ESTATÍSTICA

Michelle Hanne Soares de Andrade
michellehanne.andrade@gmail.com

Teorema da Probabilidade Total

T1 (Teorema da probabilidade total) Se E_1, E_2 , ..., E_n são eventos <u>exclusivos</u> (satisfazem $E_iE_j = \varnothing$ pra todo $i \neq j$) e <u>exaustivos</u> ($E_1 + E_2 + \ldots + E_n = \Omega$) , então a probabilidade de qualquer evento A pode ser calculada como segue

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid Ei).P(Ei)$$

(Para provar o teorema basta notar que $A = AE_1 + AE_2 + \ldots + AE_n$ e que se trata da união de eventos mutuamente excludentes)

Teorema de Bayes

T2 : (teorema da Bayes) Sejam A e B eventos quaisquer e P(B) > 0, então:

$$P(A|B) = \frac{P(B \mid A).P(A)}{P(B)}$$

- Sabendo que a bola selecionada é azul. Qual a probabilidade de que ela saiu da Urna número 1. Ou seja: $P(U^1|A)$

Teorema de Bayes

- Três máquinas A, B e C produzem botões, respectivamente, 15%, 25% e 60% da produção total.
- As percentagens de botões defeituosos fabricados por estas máquinas são respectivamente 5%, 7% e 4%. Se ao acaso, da produção total de botões, for encontrado um defeituoso, qual a probabilidade de ele ter sido produzido pela máquina B?

Teorema de Bayes

De acordo com o enunciado, temos as seguintes probabilidades: $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 0.6$, $P(D|A) = 0.05$, $P(D|B) = 0.07$ *e* $P(D|C) = 0.04$.

Pretende-se determinar $P(B|D)$. *Usando o Teorema de Bayes, obtemos:*

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)} = \frac{175}{490} \simeq 36\%.$$

Logo a afirmação está correcta, isto é, a probabilidade de um botão defeituoso ter sido produzido

- 0,0175/0,049 = 0,3571

Teorema de Bayes – Exemplo 1

- João vai ao médico e este desconfia da doença A. Toma várias providências: examina João, observa os sintomas e faz exames de rotina.

Seja θ o indicador da doença A em João

O médico assume que $P(\theta = 1|H) = 0,7$

Exame de laboratório X do tipo +/- relacionado com θ

$$\begin{cases} P(X = 1 \mid \theta = 0) = 0,40, \\ P(X = 1 \mid \theta = 1) = 0,95, \end{cases}$$

João faz o teste e o resultado é X=1

Teorema de Bayes – Exemplo 1

$$P(\theta = 1 \mid X = 1) \propto l(\theta = 1\,; X = 1)P(\theta = 1)$$

$$\propto (0,95)(0,7) = 0,665$$

$$P(\theta = 0 \mid X = 1) \quad \propto (0,40)(0,30) = 0,120$$

$$P(\theta = 1 \mid X = 1) = 0,665/0,785 = 0,847 \text{ e}$$

$$P(\theta = 0 \mid X = 1) = 0,120/0,785 = 0,153$$

Teorema de Bayes – Exemplo 1

Médico pede a João teste Y, também, do tipo +/-

$$\begin{cases} P(Y = 1 \mid \theta = 1) = 0,99 \\ P(Y = 1 \mid \theta = 0) = 0,04 \end{cases}$$

Usando a priori $p(\theta|x)$

Teorema de Bayes – Exemplo 1

$$p(y \mid x) = \sum_{\theta \in \Theta} p(y \mid \theta)\, p(\theta \mid x)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} P(Y=1 \mid X=1) &= P(Y=1 \mid \theta=1)P(\theta=1 \mid X=1) + \\ &\quad + P(Y=1 \mid \theta=0)P(\theta=0 \mid X=1) \\ &= (0,99)(0,847) + (0,04)(0,153) = 0,845 \text{ e} \\ P(Y=0 \mid X=1) &= 1 - P(Y=1 \mid X=1) = 0,155 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes – Exemplo 1

