

# ESTATÍSTICA

**Michelle Hanne Soares de Andrade**

**michellehanne@cefetmg.br**

**1º. SEMESTRE 2018**



# Inferência Estatística

## Inferência Estatística

- A inferência estatística tem por objetivo fazer generalizações sobre uma população com base em valores amostrais. A inferência pode ser feita estimando os parâmetros:

A) Por Ponto e

B) Por intervalo

## Estimação por Ponto e Intervalo

**A estimação por ponto é feita através de um único valor, enquanto que a estimação por intervalo fornece um intervalo de valores em torno do valor da estimativa pontual.**

## Inferência Estatística

Na estimação por ponto objetivo é utilizar a informação amostral e apriorística para se calcular um valor que seria, em certo sentido, nossa melhor avaliação quanto ao valor, de fato, do parâmetro em questão.

Na estimativa por intervalo, usa-se a mesma informação com o propósito de se produzir um intervalo que contenha o valor verdadeiro do parâmetro com algum nível de probabilidade.

## Inferência Estatística

### Exemplo:

Uma amostra aleatória simples de 400 pessoas de uma cidade é extraída e 300 respondem que acham a administração municipal boa ou ótima. Então o valor  $p = 300/400 = 75\%$  é uma estimativa por ponto do percentual de pessoas da cidade que acham a administração boa ou ótima. Esta mesma estimativa poderia ser enunciado como de: 70% a 80% das pessoas da cidade acham a administração boa ou ótima. Neste caso, teríamos uma estimativa por intervalo da proporção. Note-se que o centro do intervalo é o valor “75%” da estimativa pontual.



# Estimação por Ponto

## Estimação por ponto

- O problema é produzir uma estimativa que realmente represente a melhor avaliação do valor do parâmetro.
  - 1ª Especificar o que se entende por “melhor avaliação”
  - 2ª definir os estimadores que satisfaçam estas especificações
- **O estimador é uma Variável aleatória cujo valor varia de amostra para amostra, suas propriedades são iguais as da distribuição amostral.**



## Estimação por ponto

- **Exemplo:** Estimar a média de uma população é possível considerar os seguintes estimadores potenciais:
  - A média aritmética simples da amostra
  - A média aritmética ponderada da amostra
  - A mediana da amostra
  - A média dos valores extremos da amostra
- **Como escolher qual é a melhor? É necessário considerar as propriedades estatísticas dos estimadores e desenvolver algum critério para comparar estimadores.**

## Notação

Vai-se considerar uma variável aleatória  $X$  (população) cuja distribuição é caracterizada, entre outras coisas, por um parâmetro  $\theta$ , que gostaríamos de estimar.

Um estimador do parâmetro  $\theta$ , que é obtido através de uma fórmula dos valores amostrais:  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , é anotado por  $\hat{\theta}$ . As características básicas da distribuição de  $\hat{\theta}$  são sua média  $\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta})$  e sua variância  $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \text{Var}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}})^2 = E(\hat{\theta}^2) - \mu_{\hat{\theta}}^2$ .

O desvio padrão de  $\hat{\theta}$ , representado por  $\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}$  é denominado de "erro padrão de  $\hat{\theta}$ ".

## Notação

- **Definição:** Uma estimativa pontual de algum parâmetro populacional  $\theta$  é simplesmente um valor numérico obtido de uma função  $\hat{\theta}$  dos dados. A função  $\hat{\theta}$  é genericamente denominada um estimador pontual de  $\theta$ .
- **Exemplo:** Suponha que  $X$  é uma v.a. normalmente distribuída com média desconhecida e variância  $\sigma^2 = 1$ . A média amostral  $\hat{\mu} = \bar{X}$  é um estimador pontual da média populacional  $\mu$ . Após a observação da amostra

$$x_1 = 25, x_2 = 30, x_3 = 29, x_4 = 31,$$

temos que

$$\bar{x} = \frac{25 + 30 + 29 + 31}{4} = 28,75$$

é uma estimativa pontual de  $\mu$ .

