

# ESTATÍSTICA II

**Michelle Hanne Soares de Andrade**

**michellehanne@cefetmg.br**

**1º. SEMESTRE 2018**

# Introdução

- Um importante tipo de problema em Inferência Estatística é determinar se uma amostra pode ter vindo de uma população tendo uma distribuição parcial ou completamente especificada.
- **Exemplo1:** se sabemos que uma amostra veio de uma distribuição normal, é razoável dizer que ela veio de uma distribuição com média  $\mu_0$ ?
- **Exemplo2:** duas amostras vieram de distribuições normais, é razoável dizer que estas vieram de distribuições que têm médias iguais?

## Teste de hipóteses

*População*

Conjectura (hipótese) sobre o comportamento de variáveis



Decisão sobre a admissibilidade da hipótese

*Amostra*

Resultados reais obtidos

## Hipóteses Estatísticas

- Uma **hipótese estatística** é uma afirmação sobre a distribuição (ou parâmetros) de uma ou mais variáveis aleatórias. **Uma hipótese estatística pode ser verdadeira ou não.**

## Hipóteses Estatísticas - Exemplo

### Hipóteses

- a)** Substituindo o processador  $A$  pelo processador  $B$ , altera-se o tempo de resposta de um computador.
- b)** Aumentando a dosagem de cimento, aumenta-se a resistência do concreto.
- c)** Uma certa campanha publicitária produz efeito positivo nas vendas.
- d)** A implementação de um programa de melhoria da qualidade em uma empresa prestadora de serviços melhora a satisfação de seus clientes.

## Hipóteses em Termos de Parâmetros

- a) A *média* dos tempos de resposta do equipamento com o processador *A* é diferente da *média* dos tempos de resposta com o processador *B*.
- b) A *média* dos valores de resistência do concreto com a dosagem  $d_2$  de cimento é maior do que a *média* dos valores de resistência com a dosagem  $d_1$ .
- c) A *média* das vendas depois da campanha publicitária é maior do que a *média* das vendas antes da campanha publicitária.
- d) A *proporção* de reclamações após a realização do programa de melhoria da qualidade é menor do que antes da realização do programa.

## Hipóteses Nulas

**a)**  $H_0: \mu_A = \mu_B$  e  $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

onde:

$\mu_A$  é o tempo médio de resposta com o processador  $A$ ; e

$\mu_B$  é o tempo médio de resposta com o processador  $B$ .

**b)**  $H_0: \mu_2 = \mu_1$  e  $H_1: \mu_2 > \mu_1$

onde:

$\mu_2$  é a resistência média do concreto com a dosagem  $d_2$  de cimento; e

$\mu_1$  é a resistência média do concreto com a dosagem  $d_1$  de cimento.

## Hipóteses Nulas

**c)**  $H_0: \mu_2 = \mu_1$  e  $H_1: \mu_2 > \mu_1$

onde:

- $\mu_1$  é o valor médio das vendas antes da campanha publicitária; e
- $\mu_2$  é o valor médio das vendas depois da campanha publicitária.

**d)**  $H_0: p_2 = p_1$  e  $H_1: p_2 < p_1$

onde:

- $p_1$  é a proporção de reclamações antes do programa de melhoria da qualidade; e
- $p_2$  é a proporção de reclamações depois do programa de melhoria da qualidade.



## Hipóteses Estatísticas - Exemplo

- Podemos abreviar esta questão dizendo que desejamos testar a hipótese estatística:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

contra a alternativa  $H_1: \mu \neq \mu_0$

- usando a amostra de tamanho  $n$  e a média  $\bar{X}$ .
- $H_0$  é chamada de Hipótese Nula e  $H_1$  é chamada de Hipótese Alternativa.

## Teste de Hipótese

- Um teste de hipótese estatística é uma regra geral tal que, quando os valores de uma amostra são obtidos, leva à decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese considerada.

## Teste de Hipótese

- Hipótese Nula  $H_0$

Não há diferença ou correlação ( $\mu_1 = \mu_2$ )

- Hipótese Alternativa  $H_1$

Há diferença ou correlação ( $\mu_1 \neq \mu_2$ )

## Exemplo

- Para testar se existe diferença entre dois sistemas computacionais (A e B), observou-se o desempenho com **12** cargas de trabalho. Em **3** casos o sistema A apresentou melhor desempenho do que o B. Nos demais, o sistema B foi melhor. Qual a conclusão ao nível de significância de 5%?

## Exemplo

- Hipóteses:

$$H_0: p = 0,5$$

$$H_1: p \neq 0,5$$

$p$  = probabilidade do sistema A  
apresentar melhor desempenho do que o  
sistema B.

## ERROS DO TIPO I E TIPO II

- Em um teste de hipótese podem ocorrer dois tipos de erros :
- **ERRO TIPO I:** rejeitar  $H_0$  quando  $H_0$  é verdadeira.
- **ERRO TIPO II:** aceitar  $H_0$  quando  $H_0$  é falsa.

## Exemplo 1

- Um fabricante produz pinos sob determinadas condições de trabalho. Verificou-se que a duração de vida ( em horas) desses pinos é  $N(100, 9)$ . Um novo esquema de fabricação foi introduzido com o objetivo de aumentar a duração de vida desses pinos. Quer dizer, a expectativa é que a duração de vida  $X$  terá distribuição  $N(\mu, 9)$  onde  $\mu > 100$ . (Admita que a variância continua a mesma). Deste modo, o fabricante e o comprador potencial desses pinos estão interessados em testar as seguintes hipóteses:

## Exemplo 1

- $H_0: \mu = 100$
- $H_1: \mu > 100$  ( estamos supondo que nosso processo não pode ser pior que o antigo)



## Exemplo 1

- **ERRO TIPO I:** Rejeitamos que a média seja 100 quando na realidade não houve melhora na qualidade dos pinos (na realidade a média continua sendo 100).

## Exemplo 1

- **ERRO TIPO II:** Aceitamos que a média é 100 (o processo continua o mesmo) quando na realidade a qualidade dos pinos melhora (a média é  $> 100$ ).

