ESTATÍSTICA

Michelle Hanne Soares de Andrade
michellehanne.andrade@gmail.com

Intervalo de Confiança

Elementos

- $\bar{x}$ Média Amostral
- μ Média Populacional
- σ Desvio Padrão Populacional
- s Desvio Padrão Amostral
- S^2 Variância Amostral
- σ^2 Variância Populacional
- n Tamanho da Amostra
- α Nível de Confiança
- g.l. Graus de Liberdade
- IC Intervalo de Confiança
- E Margem de erro

O que é Intervalo de Confiança?

- Intervalos de confiança são intervalos aleatórios que se alteram a cada diferente amostra retirada da variável de interesse *X*.
- Entretanto, ha uma proporção esperada γ de vezes que estes intervalos contém o verdadeiro valor do parâmetro de interesse.

Nível de Confiança

- A ideia é construir um intervalo de confiança para o parâmetro com uma probabilidade de $1\text{-}\alpha$ (nível de confiança) de que o intervalo contenha o verdadeiro parâmetro.
- α é o nível de significância, isto é, o erro que estaremos cometendo. Ex: 95% das vezes o intervalo $\widehat{\theta_1} < \theta < \widehat{\theta_2}$ contém θ. Nesse caso o erro seria de 5%

IC para a Média Populacional

- A situação mais comum e aquela em que o interesse recai sobre a estimação da média populacional (μ)
- O processo vai depender do conhecimento da Variância populacional σ^2
- **Caso 1** Variância Populacional Conhecida
- **Caso 2** Variância Populacional Desconhecida

Variância Populacional (σ^2)

- **A variância** da população é uma variável aleatória.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}$$

IC para a Média com σ^2 Conhecida

- Consideremos uma amostra aleatória simples $X_1, X_2 \ldots X_n$ obtida de uma população com distribuição normal, com média μ e variância σ^2 conhecida. Desta forma, a distribuição amostral da média também é Normal com média μ e variância σ^2/n, ou seja,

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

IC para a Média com σ^2 Conhecida

- Assim temos que:

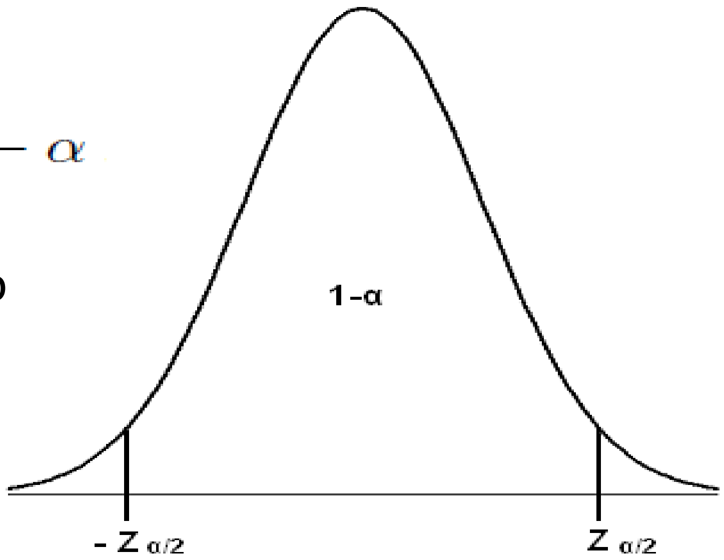
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

- isto é, a variável *Z* tem distribuição normal padronizada.
- Consideremos que a probabilidade da variável *Z* tomar valores entre $-Z_{\alpha/2}$ e $Z_{\alpha/2}$ é $1-\alpha$.Os valores $-Z_{\alpha/2}$ e $Z_{\alpha/2}$ são obtidos na tabela da distribuição normal.

IC para a Média com σ^2 Conhecida

- Como Z tem destruição normal padrão

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$



- Onde $Z_{1-\alpha/2}$ é obtido a partir da tabela do Normal padrão de modo que

$$P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

Podemos isolar o μ

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

IC para a Média com σ^2 Conhecida

- Com isso, o intervalo de confiança da média é dado por

$$IC(\mu, 1-\alpha) = \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Os valores *L* é o **limite inferior** do intervalo
- E *U* é o **limite superior** do intervalo.

$$L = \bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad U = \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Exemplo1

- O projetista de uma indústria tomou uma amostra de 36 funcionários para verificar o tempo médio gasto para montar um determinado produto. Lembrando que foi verificado que $\bar{x} = 19{,}9$ e $\sigma = 5{,}73$, construir um intervalo de confiança de 95% para μ.