## Notação

- Alguns estimadores pontuais razoáveis para estas quantidades são:
  1. a média amostral  $\hat{\mu} = \bar{x}$ ;
  2. a variância amostral  $\hat{\sigma}^2 = s^2$ ;
  3. a proporção amostral  $\hat{p} = x/n$ , onde  $x$  é o número de itens na amostra, de tamanho  $n$ , os quais pertencem à classe de interesse;
  4. a diferença  $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2$  entre duas médias amostrais de populações independentes;
  5. a diferença  $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$  entre duas proporções amostrais avaliadas em duas amostras independentes;
  6. etc.
- Para determinarmos qual o estimador pontual mais adequado, é necessário examinar as propriedades estatísticas de cada um e desenvolver critérios de comparação adequados.

## Notação

$\theta$  : parâmetro (valor numérico constante e desconhecido da população)

$\hat{\theta}$  : estimador pontual (estatística visando estimar o parâmetro)

Um estimador  $\hat{\theta}$  é uma função dos valores amostrais que é usado para estimar o valor de um parâmetro desconhecido  $\theta$ . O estimador é uma variável aleatória com uma distribuição de probabilidade. Quando uma amostra aleatória é selecionada de uma população e  $\hat{\theta}$  é calculado a partir dos dados, o valor numérico obtido é chamado uma estimativa de da amostra considerada.

## Alguns estimadores pontuais

Parâmetro da população ( $\theta$ )	Estimador ( $\hat{\theta}$ )
Média ( $\mu$ )	Média amostral ( $\bar{x}$ )
Proporção ( $p$ )	Proporção amostral ( $\bar{p}$ )
Desvio-padrão ( $\sigma$ )	Desvio-padrão amostral ( $S$ )

## Notação

Além destes, os seguintes conceitos são de importância:

Erro amostral  $\varepsilon = \hat{\theta} - \theta$ , que é a diferença entre o valor do estimador  $\hat{\theta}$  e o verdadeiro valor a ser estimado  $\theta$ . O tamanho do erro amostral varia de amostra para amostra.

Viés ou tendenciosidade  $\text{Viés}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$  como sendo a diferença entre a média da distribuição amostral de  $\hat{\theta}$  e o valor do parâmetro  $\theta$ . Este valor é, para cada estimador, fixo, podendo ou não ser zero.

Erro quadrado (quadrático) médio  $\text{EQM}(\hat{\theta}) = E(\varepsilon^2) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$  é uma variância que mede a dispersão do estimador em torno do verdadeiro parâmetro, ao invés de em torno de sua média.

Existe uma relação entre o  $\text{EQM}(\hat{\theta})$  e a  $\text{Var}(\hat{\theta})$ , conforme, mostrado abaixo:

## Notação

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{\theta}) &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2 = E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})] + [E(\hat{\theta}) - \theta]\}^2 = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 \\ &+ 2.[E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))][E(\hat{\theta}) - \theta] + E[E(\hat{\theta}) - \theta]^2 = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + E[E(\hat{\theta}) - \theta]^2 = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2 \\ &= \text{Var}(\hat{\theta}) + \text{Viés}(\hat{\theta})^2, \text{ pois} \end{aligned}$$

$$2.[E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))][E(\hat{\theta}) - \theta] = 2.[E(\hat{\theta}) - \hat{\theta}][E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})] = 0.$$

Desta forma:

$\text{EQM}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + \text{Viés}(\hat{\theta})^2$ , isto é, o EQM é a soma da variância do estimador com sua tendenciosidade elevada ao quadrado.

O erro quadrado médio (*mean square error*) é um critério importante para a comparação de dois estimadores.



