ESTATÍSTICA II

Michelle Hanne Soares de Andrade

michellehanne.andrade@gmail.com

Introdução

- Um importante tipo de problema em Inferência Estatística é determinar se uma amostra pode ter vindo de uma população tendo uma distribuição parcial ou completamente especificada.

- **Exemplo1:** se sabemos que uma amostra veio de uma distribuição normal, é razoável dizer que ela veio de uma distribuição com média μ_0 ?
- **Exemplo2:** duas amostras vieram de distribuições normais, é razoável dizer que estas vieram de distribuições que têm médias iguais?

Introdução


Teste de hipóteses
População
Conjectura (hipótese) sobre o comportamento de variáveis
Decisão sobre a admissibilidade da hipótese
Amostra
Resultados reais obtidos

Hipóteses Estatísticas

- Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre a distribuição (ou parâmetros) de uma ou mais variáveis aleatórias. Uma hipótese estatística pode ser verdadeira ou não.

Hipóteses Estatísticas - Exemplo

Hipóteses

a) Substituindo o processador *A* pelo processador *B*, altera-se o tempo de resposta de um computador.

b) Aumentando a dosagem de cimento, aumenta-se a resistência do concreto.

c) Uma certa campanha publicitária produz efeito positivo nas vendas.

d) A implementação de um programa de melhoria da qualidade em uma empresa prestadora de serviços melhora a satisfação de seus clientes.

Hipóteses em Termos de Parâmetros

a) A *média* dos tempos de resposta do equipamento com o processador *A é diferente* da *média* dos tempos de resposta com o processador *B*.

b) A *média* dos valores de resistência do concreto com a dosagem d_2 de cimento *é maior* do que a *média* dos valores de resistência com a dosagem d_1.

c) A *média* das vendas depois da campanha publicitária *é maior* do que a *média* das vendas antes da campanha publicitária.

d) A *proporção* de reclamações após a realização do programa de melhoria da qualidade *é menor* do que antes da realização do programa.

Hipóteses Nulas

a) H_0: $\mu_A = \mu_B$ e H_1: $\mu_A \neq \mu_B$

onde:

μ_A é o tempo médio de resposta com o processador *A*; e

μ_B é o tempo médio de resposta com o processador *B*.

b) H_0: $\mu_2 = \mu_1$ e H_1: $\mu_2 > \mu_1$

onde:

μ_2 é a resistência média do concreto com a dosagem d_2 de cimento; e

μ_1 é a resistência média do concreto com a dosagem d_1 de cimento.

Hipóteses Nulas

c) H_0: $\mu_2 = \mu_1$ e H_1: $\mu_2 > \mu_1$

onde:

- μ_1 é o valor médio das vendas antes da campanha publicitária; e
- μ_2 é o valor médio das vendas depois da campanha publicitária.

d) H_0: $p_2 = p_1$ e H_1: $p_2 < p_1$

onde:

- p_1 é a proporção de reclamações antes do programa de melhoria da qualidade; e
- p_2 é a proporção de reclamações depois do programa de melhoria da qualidade.

Hipóteses Estatísticas - Exemplo

- Podemos abreviar esta questão dizendo que desejamos testar a hipótese estatística:

$$H_0 \colon \mu = \mu_0$$

contra a alternativa $H_1 \colon \mu \neq \mu_0$

- usando a amostra de tamanho n e a média $\bar{X}$.
- H_0 é chamada de Hipótese Nula e H_1 é chamada de Hipótese Alternativa.

Teste de Hipótese

- Um teste de hipótese estatística é uma regra geral tal que, quando os valores de uma amostra são obtidos, leva à decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese considerada.

Teste de Hipótese

- Hipótese Nula H_0

Não há diferença ou correlação $(\mu_{1=}\mu_2)$

- Hipótese Alternativa H_1

Há diferença ou correlação $(\mu_{1\neq}\mu_2)$

Exemplo

- Para testar se existe diferença entre dois sistemas computacionais (A e B), observou-se o desempenho com **12** cargas de trabalho. Em **3** casos o sistema A apresentou melhor desempenho do que o B. Nos demais, o sistema B foi melhor. Qual a conclusão ao nível de significância de 5%?

Exemplo

- Hipóteses:

H_o: $p = 0,5$

H_1: $p \neq 0,5$

$p =$ probabilidade do sistema A apresentar melhor desempenho do que o sistema B.

ERROS DO TIPO I E TIPO II

- Em um teste de hipótese podem ocorrer dois tipos de erros :
- **ERRO TIPO I**: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira.
- **ERRO TIPO II**: aceitar H_0 quando H_0 é falsa.

Exemplo 1

- Um fabricante produz pinos sob determinadas condições de trabalho. Verificou-se que a duração de vida (em horas) desses pinos é N (100,9). Um novo esquema de fabricação foi introduzido com o objetivo de aumentar a duração de vida desses pinos. Quer dizer, a expectativa é que a duração de vida X terá distribuição N (μ , 9) onde $\mu > 100$. (Admita que a variância continua a mesma). Deste modo, o fabricante e o comprador potencial desses pinos estão interessados em testar as seguintes hipóteses:

Exemplo 1

- $H_0: \mu = 100$
- $H_1: \mu > 100$ (estamos supondo que nosso processo não pode ser pior que o antigo)

Exemplo 1

- ERRO TIPO I: Rejeitamos que a média seja 100 quando na realidade não houve melhora na qualidade dos pinos (na realidade a média continua sendo 100).

