ESTATÍSTICA

Michelle Hanne Soares de Andrade
michellehanne.andrade@gmail.com

Exercício

1) Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino).

O espaço amostral fica dado por $\Omega = \{(MMM),(MMF),(MFM),(FMM),(MFF),(FMF),(FFM),(FFF)\}$.

1)Quais são as possíveis variáveis Aleatórias desse espaço amostral?

2) Quais são os valores da variável aleatória “número de crianças do sexo masculino” e “número de crianças do sexo feminino”

Exercício

Para a variável aleatória X: número de crianças do sexo masculino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

Portanto, X assume os valores $X = 0, 1, 2, 3$.

Exercício

Para a variável aleatória Y: número de crianças do sexo feminino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	0	1	1	1	2	2	2	3

Portanto, Y assume os valores $Y = 0, 1, 2, 3$.

Assim, para um mesmo espaço amostral podemos definir mais de uma variável aleatória.

Exercício

2) Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória X: soma das faces superiores.

Como fica a função de probabilidade de X?

A função de probabilidade de X fica dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Distribuições Condicionais

- O máximo que podemos saber sobre como *X* afeta *Y* está contido na **distribuição condicional** da *Y*, dado *X*. Essa informação é resumida pela *função de densidade de probabilidade condicional*, definida por:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_{X,Y}(x,y)/f_X(x)$$

Distribuições Condicionais

- Para todos os valores de *x* de tal forma que $f_x(x) > 0$. A interpretação é mais fácil de ser vista quando *X* e *Y* são discretas. Então,

$$f_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x),$$

- onde o lado direito é lido como "a probabilidade de *Y*= *y* em decorrência de *X*= *x*."

Distribuições Condicionais

- Quando Y é contínuo $f_{Y|X}(y \mid x)$ **não é interpretada diretamente como uma probabilidade**, pelas razões explicadas anteriormente, mas **as probabilidades condicionais são encontradas computando áreas sob a fdp condicional.**
- Uma característica importante das distribuições condicionais é que, **se *X* e *Y* forem variáveis aleatórias independentes**, o conhecimento dos valores assumidos **por *X* não nos diz nada sobre a probabilidade de que *Y* assuma diversos valores (e vice-versa).**

EXEMPLO B.2

(Arremessos de Lances Livres)

Considere novamente o exemplo dos lances livres no basquetebol, quando dois lances livres devem ser tentados. Assuma que a densidade condicional seja

$$f_{Y|X}(1|1) = 0{,}85,\, f_{Y|X}(0|1) = 0{,}15$$
$$f_{Y|X}(1|0) = 0{,}70,\, f_{Y|X}(0|0) = 0{,}30.$$

Isso significa que a probabilidade de o jogador converter o segundo lance depende de o primeiro lance ter sido convertido: se o primeiro lance foi convertido, a probabilidade de converter o segundo lance é de 0,85; se o primeiro lance foi perdido, a probabilidade de converter o segundo lance é de 0,70. Isso implica que X e Y não são independentes; eles são dependentes.

Ainda podemos computar $P(X = 1, Y = 1)$ desde que conheçamos $P(X = 1)$. Assuma que a probabilidade de converter o primeiro lance livre seja 0,8, isto é, $P(X = 1) = 0{,}8$. Então, de (B.15), teremos

$$P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1|X = 1) \cdot P(X = 1) = (0{,}85)(0{,}8) = 0{,}68.$$

Características das Distribuições de Probabilidade

Para muitos propósitos, estaremos interessados em somente alguns poucos aspectos das distribuições das variáveis aleatórias. As características de interesse podem ser classificadas em três categorias: **medidas de tendência central, medidas de variabilidade ou intervalo e medidas de associação entre duas variáveis aleatórias.**

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

- Se X for uma variável aleatória, o **valor esperado** (**ou esperança**) de X, representado por E(X) e algumas vezes por μ_X, ou simplesmente μ, é uma média ponderada de todos os possíveis valores de X.
- Os pesos são determinados pela função de densidade de probabilidade. O valor esperado é chamado *média populacional*, especialmente quando queremos enfatizar que X representa alguma variável em uma população.