## Erro Quadrado Médio (EQM)

- O erro quadrático médio de um estimador  $\hat{\theta}$  para o parâmetro  $\theta$  é definido como

$$EQM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2;$$

- EQM – Vício e erro-padrão

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + [Vicio(\hat{\theta})]^2;$$

- O EQM é um critério importante para comparar dois estimadores;

## Erro Quadrado Médio (EQM)

- O erro quadrático médio de um estimador  $\hat{\theta}$  para o parâmetro  $\theta$  é definido como

$$EQM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2;$$

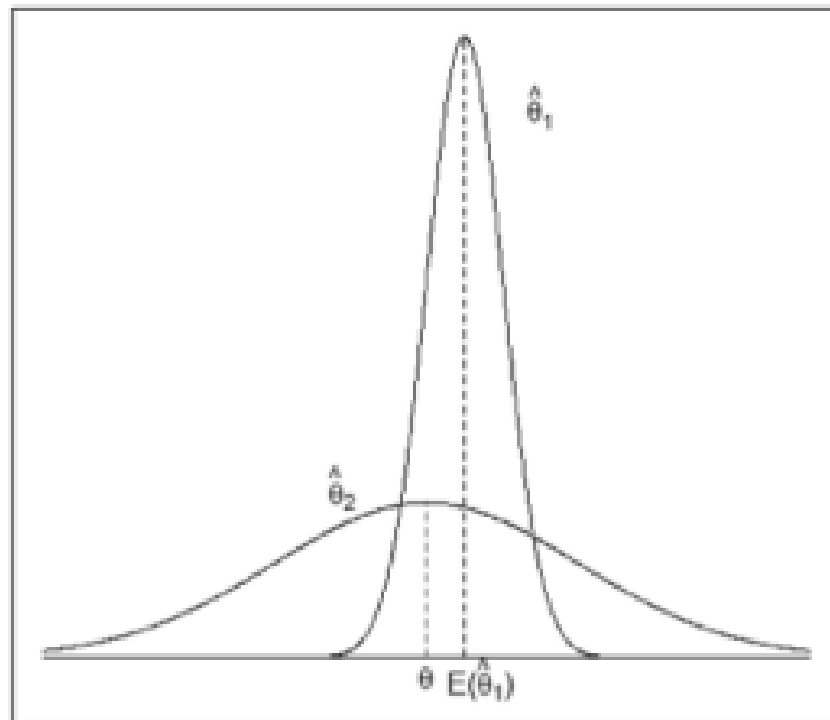
- EQM – Vício e erro-padrão

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + [Vicio(\hat{\theta})]^2;$$

- O EQM é um critério importante para comparar dois estimadores;

## Erro Quadrado Médio (EQM)

- Estimadores tendenciosos podem ser preferíveis a estimadores não viciados se tiverem um menor EQM;
- Estimativa baseada em  $\hat{\theta}_1$  estaria provavelmente mais próxima do valor verdadeiro do que a baseada em  $\hat{\theta}_2$ ;



## Erro Quadrado Médio (EQM)

- Estimador ótimo para  $\theta$ :
  - Tem EQM menor ou igual ao EQM de qualquer outro estimador, para todos os valores de  $\theta$  no espaço paramétrico;
- Estimadores ótimos raramente existem;

## Erro Quadrado Médio (EQM)

- No caso em que  $\hat{\theta}$  é um estimador não viciado para um parâmetro  $\theta$ , então

$$EQM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}).$$

# Propriedades dos Estimadores

- As propriedades desejáveis para um estimador são: não-tendenciosidade, precisão ou eficiência, validade ou acurácia e consistência.
- **Não Tendenciosidade**

Um estimador  $\hat{\theta}$  é dito não-tendencioso (Imparcial, justo, não-viciado, não-viezado, *unbiased*) de um parâmetro  $\theta$  se  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .

Se  $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ , então  $\hat{\theta}$  é dito "viciado" e  $E(\hat{\theta}) - \theta$  é dito "viés" do estimador (*bias of the estimate*).

