ESTATÍSTICA

Michelle Hanne Soares de Andrade
michellehanne@cefetmg.br
1º. SEMESTRE 2018

Exemplos

Variáveis Aleatórias – Esperança/Valor Esperado

Em determinado setor de uma loja de departamentos, o número de produtos vendidos em um dia pelos funcionários é uma variável aleatória P com a seguinte distribuição de probabilidades (esses números foram obtidos dos resultados de vários anos de estudo):

Número de produtos	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

Cada vendedor recebe comissões de venda, distribuídas da seguinte forma: se ele vende até 2 produtos em um dia, ele ganha uma comissão de R\$10,00 por produto vendido. A partir da terceira venda, a comissão passa para R\$50,00. Qual é o número médio de produtos vendidos por cada vendedor e qual a comissão média de cada um deles?

Solução:

O número médio de vendas por funcionário é

$$E(P) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,05 + 6 \times 0,05 = 2,05$$

Variáveis Aleatórias

Com relação à comissão, vamos construir sua fdp:

Número de produtos P	0	1	2	3	4	5	6
Comissão C	0	10	20	70	120	170	220
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05

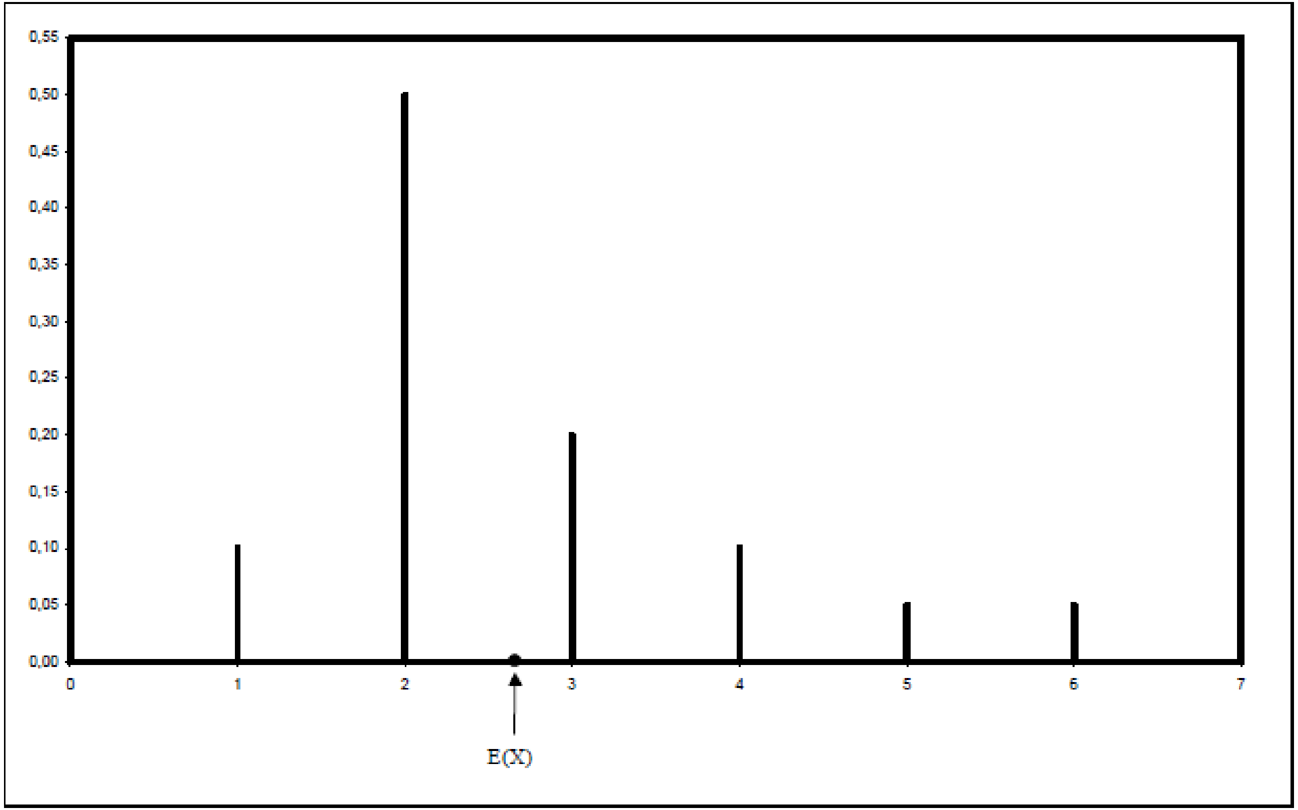
e

$$E(C) = 0 \times 0,1 + 10 \times 0,4 + 20 \times 0,2 + 70 \times 0,1 + 120 \times 0,1 + 170 \times 0,05 + 220 \times 0,05 = 46,5$$

ou seja, a comissão média por dia de cada vendedor é R$46,50.