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

- A definição precisa do valor esperado é mais simples no caso em que *X* é uma variável aleatória discreta assumindo um número finito de valores, digamos, {*x*1, ..., *xk*). **Seja *f*(*x*) a função de densidade de probabilidade de *X***. O valor esperado de *X* será a média ponderada:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_k f(x_k) \equiv \sum_{j=1}^{k} x_j f(x_j)$$

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

EXEMPLO B.3

(Calculando um Valor Esperado)

Suponha que X assuma os valores -1, 0 e 2 com probabilidades 1/8, 1/2 e 3/8, respectivamente. Então,

$$E(X) = (-1)\cdot(1/8) + 0\cdot(1/2) + 2\cdot(3/8) = 5/8.$$

- Esse exemplo ilustra uma coisa curiosa sobre os valores esperados: o valor esperado de X pode ser um número que não é sequer um possível resultado de X. Sabemos que X assume os valores 1, 0 e 2, ainda que seu valor esperado seja 5/8. Isso torna o valor esperado deficiente para resumir a tendência central de certas variáveis aleatórias discretas.

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

- Dada uma variável aleatória X e uma função $g(.)$, podemos criar uma nova variável aleatória $g(X)$.
- Por exemplo, se X for uma variável aleatória, então, X^2 e $\log(X)$ (se $X > 0$) também serão variáveis aleatórias. O valor esperado de $g(X)$ será, de novo, simplesmente uma média ponderada:

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{j=1}^{k} g(x_j) f_X(x_j)$$

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

EXEMPLO B.4

(Valor Esperado de X^2)

Para a variável aleatória no Exemplo B.3, seja $g(X) = X^2$. Então,

$$E(X^2) = (-1)^2(1/8) + (0)^2(1/2) + (2)^2(3/8) = 13/8.$$

- No exemplo anterior calculamos $E(X) = 5/8$, de forma que $[E(X)^2] = 25/64$. Isso mostra que $E(X^2)$ *não* é o mesmo que $[E(X)^2]$. De fato, para uma função não-linear $g(X), E[g(X)] \neq g[E(X)]$ (exceto em casos muito especiais).

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

- Se *X* e *Y* forem variáveis aleatórias, então, *g*(*X*,*Y*) será uma variável aleatória para qualquer função *g*, e assim poderemos definir sua esperança. Quando *X* e *Y* são ambas discretas, assumindo os valores {*x*1, *x*2, ..., *xk*} e {*y*1, *y*2, ..., *ym*}, respectivamente, o valor esperado será:

$$E[g(X, Y)] = \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} g(x_h, y_j) f_{X,Y}(x_h, y_j),$$

Propriedades dos Valores Esperados

- **Propriedade 1:** Para qualquer constante *c*, E(*c*)=*c*.
- **Propriedade 2:** Para quaisquer constantes *a* e *b*, $E(aX + b) = aE(X) + b$.
  - se $\mu = E(X)$, e definirmos uma nova variável aleatória como $Y = X - \mu$, então, $E(Y) = 0$; considere $a = 1$ e $b = -\mu$.
- **<u>Exemplo:</u>** seja *X* a temperatura medida em graus Celsius, ao meio dia de determinado dia, em determinada localidade; suponha que a temperatura esperada seja E(*X*) =25. Se *Y* for a temperatura medida em graus Fahrenheit, então, $Y = 32 + (9/5)X$. Pela propriedade 2, a temperatura esperada em Fahrenheit será $E(Y) = 32 + \left(\frac{9}{5}\right) x \cdot E(X) = 32 + (9/5) \cdot 25 = 77$.