## Exemplo 1

- As probabilidades dos dois tipos de erros serão  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. A probabilidade  $\alpha$  do ERRO TIPO I é chamado de NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA. Estas probabilidades, condicionadas à realidade estão resumidas abaixo :

## Exemplo 1

		Realidade	
		$H_0$ verdadeira	$H_0$ falsa
Decisão	Aceitar $H_0$	Decisão Correta $1 - \alpha$	Erro Tipo II $\beta$
	Rejeitar $H_0$	Erro Tipo I $\alpha$	Decisão Correta $1 - \beta$

## Teste de Hipótese para a Média

- Suponha que  $X$  é uma variável aleatória com média  $\mu$  desconhecida e variância conhecida. E queremos testar a hipótese de que a média é igual a um certo valor especificado  $\mu_0$ . O teste de hipótese pode ser formulado como segue:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

## Teste de Hipótese para a Média

- Para testar a hipótese, toma-se uma amostra aleatória de  $n$  observações e se calcula a estatística

$$Z_o = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$$

# Hipótese para a Média

Passos:

$$Z_{calc} = \frac{x - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$x$  = média da amostra

$\mu$  = média esperada da população

$s$  = desvio padrão da amostra

$n$  = tamanho da amostra

Em seguida consultamos na tabela da curva normal o Z correspondente a cada caso.

Finalmente verificamos se  $Z_{calc}$  se encontra na área de rejeição conforme o caso em teste.

## Teste de Hipótese para a Média

### Caso 3 – Bilateral:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Rejeitar se

$$Z_{calc} < -Z_{\alpha/2}$$

ou se

$$Z_{calc} > Z_{\alpha/2}$$



# Teste de Hipótese para a Média

**Caso 1 - Unilateral ou unicaudal à esquerda:**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

Rejeitar se

$$Z_{calc} < -Z_{\alpha}$$

**Caso 2 - Unilateral ou unicaudal à direita:**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Rejeitar se

$$Z_{calc} > Z_{\alpha}$$

## Exemplo Prático

- A resistência à tração do aço inoxidável produzido numa usina permanecia estável, com uma resistência média de  $72 \text{ kg/mm}^2$  e um desvio padrão de  $2,0 \text{ kg/mm}^2$ . Recentemente, a máquina foi ajustada. A fim de determinar o efeito do ajuste, 10 amostras foram testadas
  - 76,2; 78,3; 76,4; 74,7; 72,6; 78,4; 75,7; 70,2; 73,3; 74,2
- Presuma que o desvio padrão seja o mesmo que antes do ajuste. Podemos concluir que o ajuste mudou a resistência à tração de aço? (Adote um nível de significância de 5%)

## Exemplo Prático

- Definição da Hipótese
- $H_0 : \mu = 72 \text{ kg/mm}^2$
- $H_1 : \mu \neq 72 \text{ kg/mm}^2$
- $\sigma = 2 \text{ kg/mm}^2$

## Exemplo Prático

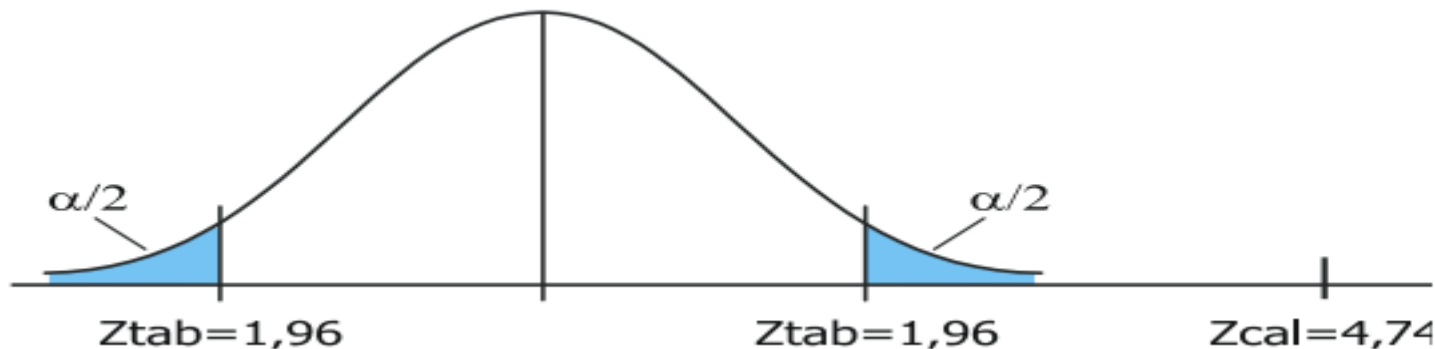
Sendo  $\bar{X} = 75,0$  e  $s = 2 \text{ kg/mm}^2$ , temos:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{75 - 72}{2 / \sqrt{10}} = \frac{3}{0,6325} = 4,74$$

- Isso significa que a média da amostra retirada aleatoriamente da produção está a 4,74 desvios-padrão da média alegada em  $H_0$  que é 72.

## Exemplo Prático

- **Região Crítica:** Como o valor crítico para 5% é 1,96 desvios (Z tabelado), estamos na região de rejeição de  $H_0$



Teste Bilateral de Hipótese para a Região Crítica

## Exemplo Prático

- **Conclusão:**  $H_0$  é rejeitada e concluimos que a resistência à tração do aço mudou.

## Exemplo 2

- Um processo deveria produzir bancadas com 0,85 m de altura. O engenheiro desconfia que as bancadas que estão sendo produzidas são diferentes que o especificado. Uma amostra de 8 valores foi coletada e indicou  $\bar{x} = 0,87$  . Sabendo que o desvio padrão é  $\sigma = 0,010$  , teste a hipótese do engenheiro usando um nível de significância  $\alpha = 0,05$  .

