ESTATÍSTICA

Michelle Hanne Soares de Andrade
michellehanne@cefetmg.br
1º. SEMESTRE 2018

Variáveis Aleatórias

Variáveis Aleatórias e sua Distribuições de Probabilidade

- **Exemplo de um experimento**
  - Suponha que joguemos para o alto uma moeda dez vezes e contemos o número de vezes em que dê cara.
  - Antes de atirarmos a moeda, sabemos que o número de caras que aparecerá será um inteiro entre 0 e 10, e, portanto, os resultados do experimento são bem definidos.
  - $X = 1$ se der cara, e $X = 0$ se der coroa.

O resultado do número de caras obtidas nas 10 jogadas é uma Variável Aleatória.

Variáveis Aleatórias e sua Distribuições de Probabilidade

- Uma **variável aleatória** é aquela que assume valores numéricos e tem um resultado que é determinado por um experimento.

Variáveis Aleatórias e sua Distribuições de Probabilidade

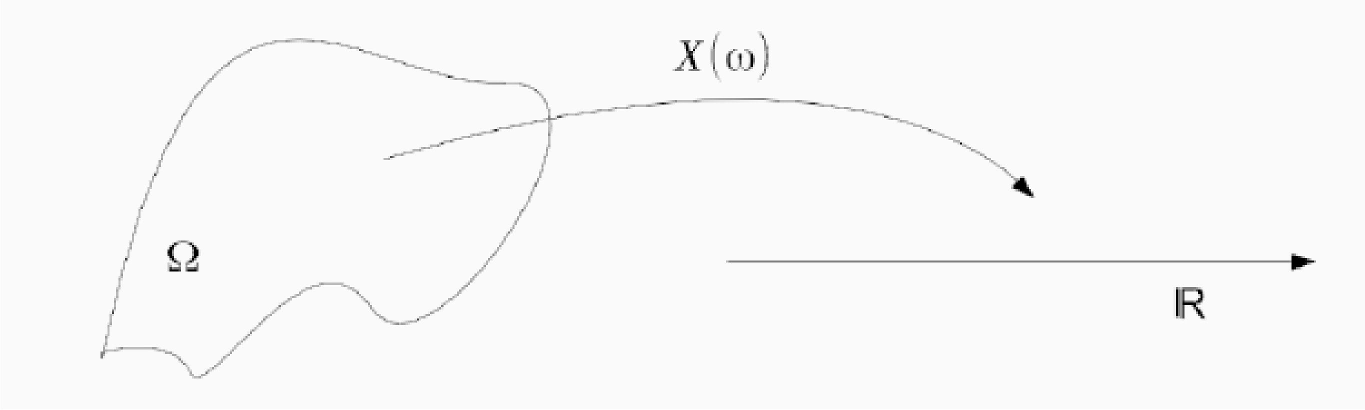
O espaço amostral de um experimento aleatório lista todas as saídas possíveis do fenômeno (numéricas ou não).

Como o resultado do experimento é aleatório, temos que o valor a ele associado também é aleatório.

Por este motivo, a função que associa valores às saídas de um experimento é denominada uma variável aleatória.

Variáveis Aleatórias

Definição: Uma Variável Aleatória é uma função que associa valores reais aos elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.



Variáveis Aleatórias

- **Notação:** variáveis aleatórias (v.a.'s) são usualmente denotadas por letras maiúsculas, tais como X. Após uma realização do experimento aleatório, o valor observado é representado por uma letra minúscula, tal como x.
- Uma variável aleatória que somente pode assumir os valores zero e um é chamada **variável aleatória de Bernoulli** (ou **binária**).

Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo 1 Moeda:** se ela for "justa", então, P(X = 1)= 1/2). Como a soma das probabilidades deve ser igual à unidade, P(X= 0)= ½.
- **Exemplo 2 Empresa Aérea:** decidir quantas reservas serão aceitas para um vôo com 100 lugares disponíveis.
  - Esse problema pode ser analisado no contexto de diversas variáveis aleatórias de Bernoulli da seguinte maneira: para um passageiro selecionado aleatoriamente, defina uma variável aleatória de Bernoulli como X = 1 se a pessoa aparecer para embarque, e X = 0 se não aparecer.