Temos: $Z_{0,025} = 1{,}96$, $\bar{x} = 19{,}9$ e $\sigma = 5{,}73$ e $n = 36$

Substituindo na fórmula:

$$19,9 - 1,96\frac{5,73}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 19,9 + 1,96\frac{5,73}{\sqrt{36}}$$

$$IC(\mu, 0,95) = (18,02; 21,77)$$

Exemplo2

- São feitas medidas de energia de impacto em 10 corpos de prova.
- Os valores observados são

$$64,1; \quad 64,7; \quad 64,5; \quad 64,6; \quad 64,5; \quad 64,3; \quad 64,6;$$

$$64,8; \quad 64,2; \quad 64,3\,.$$

- Suponha que a energia de impacto é normalmente distribuída com variância 1J.
- Querermos encontrar o IC de 95% de confiança para μ.

Exemplo2 (Solução)

- Temos que

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975} = 1,96 \quad n = 10 \quad \sigma = 1 \quad \bar{x} = 64,46 \, .$$

- O intervalo com 95% de confiança é

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

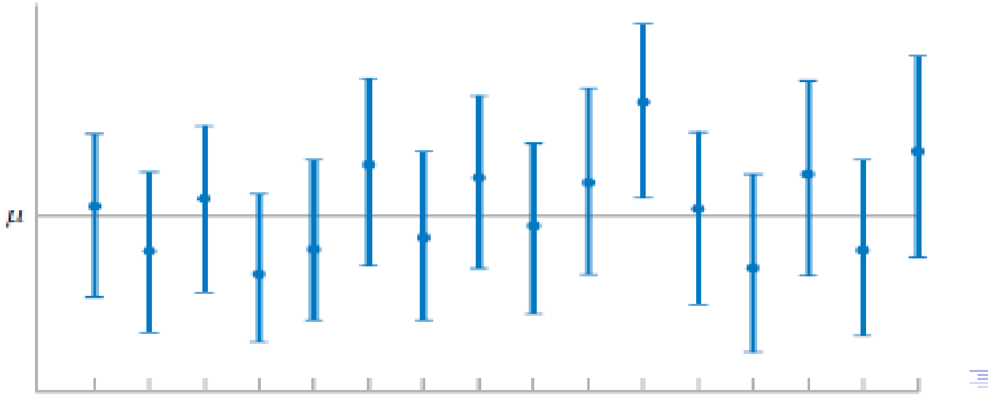
$$64,46 - 1,96 \frac{1}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 64,46 + 1,96 \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$63,84 \leq \mu \leq 65,08 \, .$$

- Uma faixa de valores altamente plausíveis para μ é $[63,84; \ 65,08]$J.

Interpretação do IC para a Média

- Considere um intervalo de confiança 100(1-α)%
- Se repetíssemos o experimento um número infinito de vezes
- Se para cada um desses experimentos calculássemos o IC
- 100(1-α)% deles iriam conter o verdadeiro valor de μ



Confiança vs Precisão

- Se quisermos uma confiança de 99% ao invés de 95%.
- Devemos aumentar o comprimento do intervalo.
- O comprimento com 95% é Z=1,96 e com 99% é Z=2, 58
- O **comprimento** do intervalo mede a **precisão** da estimativa.
- Se quisermos ter muita confiança teremos um intervalo menos preciso.
- A precisão é **inversamente** relacionada com o nível de confiança.

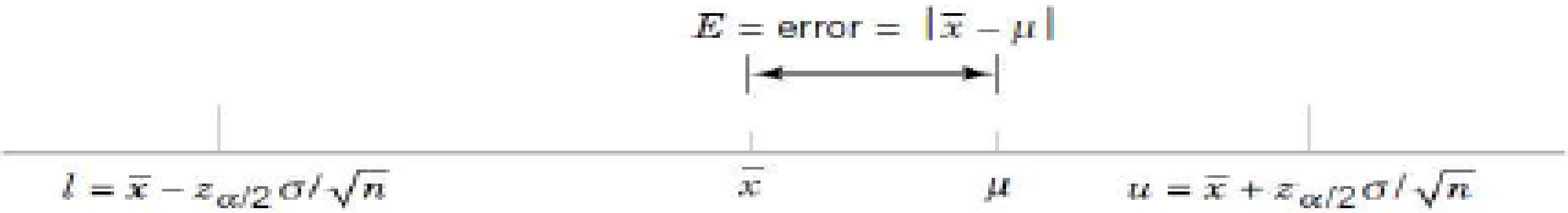
Confiança vs Precisão

- Níveis de Confiança mais usados

Nível de confiança	α	$\alpha / 2$	$Z_{\alpha/2}$
90%	0,10	0,05	1,65
95%	0,05	0,025	1,96
99%	0,01	0,005	2,58

