ESTATÍSTICA

Michelle Hanne Soares de Andrade
michellehanne.andrade@gmail.com

Teoria das Probabilidades

Conceitos Básicos de Probabilidade

Considere as seguintes questões:

- Como saber se um determinado produto esta sendo produzido dentro dos padrões de qualidade?
- Como avaliar a capacidade de um determinado exame acertar o verdadeiro diagnóstico?

Conceitos Básicos de Probabilidade

Questões como estas envolvem algum tipo de variabilidade ou incerteza, e as decisões podem ser tomadas por meio da **Teoria De Probabilidades** que permite a **quantificação da incerteza**.

Estudos de fenômenos ou experimentos aleatórios. Busca-se avaliar a probabilidade de ocorrência desses fenômenos.

Conceitos Básicos de Probabilidade

APLICAÇÕES:

- Teoria dos jogos
- Evolução de doenças
- Controle de defeitos
- Evolução do crescimento populacional
- Teoria da decisão
- Industria bélica

Conceitos Básicos de Probabilidade

- No século XVII os matemáticos franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662) iniciaram estudos sobre a teoria dos jogos.
- O objetivo principal era prever um resultado e obter êxito em suas apostas.
- Mas, seja nos jogos ou em qualquer outro experimento aleatório é possível associar uma medida para a incerteza quanto à ocorrência, ou não, de algum evento. **Essa medida é chamada de probabilidade.**

- **Probabilidade = número de eventos desejados / numero de eventos possíveis (que constitui o espaço amostral)**

Fenômenos Aleatórios

- Situações cujos resultados não podem ser previstos com certeza são denominadas fenômenos aleatórios.
- Alguns fenômenos aleatórios: taxa de inflação no próximo mês, valor observado no lançamento de um dado, número de acessos de uma página na web em determinado dia, etc.
- Fenômenos desta natureza podem ser formalmente descritos a partir da teoria de conjuntos.

Espaços Amostrais e Eventos

- Chamamos de espaço amostral ao conjunto de todos os resultados possíveis de um fenômeno aleatório.
- Usualmente tal conjunto é representado por Ω.
- Os subconjuntos de Ω são denominados eventos e são representados por meio de letras maiúsculas:

$$A,\ B,\ C,\ \text{etc.}$$

- O conjunto vazio sempre pertence a Ω e é representado por $\emptyset$.

Espaços Amostrais e Eventos - Exemplo

- Considere o fenômeno aleatório caracterizado pelo lançamento de um dado.
- Neste caso,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Ω é dito um espaço amostral finito.
- Alguns exemplos de eventos:
  1. $E_1 =$ "o número obtido é par" $= \{2, 4, 6\} \subset \Omega$
  2. $E_2 =$ "o número obtido é ímpar" $= \{1, 3, 5\} \subset \Omega$
  3. $E_3 =$ "o número obtido é menor que 5" $= \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$
  4. $E_4 =$ "o número obtido é maior que 6" $= \emptyset \subset \Omega$

Espaços Amostrais e Eventos

- **Fenômeno Aleatório: é um experimento no qual**
  - todos os resultados possíveis são conhecidos antecipadamente;
  - uma realização do experimento resulta num dos possíveis resultados;
  - pode ser repetido em condições idênticas.
- Espaço Amostral (S ou Ω): e o conjunto dos resultados possíveis para um experimento aleatório. Pode ser:

i) Discreto Finito: formado por um conjunto finito de pontos;

ii) Discreto Infinito: conjunto infinito e enumerável de pontos;

ii) Continuo: formado por um conjunto não enumerável de pontos.

Espaços Amostrais e Eventos

Ω é discreto: **consiste de um conjunto finito ou infinito contável de resultados.**

Ω é contínuo quando contém um intervalo de números reais.

Espaços Amostrais e Eventos - Exemplos

- Exemplo 1: No experimento da retirada de uma bola de uma da caixa, Ω e um espaço amostral finito dado pelo conjunto com n pontos, no caso $\Omega = \{1,2,...,n\}$.
- Exemplo 2: Lançamento de uma moeda. Ω = {cara, coroa}.
- Exemplo 3: Lançamento de um dado. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Exemplo 4: Aleatoriamente selecionar uma câmera e registrar o tempo de reciclagem de um flash.
  - $S = R+ = \{x \mid x > 0\}$, os números reais positivos.
  - Suponha que todos os tempos de reciclagem são entre 1,5 e 5 segundos.
  - Então: $S = \{x \mid 1{,}5 < x < 5\}$ e continua.

Experimentos Aleatórios Estocásticos

- Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado são **denominados experimentos aleatórios (estocásticos)**.