Variável Aleatória Discreta

Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo Empresa Aérea:** se $\theta = 0{,}75$, existirá 75% de probabilidade de que um passageiro apareça para o embarque após ter feito a reserva, e 25% de probabilidade de que o passageiro não apareça.

$$P(X = 1) = \theta$$
$$P(X = 0) = 1 - \theta$$

Variável Aleatória Discreta

- Como as variáveis aleatórias de Bernoulli são tão frequentes, temos uma notação especial para elas: $X \sim Bernoulli(\theta)$ é lida como "X tem uma distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a θ."

Função de Densidade de Probabilidade (fdp)

- A **função densidade de probabilidade** (fdp) de X resume as informações relativas aos possíveis resultados de X e as probabilidades correspondentes:

$$f\left(x_j\right) = p_j, j = \ 1, 2, \dots, k,$$

- com $f(x) = 0$ de qualquer x não igual a xj para algum j.

Função de Densidade de Probabilidade (fdp)

- **Exemplo:** Lotes de três peças são retirados de uma linha de produção para controle de qualidade. Suponha que a probabilidade de encontrar uma peça defeituosa é de 10% e defina a v.a. Y como sendo o número de peças defeituosas observadas.

Função de Densidade de Probabilidade (fdp)

Pontos amostrais	Y	f
$\overline{DDD}$	0	$(0,9)^3$
$D\overline{DD}$, $\overline{D}D\overline{D}$, $\overline{DD}D$	1	$3(0,9)^2(0,1)$
$\overline{D}DD$, $D\overline{D}D$, $DD\overline{D}$	2	$3(0,9)(0,1)^2$
DDD	3	$(0,1)^3$

- Em resumo,

$$Y(\overline{DDD}) = 0,\ Y(D\overline{DD}) = Y(\overline{D}D\overline{D}) = Y(\overline{DD}D) = 1,$$

$$Y(\overline{D}DD) = Y(D\overline{D}D) = Y(DD\overline{D}) = 2,\ Y(DDD) = 3$$

e

$$f(0) = (0,9)^3,\ f(1) = 3(0,9)^2(0,1),\ f(2) = 3(0,9)(0,1)^2 \text{ e } f(3) = (0,1)^3.$$

Variável Aleatória Contínua

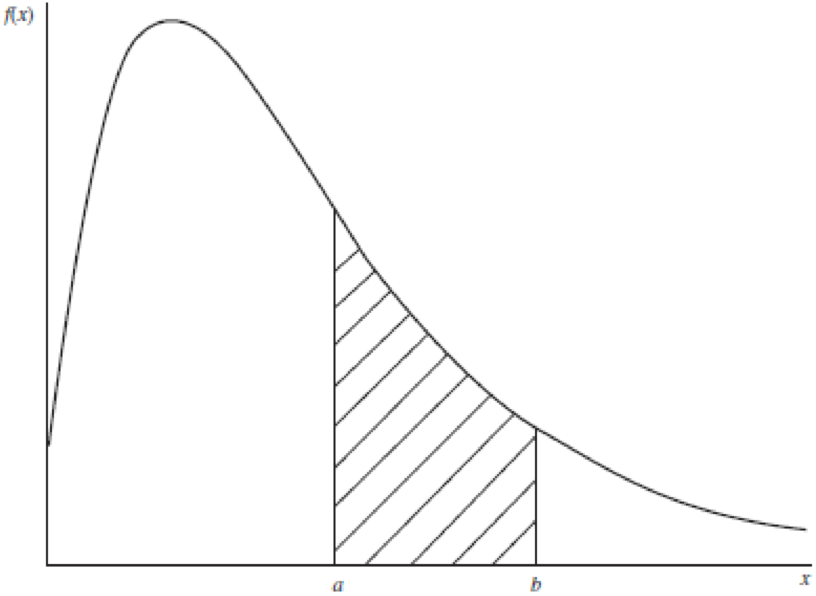
- Uma variável *X* será uma **variável aleatória contínua** se assumir qualquer valor real com probabilidade zero.
- A ideia é que uma variável aleatória contínua X pode assumir tantos valores possíveis que não podemos enumerá-los ou compará-los com os inteiros positivos, de modo que a consistência lógica garante que X pode assumir cada valor com probabilidade zero.

