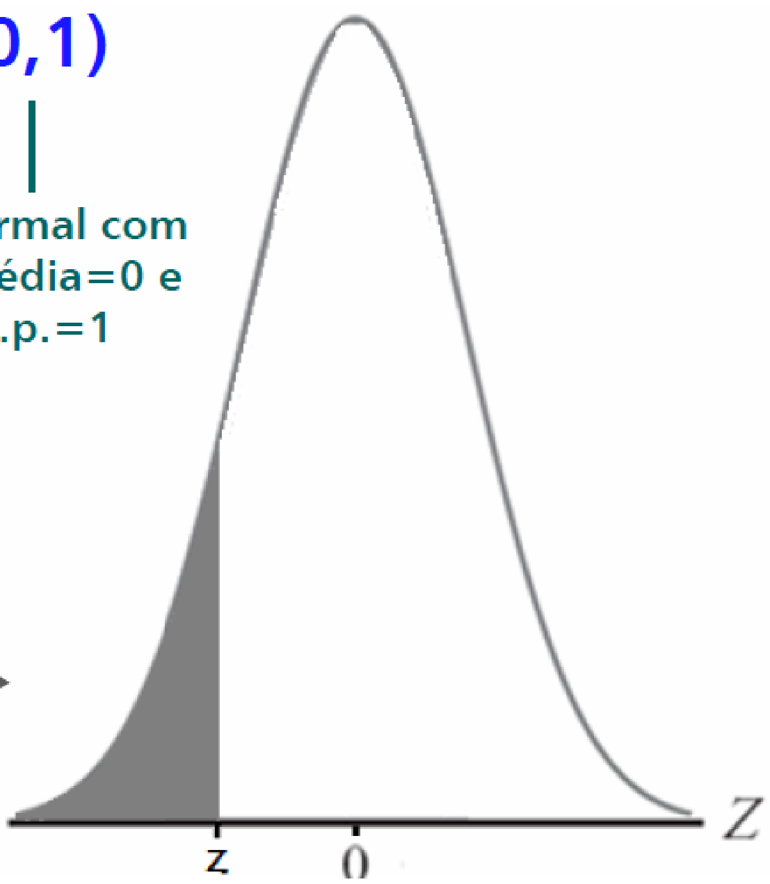
$$Z \sim N(0,1)$$

a variável aleatória Z

tem distribuição de probabilidade

Normal com média=0 e d.p.=1

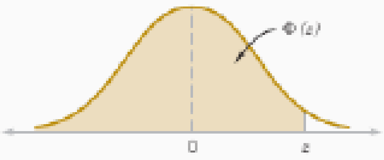
$P(\, Z < z \,)$



Função de distribuição acumulada: Tabela *Z*

$$z \geq 0$$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

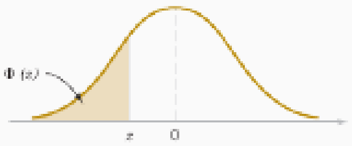


z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511967	0.515953	0.519939	0.532922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555760	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621719	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802338	0.805106	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823815	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.878999	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886860	0.888767	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903199	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935744	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959071	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965621	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201

Função de distribuição acumulada: Tabela *Z*

$$z \leq 0$$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$



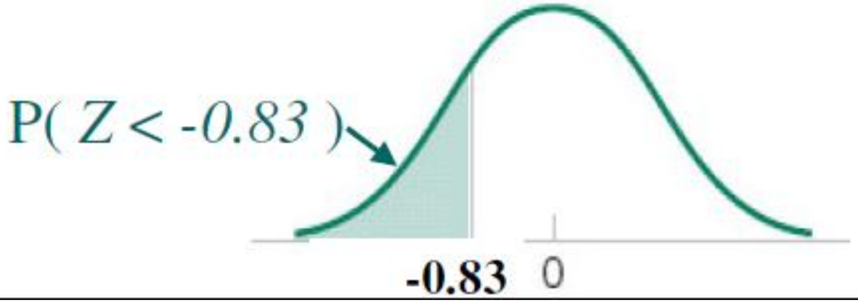
z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.03	−0.01	−0.00
−2.5	0.004799	0.004940	0.005085	0.005234	0.005386	0.005543	0.005703	0.005868	0.006037	0.006210
−2.4	0.006387	0.006569	0.006756	0.006947	0.007143	0.007344	0.007549	0.007760	0.007976	0.008198
−2.3	0.008424	0.008656	0.008894	0.009137	0.009387	0.009642	0.009903	0.010170	0.010444	0.010724
−2.2	0.011011	0.011304	0.011604	0.011911	0.012224	0.012545	0.012874	0.013209	0.013553	0.013903
−2.1	0.014262	0.014629	0.015003	0.015386	0.015778	0.016177	0.016586	0.017003	0.017429	0.017864
−2.0	0.018309	0.018763	0.019226	0.019699	0.020182	0.020675	0.021178	0.021692	0.022216	0.022750
−1.9	0.023295	0.023852	0.024419	0.024998	0.025588	0.026190	0.026803	0.027429	0.028067	0.028717
−1.8	0.029379	0.030054	0.030742	0.031443	0.032157	0.032884	0.033625	0.034379	0.035148	0.035930
−1.7	0.036727	0.037538	0.038364	0.039204	0.040059	0.040929	0.041815	0.042716	0.043633	0.044565
−1.6	0.045514	0.046479	0.047460	0.048457	0.049471	0.050503	0.051551	0.052616	0.053699	0.054799
−1.5	0.055917	0.057053	0.058208	0.059380	0.060571	0.061780	0.063008	0.064256	0.065522	0.066807
−1.4	0.068112	0.069437	0.070781	0.072145	0.073529	0.074934	0.076359	0.077804	0.079270	0.080757
−1.3	0.082264	0.083793	0.085343	0.086915	0.088508	0.090123	0.091759	0.093418	0.095098	0.096801
−1.2	0.098525	0.100273	0.102042	0.103835	0.105650	0.107488	0.109349	0.111233	0.113140	0.115070
−1.1	0.117023	0.119000	0.121001	0.123024	0.125072	0.127143	0.129238	0.131357	0.133500	0.135666
−1.0	0.137857	0.140071	0.142310	0.144572	0.146859	0.149170	0.151505	0.153864	0.156248	0.158655
−0.9	0.161087	0.163543	0.166023	0.168528	0.171056	0.173609	0.176185	0.178786	0.181411	0.184060
−0.8	0.186733	0.189430	0.192150	0.194894	0.197662	0.200454	0.203269	0.206108	0.208970	0.211855
−0.7	0.214764	0.217695	0.220650	0.223627	0.226627	0.229650	0.232695	0.235762	0.238852	0.241964
−0.6	0.245097	0.248252	0.251429	0.254627	0.257846	0.261086	0.264347	0.267629	0.270931	0.274253
−0.5	0.277595	0.280957	0.284339	0.287740	0.291160	0.294599	0.298056	0.301532	0.305026	0.308538
−0.4	0.312067	0.315614	0.319178	0.322758	0.326355	0.329969	0.333598	0.337243	0.340903	0.344578
−0.3	0.348268	0.351973	0.355691	0.359424	0.363169	0.366928	0.370700	0.374484	0.378281	0.382089
−0.2	0.385908	0.389739	0.393580	0.397432	0.401294	0.405165	0.409046	0.412936	0.416834	0.420740
−0.1	0.424655	0.428576	0.432505	0.436441	0.440382	0.444330	0.448283	0.452242	0.456205	0.460172
0.0	0.464144	0.468119	0.472097	0.476078	0.480061	0.484047	0.488033	0.492022	0.496011	0.500000