## Exemplo 2

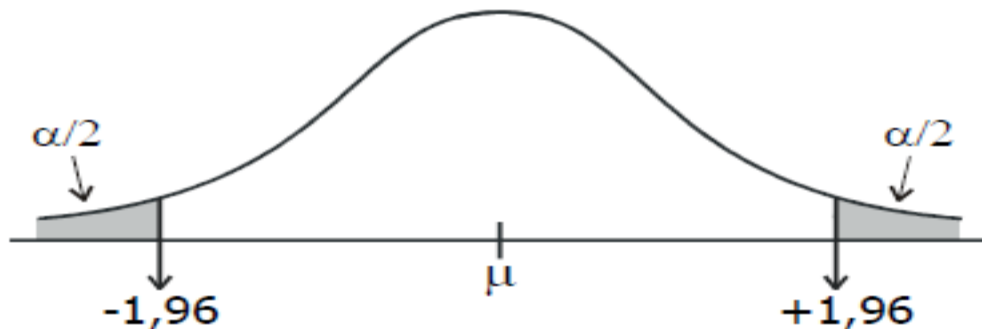
### ■ Solução

$$H_0 : \mu = 0,85$$

$$H_1 : \mu \neq 0,85$$

$$Z_o = \frac{0,87 - 0,85}{0,010 / \sqrt{8}} = 5,66$$

$$|Z_o| = |5,66| > Z_{0,025} = 1,96$$





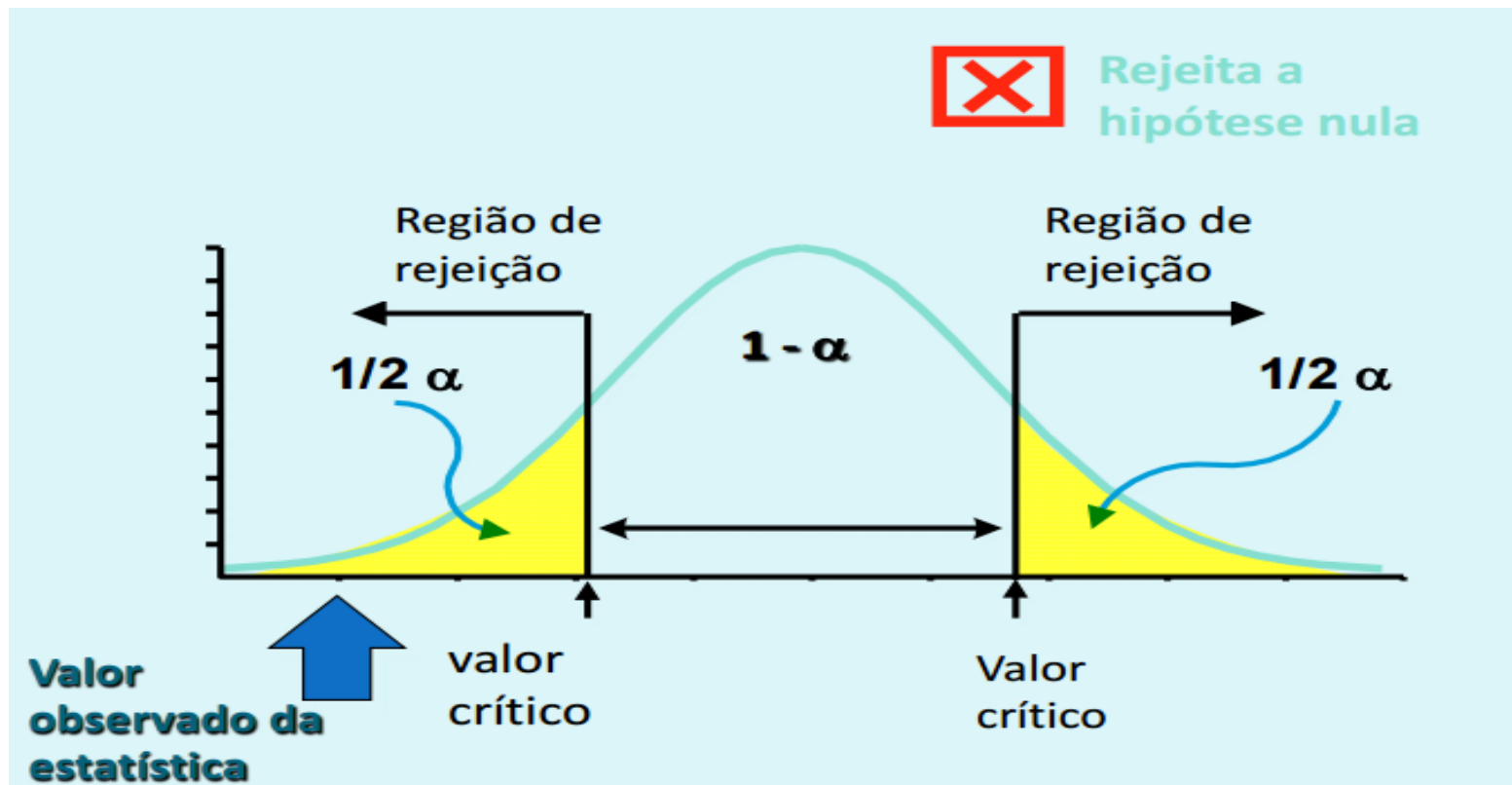
## Procedimento Geral dos Testes de hipóteses

- 1) Pelo contexto do problema identificar o parâmetro de interesse
- 2) Especificar a hipótese nula
- 3) Especificar uma hipótese alternativa apropriada
- 4) Escolher o nível de significância,  $\alpha$
- 5) Escolher uma estatística de teste adequada
- 6) Fixar a região crítica do teste
- 7) Recolher uma amostra e calcular o valor observado da estatística de teste
- 8) Decidir sobre a rejeição ou não de  $H_0$