Exemplo 1

- ERRO TIPO II: Aceitamos que a média é 100 (o processo continua o mesmo) quando na realidade a qualidade dos pinos melhora (a média é > 100).

Exemplo 1

- As probabilidades dos dois tipos de erros serão α e β , respectivamente. A probabilidade α do ERRO TIPO I é chamado de NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA. Estas probabilidades, condicionadas à realidade estão resumidas abaixo :

Exemplo 1

		Realidade	
		H_0 verdadeira	H_0 falsa
Decisão	Aceitar H_0	Decisão Correta $1 - \alpha$	Erro Tipo II β
	Rejeitar H_0	Erro Tipo I α	Decisão Correta $1-\beta$

Teste de Hipótese para a Média

- Suponha que X é uma variável aleatória com média μ desconhecida e variância conhecida. E queremos testar a hipótese de que a média é igual a um certo valor especificado μ_0. O teste de hipótese pode ser formulado como segue:

$$H_o : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Teste de Hipótese para a Média

- Para testar a hipótese, toma-se uma amostra aleatória de *n* observações e se calcula a estatística

$$Z_o = \frac{\overline{X} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Hipótese para a Média

Passos:

$$Z_{calc} = \frac{x - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

x = média da amostra

μ = média esperada da população

s = desvio padrão da amostra

n = tamanho da amostra

Em seguida consultamos na tabela da curva normal o Z correspondente a cada caso.

Finalmente verificamos se Z_{calc} se encontra na área de rejeição conforme o caso em teste.

Teste de Hipótese para a Média

Caso 3 – Bilateral:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Rejeitar se

$$Z_{calc} < -Z_{\alpha/2}$$

ou se

$$Z_{calc} > Z_{\alpha/2}$$

Teste de Hipótese para a Média

Caso 1 - Unilateral ou unicaudal à esquerda:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

Rejeitar se

$$Z_{calc} < -Z_\alpha$$

Caso 2 - Unilateral ou unicaudal à direita:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Rejeitar se

$$Z_{calc} > Z_\alpha$$

Exemplo Prático

- A resistência à tração do aço inoxidável produzido numa usina permanecia estável, com uma resistência média de 72 kg/mm^2 e um desvio padrão de 2,0 kg/mm^2. Recentemente, a máquina foi ajustada. A fim de determinar o efeito do ajuste, 10 amostras foram testadas
  - 76,2; 78,3; 76,4; 74,7; 72,6; 78,4; 75,7; 70,2; 73,3; 74,2

- Presuma que o desvio padrão seja o mesmo que antes do ajuste. Podemos concluir que o ajuste mudou a resistência à tração de aço? (Adote um nível de significância de 5%)

Exemplo Prático

- Definição da Hipótese

- H_0 : $\mu = 72\ \text{kg/mm}^2$
- H_1 : $\mu \neq 72\ \text{kg/mm}^2$
- $\sigma = 2\ \text{kg/mm}^2$

Exemplo Prático

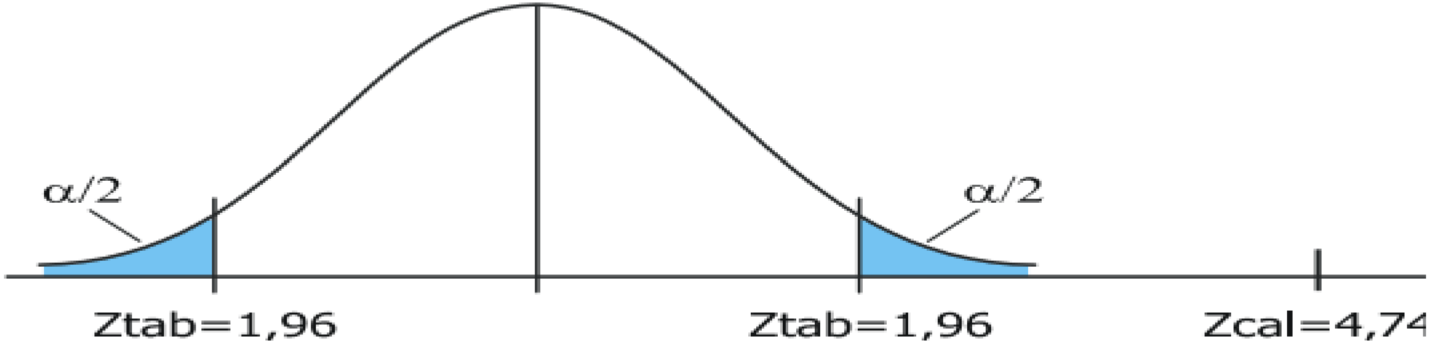
Sendo $\quad = 75{,}0$ e $s = 2$ kg/mm^2, temos:

$$Z_{cal} = \frac{\overline{X} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{75 - 72}{2/\sqrt{10}} = \frac{3}{0{,}6325} = 4{,}74$$

- Isso significa que a média da amostra retirada aleatoriamente da produção está a 4,74 desvios-padrão da média alegada em H_0 que é 72.