Exemplos:

- Quanto se retira um lote de peças num processo de produção, observa-se que o número de peças defeituosas varia de lote para lote;
- Uma lâmpada é escolhida no processo de fabricação e se observa o seu tempo de duração, verifica-se que esse tempo varia de lâmpada para lâmpada.

Experimentos Determinísticos

- Os experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições conduzem ao mesmo resultado são **denominados determinísticos**.
- Exemplos:
- Se uma pedra cai de uma certa altura, pode-se determinar sua posição e velocidade para qualquer instante de tempo posterior a queda;
- Se agua é aquecida a 100 graus centigrados ao nível do mar, ela entrara em ebulição.

Experimentos

- Lance uma moeda ate que ocorra uma cara e, então conte o n° de vezes que a moeda foi lançada. O espaço amostral deste experimento é

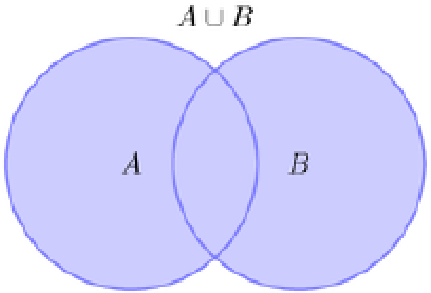
$$E = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$$

- O infinito refere-se ao caso em que nunca ocorre cara e, assim a moeda é lançada um n° infinito de vezes.
- Este exemplo mostra um **espaço amostral infinito enumerável.**

Operação entre Eventos - União

A reunião de dois eventos A e B, denotada por $A \cup B$, é o evento que ocorre se ao menos um deles ocorre:

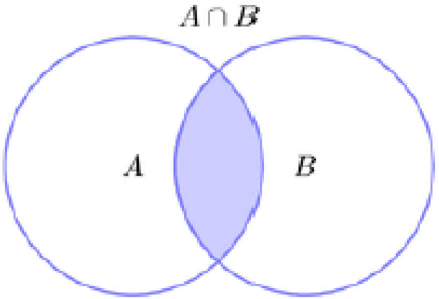
$$\omega \in A \cup B \iff \omega \in A \text{ ou } \omega \in B.$$



Operação entre Eventos - Interseção

A interseção de dois eventos A e B, denotada por $A \cap B$, é o evento que ocorre quando ambos os eventos ocorrem:

$$\omega \in A \cap B \Longleftrightarrow \omega \in A \text{ e } \omega \in B.$$



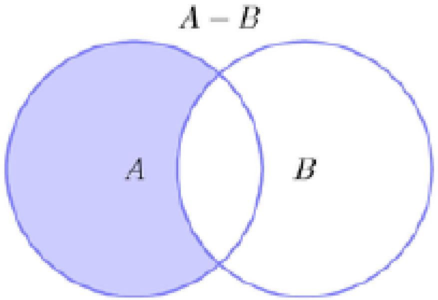
Operação entre Eventos - Complementação

O complementar de A, denotado por $\overline{A}$ ou A^c, é o evento que ocorre quando A não ocorre:

$$\omega \in A^c \iff \omega \notin A.$$

A partir da complementação, definimos ainda a subtração de conjuntos

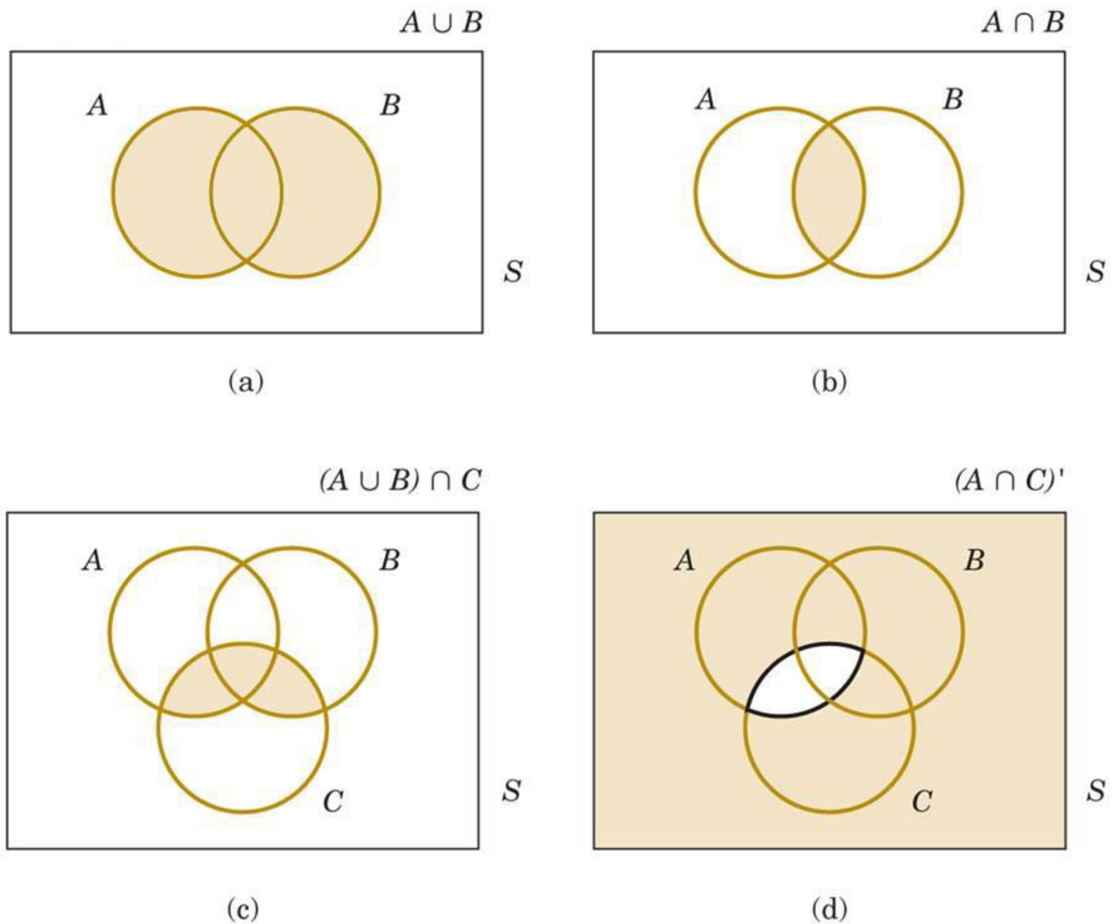
$$A \setminus B = A \cap B^c.$$



Combinação de Eventos

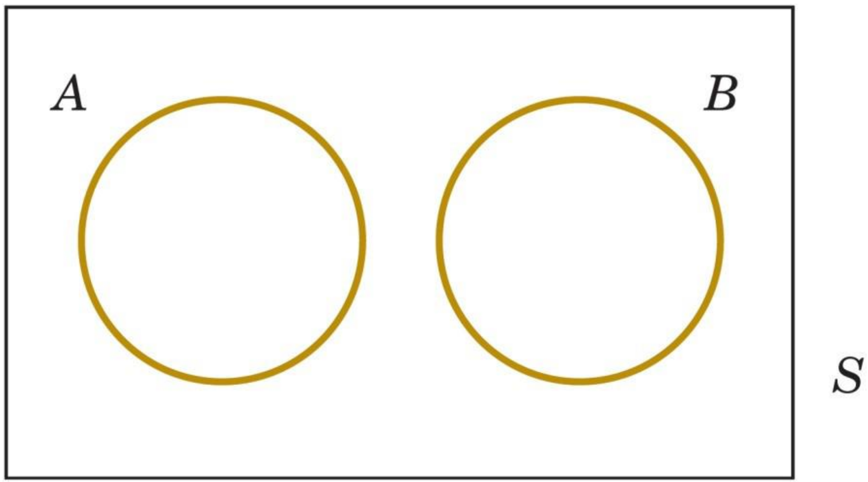
- A **União** de dois eventos é composto de todos os resultados que estão contidos em um evento ou outro, denominado A ∪ B.
- A **interseção** de dois eventos é composto de todos os resultados que estão contidos em um evento e outro, denominado (A ∩ B).
- O **complemento** de um evento é o conjunto de resultados do espaço amostral que não estão contidas no evento, denominado (A ∩ C)'.

Combinação de Eventos



Eventos Mutuamente Exclusivos

- Eventos A e B são mutuamente exclusivos porque eles não compartilham resultados comuns.
- A ocorrência de um evento impede a ocorrência do outro. Simbolicamente, $A \cap B = O$



Exemplos

- Em fenômenos aleatórios tais como
  - ... lançamento de uma moeda, ou de um dado;
  - ...extração de uma carta de um baralho;
  - ...entre outros, temos que todos os resultados possíveis tem a mesma chance de ocorrer.
- Assim, por exemplo no lançamento de uma moeda a probabilidade do evento cara ou coroa ocorrer são igualmente prováveis, ou seja, a probabilidade atribuída a cada um é 1/2.
- A probabilidade de um evento A qualquer ocorrer pode ser definida por:

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favoráveis ao evento } A}{\textit{número de casos possíveis}}$$

Exemplos

- No lançamento de um dado não viciado, qual a probabilidade de cair face 4?
  - número de eventos desejados = 1 (só ha uma face 4)
  - numero de eventos possíveis = 6 (ha 6 faces no dado).
  - Portanto, P(A) = 1/6
- Considere o fenômeno aleatório lançamento de um dado e o evento A "sair numero par". Qual a probabilidade deste evento ocorrer?

$$P(A)=\frac{3}{6}=0.50$$

Probabilidade Empírica

Na prática acontece que **nem sempre é possível determinar a probabilidade de um evento**. Neste caso é necessário ter um método de aproximação desta probabilidade.