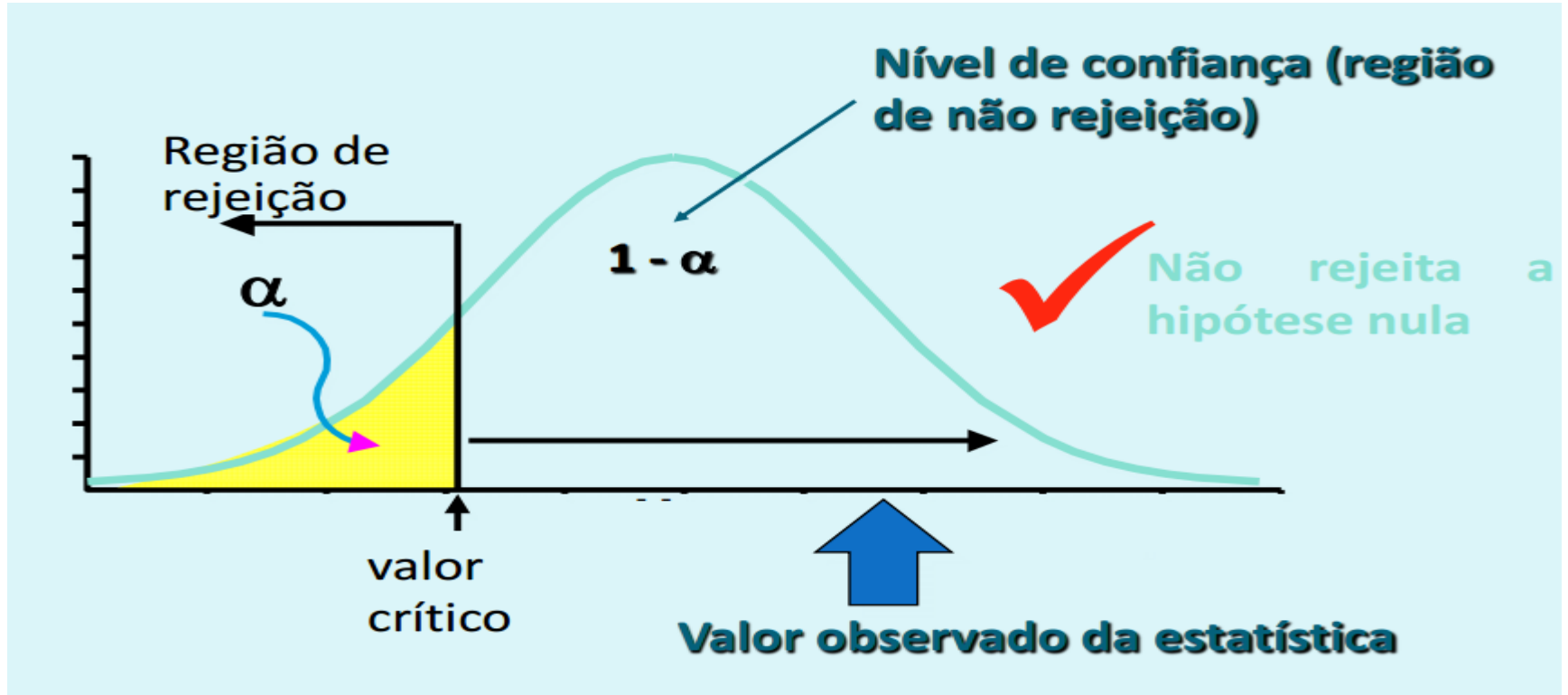
## Nível de Significância

- É a probabilidade do erro Tipo 1, isto é,  $\alpha = Prob(\text{erro tipo I})$ . Os valores típicos de  $\alpha$  são: 0,01, 0,05, 0,10.  $\alpha$  é também conhecido como “tamanho do teste”
- Caracteriza a região de rejeição. Define os valores pouco prováveis da estatística da amostra se a hipótese nula é verdadeira.

# Teste Bilateral



# Teste Unilateral



## Região de Rejeição

Unilateral à esquerda:

$$H_0: \mu = 50$$

$$H_A: \mu > 50$$

Unilateral à direita:

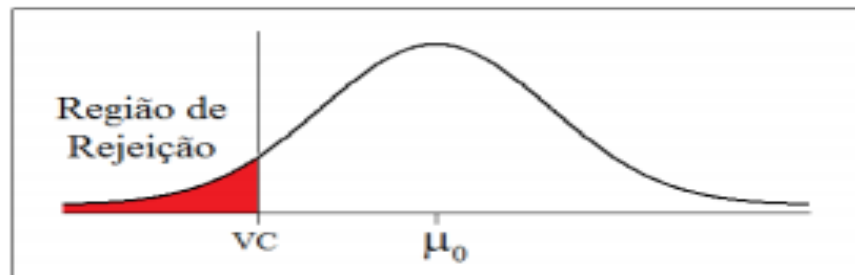
$$H_0: \mu = 50$$

$$H_A: \mu < 50$$

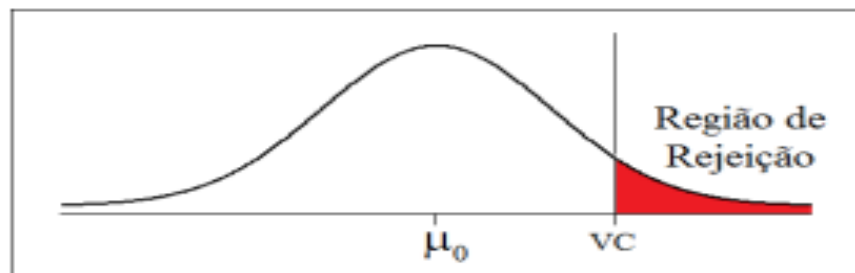
Bilateral:

$$H_0: \mu = 50$$

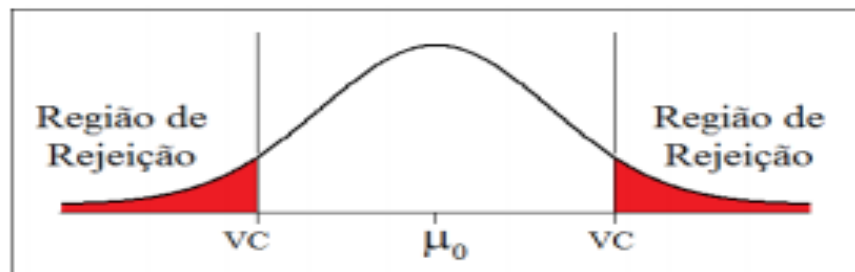
$$H_A: \mu \neq 50$$



Região de rejeição para o teste unicaudal para a média (cauda inferior)