Variável Aleatória Contínua

- Por exemplo: a medida mais refinada do preço de um bem é em termos de centavos. **Podemos imaginar relacionando todos os possíveis valores de preços ordenadamente, o que tecnicamente faz com que preço seja uma variável aleatória discreta.** Porém, existem tantos valores possíveis de preços que o uso da mecânica das variáveis aleatórias discretas não é viável.

Função de Densidade de Probabilidade

- Por exemplo, se a e b forem constantes onde $a < b$, a probabilidade de X estar entre os números *a* e *b*, $P(a \leq X \leq b)$, será a *área* sob a fdp entre os pontos *a* e *b*.



integral da função *f* entre os pontos *a* e *b*.

Função de Distribuição Cumulativa

- Ao computar probabilidades para variáveis aleatórias contínuas, é mais fácil trabalhar com a **função de distribuição cumulativa** (**fdc**). Se X for qualquer variável aleatória, então, sua fdc será definida por qualquer numero x real pela equação:

$$F(x) \equiv P(X \leq x).$$

Função de Distribuição Cumulativa

- De uma forma em geral, para uma v.a. discreta *X*, a função de distribuição acumulada satisfaz:

1. $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$;
2. $0 \leq F(x) \leq 1$;
3. $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.

- **Além disso, mesmo que a v.a. *X* assuma apenas uma quantidade enumerável de valores, sua distribuição acumulada *F* é definida para todos os reais.**

Função de Distribuição Cumulativa

- Determinar a função de distribuição acumulada da v.a. X dada por

X	$f(X)$
0	0,6561
1	0,2916
2	0,0486
3	0,0036

Solução:

$$
\begin{aligned}
x < 0: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 0,0000 \\
0 \leq x < 1: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 0,6561 \\
1 \leq x < 2: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 0,9478 \\
2 \leq x < 3: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 0,9964 \\
x \geq 3: &\quad F(x) = P(X \leq x) = 1,0000
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
F(x) = \begin{cases}
0,0000; & x < 0 \\
0,6561; & 0 \leq x < 1 \\
0,9478; & 1 \leq x < 2 \\
0,9964; & 2 \leq x < 3 \\
1,0000; & x \geq 3
\end{cases}
$$

Função de Distribuição Cumulativa

As **funções de distribuições cumulativas** foram **tabuladas** para todas as distribuições contínuas importantes em probabilidade e estatística. A mais conhecida delas é a **distribuição normal**.

Distribuição Conjunto e Independência de Variáveis

- Isto é, a função densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x},\ x = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$X \sim Binomial(n, \theta).$$

Exemplo

- Se o voo tiver 100 lugares disponíveis, a empresa aérea estará interessada em $P(X > 100)$. Suponha, inicialmente, que *n* = 120, de modo que a companhia aérea aceitará 120 reservas, e que a probabilidade de que cada pessoa compareça para embarque seja $\theta = 0{,}85$.
- Então, $P(X > 100)$= P(X = 101)+ P(X= 102)+... +P(X = 120):
  - Se *n*=120, $\theta = 0{,}85$ e o valor apropriado de *x* (101 a 120), a probabilidade de que mais de 100 pessoas comparecerão para embarque é cerca de **0,659.**
  - Se n=110, a probabilidade de que mais de 100 pessoas comparecerão para embarque será de **apenas 0,024**

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

- Se *X* for uma variável aleatória, o **valor esperado** (**ou esperança**) de *X*, representado por E(*X*) e algumas vezes por μ_X, ou simplesmente μ, é uma média ponderada de todos os possíveis valores de *X*.
- Os pesos são determinados pela função de densidade de probabilidade. O valor esperado é chamado *média populacional*, especialmente quando queremos enfatizar que *X* representa alguma variável em uma população.