Exemplo Prático

- Região Crítica: Como o valor crítico para 5% é 1,96 desvios (Z tabelado), estamos na região de rejeição de H_0



Teste Bilateral de Hipótese para a Região Crítica

Exemplo Prático

- Conclusão: H_0 é rejeitada e concluímos que a resistência à tração do aço mudou.

Exemplo 2

- Um processo deveria produzir bancadas com 0,85 m de altura. O engenheiro desconfia que as bancadas que estão sendo produzidas são diferentes que o especificado. Uma amostra de 8 valores foi coletada e indicou $\bar{x} = 0,87$. Sabendo que o desvio padrão é $\sigma = 0,010$, teste a hipótese do engenheiro usando um nível de significância $\propto = 0,05$.

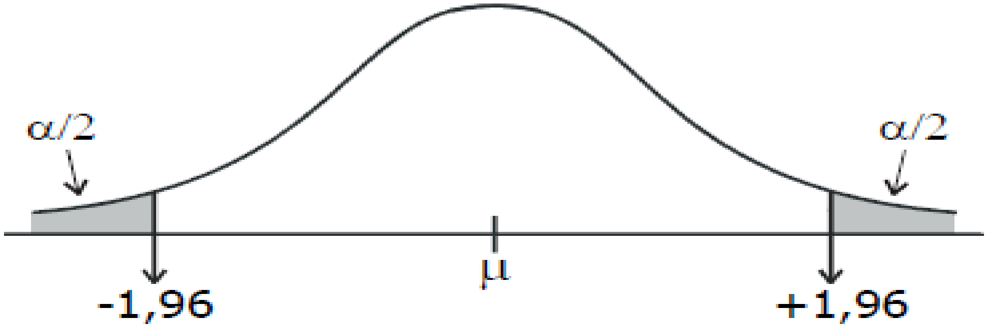
Exemplo 2

- Solução

$$H_o: \mu = 0,85$$
$$H_1: \mu \neq 0,85$$

$$Z_o = \frac{0,87 - 0,85}{0,010/\sqrt{8}} = 5,66$$

$$|Z_o| = |5,66| > Z_{0,025} = 1,96$$



Procedimento Geral dos Testes de hipóteses

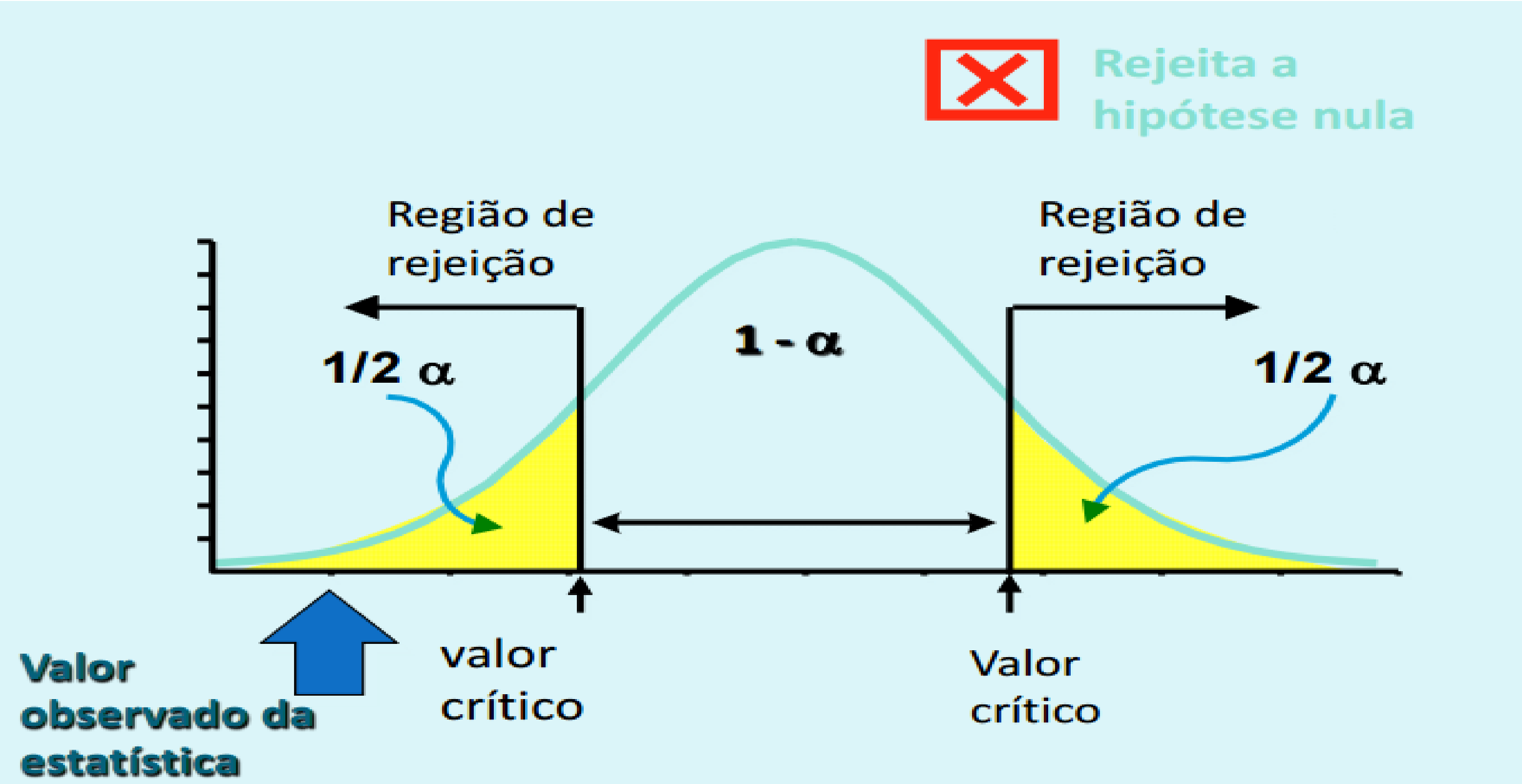
1) Pelo contexto do problema identificar o parâmetro de interesse
2) Especificar a hipótese nula
3) Especificar uma hipótese alternativa apropriada
4) Escolher o nível de significância, α
5) Escolher uma estatística de teste adequada
6) Fixar a região crítica do teste
7) Recolher uma amostra e calcular o valor observado da estatística de teste
8) Decidir sobre a rejeição ou não de H_0