A Tabela Normal Padrão (Tabela Z) Parte Negativa

Linha: Parte inteira e primeira casa decimal de z

Coluna: Segunda casa decimal de z

z	0.00	0.01	0.02	0.03
-2.9	**0.0019**	**0.0018**	**0.0017**	**0.0017**
⋮		⋮		
-0.8	**0.2119**	**0.2090**	**0.2061**	**0.2033**

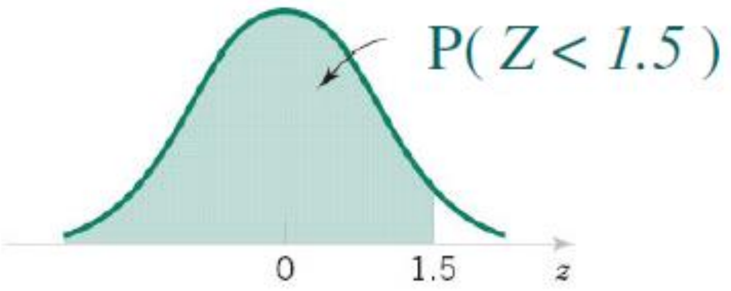


A Tabela Normal Padrão (Tabela Z) Parte Positiva

Linha: Parte inteira e primeira casa decimal de z

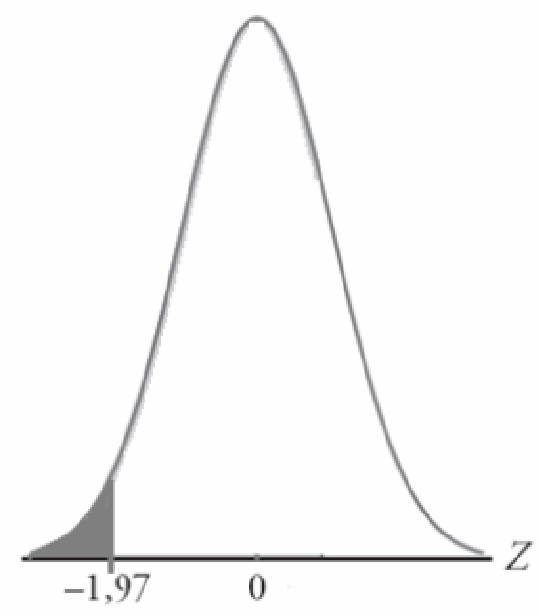
Coluna: Segunda casa decimal de z

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0	0.5000	0.5039	0.5039	0.51197
⋮		⋮		
1.5	0.9331	0.9344	0.9357	0.93699



Exemplo: Seja Z uma v.a. normal padronizada. Calcule:

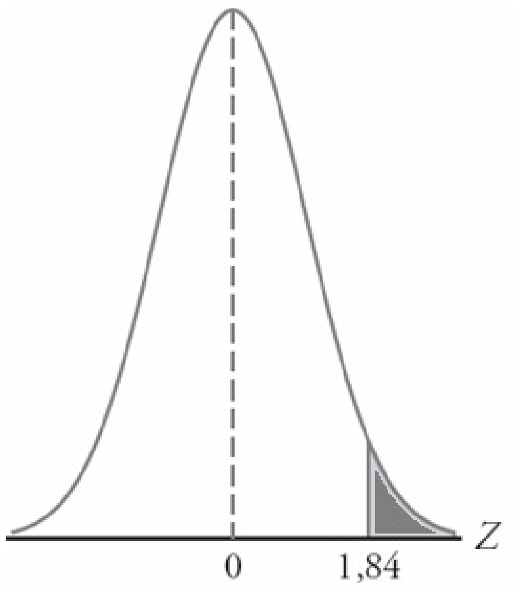
$P(Z < -1.97) = ?$



$P(Z < -1.97) = 0.0244$,

obtida direto da tabela.