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

- A definição precisa do valor esperado é mais simples no caso em que *X* é uma variável aleatória discreta assumindo um número finito de valores, digamos, {*x*1, ..., *xk*). **Seja *f*(*x*) a função de densidade de probabilidade de *X***. O valor esperado de *X* será a média ponderada:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_k f(x_k) \equiv \sum_{j=1}^{k} x_j f(x_j)$$

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

EXEMPLO B.3

(Calculando um Valor Esperado)

Suponha que X assuma os valores -1, 0 e 2 com probabilidades 1/8, 1/2 e 3/8, respectivamente. Então,

$$E(X) = (-1)\cdot(1/8) + 0\cdot(1/2) + 2\cdot(3/8) = 5/8.$$

- Esse exemplo ilustra uma coisa curiosa sobre os valores esperados: o valor esperado de X pode ser um número que não é sequer um possível resultado de X. Sabemos que X assume os valores 1, 0 e 2, ainda que seu valor esperado seja 5/8. Isso torna o valor esperado deficiente para resumir a tendência central de certas variáveis aleatórias discretas.

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

- Dada uma variável aleatória X e uma função $g(.)$, podemos criar uma nova variável aleatória $g(X)$.
- Por exemplo, se X for uma variável aleatória, então, X^2 e $\log(X)$ (se $X > 0$) também serão variáveis aleatórias. O valor esperado de $g(X)$ será, de novo, simplesmente uma média ponderada:

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{j=1}^{k} g(x_j) f_X(x_j)$$

Uma Medida de Tendência Central: O Valor Esperado

EXEMPLO B.4

(Valor Esperado de X^2)

Para a variável aleatória no Exemplo B.3, seja $g(X) = X^2$. Então,

$$E(X^2) = (-1)^2(1/8) + (0)^2(1/2) + (2)^2(3/8) = 13/8.$$

- No exemplo anterior calculamos $E(X) = 5/8$, de forma que $[E(X)^2] = 25/64$. Isso mostra que $E(X^2)$ *não* é o mesmo que $[E(X)^2]$. De fato, para uma função não-linear $g(X), E[g(X)] \neq g[E(X)]$ (exceto em casos muito especiais).

Propriedades dos Valores Esperados

- **Propriedade 1:** Para qualquer constante *c*, E(*c*)=*c*.
- **Propriedade 2:** Para quaisquer constantes a e b, $E(aX + b) = aE(X) + b$.
  - se $\mu = E(X)$, e definirmos uma nova variável aleatória como $Y = X - \mu$, então, $E(Y) = 0$; considere $a = 1$ e $b = -\mu$.
- **Exemplo:** seja *X* a temperatura medida em graus Celsius, ao meio dia de determinado dia, em determinada localidade; suponha que a temperatura esperada seja E(*X*) =25. Se *Y* for a temperatura medida em graus Fahrenheit, então, $Y = 32 + (9/5)X$. Pela propriedade 2, a temperatura esperada em Fahrenheit será $E(Y) = 32 + \left(\frac{9}{5}\right)x \cdot E(X) = 32 + (9/5) \cdot 25 = 77$.

Propriedades dos Valores Esperados

- **Propriedade 3:** Se {*a*1, *a*2, ..., *an*} forem constantes e {*X*1, *X*2, ..., *Xn*} forem variáveis aleatórias, então:

$$\mathrm{E}(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n) = a_1\mathrm{E}(X_1) + a_2\mathrm{E}(X_2) + \dots + a_n\mathrm{E}(X_n).$$

- Ou, usando a notação de somatórios:

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathrm{E}(X_i).$$

- Como um caso especial dessa equação, temos (com cada *a*1 = 1)

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i),$$

Propriedades dos Valores Esperados

EXEMPLO B.5

(Encontrando a Receita Esperada)

Sejam X_1, X_2 e X_3 os números de pizzas pequenas, médias e grandes, respectivamente, vendidas durante o dia em uma pizzaria. Elas são variáveis aleatórias com valores esperados $E(X_1) = 25$, $E(X_2) = 57$ e $E(X_3) = 40$. Os preços das pizzas pequena, média e grande são 5,50, 7,60 e 9,15 (em dólares). Portanto, a receita esperada das vendas de pizzas em determinado dia será

$$E(5{,}50\,X_1 + 7{,}60\,X_2 + 9{,}15\,X_3) = 5{,}50\,E(X_1) + 7{,}60\,E(X_2) + 9{,}15\,E(X_3)$$
$$= 5{,}50(25) + 7{,}60(57) + 9{,}15(40) = 936{,}70,$$

isto é, 936,70 dólares. A receita efetiva de qualquer dia particular geralmente será diferente desse valor, mas essa é a receita *esperada*.