Nível de Significância

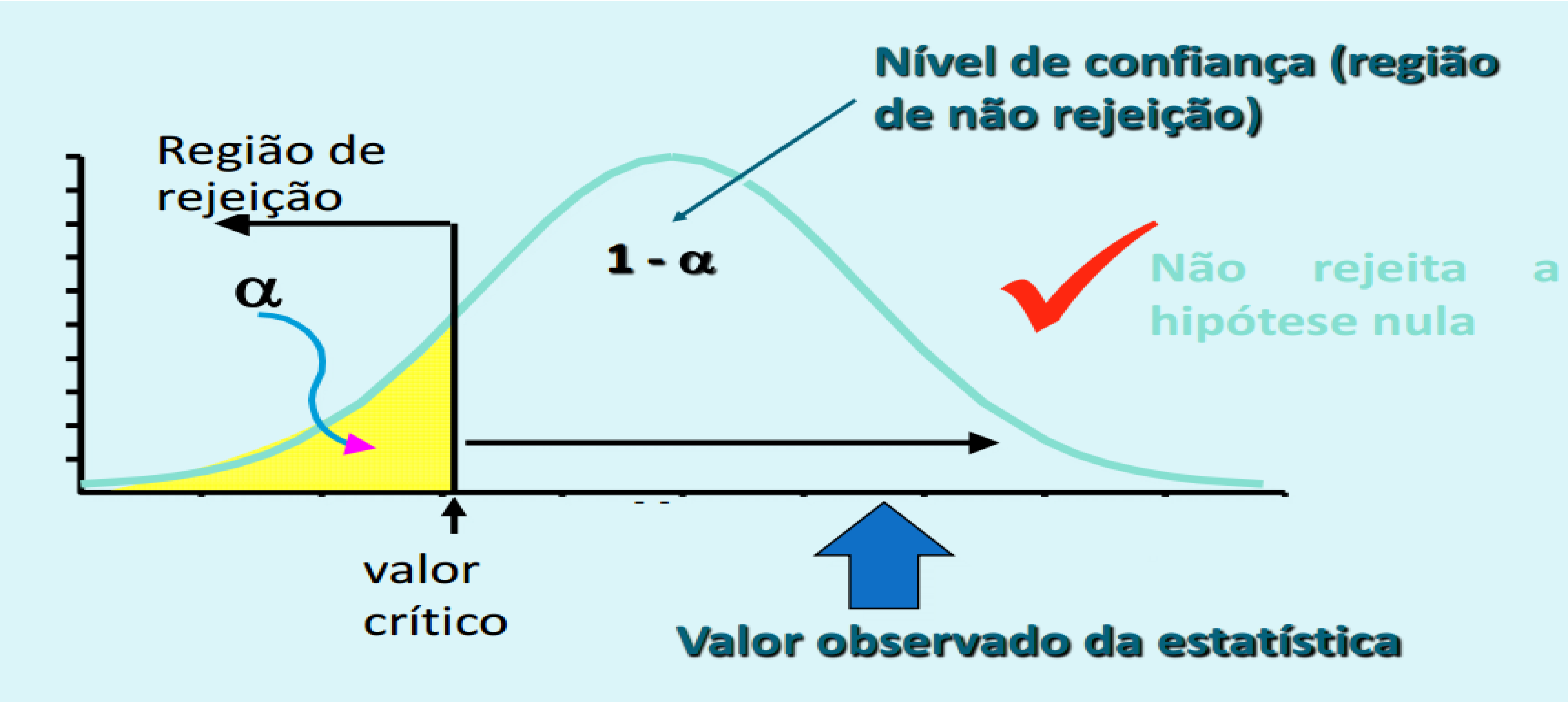
- É a probabilidade do erro Tipo 1, isto é, $\alpha = \ Prob(erro\ tipo\ I)$. Os valores típicos de α são: 0,01, 0,05, 0,10. α é também conhecido como “tamanho do teste”

- Caracteriza a região de rejeição. Define os valores pouco prováveis da estatística da amostra se a hipótese nula é verdadeira.