João faz o teste Y e observa-se Y=0

Agora

$$P(\theta = 1 \mid X = 1, Y = 0) \propto l(\theta = 1\,; Y = 0) P(\theta = 1 \mid X = 1)$$

$$\propto (0,01)(0,847) \doteq 0,0085$$

$$P(\theta = 0 \mid X = 1, Y = 0) \propto (0,96)(0,155) = 0,1466$$

ou

$$P(\theta = 1 \mid Y = 0, X = 1) = 0,0085/0,1551 = 0,055$$

$$P(\theta = 0 \mid Y = 0, X = 1) = 0,1466/0,1551 = 0,945.$$

Teorema de Bayes – Exemplo 1

Resumindo

$$P(\theta = 1) = \begin{cases} 0,7, & \text{antes de X e Y} \\ 0,847, & \text{após X e antes de Y} \\ 0,055, & \text{após X e Y} \end{cases}$$

Árvore de Probabilidade – Exemplo 1

- Considere o experimento que consiste no lançamento simultâneo de duas moedas honestas e individualmente identificáveis. Estamos interessados em medir a probabilidade do evento A : " aparecimento de ao menos uma cara"

Árvore de Probabilidade – Exemplo 1

Se c denota o evento "cara" e k o evento "coroa" então temos:

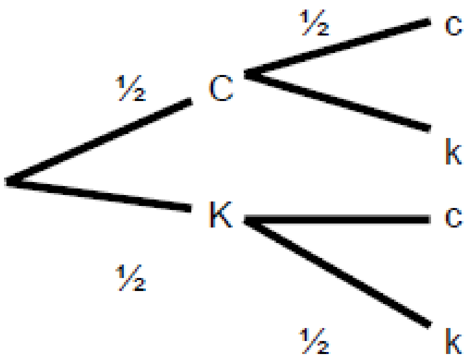
$\Omega = \{ (c,c); (c,k); (k,c); (k,k)\}$

$A = \{ (c,c); (c,k); (k,c) \}$

Pela definição clássica tem-se $P(A) = 3/4$ pois trata-se de um espaço amostral equiprovável.

Árvore de Probabilidade – Exemplo 1

Diagrama de árvore do experimento:



Ω	P_{rob}
cc	¼
ck	¼
kc	¼
kk	¼

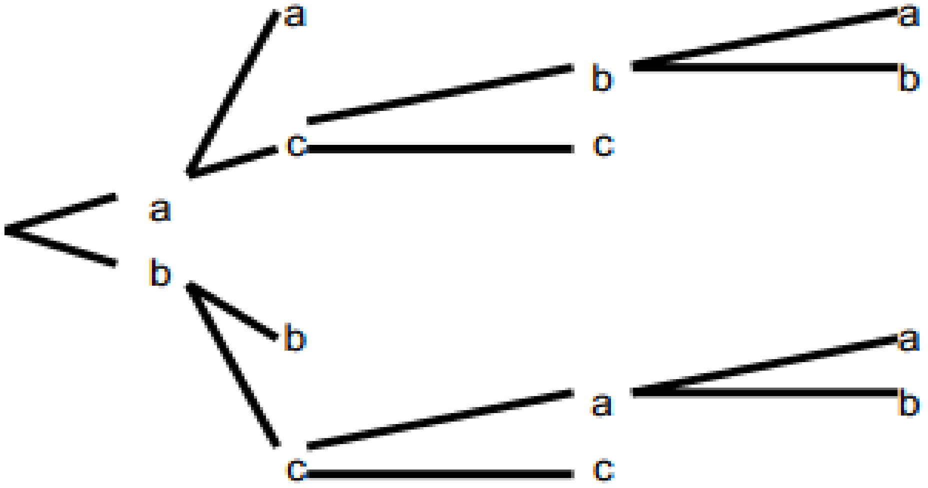
Árvore de Probabilidade – Exemplo 2

- Ana , Beatriz e Clarisse disputam a rodada final de um torneio de tênis. Seja P(a), P(b) e P(c) as probabilidades de que Ana, Beatriz ou Clarisse vença uma partida, respectivamente. Sem perda de generalidade, vamos admitir que entre elas não há favoritas; isto é, todas as probabilidades de vitória em uma partida são de ½. O torneio declara vencedora a primeira tenista que vencer 2 partidas. Definem-se os seguintes eventos:
  - A - Ana vence o campeonato
  - B - Beatriz vence o campeonato
  - C - Clarisse vence o campeonato
  - D – A rodada final terá exatamente 3 partidas
  - E – A rodada final terá no máximo três partidas

Árvore de Probabilidade – Exemplo 2

- Calcule as probabilidades desses eventos e também a condicional P(E|A).
- Diagrama de árvore (notar que não se trata mais de um espaço amostral equiprovável!)