$P(Z > 1.84) = ?$

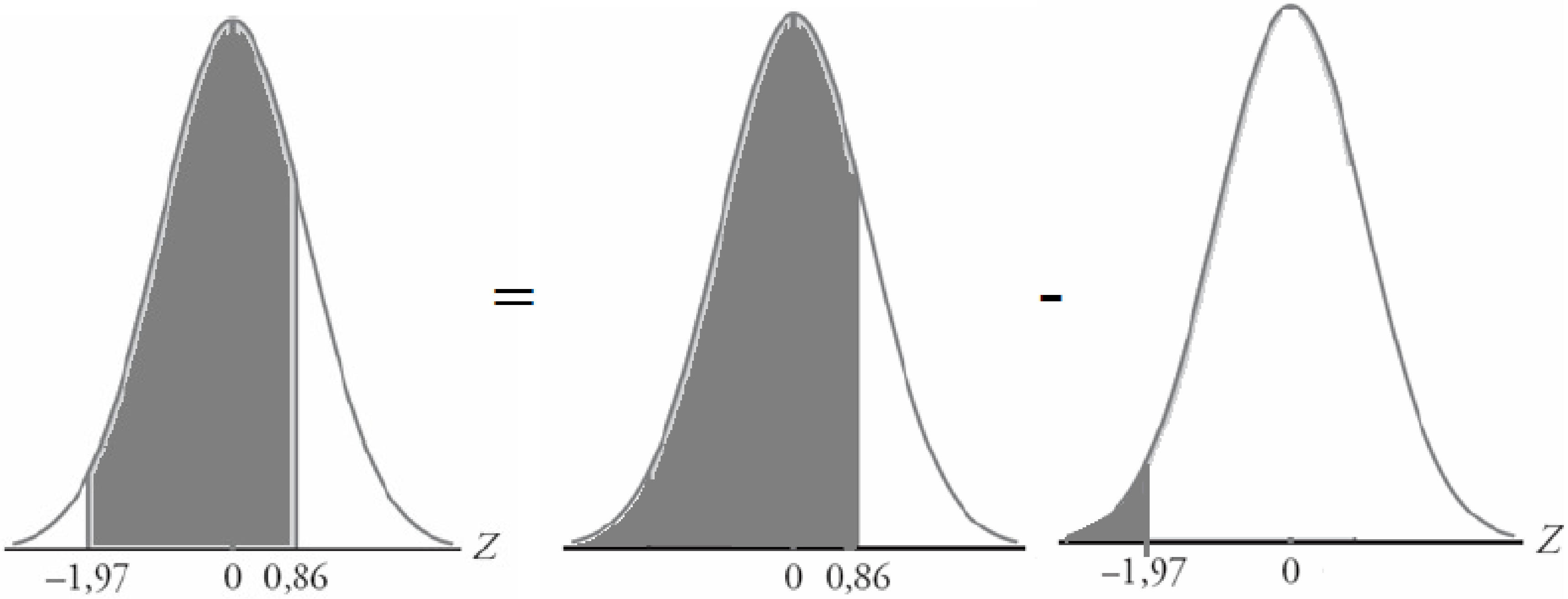


$P(Z >1.84) = P(Z < -1.84) = 0.0329$,

obtida direto da tabela

e por simetria.

$$P(-1.97 < Z < 0.86) = P(Z < 0.86) - P(Z < -1.97)$$
$$= 0.8051 - 0.0244$$
$$= 0.7807$$

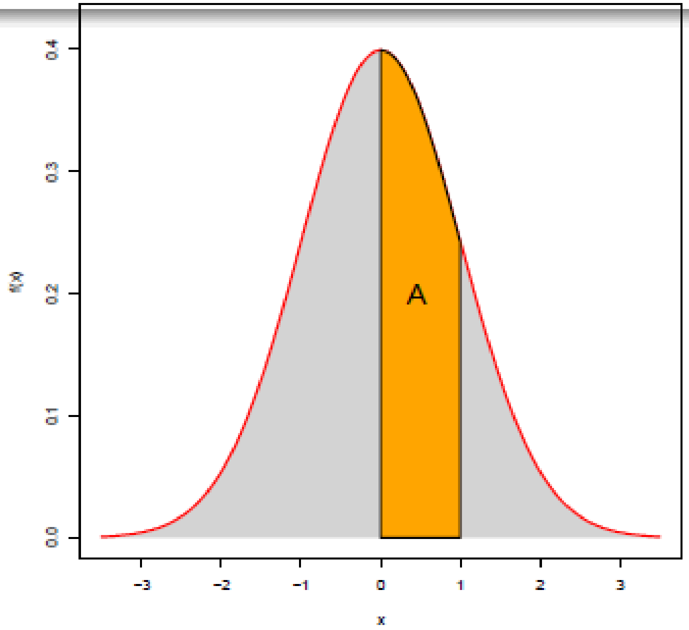


A Tabela Normal Padrão (Tabela Z)

Cálculo de probabilidades

Por exemplo, a probabilidade $A = P(0 \leq X \leq 1)$ pode ser calculada pela diferença

$$P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0,841 - 0,5 = 0,341.$$

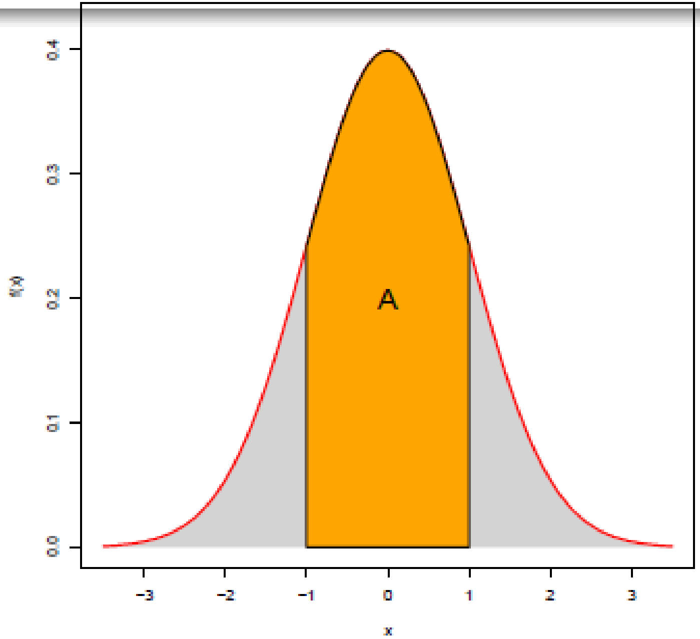


A Tabela Normal Padrão (Tabela Z)