Tamanho da Amostra

- Podemos escolher um tamanho de amostra *n* dependendo do erro máximo (margem de erro) que queremos cometer



Tamanho da Amostra

- Escolhemos *n* tal que o erro máximo cometido é

$$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- com 100(1 – α)% de confiança. Isolando o *n* temos que

$$n = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E} \right)^2$$

Exemplo

- Considere o exemplo das energias medidas em corpos de prova: *64, 1; 64, 7; 64, 5; 64, 6; 64, 5; 64, 3; 64, 6;*
- *64, 8; 64, 2 e 64,3*.
- Queremos construir um intervalo com 95% de confiança para energia média μ.
- O intervalo deve ter variância de 1J. O erro de estimação máximo é 1/2J.
- Temos então que

$$n = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{E}\right)^2 \Rightarrow n = \left(\frac{(1,96)(1)}{0,5}\right)^2 = 15,37$$

- O tamanho da amostra mínimo é 16

IC para μ com Amostras Grandes

- Suponha que temos uma amostra de tamanho grande (pelo menos 40).
- As variáveis não tem distribuição normal e nem que a variância é conhecida.
- Temos uma amostra $X_1, \dots, X_n$ com uma média μ e variância σ^2 desconhecidas

IC para μ com Amostras Grandes

- Mesmo não sabendo a distribuição da população podemos usar o Teorema Central do Limite, que garante a distribuição de $\bar{X}$ se aproxima de uma normal padrão. O valor de σ pode ser estimado:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

IC para μ com Amostras Grandes

- Queremos estimar μ.
- A estimativa pontual é $\overline{X}$.
- Não sabemos o valor de σ^2.
- Se *n* é grande

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Tem uma distribuição que se aproxima da normal padrão.

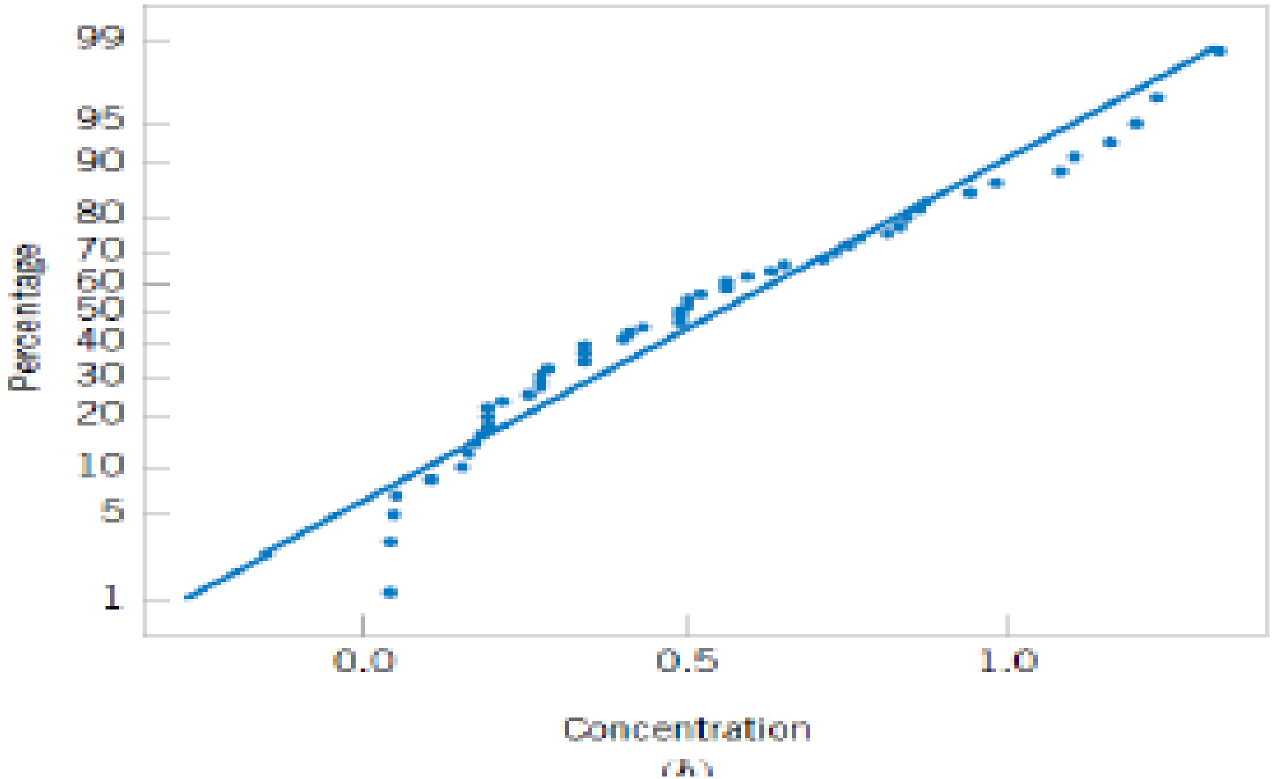
- O intervalo com 100(1 – α)% de confiança é dado por

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Exemplo

- Uma amostra de 53 peixes é selecionada de um lago no Amazonas. Mediu-se a concentração de mercúrio no tecido muscular. A figura abaixo mostra o gráfico de probabilidade para essa amostra.
- A distribuição não é normal!