Região de rejeição para o teste unicaudal para a média (cauda superior)



Região de rejeição para o teste bicaudal para a média

# Teste de Hipótese para a Média da População com Variância Conhecida

- Cálculo da estatística do teste:

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$H_0$ :

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$H_a$ :

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$

$$H_a: \mu > \mu_0$$

$$H_a: \mu < \mu_0$$

**Critérios de rejeição:**

$$Z_0 > z_{\alpha/2} \text{ ou } Z_0 < -z_{\alpha/2}$$

$$Z_0 > z_{\alpha}$$

$$Z_0 < -z_{\alpha}$$

## Exemplo

- $X$  é uma v.a. que representa o peso de um pacote de açúcar (supõe-se que  $X \sim N(\mu, 1)$ ). A máquina está afinada quando  $\mu = 8$ . Numa amostra de 25 pacotes (recolhida aleatoriamente) observou-se  $\bar{x} = 8,5$ .
- Quer-se saber se, ao nível de significância de 5%, se pode afirmar que a máquina continua afinada.

$$H_0: \mu = 8 \text{ versus } H_1: \mu \neq 8 \quad (1. 2. \text{ e } 3.)$$

$$\text{Nível de significância} = 5\% \quad (4.)$$

$$\text{Estatística de teste: } Z_0 = \frac{\bar{X} - 8}{1/\sqrt{25}} \quad (5.)$$

## Exemplo

$\alpha = 0.05 \Rightarrow a = 1.96$  donde

$$\text{R.C.: } Z_0 < -1.96 \text{ ou } Z_0 > 1.96 \quad (6.)$$

$$\text{Com } \bar{x} = 8.5 \text{ obtém-se } z_0 = \frac{8.5 - 8}{1/\sqrt{25}} = 2.5 \quad (7.)$$

Como  $z_0 > 1.96$  rejeita-se  $H_0$ , ou seja, existe evidência (ao nível de significância considerado) de que a máquina está desafinada.



## Valor p (*p-value*)

- Em vez de fixar  $\alpha$  , determinar a região crítica e, em seguida, verificar se o valor observado pertence a essa região.
- **Definição:** Dado o valor observado da estatística de teste, o **valor-p** (*p-value*) é o maior nível de significância que levaria à não rejeição da hipótese nula (ou o menor que levaria à rejeição).

## Valor p (*p-value*)

O **p-valor** é o valor de significância **observado**

Se  $p\text{-valor} \geq \alpha$ , NÃO rejeita  $H_0$

Se  $p\text{-valor} < \alpha$ , REJEITA  $H_0$

Quanto mais baixo for o valor-p maior é a evidência contra a hipótese nula

## Valor $p$ ( $p$ -value)

O  $p$  valor é comparado ao nível de significância  $\alpha$  pré-determinado.

Se o  $p$  valor for menor ou igual ao nível de significância, rejeitamos  $H_0$ .

Note as seguintes interpretações de  $p$ -valores:

- $p > 0,10$  Não existe evidência contra  $H_0$
- $p < 0,10$  Fraca evidência contra  $H_0$
- $p < 0,05$  Evidência significativa contra  $H_0$
- $p < 0,01$  Evidência altamente significativa contra  $H_0$

## Exemplo (*p-value*)

Levamos ao laboratório uma amostra aleatória de 60 caixas e constatamos uma média do princípio ativo de 135 mmHg. O fabricante especifica que a média de princípio ativo é 128 mmHg e que o desvio  $\sigma$  é de 24 mmg. Queremos achar o *p* valor.

## Exemplo (*p-value*)

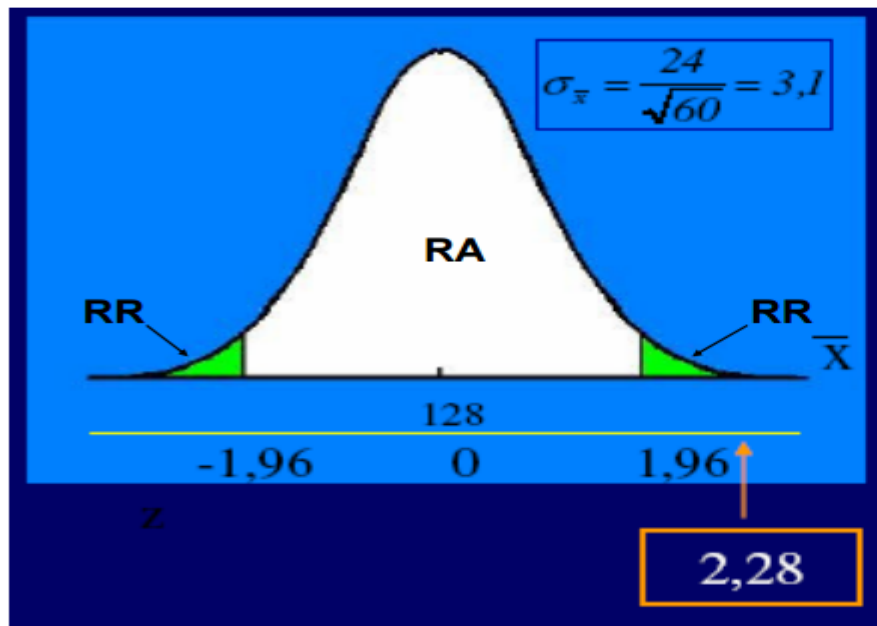
- PASSO 1:  $H_0: \mu_M = 128$  *versus*  $H_A: \mu_M \neq 128$
- PASSO 2: Nível de significância: 5%
- PASSO 3: Estatística do teste:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{135 - 128}{\frac{24}{\sqrt{60}}} = \frac{7}{3,1} = 2,28.$$

## Exemplo (*p-value*)

### ■ PASSO 4: Construir a Região de Rejeição (RR)

TESTE BILATERAL



Pouco provável, logo  
 $\mu$  deve ser  $\neq 128$

## Exemplo (*p-value*)

- Temos que calcular a probabilidade de observarmos um valor igual ou superior a 2,28, isto é,
- *p-value:*  $P(Z > 2,28) = 0,0113$  (distribuição normal)
- Como o teste é bilateral, temos que multiplicar por dois esta probabilidade. Assim,  $0,0113 \times 2 = 0,0226$

## Exemplo (*p-value*)

- Desde que o *p-value* é menor que o nível de significância do teste ( $\alpha = 5\%$ ), rejeita-se a hipótese nula.