Teste Bilateral



Teste Unilateral



Região de Rejeição

Unilateral à esquerda:

H_o: $\mu = 50$

H_A: $\mu > 50$

Unilateral à direita:

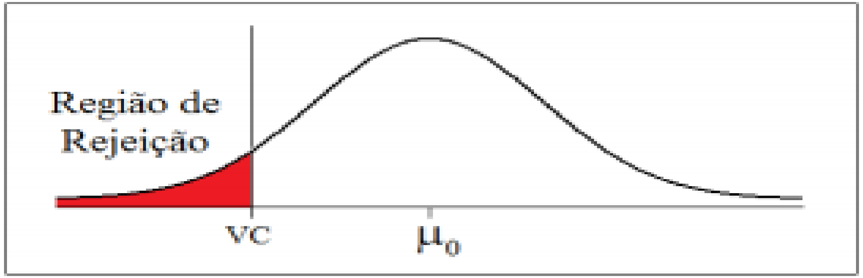
H_o: $\mu = 50$

H_A: $\mu < 50$

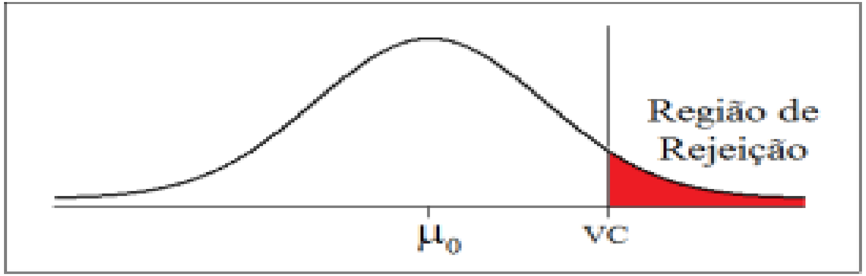
Bilateral:

H_o: $\mu = 50$

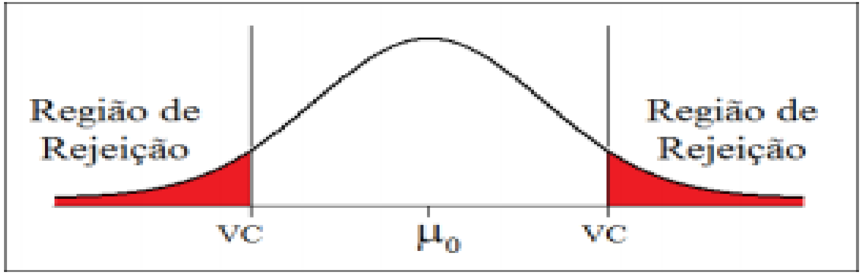
H_A: $\mu \neq 50$



Região de rejeição para o teste unicaudal para a média (cauda inferior)



Região de rejeição para o teste unicaudal para a média (cauda superior)



Região de rejeição para o teste bicaudal para a média

Teste de Hipótese para a Média da População com Variância Conhecida

- Cálculo da estatística do teste:

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

H_0:	H_a:	Critérios de rejeição:
$H_0: \mu = \mu_0$	$H_a: \mu \neq \mu_0$	$Z_0 > z_{\alpha/2}$ ou $Z_0 < -z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_a: \mu > \mu_0$	$Z_0 > z_{\alpha}$
$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_a: \mu < \mu_0$	$Z_0 < -z_{\alpha}$

Exemplo

- X é uma v.a. que representa o peso de um pacote de açúcar (supõe-se que $X \sim N(\mu, 1)$). A máquina está afinada quando $\mu = 8$. Numa amostra de 25 pacotes (recolhida aleatoriamente) observou-se $\bar{x} = 8{,}5$.
- Quer-se saber se, ao nível de significância de 5%, se pode afirmar que a máquina continua afinada.

$H_0: \mu = 8$ versus $H_1: \mu \neq 8$ (1. 2. e 3.)

Nível de significância = 5% (4.)

Estatística de teste: $$Z_0 = \frac{\overline{X} - 8}{1/\sqrt{25}}$$ (5.)

Exemplo

$\alpha = 0.05 \Rightarrow a = 1.96$ donde

$$\text{R.C.:}\ Z_0 < -1.96 \ \text{ou}\ Z_0 > 1.96 \qquad (6.)$$

$$\text{Com}\ \bar{x} = 8.5\ \text{obtém-se}\ z_0 = \frac{8.5 - 8}{1/\sqrt{25}} = 2.5 \qquad (7.)$$

Como $z_0 > 1.96$ rejeita-se H_0, ou seja, existe evidência (ao nível de significância considerado) de que a máquina está desafinada.

Valor p *(p-value)*

- Em vez de fixar α , determinar a região crítica e, em seguida, verificar se o valor observado pertence a essa região.

- **Definição:** Dado o valor observado da estatística de teste, o **valor-p** (*p-value*) é o maior nível de significância que levaria à não rejeição da hipótese nula (ou o menor que levaria à rejeição).

Valor p *(p-value)*

O <u>**p-valor**</u> é o valor de significância **observado**

Se p-valor $\geq \alpha$, NÃO rejeita H_0

Se p-valor $< \alpha$, REJEITA H_0

Quanto mais baixo for o valor-p maior é a evidência contra a hipótese nula

Valor p *(p-value)*

O *p* valor é comparado ao nível de significância α pré-determinado.

Se o *p* valor for menor ou igual ao nível de significância, rejeitamos H_0.