Propriedades dos Valores Esperados

- **Propriedade 3:** Se {*a*1, *a*2, ..., *an*} forem constantes e {*X*1, *X*2, ..., *Xn*} forem variáveis aleatórias, então:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \dots + a_nE(X_n).$$

- Ou, usando a notação de somatórios:

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i).$$

- Como um caso especial dessa equação, temos (com cada *a*1 = 1)

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i),$$

Propriedades dos Valores Esperados

EXEMPLO B.5

(Encontrando a Receita Esperada)

Sejam X_1, X_2 e X_3 os números de pizzas pequenas, médias e grandes, respectivamente, vendidas durante o dia em uma pizzaria. Elas são variáveis aleatórias com valores esperados $E(X_1) = 25$, $E(X_2) = 57$ e $E(X_3) = 40$. Os preços das pizzas pequena, média e grande são 5,50, 7,60 e 9,15 (em dólares). Portanto, a receita esperada das vendas de pizzas em determinado dia será

$$\begin{aligned} E(5{,}50\,X_1 + 7{,}60\,X_2 + 9{,}15\,X_3) &= 5{,}50\,E(X_1) + 7{,}60\,E(X_2) + 9{,}15\,E(X_3) \\ &= 5{,}50(25) + 7{,}60(57) + 9{,}15(40) = 936{,}70, \end{aligned}$$

isto é, 936,70 dólares. A receita efetiva de qualquer dia particular geralmente será diferente desse valor, mas essa é a receita *esperada*.

Esperança - Exemplo

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 \\ &= 1,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, 1 cara.

Propriedades dos Valores Esperados

- Também podemos usar a Propriedade 3 para mostrar que se $X \sim Binomial(n, \theta)$, então, $E(X) = n\theta$. Ou seja, o número esperado de sucessos em *n* ensaios de Bernoulli é simplesmente o número de ensaios vezes a probabilidade de sucesso de qualquer ensaio particular.
- Isso será facilmente observado escrevendo *X* como *X*= *Y*1+*Y*2+ ...*Yn*, onde cada $Yi \sim Bernoulli(\theta)$. Então,

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \theta = n\theta.$$

Propriedades dos Valores Esperados

- Podemos aplicar esse resultado no exemplo das reservas da companhia aérea, quando ela aceita *n* 120 reservas, e a probabilidade de comparecimento para embarque é $\theta = 0{,}85$. O número *esperado* de pessoas comparecendo para embarque **é** $\mathbf{120(0,85) = 102}$.
- ***Portanto, se há 100 lugares disponíveis o número esperado de pessoas que comparecerão para embarque é grande demais; isso terá alguma influência na conclusão de ser uma boa ideia a companhia aceitar 120 reservas.***

Propriedades dos Valores Esperados

<u>Exemplo:</u>

- Na realidade, o que a companhia aérea poderia fazer seria definir uma função do lucro que **considerasse a receita ganha por lugar vendido e o custo por passageiro que seja impedido de embarcar.**
- Essa função do lucro será aleatória, pois o número efetivo de pessoas que comparecerão para embarque é aleatório. **Seja *r* a receita líquida correspondente a cada passageiro**. (ex. preço da passagem). **Seja *i* a indenização devida a cada passageiro que não** puder embarcar.
- Nem ***r* nem *i* são aleatórios**; eles são assumidos como conhecidos pela companhia aérea.

Propriedades dos Valores Esperados

- Seja *Y* o lucro do voo. Então, com 100 lugares disponíveis,

$$Y = rX \text{ se } X \leq 100$$

$$= 100r - i(X - 100) \text{ se } X > 100.$$

- A Equação mostra o lucro se não mais que 100 pessoas comparecerem para embarque. Na segunda parte, se a **receita líquida da venda** de passagens **é 100*r***, pois foram vendidos todos os 100 lugares, e, então, ***i*(*X* - 100)** é o custo de aceitar mais de 100 reservas.