# Propriedades dos Estimadores

- **Exemplo 1: A  $\bar{x}$  é um estimador não tendencioso de  $\mu$**
- Prova

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(\sum X) = \frac{1}{n}\sum E(X) = \frac{1}{n}\sum \mu = (n.\mu)/n = \mu.$$

## Propriedades dos Estimadores

- **Exemplo 2:**  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}$  , **É um estimador tendencioso para  $\sigma^2$**

Prova:

Considere a soma  $\sum (X - \bar{X})^2$  e observe que ela poderá ser escrita da seguinte maneira:

$$\sum (X - \bar{X})^2 = \sum (X - \mu + \mu - \bar{X})^2 = \sum (X - \mu)^2 + 2\sum (X - \mu)(\mu - \bar{X}) + \sum (\mu - \bar{X})^2 .$$

Como  $\mu - \bar{X}$  é constante e  $\sum (X - \mu) = \sum X - n \cdot \mu = n \cdot \bar{X} - n \cdot \mu = n(\bar{X} - \mu)$ , segue:

$$\sum (X - \bar{X})^2 = \sum (X - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 , \text{ pois}$$

$$2\sum (X - \mu)(\mu - \bar{X}) = 2(\mu - \bar{X}) \cdot n(\bar{X} - \mu) = -2n(\mu - \bar{X})^2 \text{ e}$$

$$2\mu - \bar{X}) + \sum (\mu - \bar{X})^2 = -2n(\mu - \bar{X})^2 + n(\mu - \bar{X})^2 = -n(\mu - \bar{X})^2$$



## Propriedades dos Estimadores

- **Exemplo 2:**  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}$  , **É um estimador tendencioso para  $\sigma^2$**

Portanto:

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= E\left(\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}\right) = \frac{1}{n} E(\sum (X - \bar{X})^2) = \frac{1}{n} E(\sum (X - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2) = \\ &= \frac{1}{n} \{ \sum E(X - \mu)^2 - nE(\bar{X} - \mu)^2 \} = \\ &= \frac{1}{n} \{ \sum \text{Var}(X) - n\text{Var}(\bar{X}) \} = \frac{1}{n} \{ n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} \} = \frac{1}{n} (n\sigma^2 - \sigma^2) = \sigma^2 - \sigma^2/n = (n\sigma^2 - \sigma^2)/n = (n-1)\sigma^2/n \end{aligned}$$

## Propriedades dos Estimadores

- $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{X}})^2}{n}$  , É um estimador tendencioso de  $\sigma^2$ , se a amostragem
- for realizada sem reposição de uma população finita.

## Propriedades dos Estimadores - Vício

- Vício de um estimador:

$$\text{Vicio}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta) = E(\hat{\theta}) - \theta;$$

- Um estimador  $\hat{\theta}$  é não viciado (não viesado, não tendencioso) para um parâmetro  $\theta$  se

$$E(\hat{\theta}) = \theta;$$

- A esperança de um estimador está relacionada com sua **exatidão**

## Propriedades dos Estimadores - Vício

- Exemplos:
  - A média amostral é não viciada para estimar a média populacional:

$$E(\bar{X}_n) = \mu_X$$

- $X_1$  (primeiro item coletado da amostra) é não viciado para estimar a média populacional:

$$E(X_1) = \mu_X$$

## Propriedades dos Estimadores

- **Exemplo 3:**  $S^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n-1}$  É um estimador não viciado para  $\sigma^2$

Prova:

$$E(S^2) = E\left(\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} E\left[\sum (X - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n-1} E\left[\sum (X - E(X) + E(X) - \bar{X})^2\right] =$$

$$\frac{1}{n-1} E\left[\sum (X - E(X))^2 - n(\bar{X} - E(X))^2\right] = \frac{1}{n-1} \left[\sum E(X - E(X))^2 - nE(\bar{X} - E(X))^2\right] = \frac{1}{n-1} \left[n\sigma^2 - n \cdot \frac{\sigma^2}{n}\right] =$$

$$\frac{n\sigma^2 - \sigma^2}{n-1} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2.$$

## Propriedades dos Estimadores

### ▪ Exemplo 4:

$T = n \cdot \bar{X}$ , total amostral, é um estimador tendencioso de  $\tau = \sum X$ , total populacional.