Esperança - Exemplo

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0,25$	$0,50$	$0,25$

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 \\ &= 1,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, 1 cara.

Propriedades dos Valores Esperados

- Também podemos usar a Propriedade 3 para mostrar que se $X \sim Binomial(n, \theta)$, então, $E(X) = n\theta$. Ou seja, o número esperado de sucessos em *n* ensaios de Bernoulli é simplesmente o número de ensaios vezes a probabilidade de sucesso de qualquer ensaio particular.
- Isso será facilmente observado escrevendo *X* como *X*= *Y*1+*Y*2+ ...*Yn*, onde cada $Yi \sim Bernoulli(\theta)$. Então,

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \theta = n\theta.$$

Outra Medida de Tendência Central: A Mediana

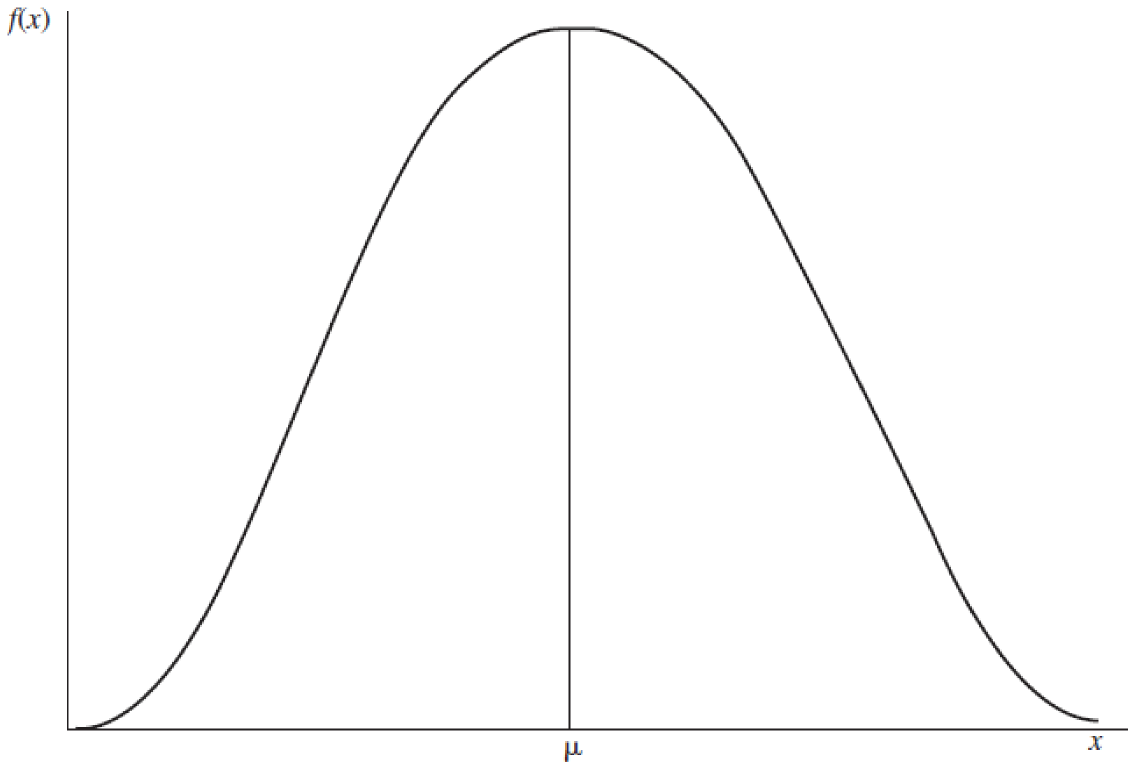
- Se X for uma **variável contínua**, então, a mediana de X, digamos m, será um valor tal que metade da área de uma fdp está à esquerda de m, e a outra metade está à direita de m.