Propriedades dos Valores Esperados

- Usando o fato de que X tem uma distribuição Binomial (n,0,85), onde n é o número de reservas feitas, os lucros esperados, E(Y) poderão ser encontrados como uma função de n (e r e i).
- Resolver via computador. Uma vez os valores de r e i tenham sido dados, **o valor de n que maximiza os lucros esperados poderá ser encontrado pesquisando-se diferentes valores de n.**

Outra Medida de Tendência Central: A Mediana

- Outra medida de tendência central é a **mediana.**
- Quando X for uma **variável discreta** e assumir um número ímpar finito de valores, a mediada será obtida ordenando-se os possíveis valores de X e então selecionando-se o valor que estiver no centro.
  - Por exemplo, se X assumir os valores $\{-4,0,2,8,10,13,17\}$, então, o valor mediano de X será 8.

Outra Medida de Tendência Central: A Mediana

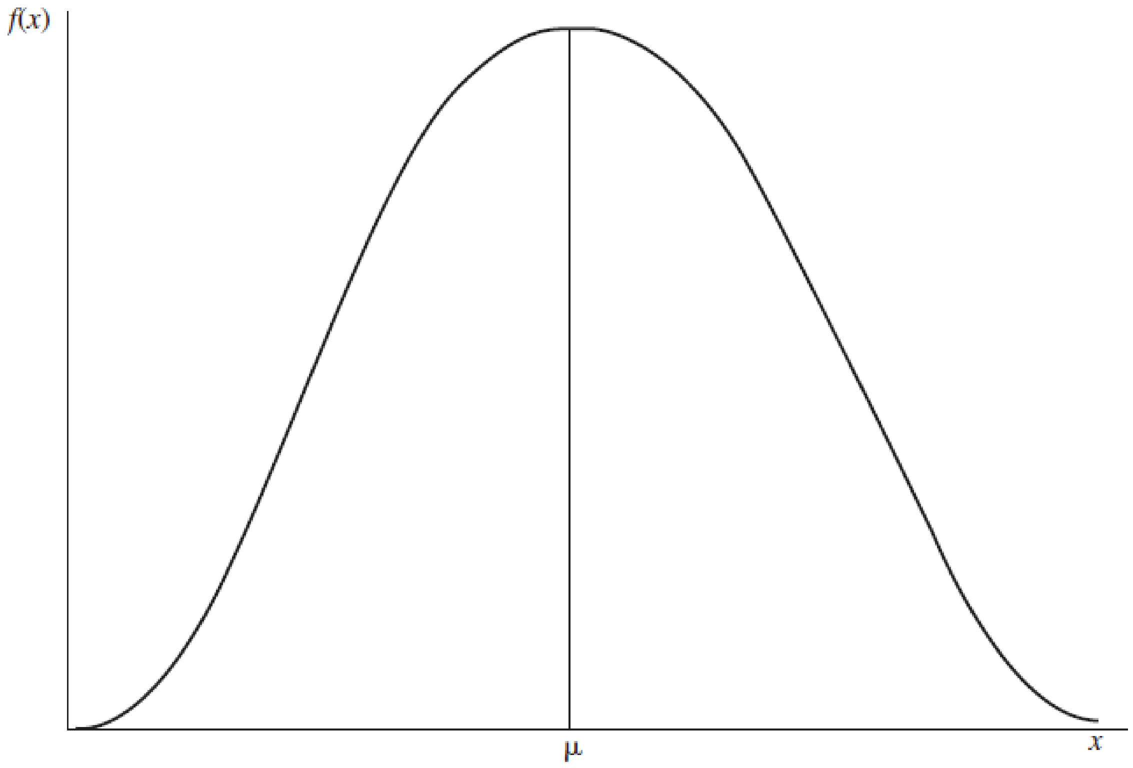
- Se X for uma **variável contínua**, então, a mediana de X, digamos m, será um valor tal que metade da área de uma fdp está à esquerda de m, e a outra metade está à direita de m.