Prova:

$$E(T) = E(n \cdot \bar{X}) = n \cdot E(\bar{X}) = n \cdot \mu \neq N \cdot \mu = \tau.$$

### ▪ Exemplo 5:

$\bar{T} = N \cdot \bar{X}$  é um estimador não-tendencioso de  $\tau = \sum X$ .

Prova:

$$E(\bar{T}) = E(N \cdot \bar{X}) = N \cdot E(\bar{X}) = N \cdot \mu = N \cdot \mu = \tau.$$

## Propriedades dos Estimadores

### ▪ Exemplo 6:

$\hat{\sigma}_{\bar{X}}^2 = \frac{S^2}{n}$  é um estimador não-tendencioso de  $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Prova:

$$E(\hat{\sigma}_{\bar{X}}^2) = E\left(\frac{S^2}{n}\right) = \frac{E(S^2)}{n} = \sigma^2/n.$$

Se a amostragem for sem reposição de população finita então:

$\hat{\sigma}_{\bar{X}}^2 = \frac{\hat{S}^2}{n} \frac{N-n}{N-1}$  é um estimador não tendencioso de  $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}$ , onde  $\hat{S}^2 = \frac{N-1}{N} S^2$

## Propriedades dos Estimadores

- A não tendenciosidade ou ausência de viés é uma qualidade desejável para os estimadores. Entretanto, essa qualidade é insuficiente como critério para selecionar um estimador. Exemplo: toda média ponderada dos valores amostrais é um estimador não tendencioso da média populacional.



## Precisão ou Eficiência

- A precisão ou eficiência é a proximidade das observações (estimativas) do seu valor esperado.
- **Definição:** Dados dois estimadores não-tendenciosos  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  de um mesmo parâmetro  $\theta$ , diremos que  $\hat{\theta}_1$  é mais eficiente que  $\hat{\theta}_2$  se  $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$ . A eficiência relativa de  $\hat{\theta}_1$  em relação a  $\hat{\theta}_2$  é definida como sendo  $EQM(\hat{\theta}_1)/EQM(\hat{\theta}_2)$ .

## Precisão ou Eficiência - Exemplo

Exemplo 1:

Qual dos dois estimadores abaixo é mais eficiente para estimar a média da população?

$$\bar{X}_1 = 0,3X_1 + 0,7X_2 \text{ ou } \bar{X}_2 = 0,2X_1 + 0,8X_2$$

Solução

Como são ambos não-tendenciosos temos:

$$\text{Var}(\bar{X}_1) = \text{Var}(0,3X_1 + 0,7X_2) = 0,3^2\text{Var}(X_1) + 0,7^2\text{Var}(X_2) = (0,09 + 0,49)\sigma^2 = 0,58\sigma^2.$$

$$\text{Var}(\bar{X}_2) = \text{Var}(0,2X_1 + 0,8X_2) = 0,2^2\text{Var}(X_1) + 0,8^2\text{Var}(X_2) = (0,04 + 0,64)\sigma^2 = 0,68\sigma^2.$$

Portanto

$\bar{X}_1$  é mais eficiente que  $\bar{X}_2$

## Precisão ou Eficiência - Exemplo

- Em igualdade de circunstâncias, é obvio, que um estimador não tendencioso é preferível a um estimador tendenciosos.
- Mas se tivermos que escolher entre um **estimador tendencioso**, cuja **distribuição é concentrada na vizinhança do verdadeiro valor** do parâmetro e um **não tendenciosos com grande variância**, **O estimador tendencioso pode ser preferível, principalmente se é possível determinar a grandeza e a direção da tendenciosidade.**