Um dos métodos utilizados **é a experimentação** que objetiva estimar o valor da probabilidade de um evento A com base em valores reais.

A probabilidade avaliada através deste processo **é denominada de probabilidade empírica.**

Probabilidade Empírica

Repetindo-se um experimento E um grande número de vezes e calculando-se a frequência relativa do evento A, obtém-se um número "p" que pode ser tomado como a probabilidade da ocorrência de A, que nesse caso, poderia ser tomada como:

$$P(A) = p = \lim_{n \to \infty} \frac{f(A)}{n}$$

$$P(A) = \frac{numero\ de\ ocorrencias\ de\ A}{numero\ de\ repeticao\ do\ experimento}$$

Probabilidade Empírica - Exemplo

- Uma escola particular pretende oferecer um treinamento esportista aos seus alunos. Dos 300 alunos entrevistados, 142 optaram pelo voleibol, 123 indicaram o basquete e 35 indicaram o futebol.
- Selecionado aleatoriamente um desses alunos, qual a probabilidade de obter alguém que prefere o voleibol?

$$P(V)=\frac{142}{300}=0.47333.$$

- **A medida que o número de observações aumenta, as aproximações tendem a ficar cada vez mais próximas da probabilidade efetiva.**

Probabilidade dos Grandes Números

Ex: Um dado foi lançado 100 vezes e a face 6 apareceu 18 vezes. Então a freqüência relativa do evento A = { face 6 } é:

Solução:

$$P(A) = \frac{\text{números de ocorrência de A}}{\text{número de repetições do experimento}} = \frac{18}{100}$$

$$P(A) = 18\%$$

Ao se calcular probabilidades pelo método da freqüência relativa, obtém-se uma aproximação em lugar de um valor exato. A mediada que o número de observações aumenta, as aproximações tendem a ficar cada vez mais próximas da probabilidade efetiva. Essa propriedade é enunciada como um teorema comumente conhecido como a *Lei dos Grandes Números*.

Lei dos Grandes Números

Ao se repetir um experimento um grande número de vezes, a probabilidade pela freqüência relativa tende para a probabilidade teórica

Exemplos – Ocorrência de um Evento

Exemplo 1

- No lançamento de uma moeda não viciada, qual a probabilidade de cair coroa?
  - numero de eventos desejados = 1 (só ha uma face coroa)
  - numero de eventos possíveis = 2 (ha 2 faces na moeda).
  - Portanto, P = 1/2
- Nesse caso os eventos são chamados de equiprováveis.
- Caso idêntico a esse é o sexo de criança esperada apos uma gravidez:
  - P(menina) = 1/2 e P(menino) = 1/2.

Exemplos – Ocorrência de um Evento

Exemplo 2

- No lançamento de um dado não viciado, qual a probabilidade de cair face 4?
  - numero de eventos desejados = 1 (só ha uma face 4)
  - numero de eventos possíveis = 6 (ha 6 faces no dado).
  - Portanto, P = 1/6

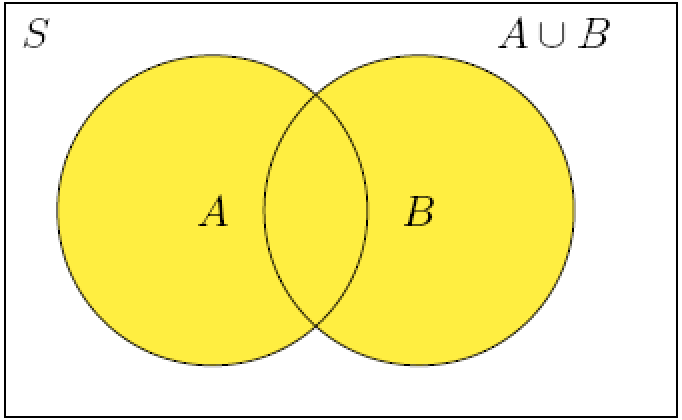
Exemplos – Ocorrência de um Evento

Exemplo 3

- Supondo um casal, em que ambos são homozigotos dominantes para uma certa característica, qual a probabilidade de terem uma criança também homozigota *AA*?
  - **A resposta é P (AA) = 1 ou 100%. Ou seja, existe 100% de chance da criança ser AA.**
- Entretanto, se a pergunta fosse: Qual a probabilidade da criança ser homozigota *aa*?
  - A ocorrência do evento (aa) tem probabilidade igual a zero, **P (aa) = 0**, pois não há genes “a” na família.