Exemplo



99
95
90
80
70
60
50
40
30
20
10
5
1
Percentage
0.0
0.5
1.0
Concentration

Exemplo

- Queremos um intervalo de confiança para μ com 95% de
- confiança.
- n > 40 - a distribuição não é normal
- Os dados são:
- $n = 53$
- $\overline{X}$ =0,5250
- s=0,3486
- $z_{0,975} = 1,96$

Exemplo (Resolução)

- O intervalo para μ é:

$$\bar{x} - z_{0,975}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{0,975}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - 1,96\frac{0,3486}{\sqrt{53}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1,96\frac{0,3486}{\sqrt{53}}$$

$$0,4311 \leq \mu \leq 0,6189\,.$$

Intervalo para média com variância desconhecida

- Vamos agora considerar casos em que:
  - a amostra é pequena;
  - a população é normalmente distribuída;
  - a variância é **desconhecida**.
- Muitas populações encontradas na prática são bem aproximadas pela normal.

Intervalo para média com variância desconhecida

- Seja $X_1, X_2 \ldots X_n$ uma amostra aleatória de X.
- X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.
- **μ e σ^2 são desconhecidos.**
- Seja S o desvio padrão amostral

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}.$$

- E a variável aleatória *T* (distribuição *t*-student com n − 1 graus de liberdade.)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Intervalo para média com variância desconhecida

- As distribuições t são parecidas com a normal, porém tem mais probabilidade na calda.

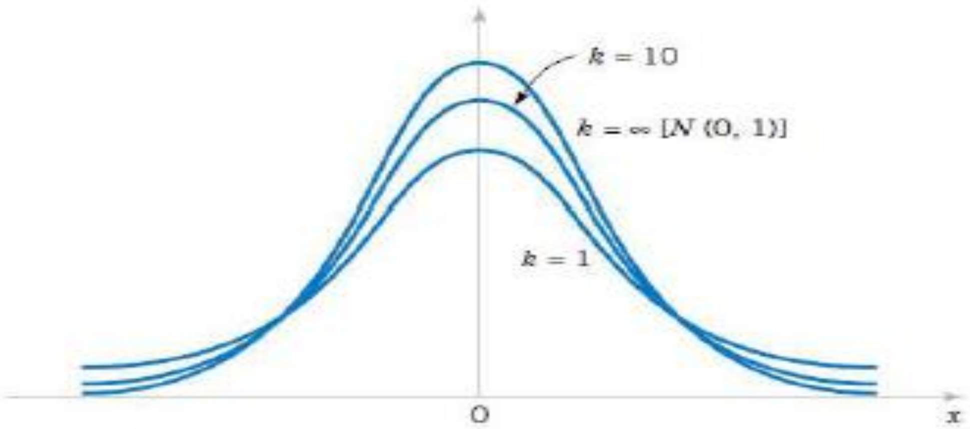


Figure 8-4 Probability density functions of several t distributions.

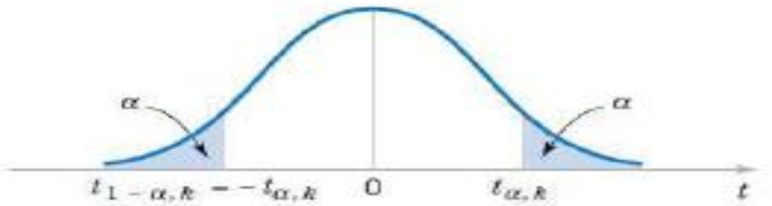


Figure 8-5 Percentage points of the t distribution.