## Precisão ou Eficiência - Exemplo

### Exemplo 2:

Suponha que se deseje estimar a média  $\mu$  de uma população, tendo uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_n$  desta população e que se quer comparar dois possíveis estimadores de  $\mu$ : a média da amostra  $\bar{X}$  e uma única observação da amostra, por exemplo,  $X_i$ . Note-se que tanto  $\bar{X}$  quanto  $X_i$  são estimadores não tendenciosos da média da população e neste caso o erro quadrado média é igual a variância. Para a média da amostra, tem-se:  $EQM(\bar{X}) = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ , onde  $\sigma^2$  é a variância da população. Para uma única observação, tem-se:  $EQM(X_i) = V(X_i) = \sigma^2$ . Então a eficiência relativa de  $X_i$  comparada a  $\bar{X}$  é:  $\frac{EQM(\bar{X})}{EQM(X_i)} = \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2} = \frac{1}{n}$ . Como  $1/n < 1$  para amostras acima de 2, conclui-se que a média da amostra é um estimador melhor da média da população do que uma única observação.

## Acurácia/Validade

- Dados dois estimadores  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  de um mesmo parâmetro  $\theta$ , diremos que  $\hat{\theta}_1$  é mais acurado que  $\hat{\theta}_2$  se  $EQM(\hat{\theta}_1) < EQM(\hat{\theta}_2)$ . A eficiência relativa de  $\hat{\theta}_1$  em relação a  $\hat{\theta}_2$  é definida como sendo  $EQM(\hat{\theta}_1)/EQM(\hat{\theta}_2)$ .

## Coerência ou Consistência

Um estimador é dito coerente (consistente) para qualquer quantidade muito pequena  $\delta > 0$  se a probabilidade de que o desvio absoluto entre  $\hat{\theta}$  e  $\theta$  seja menor que  $\delta$  tende para 1 quando o número de observações "n" tende ao infinito, isto é:

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < \delta) \rightarrow 1, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

A propriedade acima é equivalente a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{EQM}(\hat{\theta}) = 0$  ou então, as duas seguintes,

consideradas em conjunto: 
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = 0, & \text{a tendenciosidade tende a zero e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}) = 0, & \text{a variância tende a zero.} \end{cases}$$

## Exemplo -1

- Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de uma população de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .
- Considere os seguintes estimadores de  $\mu$

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{e} \quad \hat{\Theta}_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

Qual deles é mais adequado?

- Ambos são não-viciados:

## Exemplo -1

- Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de uma população de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .
- Considere os seguintes estimadores de  $\mu$

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{e} \quad \hat{\Theta}_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

Qual deles é mais adequado?

- Ambos são não-viciados:

$$E(\hat{\Theta}_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu \quad \text{e} \quad E(\hat{\Theta}_2) = \frac{E(X_1) + E(X_n)}{2} = \frac{\mu + \mu}{2} = \mu.$$

- Contudo,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\Theta}_1) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \\ \text{Var}(\hat{\Theta}_2) &= \frac{\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_n)}{4} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

- $\hat{\Theta}_1$  é um melhor estimador para  $\mu$ .



## Exemplo -2

- No caso de amostra proveniente de distribuição Normal.
  - Média amostral e mediana amostral são não viciadas para estimar a média populacional:

$$E(\bar{X}) = \mu \text{ e } E(\tilde{X}) = \mu;$$

- Qual é mais eficiente?

## Exemplo -2

- No caso de amostra proveniente de distribuição Normal.
  - Média amostral e mediana amostral são não viciadas para estimar a média populacional:

$$E(\bar{X}) = \mu \text{ e } E(\tilde{X}) = \mu;$$

- Média amostral e mediana amostral são consistentes para estimar a média verdadeira:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ e } \text{Var}(\tilde{X}) = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma^2}{n};$$

- A média amostral é mais eficiente que a mediana amostral para estimar a média populacional

$$\frac{\text{Var}(\bar{X})}{\text{Var}(\tilde{X})} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{\pi}{2} \frac{\sigma^2}{n}} = \frac{2}{\pi} \approx 0,64 < 1;$$