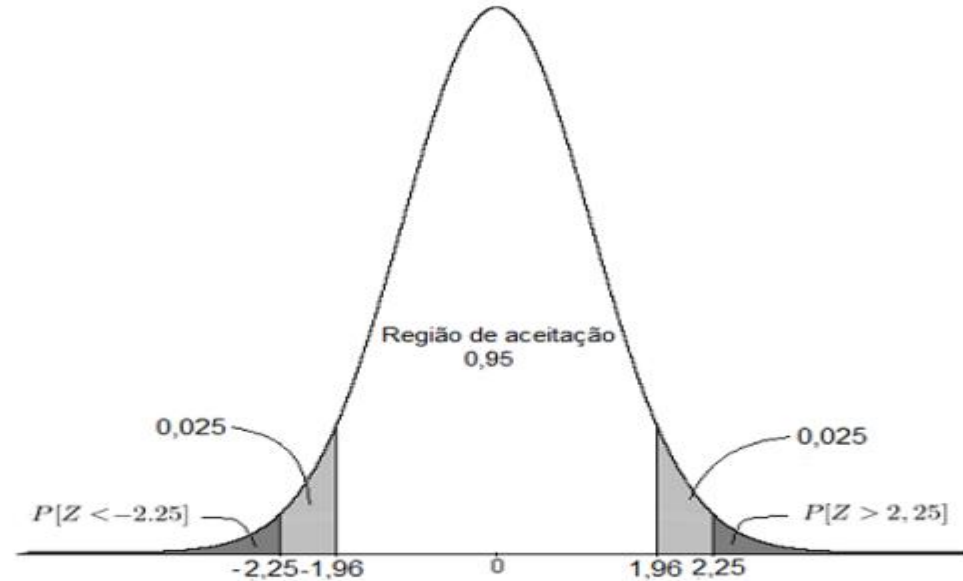


## Example (p-value)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916

## Exemplo (*p-value*)

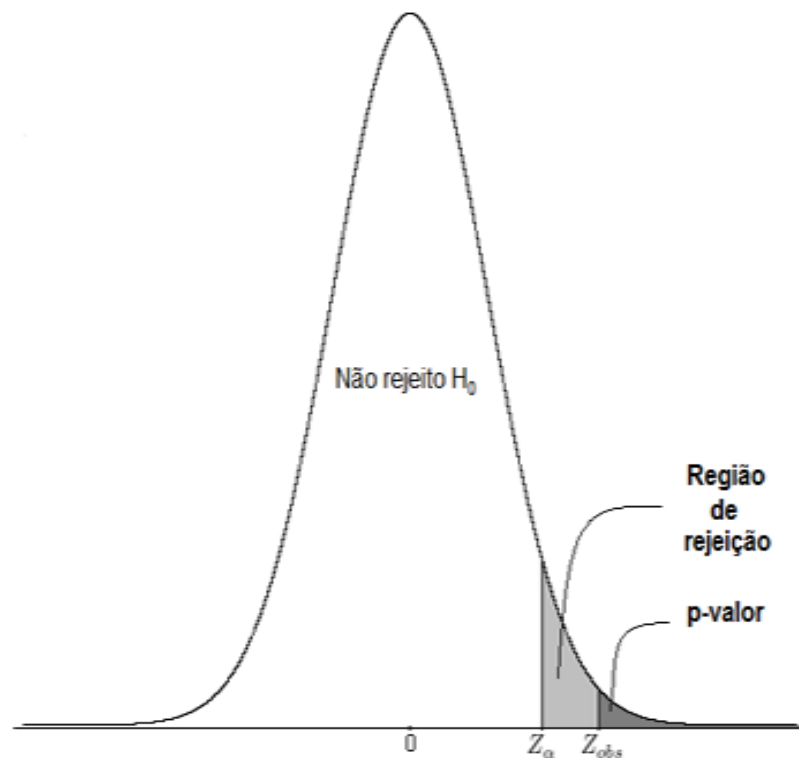
$$P\text{-valor} = \mathbb{P}[Z > |Z_{\text{obs}}|] + \mathbb{P}[Z < -|Z_{\text{obs}}|] = \mathbb{P}[Z > 2,25] + \mathbb{P}[Z < -2,25] = 0,0122 + 0,0122 = 0,0244.$$