Note as seguintes interpretações de *p-valores:*

- $p > 0,10$ Não existe evidência contra H_0
- $p < 0,10$ Fraca evidência contra H_0
- $p < 0,05$ Evidência significativa contra H_0
- $p < 0,01$ Evidência altamente significativa contra H_0

Exemplo (*p-value*)

Levamos ao laboratório uma amostra aleatória de 60 caixas e constatamos uma média do princípio ativo de 135 mmHg. O fabricante especifica que a média de principio ativo é 128 mmHg e que o desvio σ é de 24 mmg. Queremos achar o *p* valor.

Exemplo (*p-value*)

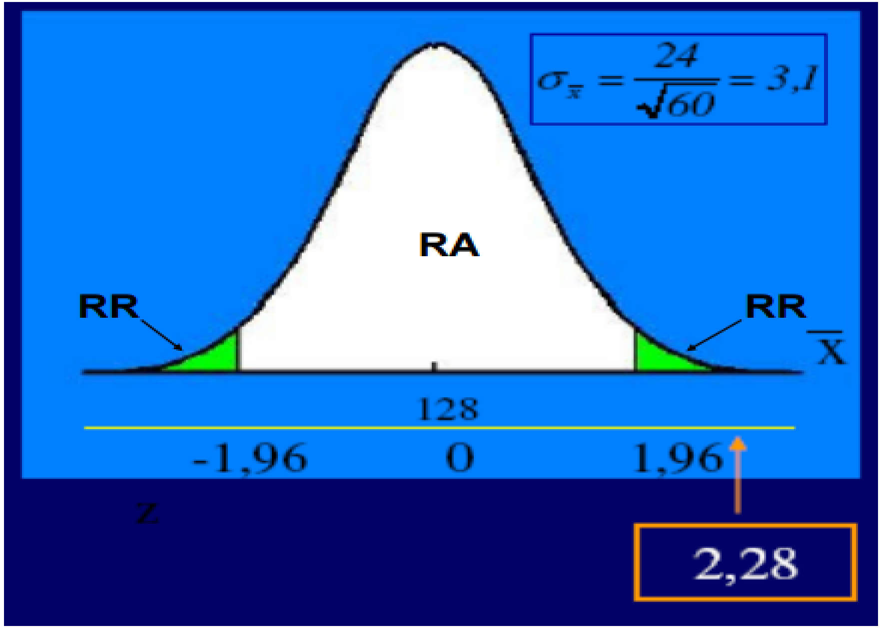
- PASSO 1: H_0: $\mu_M = 128$ *versus* H_A: $\mu_M \neq 128$
- PASSO 2: Nível de significância: 5%
- PASSO 3: Estatística do teste:

$$\boxed{Z_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{135 - 128}{\frac{24}{\sqrt{60}}} = \frac{7}{3{,}1} = 2{,}28.}$$

Exemplo (*p-value*)

- PASSO 4: Construir a Região de Rejeição (RR)

TESTE BILATERAL



Pouco provável, logo
μ deve ser $\neq$ 128

Exemplo (*p-value*)

- Temos que calcular a probabilidade de observarmos um valor igual ou superior a 2,28, isto é,
- p-value: P(Z>2,28)=0,0113 (distribuição normal)
- Como o teste é bilateral, temos que multiplicar por dois esta probabilidade. Assim, 0,0113 x 2 = 0,0226

Exemplo (*p-value*)

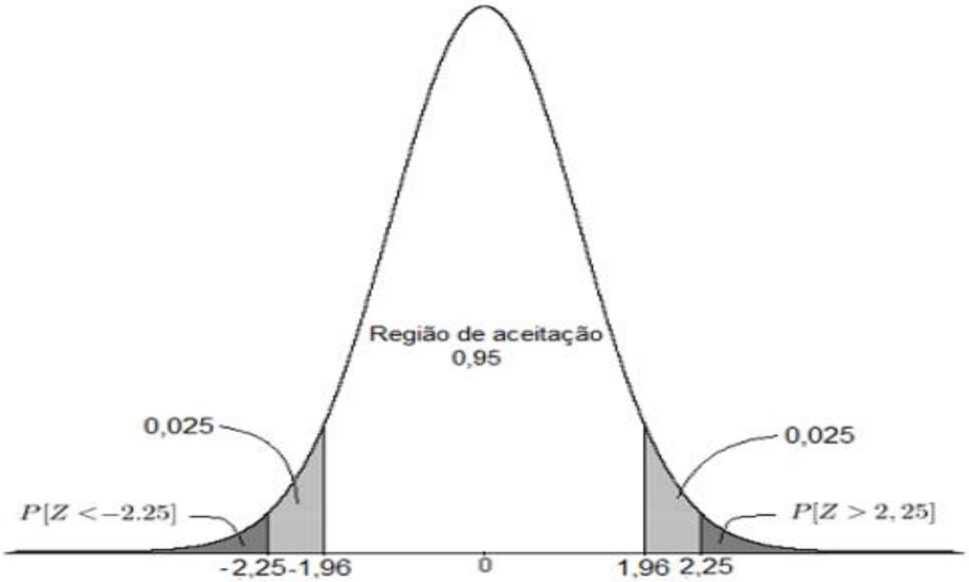
- Desde que o p-value é menor que o nível de significância do teste (α = 5%), rejeita- se a hipótese nula.