Cálculo de probabilidades

Para calcular a probabilidade $A = P(-1 \leq X \leq 1)$ podemos usar o fato da distribuição ser simétrica na média. Assim,

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 2 \times P(0 \leq X \leq 1) = 2 \times 0,341 = 0,682.$$



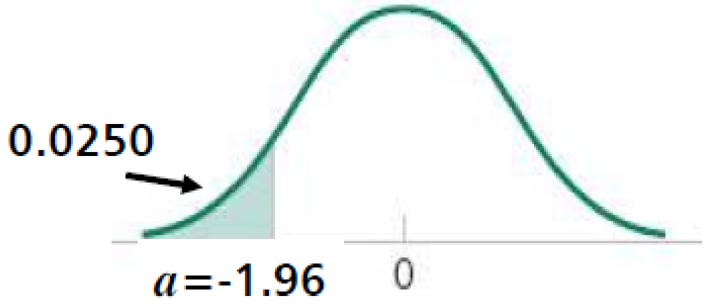
Cálculo de percentis na curva Normal

Percentil de ordem 2.5

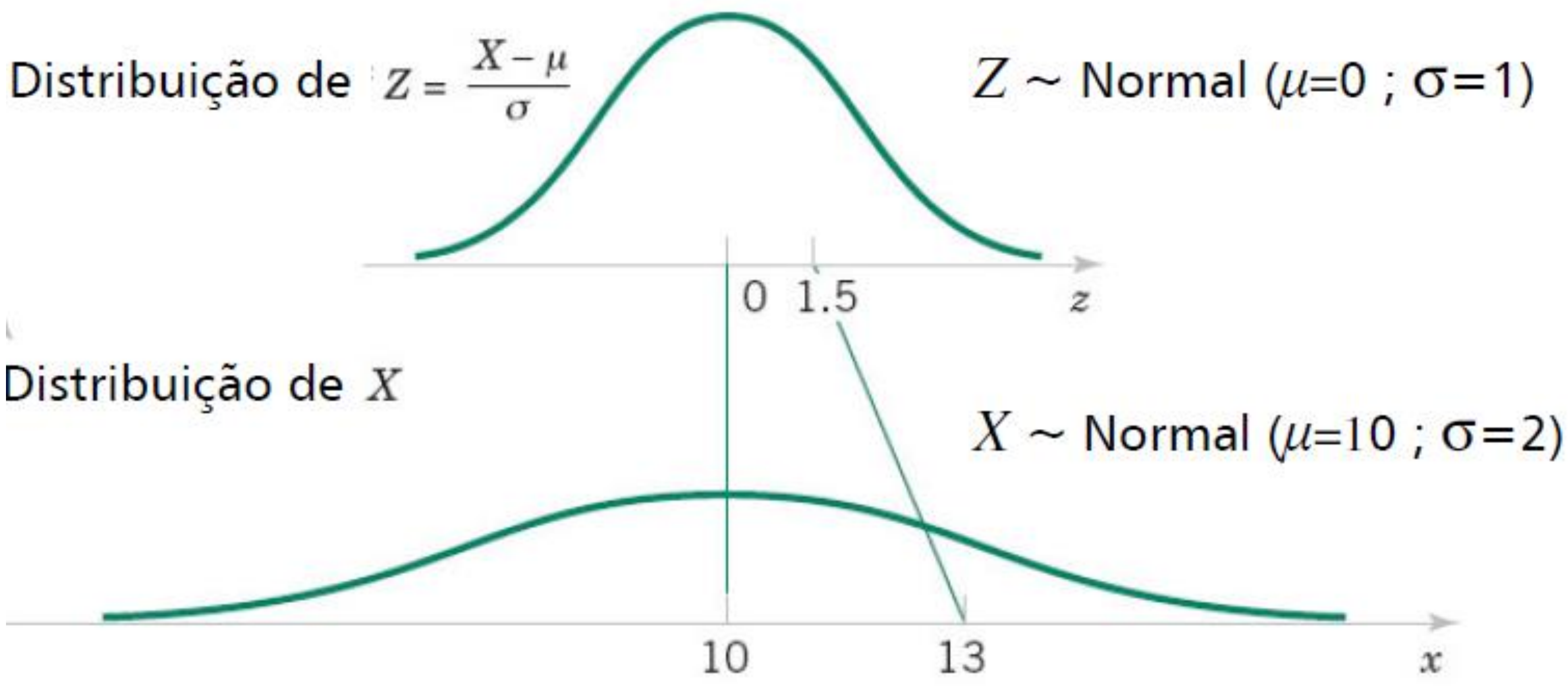
Que valor de Z na tabela Normal Padrão deixa uma área de 0.0250 abaixo dele ?

Ou seja, quem é a tal que P[$Z < a$]=0.0250 ?

a é o percentil 2.5 da curva Normal Padrão



Como usar a tabela Normal Padrão para calcular probabilidades em uma curva Normal qualquer?



Padronização de uma variável aleatória Normal

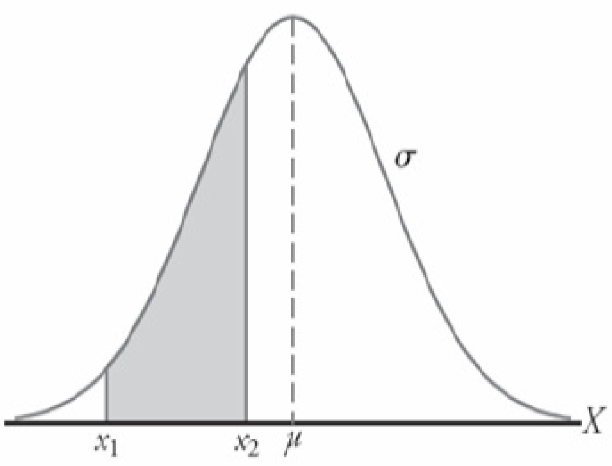
Podemos transformar uma variável aleatória $X \sim Normal\,(\mu, \sigma)$ em uma variável aleatória $Z \sim Normal\,(0, 1)$ usando a expressão:

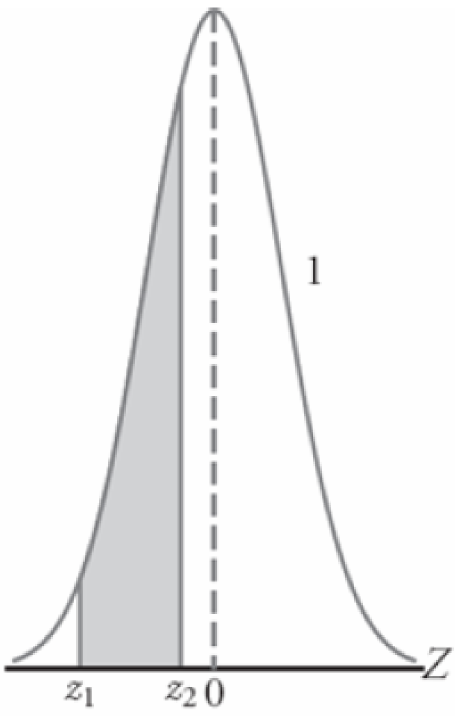
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Padronização de uma variável aleatória Normal

$X \sim Normal(\mu, \sigma)$

$Z \sim Normal(0,1)$



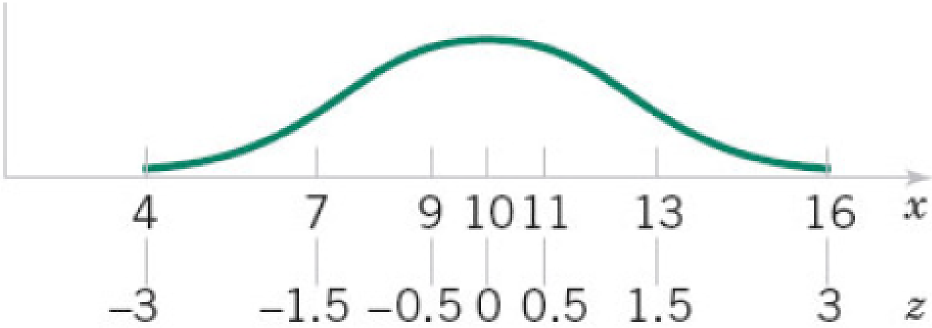


$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \qquad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

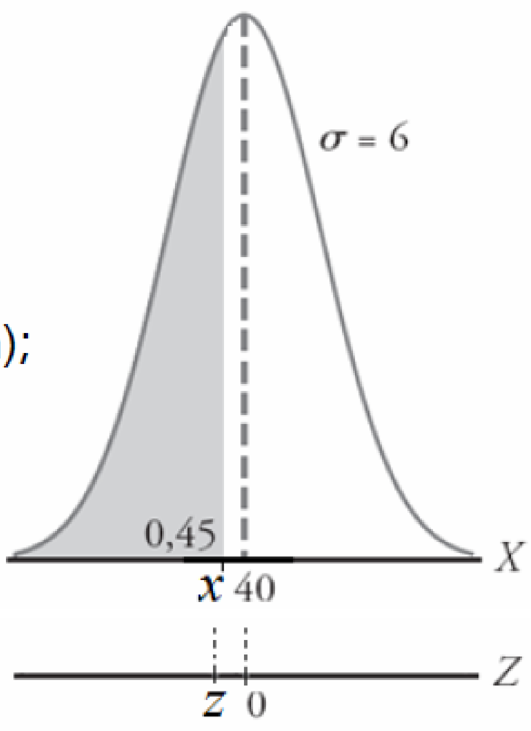
Calculando probabilidades de X utilizando a tabela Z

$$P[X < 9] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{9-\mu}{\sigma}\right] = P\left[\frac{X-10}{2} < \frac{9-10}{2}\right]$$
$$= P[Z < -0.5] = 0.3085$$

$$P[X > 13] = P[\frac{X-10}{2} > \frac{13-10}{2}] = P[Z > 1.5]$$
$$= P[Z < -1.5] = 0.0668$$



Exemplo 1: Se X tem distribuição Normal com $\mu = 40$ e $\sigma = 6$, encontre o valor de x tal que $P[X < x] = 0.45$.



Se $P[X < x] = 0.45$.

então $P(Z < (x-40)/6) = 0.45$.

Mas $P(Z < -0.13) = 0.45$ (da tabela);

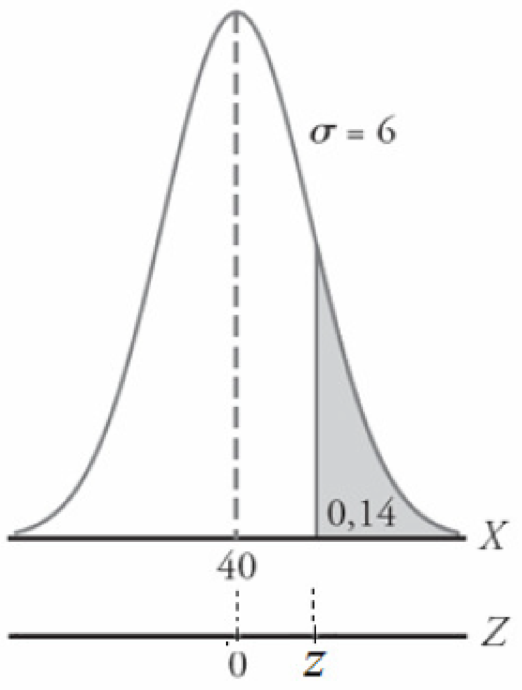
Logo $(x-40)/6 = -0.13$

⇨ $x = 40 + (-0.13)6$
$= 40 - 0.78$
$= 39.22$.