Outra Medida de Tendência Central: A Mediana

- Em geral, a mediana, algumas vezes indicada por Med(X), e o valor esperado E(X), são diferentes. Nenhum é "melhor" que o outro como uma medida de tendência central; ambos são maneiras válidas de indicar o centro da distribuição de X.
- Em um caso especial, a mediana e o valor esperado (ou média) são os mesmos. Se X tiver uma **distribuição simétrica** em torno do valor μ, então μ , será tanto o valor esperado como a mediana.
- Matematicamente, a condição será $f(\mu+x) = f(\mu - x)$ para todo x.

Outra Medida de Tendência Central: A Mediana

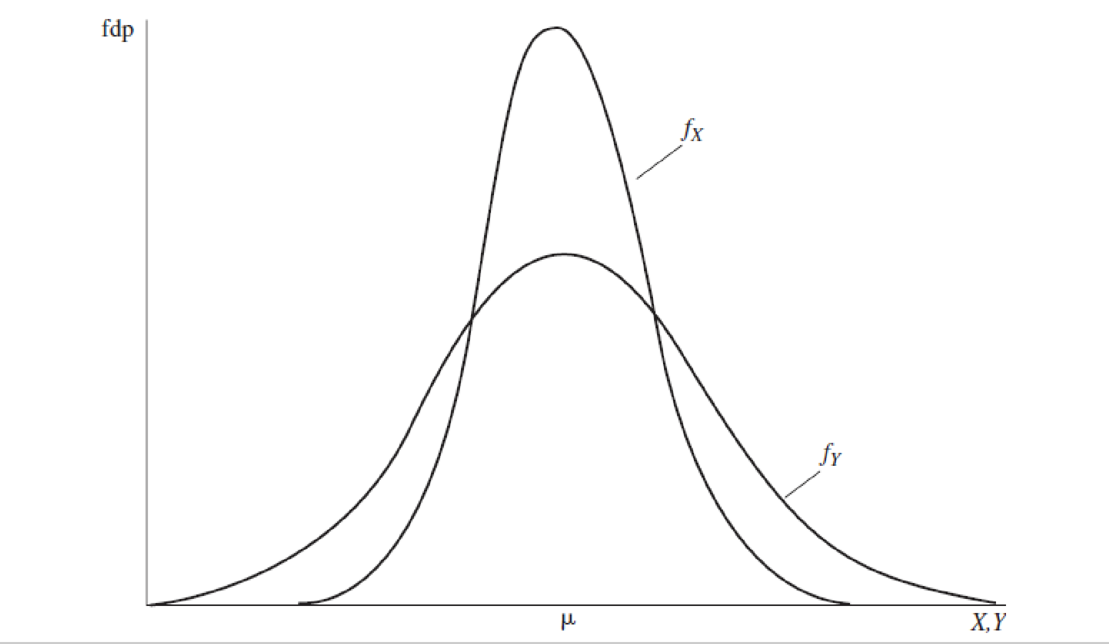
Uma distribuição de probabilidade simétrica.



Medidas de Variabilidade: Variância e Desvio-Padrão

- Embora a tendência central de uma variável aleatória seja valiosa, ela não nos diz tudo que queremos saber sobre a distribuição de uma variável aleatória.

Variáveis aleatórias com a mesma média, mas com distribuições diferentes.



A Figura mostra **as fdp de duas variáveis aleatórias com a mesma média**. Claramente, a **distribuição de *X* é mais concentrada em relação à sua média** que a distribuição de *Y*. Gostaríamos de ter uma maneira simples de resumir isso.

Variância

Para uma variável aleatória X, seja $\mu = E(X)$. Há várias maneiras de medir o quanto X está distante de seu valor esperado, mas a mais simples de trabalhar algebricamente é a diferença elevada ao quadrado, $(X - \mu)^2$.