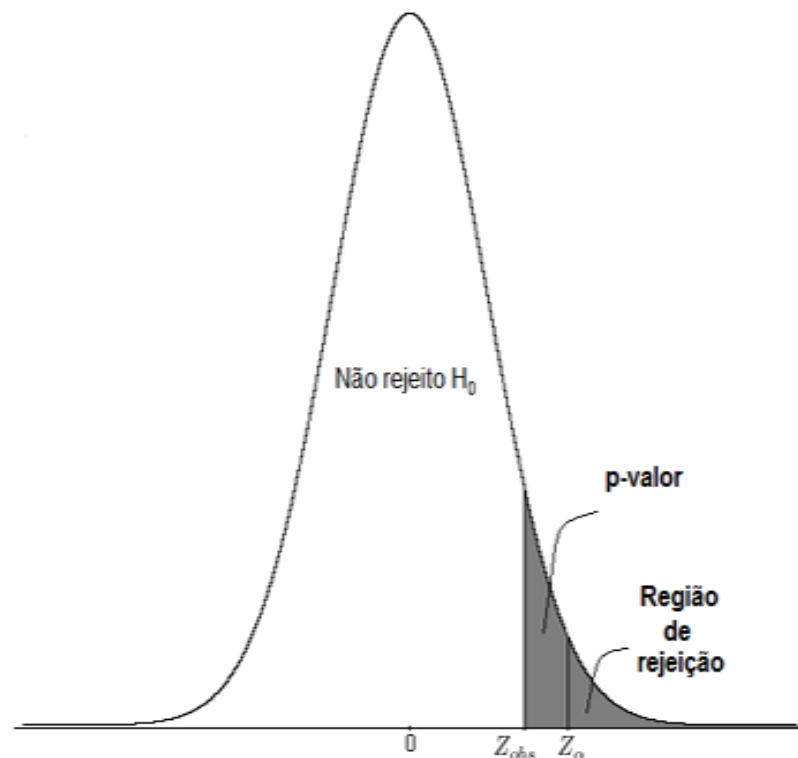
Portanto, podemos concluir que, para qualquer nível de significância maior que 0,0244, temos evidências para rejeitar a hipótese nula.

## Exemplo (*p-value*)

Teste unilateral à direita



Teste unilateral à direita



## Teste de Hipótese para a Média da População com Variância Desconhecida

- Quando o  $n < 30$  e o desvio padrão populacional é desconhecido, temos que aplicar o *teste t de Student* com a fórmula abaixo:

$$t_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

- Suposição**  
na população

te distribuída

## Exemplo

- A altura média dos estudantes da UFMG é de 1,70 m. Em uma amostra casual de tamanho 25 foi estimada a média de 1,72 m e desvio padrão da amostra de 0,08 m. Pode-se considerar que a média amostral não difere da média da população?

## Exemplo

$$a) H_0 : \mu = 1,70m \quad H_A : \mu \neq 1,70m$$

$$b) \alpha = 0,05; t_{crit; 0,025; 24 g.l.} = 2,064$$

$$c) t = \frac{\frac{\bar{x} - \mu}{s}}{\sqrt{n}} = \frac{1,72 - 1,70}{\frac{0,08}{\sqrt{25}}} = 1,25$$

d) Decisão: Não há evidência para rejeitar  $H_0$ .

## Teste de Hipótese para uma proporção populacional

- Similar ao procedimento para o teste da média populacional.

$$\begin{array}{ccc} H_0 : p = p_0 \text{ (ou } \geq \mu_0) & H_0 : p = p_0 \text{ (ou } \leq \mu_0) & H_0 : p = p_0 \\ \underbrace{H_1 : p < p_0}_{U.\text{Esquerdo}} & \underbrace{H_1 : p > p_0}_{U.\text{Direito}} & \underbrace{H_1 : p \neq p_0}_{Bilateral} \end{array}$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$$

## Exemplo

- Um estudo é realizado para determinar a relação entre uma certa droga e certa anomalia em embriões de frango. Injetou-se 50 ovos fertilizados com a droga no quarto dia de incubação. No vigésimo dia de incubação, os embriões foram examinados e 7 apresentaram a anomalia. Suponha que deseja-se averiguar se a proporção verdadeira é inferior a 25% com um nível de significância de 0,05.



## Exemplo

(i) As hipóteses de interesse são :

$$H_0 : p = 0,25$$

$$H_1 : p < 0,25$$

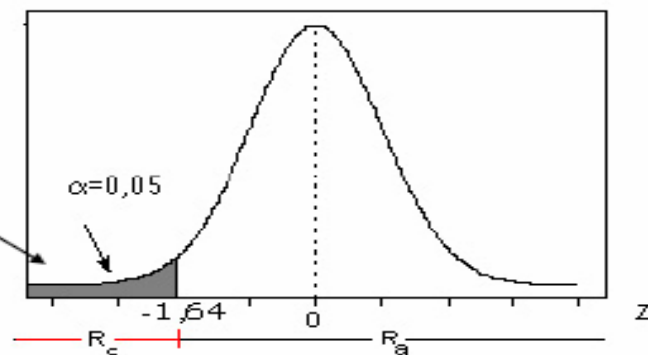
(ii) A estatística de teste

$$Z = \frac{\hat{p} - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25(1 - 0,25)}{50}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$$

## Exemplo

(iii) A região crítica para um nível de significância  $\alpha=0,05$  fixado

$$R_c = \{z \in R; z \leq -1,64\}$$



iv) Do enunciado temos  $n=50$ ,  $\hat{p} = \frac{7}{50} = 0,14$ :  $z_{obs} = \frac{0,14 - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{50}}} = -1,7963 \in R_c \Rightarrow$   
rejeita-se  $H_0$  ao nível de 5% de significância.

## Exercício 1

Uma companhia de cigarros anuncia que o índice médio de nicotina dos cigarros que fabrica apresenta-se abaixo de 23 mg por cigarro. Um laboratório realiza seis análises desse índice, obtendo: 27, 24, 21, 25, 26, 22. Sabe-se que o índice de nicotina se distribui normalmente, com variância igual a  $4.86 \text{ mg}^2$ . Pode-se aceitar, no nível de 10%, a afirmação do fabricante? *Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 334.*

## Exercício 1

Queremos testar a hipótese que  $\mu$ , o índice médio de nicotina dos cigarros, seja maior que 23. Ou seja,  $H_0 : \mu \geq 23$  vs.  $H_1 : \mu < 23$ .

Com um nível  $\alpha = 0.10$ , temos que a hipótese será rejeitada se  $\sqrt{6}(\bar{X} - 23)/\sqrt{4.86} < c$ . Para a normal padrão,  $P(Z < c) = 0.10 \Leftrightarrow c = -1.28$ . Então a região crítica é  $\sqrt{6}(\bar{X} - 23)/\sqrt{4.86} < -1.28$  ou simplesmente  $\bar{X} < 21.85$ .

Como a média observada é  $\bar{x} = 24.16$  é superior a 21.85, não rejeitamos a hipótese nula a 10% de significância.