Ou seja, 39.22 é o percentil 45 da distribuição de X.

$$z = \frac{x - 40}{6}$$

Exemplo 2: Se X tem distribuição Normal com $\mu = 40$ e $\sigma = 6$, encontre o valor de x tal que $P[X > x] = 0.14$.



Se $P[X < x] = 0.86$

então $P(Z < (x-40)/6) = 0.86$.

Mas $P(Z > 1.08) = P(Z < -1.08)$
$= 0.14$ (da tabela);

Logo $(x-40)/6 = 1.08$

⇨ $x = 40 + (1.08)6$
$= 46.48$

Ou seja, 46.48 é o percentil 86 da distribuição de X.

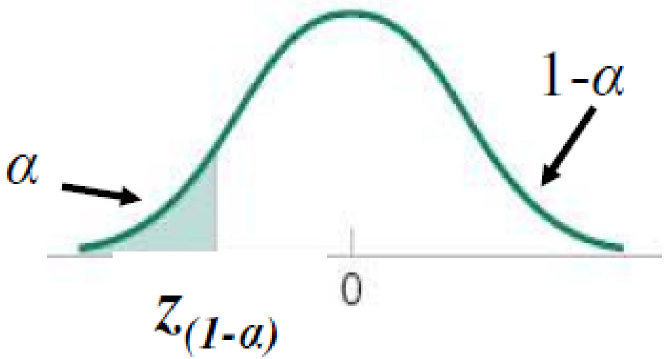
$$z = \frac{x - 40}{6}$$

Cálculo do Percentil de ordem 100α da distribuição Normal

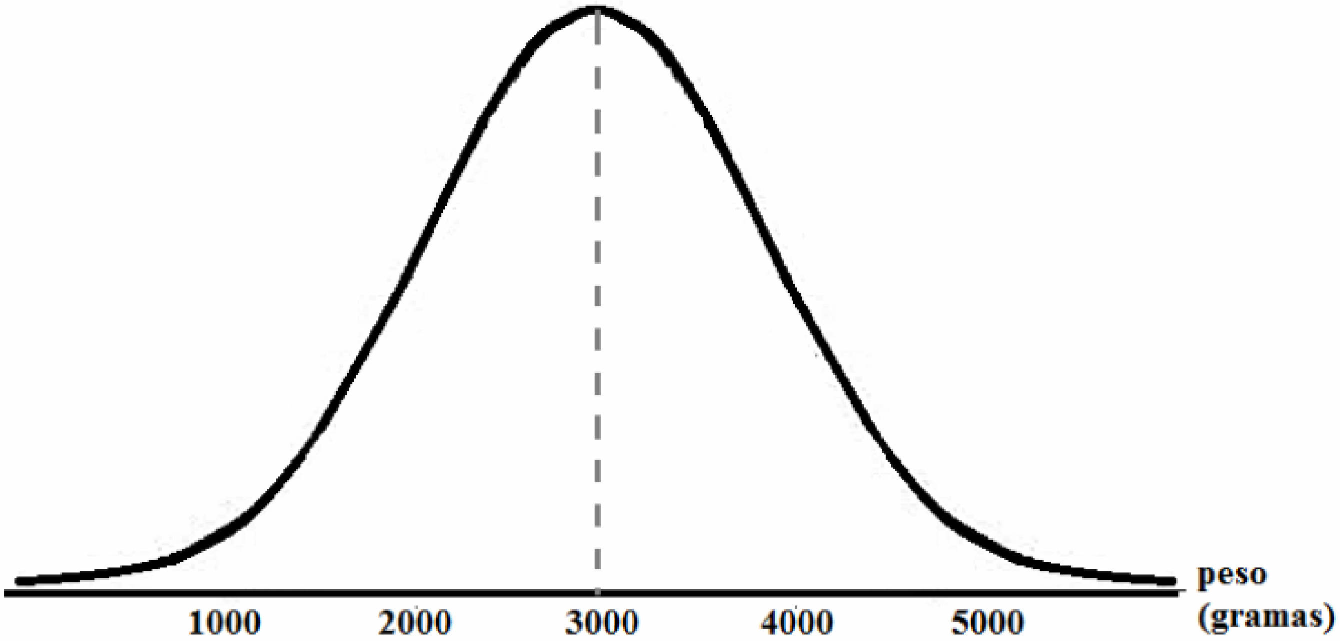
$$P_{100\alpha} = \mu + z_{(1-\alpha)} \cdot \sigma$$

onde α é a ordem do percentil ($0 < \alpha < 1$) e

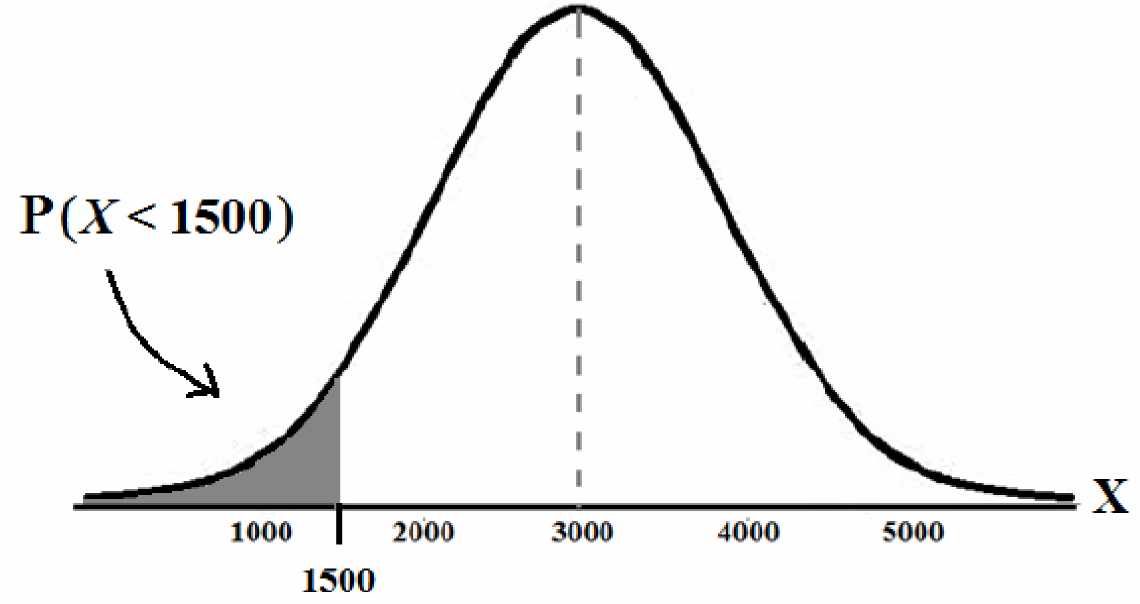
$z_{(1-\alpha)}$ é o valor na tabela Z que deixa uma área de ($1-\alpha$) **acima** dele.