Exemplo (*p-value*)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916

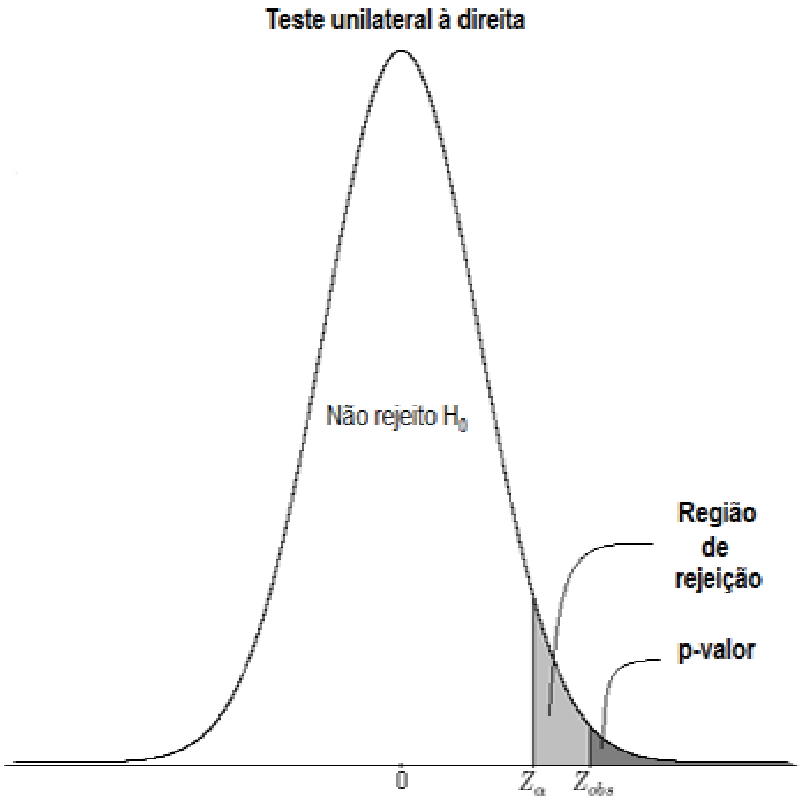
Exemplo (*p-value*)

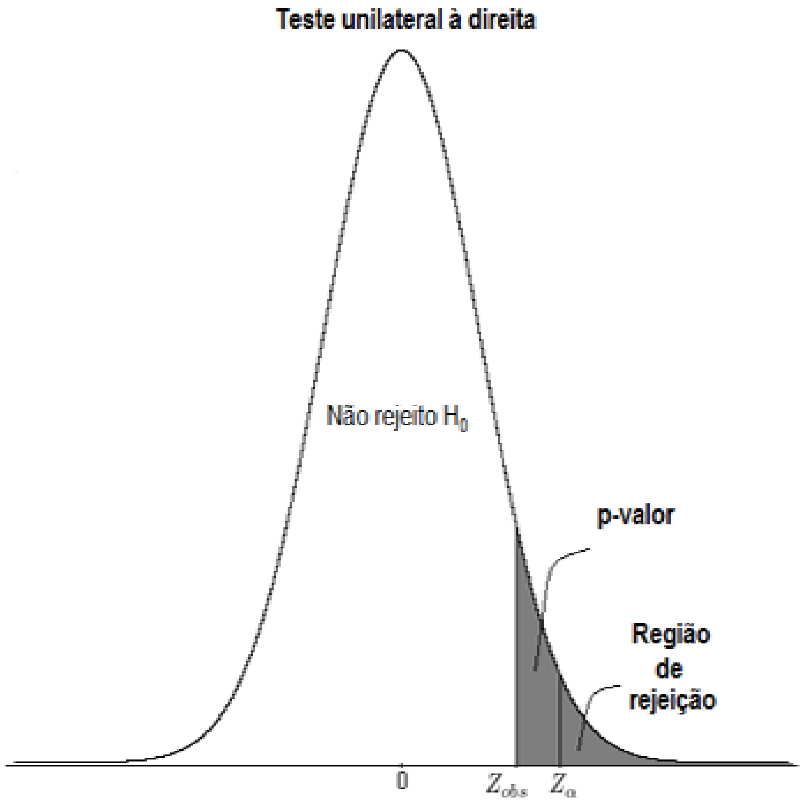
$$\text{P-valor} = \mathbb{P}[Z > |Z_{\text{obs}}|] + \mathbb{P}[Z < -|Z_{\text{obs}}|] = \mathbb{P}[Z > 2,25] + \mathbb{P}[Z < -2.25] = 0,0122 + 0,0122 = 0,0244.$$



Portanto, podemos concluir que, para qualquer nível de significância maior que 0,0244, temos evidências para rejeitar a hipótese nula.

Exemplo (*p-value*)





Teste de Hipótese para a Média da População com Variância Desconhecida

- Quando o n<30 e o desvio padrão populacional é desconhecido, temos que aplicar o *teste t de Student* com a fórmula abaixo:

$$\boxed{t_{cal} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}}$$

- **Suposição** te distribuída na população

Exemplo

- A altura média dos estudantes da UFMG é de 1,70 m. Em uma amostra casual de tamanho 25 foi estimada a média de 1,72 m e desvio padrão da amostra de 0,08 m. Pode-se considerar que a média amostral não difere da média da população?