Outra Medida de Tendência Central: A Mediana

- Em geral, a mediana, algumas vezes indicada por Med(X), e o valor esperado E(X), são diferentes. Nenhum é "melhor" que o outro como uma medida de tendência central; ambos são maneiras válidas de indicar o centro da distribuição de X.
- Em um caso especial, a mediana e o valor esperado (ou média) são os mesmos. Se X tiver uma **distribuição simétrica** em torno do valor μ, então μ , será tanto o valor esperado como a mediana.
- Matematicamente, a condição será $f(\mu+x) = f(\mu - x)$ para todo x.

Outra Medida de Tendência Central: A Mediana

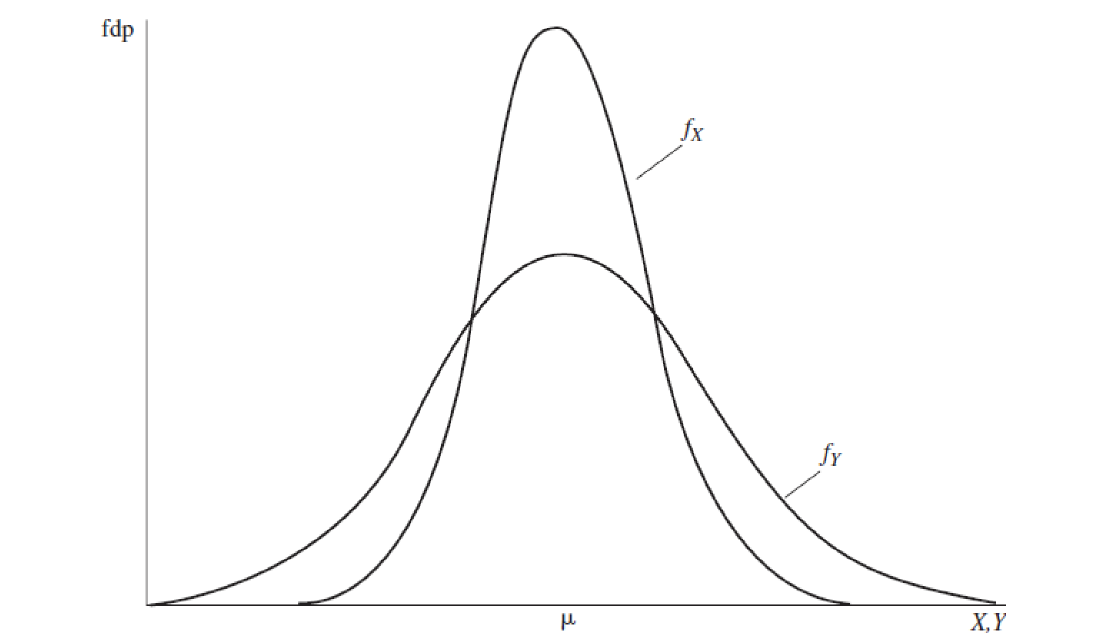
Uma distribuição de probabilidade simétrica.



Medidas de Variabilidade: Variância e Desvio-Padrão

- Embora a tendência central de uma variável aleatória seja valiosa, ela não nos diz tudo que queremos saber sobre a distribuição de uma variável aleatória.

Variáveis aleatórias com a mesma média, mas com distribuições diferentes.



A Figura mostra **as fdp de duas variáveis aleatórias com a mesma média**. Claramente, a **distribuição de *X* é mais concentrada em relação à sua média** que a distribuição de *Y*. Gostaríamos de ter uma maneira simples de resumir isso.

Variância

Para uma variável aleatória X, seja $\mu = E(X)$. Há várias maneiras de medir o quanto X está distante de seu valor esperado, mas a mais simples de trabalhar algebricamente é a diferença elevada ao quadrado, $(X - \mu)^2$.

Essa distância em si é uma variável aleatória, já que ela pode mudar a cada resultado de X. Da mesma forma que precisamos de um número para resumir a tendência central de X, precisamos de um número que nos informe o quanto X está distante de μ, em média.