Exemplo Inicial: Suponha que X é o peso de bebês ao nascer e que, em certa população, X tem distribuição que pode ser aproximada pela Normal com $\mu = 3000g$ e $\sigma = 1000g$.



Qual é a porcentagem de bebês que nascem com peso abaixo de 1500g ?

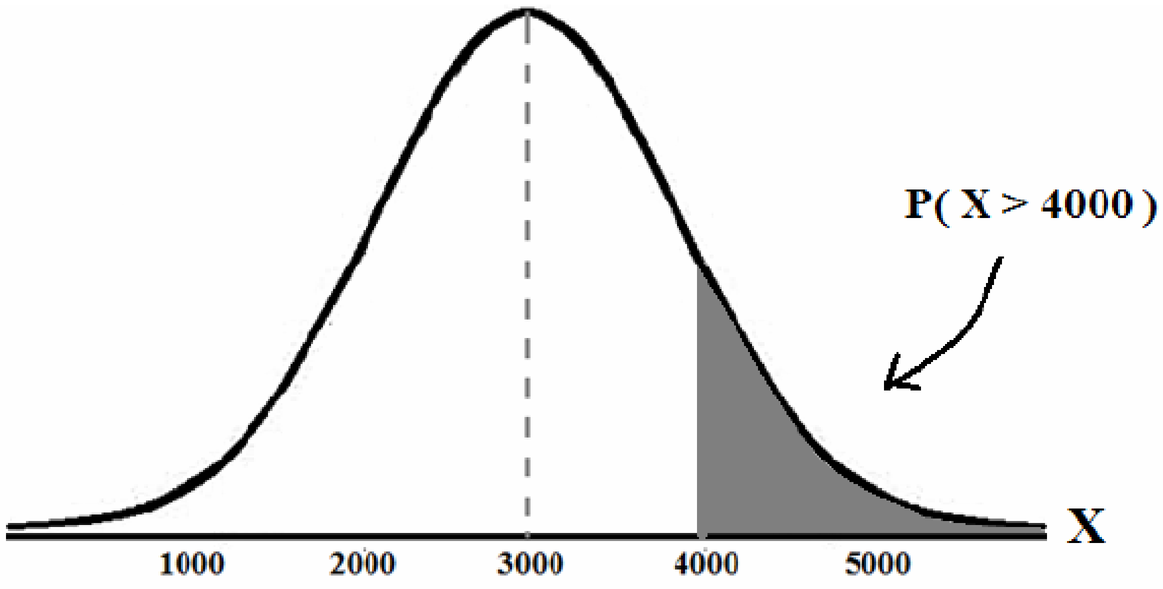


$$P[X < 1500] = P\left[\frac{X - 3000}{1000} < \frac{1500 - 3000}{1000}\right]$$

$$= P[Z < -1.5] = 0.0068$$

0.68% dos bebês têm peso inferior a 1500g.

Qual é a porcentagem de bebês que nascem com peso acima de 4000g ?

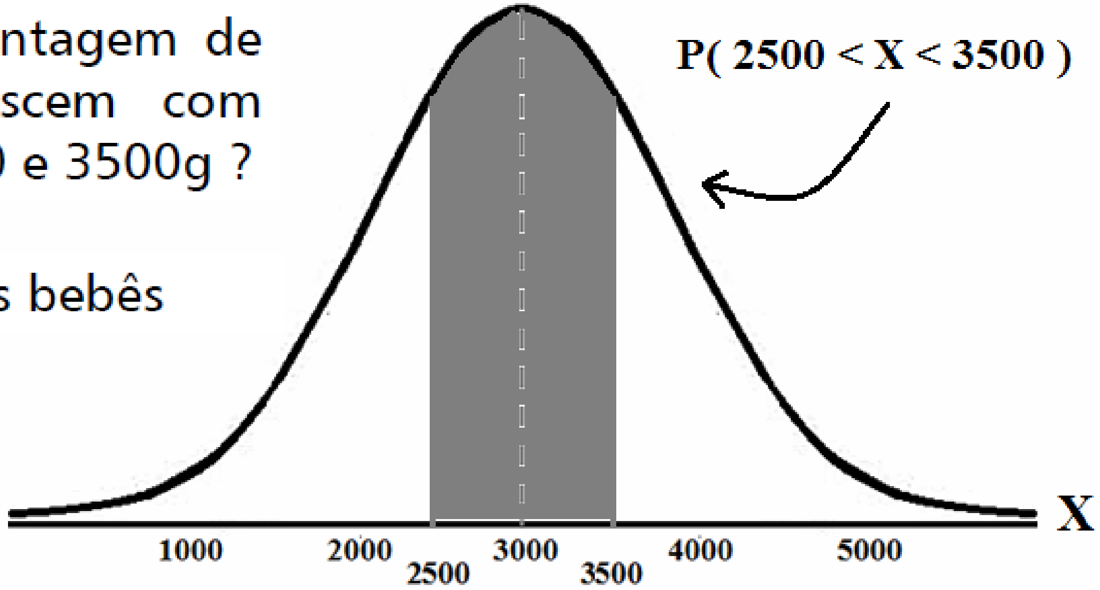


$$P[X > 4000] = P\left[Z > \frac{4000 - 3000}{1000}\right]$$

$$= P[Z > 1.0] = P[Z < -1.0] = 0.1587$$

Qual é a porcentagem de bebês que nascem com peso entre 2500 e 3500g ?