Intervalo para média com variância desconhecida

- O valor $t_{\alpha;k}$ é o ponto da distribuição t com k graus de liberdade que deixa uma área acima dele.

$$P(T_{10} > t_{0,05;10}) = P(T_{10} > 1,812) = 0,05$$

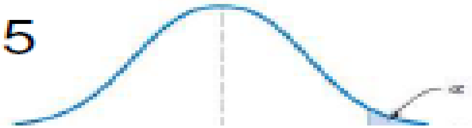


Table IV Percentage Points $t_{\alpha,\nu}$ of the t-Distribution

ν \ α	.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587

Intervalo para média com variância desconhecida

- A distribuição t é simétrica em torno do zero

$$t_{1-\alpha,n} = -t_{\alpha,n}$$

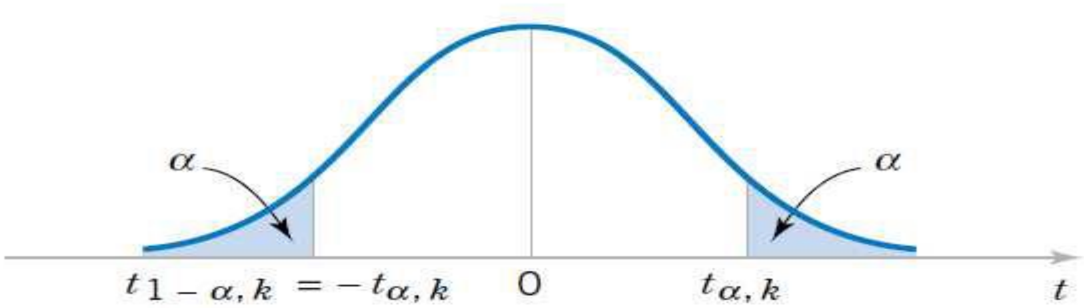


Figure 8-5 Percentage points of the t distribution.

- quando os graus de liberdade crescem a distribuição t se aproxima da Normal.

Cálculo de IC

- Sabemos que

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

- tem uma distribuição t com n – 1 graus de liberdade
- Encontramos $T_{\alpha/2;n-1}$ tal que

$$P(-t_{\alpha/2;n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2;n-1}) = 1 - \alpha$$

- Ou seja:

$$P\left(-t_{\alpha/2;n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2;n-1}\right) = 1 - \alpha$$

Cálculo de IC

- Isolamos μ

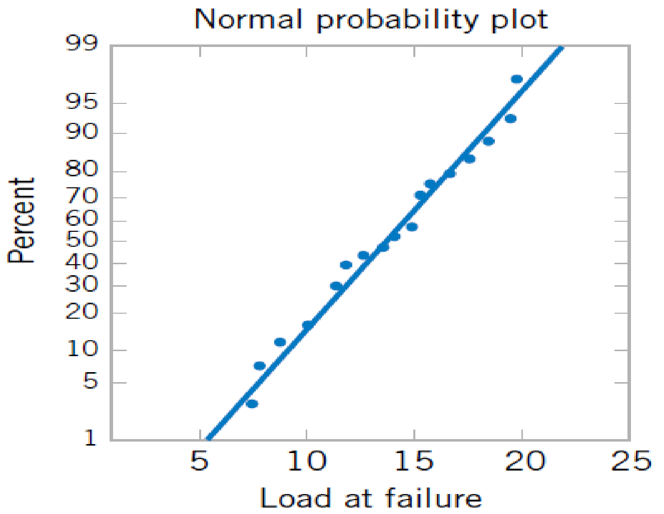
$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2;n-1} S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2;n-1} S/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

- Então temos IC para a μ com variância desconhecida:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2;n-1} s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2;n-1} s/\sqrt{n}$$

Cálculo de IC - Exemplo

- 22 corpos de prova são analisados.
- São registradas as cargas no ponto de falha.
- O gráfico de probabilidade abaixo mostra que a distribuição é próxima da normal.



- Os dados são:
- $\overline{X} = 13{,}71$
- s = 3,55
- n = 22
- Os graus de liberdade são n – 1 = 21
- Queremos um intervalo com 95% de confiança.

Cálculo de IC – Exemplo (Resolução)

- $t_{0,025;21} = 2,080$

ν \ α	.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819

Cálculo de IC – Exemplo (Resolução)

- Resolução:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2;n-1} s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2;n-1} s/\sqrt{n}$$

$$13,71 - 2,080(3,55)/\sqrt{22} \leq \mu \leq 13,71 + 2,080(3,55)/\sqrt{22}$$

$$12,14 \leq \mu \leq 15,28\,.$$

- O intervalo é razoavelmente amplo por causa da variabilidade dos dados.

Exercício

- O tempo de reação de um novo medicamento pode ser considerado como tendo distribuição normal com média e variância desconhecidas. Vinte pacientes foram sorteados, receberam o medicamento e tiveram seu tempo de reação anotado. Os dados foram os seguintes (em minutos): 2,9; 3,4 ; 3,5 ; 4,1 ; 4,6 ; 4,7 ; 4,5 ; 3,8 ; 5,3 ; 4,9 ; 4,8 ; 5,7 ; 5,8 ; 5,0 ; 3,4 ; 5,9 ; 6,3 ; 4,6 ; 5,5 e 6,2.
- Obtenha um intervalo de 95% de confiança para o tempo médio de reação populacional.
- Graus de liberdade = n-1
- *O valor da media amostral e* $\bar{X}$ = 4,745 *e a variância amostral e*

S^2 = 0,9921.