Variância

- Um desses números é a **variância**, que nos informa a distância esperada de *X* até sua média:

$$\mathrm{Var}(X) \equiv \mathrm{E}[(X - \mu)^2].$$

- A variância é algumas vezes representada por $\sigma_X{}^2$, ou simplesmente σ^2. Podemos deduz-se que a variância é sempre não-negativa.

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2.$$

Variância

- Assim, não precisamos fazer a distinção entre variáveis aleatórias discretas e contínuas:
  - a definição de variância é a mesma em qualquer dos casos. Na maioria da vezes, primeiro calculamos $E(X)$, depois $E(X^2)$, e, então, usamos a fórmula anterior.

$$E(X^2) - \mu^2.$$

  - Por exemplo, se $X \sim Bernoulli(\theta)$, então, $E(X) = \theta$, e como $X^2 = X$, $E(X^2)$= θ. Deduz-se da equação anterior que $Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \theta - \theta^2 = \theta(1 - \theta)$.

Propriedades da Variância

- **<u>Propriedade 1</u>:** Var(*X*) = 0 se, e somente se, houver uma constante *c*, de tal forma que P(*X* = *c*) = 1, em cujo caso, E(*X*) = *c*.
  - Essa primeira propriedade diz que a variância de qualquer constante é zero, e se uma variável aleatória tiver variância zero, então, ela será essencialmente constante.
- **<u>Propriedade 2</u>:** Para quaisquer constantes *a* e *b*, $Var(aX + b) = a^2Var(X)$.
  - Isso significa que a adição de uma constante a uma variável aleatória não altera a variância, mas a multiplicação de uma variável aleatória por uma constante aumenta a variância por um fator igual ao *quadrado* daquela constante.

Propriedades da Variância

- **Exemplo:** Por exemplo, se X representar a temperatura em graus Celsius e $Y = 32 + (9/5)X$ for a temperatura em graus Fahrenheit, então, $Var(Y) = (9/5)^2 Var(X) = (81/25) Var(X)$.

Desvio Padrão

- O **desvio-padrão** de uma variável aleatória, representado por dp(*X*), é simplesmente a raiz quadrada positiva da variância: $dp(X) = +\sqrt{Var(x)}$. O desvio-padrão algumas vezes é representado por σ_x, ou simplesmente σ, quando a variável aleatória é entendida.

- **<u>Propriedade 1</u>:** Para qualquer constante *c*, dp(*c*)= 0.

Desvio Padrão

- **<u>Propriedade 2</u>:** Para quaisquer constantes *a* e *b*,

$$\mathrm{dp}(aX + b) = |a|\mathrm{dp}(X).$$

- Em particular, se *a* > 0, então, dp(*aX*) = *a*.dp(*X*).
- **<u>Exemplo</u>**: suponha que ***X* seja uma variável aleatória renda** medida em milhares de dólares. Se definirmos ***Y* = 1.000*X***, então, *Y* será a renda medida em dólares. Suponha que **E(*X*) = 20** e **dp(*X*) = 6**. Então, **E(*Y*) = 1.000E(*X*) = 20.000** e **dp(*Y*) =1.000·dp(*X*) = 6.000**, de forma que o valor esperado e o desvio-padrão crescem pelo mesmo fator, 1.000.
- Se tivéssemos trabalhado com a variância, teríamos $\boldsymbol{Var(Y) = (1.000)^2 Var(X)}$, de forma que a variância de *Y* é um milhão de vezes maior que a variância de *X*.

Exemplo 1

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 1,50 - (1,0)^2 = 1,50 - 1,0 = 0,50.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{0,50} \cong 0,707.$$

Exemplo 2

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, soma 7.

Exemplo 3

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 54,83 - (7,0)^2 = 54,83 - 49,0 = 5,83.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{5,83} \cong 2,415.$$