Essa distância em si é uma variável aleatória, já que ela pode mudar a cada resultado de X. Da mesma forma que precisamos de um número para resumir a tendência central de X, precisamos de um número que nos informe o quanto X está distante de μ, em média.

Variância

- Um desses números é a **variância**, que nos informa a distância esperada de *X* até sua média:

$$\mathrm{Var}(X) \equiv \mathrm{E}[(X - \mu)^2].$$

- A variância é algumas vezes representada por $\sigma_X{}^2$, ou simplesmente σ^2. Podemos deduz-se que a variância é sempre não-negativa.

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2.$$

Variância

- Assim, não precisamos fazer a distinção entre variáveis aleatórias discretas e contínuas:
  - a definição de variância é a mesma em qualquer dos casos. Na maioria da vezes, primeiro calculamos $E(X)$, depois $E(X^2)$, e, então, usamos a fórmula anterior.

$$E(X^2) - \mu^2.$$

  - Por exemplo, se $X \sim Bernoulli(\theta)$, então, $E(X) = \theta$, e como $X^2 = X$, $E(X^2)$= θ. Deduz-se da equação anterior que $Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \theta - \theta^2 = \theta(1-\theta)$.

Propriedades da Variância

- **<u>Propriedade 1</u>:** Var(X) = 0 se, e somente se, houver uma constante c, de tal forma que P($X = c$) = 1, em cujo caso, E(X) = c.
  - Essa primeira propriedade diz que a variância de qualquer constante é zero, e se uma variável aleatória tiver variância zero, então, ela será essencialmente constante.
- **<u>Propriedade 2</u>:** Para quaisquer constantes a e b, $Var(aX + b) = a^2Var(X)$.
  - Isso significa que a adição de uma constante a uma variável aleatória não altera a variância, mas a multiplicação de uma variável aleatória por uma constante aumenta a variância por um fator igual ao *quadrado* daquela constante.

Propriedades da Variância

- **Exemplo:** Por exemplo, se X representar a temperatura em graus Celsius e $Y = 32 + (9/5)X$ for a temperatura em graus Fahrenheit, então, $Var(Y) = (9/5)^2 Var(X) = (81/25) Var(X)$.

Desvio Padrão

- O **desvio-padrão** de uma variável aleatória, representado por dp(*X*), é simplesmente a raiz quadrada positiva da variância: $dp(X) = +\sqrt{Var(x)}$. O desvio-padrão algumas vezes é representado por σ_x, ou simplesmente σ, quando a variável aleatória é entendida.

- **Propriedade 1:** Para qualquer constante *c*, dp(*c*)= 0.

Desvio Padrão

- **<u>Propriedade 2</u>:** Para quaisquer constantes *a* e *b*,

$$\mathrm{dp}(aX + b) = |a|\mathrm{dp}(X).$$

- Em particular, se $a > 0$, então, $\mathrm{dp}(aX) = a.\mathrm{dp}(X)$.
- **<u>Exemplo</u>**: suponha que ***X* seja uma variável aleatória renda** medida em milhares de dólares. Se definirmos ***Y* = 1.000*X***, então, *Y* será a renda medida em dólares. Suponha que **E(*X*) = 20** e **dp(*X*) = 6**. Então, **E(*Y*) = 1.000E(*X*) = 20.000** e **dp(*Y*) =1.000·dp(*X*) = 6.000**, de forma que o valor esperado e o desvio-padrão crescem pelo mesmo fator, 1.000.
- Se tivéssemos trabalhado com a variância, teríamos $\boldsymbol{Var(Y) = (1.000)^2 Var(X)}$, de forma que a variância de *Y* é um milhão de vezes maior que a variância de *X*.

Exemplo 1

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 1,50 - (1,0)^2 = 1,50 - 1,0 = 0,50.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{0,50} \cong 0,707.$$

Exemplo 2

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+\cdots+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36}=7,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, soma 7.

Exemplo 3

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 54,83 - (7,0)^2 = 54,83 - 49,0 = 5,83.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{5,83} \cong 2,415.$$