- $t_{0,025;19}$ = 2,093

Resumo

- n<30 conhece S -> tabela t
- n< 30 conhece σ - > tabela Z
- n$\geq$ 30 -> tabela Z

Intervalo de Confiança para a Proporção Populacional

- A construção do intervalo de confiança para a proporção p em uma população é feita de forma análoga ao que e feito para a média amostral μ. Lembremos que a proporção é o valor médio encontrado em uma variável binaria $X \in \{0,1\}$.

$$IC(p,\gamma) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Intervalo de Confiança para a Proporção Populacional

- A margem de erro no intervalo de confiança $z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ depende da quantidade p a ser estimada. Para resolver este problema são propostas duas abordagens:

- **Abordagem Conservadora**: considera a maior margem de erro possível, ou seja, fixa o valor $p = 0{,}5$.
- **Abordagem Otimista**: calcula a margem de erro explorando o que ocorreu na amostra $p = \hat{p}$

Exemplo

- Antes de uma eleição, um determinado partido está interessado em estimar a probabilidade p de eleitores favoráveis a seu candidato. Em uma amostra com 480 eleitores, encontramos 180 eleitores favoráveis ao candidato. Construa um intervalo com $\gamma = 0{,}90$ para p, a verdadeira proporção de eleitores favoráveis ao candidato deste partido.

$$IC(p, \gamma) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Exemplo

- $IC\ (p, 0{,}9) = \frac{180}{480} \pm 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}9(1-0{,}9)}{480}}$ $\quad Z_{(0,05)}=1{,}65$

  $(0{,}3524;\ 0{,}3976)$

- $IC\ Conservadora\ (p, 0{,}9) = \frac{180}{480} \pm 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{480}}$

  $(0{,}3373; 0{,}4127)$

- $IC\ Otimista\ (p, 0{,}9) = \frac{180}{480} \pm 1{,}65\sqrt{\frac{0{,}4(1-0{,}4)}{480}}$

  $(0{,}3381; 0{,}4119)$

Intervalo de Confiança para a Variância Populacional

- Consideremos uma amostra aleatória de tamanho $x_1, \ldots, x_n$, de uma população n com distribuição normal com média μ e variância σ^2. Um estimador para σ^2 é a variância amostral S^2. Assim, sabemos que a quantidade pivotal:

$$Q = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

- Seja $1-\alpha$ a pr n $n-1$ graus de liberdade, tomar valores entre $Q_{\propto/2}$ e $Q_{1-\propto/2}$, valores obtidos na tabela da distribuição Qui-quadrado tais que $\mathrm{P}[Q > Q_{\alpha/2}]$= $\mathrm{P}[Q < Q_{1-\alpha/2}]$= $\alpha/2$

Intervalo de Confiança para a Variância Populacional

- Observando a equação

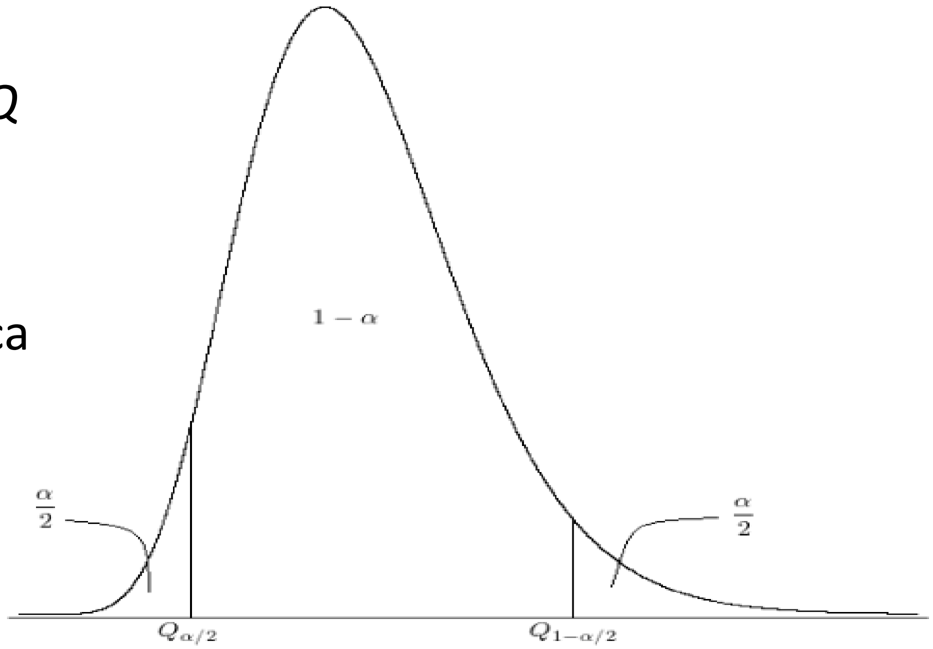
$$Q_{\alpha/2} \leq Q \leq Q_{1-\alpha/2}$$