Em geral, a média é vista como um "valor representativo" de X, estando localizada em algum ponto no "centro do domínio de valores de X". Uma interpretação mais precisa deste pensamento é a seguinte: a esperança de X é o centro de gravidade da distribuição de probabildiades, no seguinte sentido (ver figura 1.10). Pensando as colunas do gráfico, que representam as probabilidades, como pesos distribuídos ao longo de uma vara delgada, a média representa o ponto onde a vara se equilibraria.

Variáveis Aleatórias



Variáveis Aleatórias

Um lojista mantém extensos registros das vendas diárias de um certo aparelho. O quadro a seguir dá a distribuição de probabilidades do número de aparelhos vendidos em uma semana. Se é de R$500,00 o lucro por unidade vendida, qual o lucro esperado em uma semana? Qual é o desvio padrão do lucro?

x = número de aparelhos	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Solução:

Seja X o número de aparelhos vendidos em uma semana e seja L o lucro semanal. Então, $L = 500X$.

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,2 + 5 \times 0,1 = 2,7 \text{ aparelhos}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,3 + 4^2 \times 0,2 + 5^2 \times 0,1 = 10,2 \text{ aparelhos}^2$$

$$\text{Var}(X) = 10,2 - (2,7)^2 = 2,91 \text{ aparelhos}^2$$

$$DP(X) = 1,706 \text{ aparelhos}$$

Com relação ao lucro semanal, temos que

$$E(L) = 500E(X) = R\$1350,00$$

$$DP(L) = R\$852,94$$

Variáveis Aleatórias

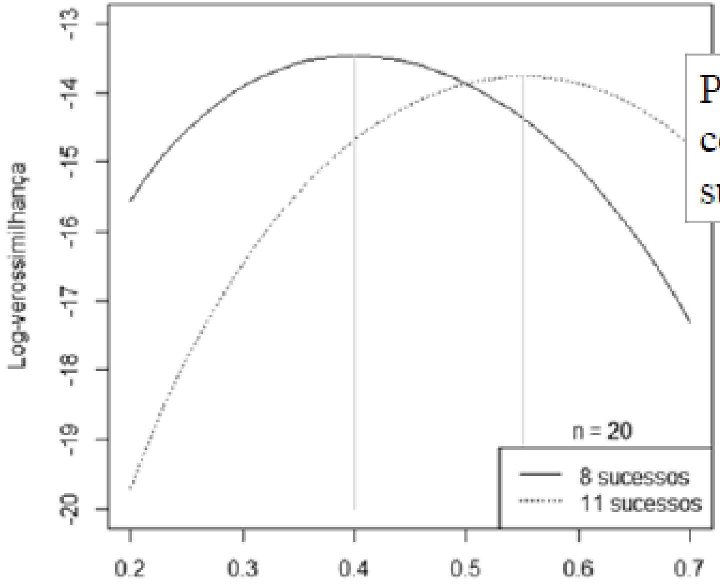
- Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Se ele dá 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca no máximo 1 vez?