38.30% dos bebês



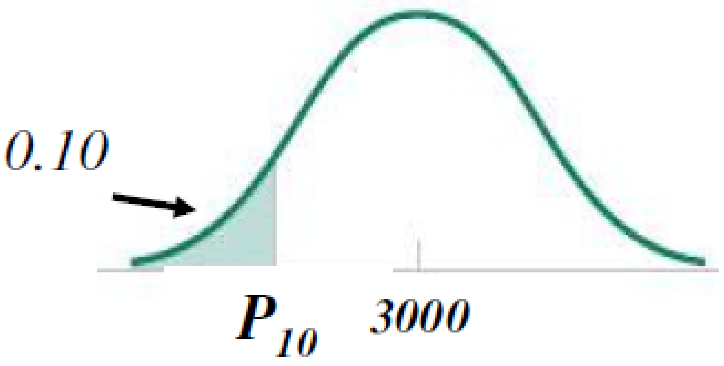
$$P[2500 < X < 3500] = P[X < 3500] - P[X < 2500]$$

$$= P\left[Z < \frac{3500-3000}{1000}\right] - P\left[Z < \frac{2500-3000}{1000}\right]$$

$$= P[Z < 0.5] - P[Z < -0.5]$$

$$= 0.6915 - 0.3085 = 0.3830$$

Qual valor de peso dos bebês separa os 10% mais leves?

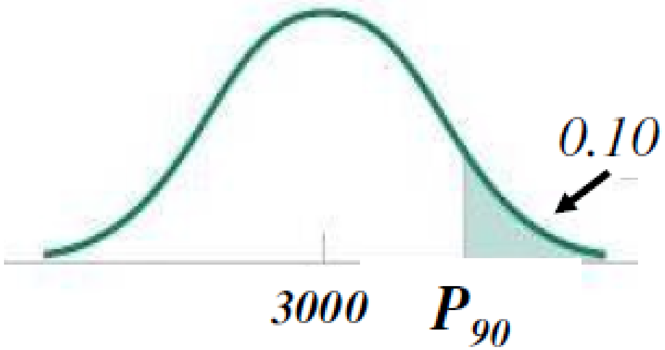


1720 gramas

$$\alpha = 0.10$$

$$\begin{aligned} P_{10} &= 3000 + z_{(1-0.1000)} \times 1000 \\ &= 3000 + z_{(0.9000)} \times 1000 \\ &= 3000 + (-1.28) \times 1000 \\ &= 3000 - 1280 = 1720 \end{aligned}$$

Qual valor de peso dos bebês separa os 10% mais pesados?



4280 gramas

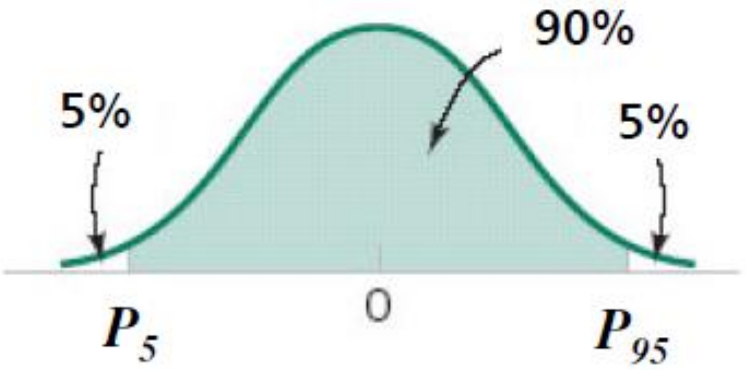
$$\alpha = 0.90$$

$$P_{10} = 3000 + z_{(1-0.9000)} \times 1000$$
$$= 3000 + z_{(0.1000)} \times 1000$$
$$= 3000 + 1.28 \times 1000$$
$$= 3000 + 1280 = 4280$$

Aplicações do Modelo Gaussiano: Cálculo de Faixas de Referência

Faixas de Referência são formadas por dois percentis

Exemplo: uma faixa de referência de 90% é formada pelos percentis 5 e 95



Cálculo de Faixas de Referência utilizando o modelo Gaussiano

Seja X a variável aleatória que representa a característica para a qual queremos construir uma faixa de referência.

Exemplo: X é o peso de recém-nascidos

Se $X \sim$ Normal (μ,σ), então uma faixa de referência de $(1\text{-}\alpha)100\%$ é formada pelos percentis

$$P_{(\alpha/2)100} \quad e \quad P_{(1-\alpha/2)100}$$

Exemplo: uma faixa de referência de 90% $(\alpha=0.10)$ é formada pelos percentis P_5 e P_{95}

Cálculo de Faixas de Referência utilizando o modelo Gaussiano

No exemplo do peso dos recém-nascidos (X), se pudermos supor que $X \sim$ Normal (μ=3000 ; σ=1000),

uma faixa de referência de 80% seria dada pelos percentis P_{10}= 1720 e P_{90} = 4280 (já calculados anteriormente)

Faixa de Referência de 80% para o peso de recém-nascidos

1720 gramas a 4280 gramas

Cálculo de Faixas de Referência utilizando o modelo Gaussiano

Relembrando o cálculo de percentis com o modelo gaussiano e a definição de faixa de referência,

uma faixa de referência de (1-α)100% é dada pela expressão

$$[\mu + z_{(1-\alpha/2)} \cdot \sigma \;\; ; \; \mu + z_{(\alpha/2)} \cdot \sigma]$$

$$z_{(1-\alpha/2)} = -z_{(\alpha/2)} \quad \text{(por simetria)}$$

$$[\mu - z_{(\alpha/2)} \cdot \sigma \;\; ; \; \mu + z_{(\alpha/2)} \cdot \sigma]$$