- Vemos que podemos substituir *Q*

$$Q_{\alpha/2} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq Q_{1-\alpha/2}.$$

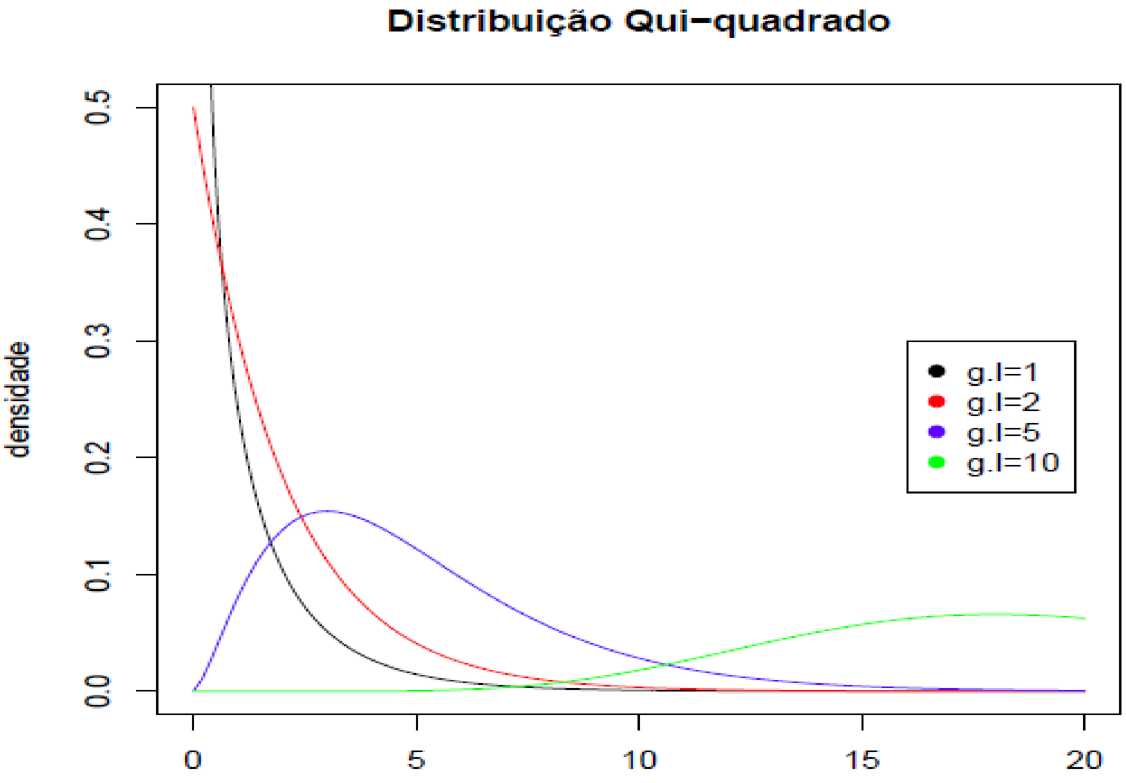
- Obtemos o intervalo de confiança

$$IC(\sigma^2, 1-\alpha) = \left(\frac{(n-1)s^2}{Q_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{Q_{\alpha/2}} \right)$$



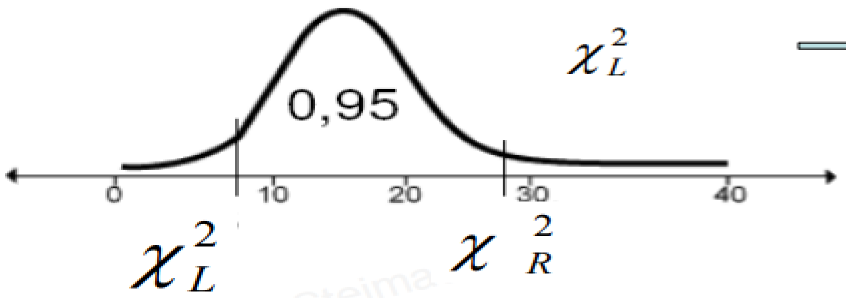
Distribuição Qui-quadrado

- A distribuição Qui-quadrado é modificada de acordo com o número de graus de liberdade.