- Podemos pensar os tiros como experimentos de Bernoulli independentes, onde a probabilidade de sucesso é 0,20. Então, o problema pede Pr(X ≤ 1), onde X = número de acertos em 10 tiros. Logo, X ~ bin(10; 0, 20) e

$$\Pr(X \leq 1) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) = \binom{10}{0}(0,20)^0(0,80)^{10} + \binom{10}{1}(0,20)^1(0,80)^9 = 0,37581$$

Máxima Verossimilhança

- Bernoulli com parâmetro p desconhecido
  - √ Duas amostras de n= 20 com $\sum_{i=1}^{20} x_i = 8$ e $\sum_{i=1}^{20} x_i = 11$



Pontos de máxima verossimilhança correspondentes à proporção de sucessos de cada amostra

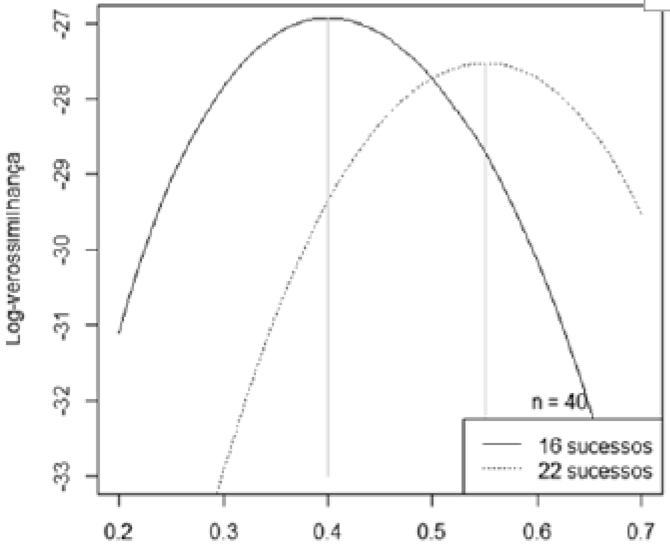
$$\hat{p}_1 = \frac{8}{20} = 0,40$$

$$\hat{p}_2 = \frac{11}{20} = 0,55$$

Máxima Verossimilhança

√ Duas amostras de n= 40 com $\sum_{i=1}^{20} x_i = 16$ e $\sum_{i=1}^{20} x_i = 22$

Pontos de máxima verossimilhança correspondentes à proporção de sucessos de cada amostra



$$\hat{p}_1 = \frac{16}{40} = 0,40$$

$$\hat{p}_2 = \frac{22}{40} = 0,55$$

Máxima Verossimilhança

- √ Tempo de falha de módulo eletrônico de motor
- √ Amostra:
  - n = 8
  - (11,96; 5,03; 67,40; 16,07; 31,50; 7,73; 11,10; 22,38)
  - Média amostral: 21,65 $\bar{X} = 21,65$
  - Estimativa de máxima verossimilhança de λ:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{21,65} = 0,0462$$

Máxima Verossimilhança

- Função de verossimilhança da amostra
  - √ μ desconhecida e σ^2 conhecido

$$L(\mu; \sigma^2, \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

- Função de log-verossimilhança

$$l(\mu; \sigma^2, \mathbf{x}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - (2\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Máxima Verossimilhança

- Derivada da função de log-verossimilhança:

$$l'(\mu;\sigma^2,\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial\mu} l(\mu;\sigma^2,\mathbf{x}) = -(2\sigma^2)^{-1}(-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$= -(\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

- Estimativa de máxima verossimilhança da amostra $\mathbf{x}$:

$$l'(\hat{\mu};\sigma^2,\mathbf{x}) = (\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}) = 0 \qquad \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- Estimador de máxima verossimilhança da média verdadeira para amostras normais

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

Máxima Verossimilhança

- Estimativas de máxima verossimilhança da amostra $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2; \mathbf{x}) = (\hat{\sigma}^2)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}) = 0 \qquad \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2; \mathbf{x}) = \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \left[-n + \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2 \right] = 0$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2}{n}$$

Máxima Verossimilhança

- Estimador de máxima verossimilhança da média e variâncias verdadeiras para amostras normais

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

√ O EMV da variância amostral é viciado para a variância verdadeira