## Exercício 2

### Exemplo

Suponha que queiramos testar  $H_0 : \mu = 50$  contra  $H_1 : \mu > 50$ , onde  $\mu$  é a média de uma normal  $N(\mu, 900)$ . Extraída uma amostra de  $n = 36$  elementos da população, obtemos  $\bar{x} = 52$ . Calcule a probabilidade de significância  $\hat{\alpha}$  do teste.

*Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 343.*

## Exercício 2

A probabilidade de significância  $\hat{\alpha}$  é mais comumente conhecida como *p-valor*. Observe que sob  $H_0$ ,  $\bar{X} \sim N(50, 25)$ . Temos que  $\bar{x} = 52$ . A probabilidade de significância (ou p-valor) é obtida calculando-se a probabilidade do valor observado na estatística do teste, ou seja,

$$P(\bar{X} > 52) = \left( Z > \frac{52 - 50}{5} \right) = 1 - \Phi(2/5) \approx 0.34$$

Devemos interpretar o p-valor como “observados os dados, quão verossímil é a hipótese nula?” e, neste caso, ela é bastante verossímil (a probabilidade de observarmos  $\bar{X} > 52$ , dado  $H_0$  verdadeira, é de 0.34) e portanto não rejeitamos  $H_0$ .

## Exercício 3

### Exemplo

Suponha que queiramos testar  $H_0 : \mu = 50$  contra  $H_1 : \mu > 50$ , onde  $\mu$  é a média de uma normal  $N(\mu, 900)$ . Extraída uma amostra de  $n = 36$  elementos da população, obtemos  $\bar{x} = 52$ . Calcule a probabilidade de significância  $\hat{\alpha}$  do teste.

*Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 343.*

- A probabilidade de significância é o p-value

### Exercício 3

A probabilidade de significância  $\hat{\alpha}$  é mais comumente conhecida como *p-valor*. Observe que sob  $H_0$ ,  $\bar{X} \sim N(50, 25)$ . Temos que  $\bar{x} = 52$ . A probabilidade de significância (ou p-valor) é obtida calculando-se a probabilidade do valor observado na estatística do teste, ou seja,

$$P(\bar{X} > 52) = \left( Z > \frac{52 - 50}{5} \right) = 1 - \Phi(2/5) \approx 0.34$$

Devemos interpretar o p-valor como “observados os dados, quão verossímil é a hipótese nula?” e, neste caso, ela é bastante verossímil (a probabilidade de observarmos  $\bar{X} > 52$ , dado  $H_0$  verdadeira, é de 0.34) e portanto não rejeitamos  $H_0$ .



## Exercício 4

Para decidirmos se os habitantes de uma ilha são descendentes da civilização **A** ou **B**, iremos proceder do seguinte modo:

- (i) selecionamos uma amostra de 100 moradores adultos da ilha, e determinamos a altura média deles;
- (ii) se essa altura média for superior a 176, diremos que são descendentes de **B**; caso contrário, são descendentes de **A**.

Os parâmetros das alturas das duas civilizações são:

**A**:  $\mu = 175$  e  $\sigma = 10$ ; **B**:  $\mu = 177$  e  $\sigma = 10$ .

Defina: *Erro do tipo I* – dizer que os habitantes da ilha são descendentes de **B** quando, na realidade, são de **A**.

*Erro do tipo II* – dizer que são de **A** quando são de **B**.

- A probabilidade de significância é o p-value

## Exercício 4

- (a) Qual a probabilidade do erro de tipo I? E do erro de tipo II?
- (b) Qual deve ser a regra de decisão se quisermos fixar a probabilidade do erro de tipo I em 5%? Qual a probabilidade do erro de tipo II, nesse caso?
- (c) Se  $\sigma_A = 5$ , como ficariam as respostas de (b)?

## Exercício 4

- (a) Note que  $H_0$  : moradores são de A. Nossa região crítica é dada por  $RC = \{\bar{X} > 176\}$ , a região em que rejeitamos  $H_0$ . Note também que  $\text{Var}(\bar{X})$  é  $\sigma^2/n$ . Então

$$P(\text{erro tipo I}) = P(\bar{X} > 176 | \mu = 175) =$$

$$P\left(Z > \sqrt{100} \frac{176 - 175}{10} | \mu = 175\right) = 1 - \Phi(1) = 0.159$$

De modo análogo, a probabilidade do erro de tipo II é dada por

$$P(\text{erro tipo II}) = P(\bar{X} \leq 176 | \mu = 175) =$$

$$P\left(Z \leq \sqrt{100} \frac{176 - 175}{10} | \mu = 175\right) = \Phi(-1) = 0.159$$

## Exercício 4

- (b) Queremos fixar  $c$  para que  $P(\bar{X} > c | \mu = 175) = 0.05$ . Para isto, basta que

$$P(\bar{X} > c | \mu = 175) = P\left(Z > \sqrt{100} \frac{c - 175}{10}\right) = 1 - \Phi(c - 175) = 0.05$$

Note que  $\Phi(z) = 0.95 \Leftrightarrow z = 1.64$ , então temos que  $(c - 175) = 1.64$  ou  $c = 176.64$ . Nossa regra de decisão agora é classificar o indivíduo como descendente de B se sua altura for superior a 176.64. Note que, agora, temos um erro do tipo II de

$$P(\bar{X} \leq 176.64 | \mu = 177) = \Phi\left(\sqrt{100} \frac{176.64 - 177}{10}\right) = 0.359$$

## Exercício 4

(c) Se  $\sigma_A = 5$ , o valor de  $c$  para que o erro do tipo I seja 0.05 é

$$P\left(Z > \sqrt{100} \frac{c - 175}{5}\right) = 1 - \Phi(2(c - 175)) = 0.05$$

Que é dado por  $2(c - 175) = 1.64$  ou  $c = 175.82$ . O novo erro do tipo II agora é

$$P(\bar{X} \leq 175.82 | \mu = 177) = \Phi\left(\sqrt{100} \frac{175.82 - 177}{10}\right) = 0.119$$