Ocorrência de dois Evento

- **Probabilidade de ocorrência de um OU outro acontecimento**
- A probabilidade de ocorrerem eventos mutuamente exclusivos e dada **pela soma das probabilidades** isoladas de ocorrência de cada um dos eventos.



Ocorrência de dois Evento

- A união de dois eventos A e B é o evento que corresponde **à ocorrência de pelo menos um deles**. Note que isso significa que pode ocorrer **apenas A**, ou **apenas B** ou **A e B simultaneamente**. Esse evento será representado por AUB.

União de dois eventos: $A \cup B$: $\rightarrow$ $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

Ocorrência de dois Evento - Exemplos

Exemplo 1- Qual a probabilidade de cair face 3 ou face 6 em um único lançamento de dado?

- P(3) = 1/6
- P(6) = 1/6
- **P(3 ou 6) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3**

Exemplo 2- Qual a probabilidade de se retirar uma dama de um baralho previamente embaralhado?

- P (dama copas) = P (dama ouro) = P (dama espadas) = P (dama paus) = 1/52
- **Portanto, P (dama) = 1/52 + 1/52 + 1/52 + 1/52 = 4/52 = 1/13**

Ocorrência de dois Evento - Exemplos

Exemplo 3- Consideremos o experimento do lançamento de duas moedas, onde o espaço amostral é $\Omega = \{ KK, KC, CK, CC\}$.

- Sejam os eventos A = "ocorrência de exatamente 1 cara" e B = "duas faces iguais".
  - Então $A = \{KC, CK\}$ e $B = \{CC, KK\}$; logo, $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$.
  - Seja C o evento "pelo menos uma cara"; então $C = \{KC, CK, KK\}$ e $B \cup C = \Omega$ e $B \cap C = \{KK\}$.

Probabilidade de ocorrência de um E outro Evento

Probabilidade de ocorrência de um E outro acontecimento

- Dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não influencia a probabilidade do outro ocorrer.
- A probabilidade de ocorrerem eventos independentes **é dada pela multiplicação das probabilidades** isoladas de ocorrência de cada um dos eventos.

Probabilidade de ocorrência de um E outro Evento

Condição 1: Os acontecimentos são iguais.

- **Exemplo**
  - Qual a probabilidade de caírem 2 faces 3 no lançamento de 2 dados?
    - P (3) = 1/6
    - **Logo, P (3 e 3) = 1/6 X 1/6 = 1/36**

Probabilidade de ocorrência de um E outro Evento

<u>Os acontecimentos são diferentes.</u>

- Neste caso há que se considerar 2 tipos de situação:

  <u>2.1 A ordem de ocorrência dos acontecimentos é importante.</u>

  – **Exemplo:** Qual a probabilidade de, em 2 lançamentos, cair face 1 no primeiro e face 2 no segundo?

    - Quais são os eventos possíveis?

Probabilidade de ocorrência de um E outro Evento

O espaço amostral, simbolizado por S, é o conjunto que contém todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

{1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6
2,1 2,2 2,3 2,4 2,5 2,6
3,1 3,2 3,3 3,4 3,5 3,6
4,1 4,2 4,3 4,4 4,5 4,6
5,1 5,2 5,3 5,4 5,5 5,6
6,1 6,2 6,3 6,4 6,5 6,6 } em 2 lançamentos, cair face 1 no primeiro e face 2 no segundo?

Portanto: P (1) = 1/6 e P(2) = 1/6

P (1 no primeiro dado e 2 no segundo) = P(1,2) = 1/6 x 1/6 = 1/36

Probabilidade de ocorrência de um E outro Evento

2.2 A ordem de ocorrência dos acontecimentos não é importante.

- Notar que no espaço amostral do exercício anterior (S), há a parcela (2,1), ou seja, caiu o numero 2 no lançamento do primeiro dado e o 1 no outro.
- **Isto não satisfazia a questão anterior. Mas, se a pergunta fosse: Qual a probabilidade de, em 2 lances, caírem faces 1 e 2?**
  - P (1,2) = 1/36
  - P (2,1) = 1/36
  - Logo: P (1,2 ou 2,1) = 1/36 + 1/36 = 2/36 = 1/18