Árvore de Probabilidade – Exemplo 2

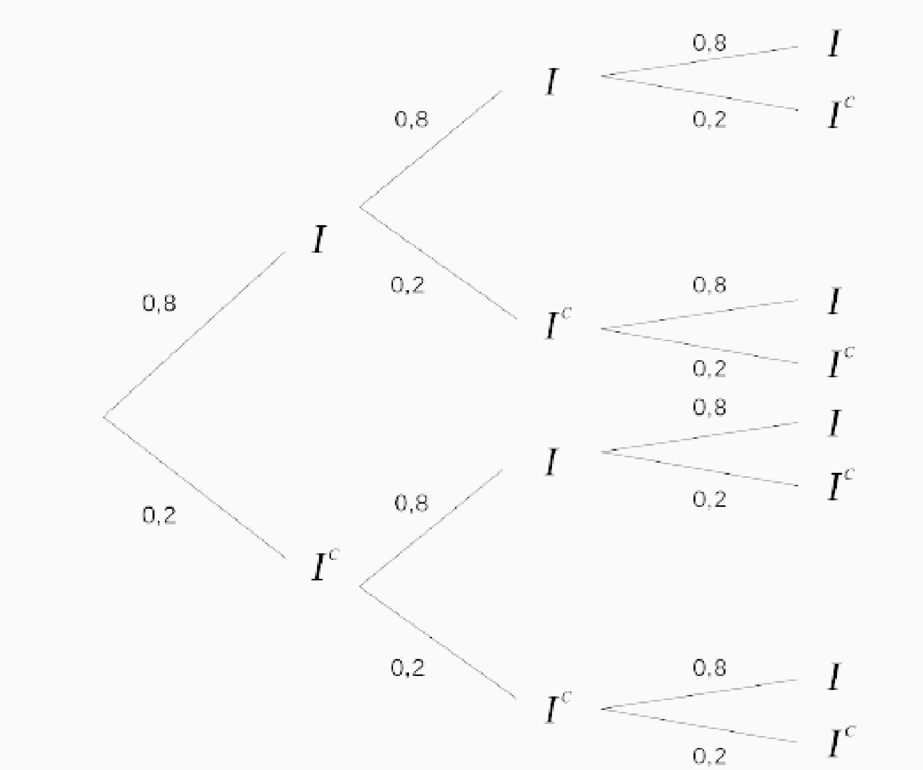


Ω	P_{rob}
aa	1/4
acba	1/16
acbb	1/16
acc	1/8
bb	1/4
bcaa	1/16
bcab	1/16
bcc	1/8

Árvore de Probabilidade – Exemplo 3

- Sabe-se que a eficácia de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é selecionado para vacinação e a imunização de cada um deles pode ser modelada como visto abaixo.
  - I= Imunizado
  - Ic=Não Imunizado
  - Denotando por *X* o número de indivíduos imunizados.
- Qual a probabilidade de ter pelo menos uma pessoa imunizada?

Árvore de Probabilidade – Exemplo 3



0,512

0,128

0,128

0,032

0,128

0,032

0,032

0,008

=3*0,032+ 3*0,128+0,512

Árvore de Probabilidade – Exemplo 3

Denotando por X o número de indivíduos imunizados, obtemos:

Evento	prob.	X
III	$0,8^3$	3
III^c	$0,8^2 \times 0,2$	2
II^cI	$0,8^2 \times 0,2$	2
II^cI^c	$0,8 \times 0,2^2$	1
I^cII	$0,8^2 \times 0,2$	2
I^cII^c	$0,8 \times 0,2^2$	1
I^cI^cI	$0,8 \times 0,2^2$	1
$I^cI^cI^c$	$0,2^3$	0

A probabilidade de ter pelo menos uma pessoa imunizada é de 99,2%