Cálculo para a Tabela Qui-quadrado

Se o tamanho da amostra é n, pode-se usar uma distribuição c2 com n-1 g.l. para formar um intervalo de confiança para a variância e o desvio padrão populacional.



χ^2_R ⟶ valor crítico da cauda a direita

χ^2_L ⟶ valor crítico da cauda a esquerda

Cálculo para a Tabela Qui-quadrado

Para c = 95% e n=17, temos

g.l.= n-1= 16

Área acumulada a direita de χ^2_R $= \dfrac{(1-c)}{2} = \dfrac{(1-0{,}95)}{2} = 0{,}025$

Área acumulada a direita de χ^2_L $= \dfrac{(1+c)}{2} = \dfrac{(1+0{,}95)}{2} = 0{,}975$

Com o auxílio da Tabela obtemos os valores críticos

$\chi_L^2 = 6{,}908$ $\chi_R^2 = 28{,}845$

Distribuição Qui-Quadrado

v \ α	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	0,0004	0,002	0,001	0,004	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750	20,515
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,299	32,909
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,036	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	43,312
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797

Exemplo 1:

- O peso de componentes mecânicos produzidos por uma determinada empresa é uma variável aleatória que se supõe ter distribuição normal. Pretende-se estudar a variabilidade do peso dos referidos componentes. Para isso, uma amostra de tamanho 11 foi obtida, cujos valores em grama são:
- 98, 97, 102, 100, 98, 101, 102, 105, 95, 102, 100

- Construa um intervalo de confiança para a variância do peso, com um grau de confiança igual a 95%.

Exemplo 1:

- Temos que $n = 11$ e $\bar{x} = 100$ e

$$s^2 = \sum_{i=1}^{1} 1 \frac{(x_i - \overline{x})^2}{10} = \frac{4 + 9 + \ldots + 25 + 4 + 0}{10} = 8.$$

- Pela tabela da distribuição qui-quadrado com 10 graus de liberdade de $Q_{0,025} = 3{,}25$ e $Q_{0,975} = 20{,}483$. Assim:

$$IC(\sigma^2, 1 - \alpha) = \left(\frac{10 \times 8}{20,48}, \frac{10 \times 8}{3,25} \right) = (3,90; 24,61).$$

Distribuição Qui-Quadrado

v \ α	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	0,0004	0,002	0,001	0,004	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,071	12,833	15,086	16,750	20,515
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,125
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,299	32,909
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,036	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	43,312
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797

Exemplo 2

- Foram selecionadas aleatoriamente 30 amostras de um determinado antialérgico. O desvio padrão da amostra é de 1,2 miligrama. Supondo que os pesos tenham uma distribuição normal, construa **um intervalo de confiança** de 99% para a **variância** e o **desvio padrão populacionais**

Exemplo 2

Solução:

$$\chi_R^2 = \frac{1 - c}{2} = \frac{1 - 0{,}99}{2} = 0{,}005$$

$$\chi_L^2 = \frac{1 + c}{2} = \frac{1 + 0{,}99}{2} = 0{,}995.$$

Usando os valores de n = 30, g.l. = 29, c = 0,99, os valores críticos encontrados na tabela são:

$$\chi_R^2 = 52{,}366 \quad \text{e} \quad \chi_L^2 = 13{,}121.$$

Exemplo 2

Usando estes valores e s = 1,2, teremos

Extremo esquerdo

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_R^2} = \frac{(30-1)(1{,}2)^2}{52{,}336} \approx 0{,}798$$

Extremo direito

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_L^2} = \frac{(30-1)(1{,}2)^2}{13{,}121} \approx 3{,}183$$

$$0{,}798 < \sigma^2 < 3{,}183$$

O intervalo de confiança para σ é

$$\sqrt{0{,}798} < \sigma < \sqrt{3{,}183}$$

$$0{,}98 < \sigma < 1{,}78.$$

Portanto, pode-se afirmar com 99% de confiança que a variância populacional está entre 0,798 e 3,183. e que o desvio padrão populacional está entre 0,98 e 1,78.

Resumo

- Média com Variância Conhecida $$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
- Média com Variância Desconhecida $$\bar{x} \pm t_{(n-1);\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$
- Proporção $$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Resumo

- IC para a Variância e Desvio Padrão da População

	Extremo esquerdo		Extremo direito

Obtenha os extremos esquerdo e direito e forme o intervalo de confiança para a variância populacional.

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_R^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_L^2}$$

Obtenha o intervalo de confiança para o desvio padrão populacional populacional extraindo a raiz quadrada de cada extremo.

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_R^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_L^2}}$$