Exemplo

$$a)\ H_0 : \mu = 1{,}70m \qquad H_A : \mu \neq 1{,}70m$$

$$b)\ \alpha = 0{,}05; t_{crit\,;\,0{,}025\,;\,24\,g.l.} = 2{,}064$$

$$c)\ t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1{,}72 - 1{,}70}{\frac{0{,}08}{\sqrt{25}}} = 1{,}25$$

d) Decisão: Não há evidência para rejeitar H_0.

Teste de Hipótese para uma proporção populacional

- Similar ao procedimento para o teste da média populacional.

$$\underbrace{\begin{matrix} H_0 : p = p_0 \,(ou \;\; \geq \mu_0) \\ H_1 : p < p_0 \end{matrix}}_{U.Esquerdo} \quad \underbrace{\begin{matrix} H_0 : p = p_0 \;(ou \;\; \leq \mu_0) \\ H_1 : p > p_0 \end{matrix}}_{U.Direito} \quad \underbrace{\begin{matrix} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{matrix}}_{Bilateral}$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_o)}{n}}} \underset{sob\ H_0}{\sim} N(0,1)$$

Exemplo

- Um estudo é realizado para determinar a relação entre uma certa droga e certa anomalia em embriões de frango. Injetou-se 50 ovos fertilizados com a droga no quarto dia de incubação. No vigésimo dia de incubação, os embriões foram examinados e 7 apresentaram a anomalia. Suponha que deseja-se averiguar se a proporção verdadeira é inferior a 25% com um nível de significância de 0,05.

Exemplo

(i) As hipóteses de interesse são :

$H_0 : p = 0{,}25$

$H_1 : p < 0{,}25$

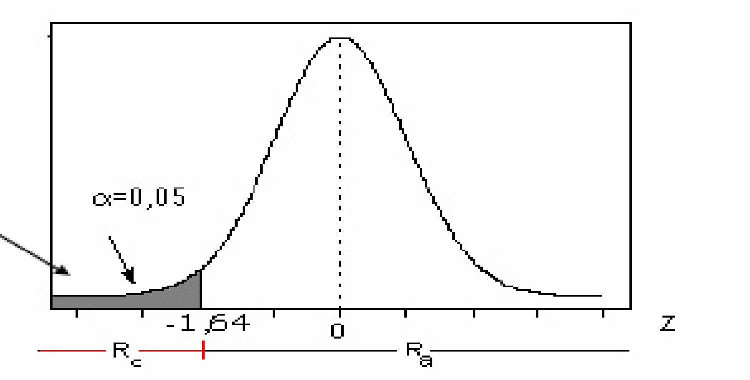
(ii) A estatística de teste

$$Z = \frac{\hat{p} - 0{,}25}{\sqrt{\dfrac{0{,}25(1-0{,}25)}{50}}} \underset{sob\ H_0}{\sim} N(0{,}1)$$

Exemplo

(iii) A região crítica para um nível de significância α=0,05 fixado

$$Rc = \{z \in R; R \leq -1{,}64\}$$



iv) Do enunciado temos n=50, $\hat{p} = \frac{7}{50} = 0{,}14$; $z_{obs} = \frac{0{,}14 - 0{,}25}{\sqrt{\frac{025 \times 0{,}75}{50}}} = -1{,}7963 \in R_c \Rightarrow$

rejeita-se H_0. ao nível de 5% de significância.

Exercício 1

Uma companhia de cigarros anuncia que o índice médio de nicotina dos cigarros que fabrica apresenta-se abaixo de 23 mg por cigarro. Um laboratório realiza seis análises desse índice, obtendo: 27, 24, 21, 25, 26, 22. Sabe-se que o índice de nicotina se distribui normalmente, com variância igual a 4.86 mg^2. Pode-se aceitar, no nível de 10%, a afirmação do fabricante? *Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 334.

Exercício 1

Queremos testar a hipótese que μ, o índice médio de nicotina dos cigarros, seja maior que 23. Ou seja, $H_0 : \mu \geq 23$ vs. $H_1 : \mu < 23$.

Com um nível $\alpha = 0.10$, temos que a hipótese será rejeitada se $\sqrt{6}(\bar{X} - 23)/\sqrt{4.86} < c$. Para a normal padrão,
$P(Z < c) = 0.10 \Leftrightarrow c = -1.28$. Então a região crítica é
$\sqrt{6}(\bar{X} - 23)/\sqrt{4.86} < -1.28$ ou simplesmente $\bar{X} < 21.85$.

Como a média observada é $\bar{x} = 24.16$ é superior a 21.85, não rejeitamos a hipótese nula a 10% de significância.

Exercício 2

Exemplo

Suponha que queiramos testar $H_0 : \mu = 50$ contra $H_1 : \mu > 50$, onde μ é a média de uma normal $N(\mu, 900)$. Extraída uma amostra de $n = 36$ elementos da população, obtemos $\bar{x} = 52$. Calcule a probabilidade de significância $\hat{\alpha}$ do teste.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 343.

Exercício 2

A probabilidade de significância $\hat{\alpha}$ é mais comumente conhecida como *p-valor*. Observe que sob H_0, $\bar{X} \sim N(50, 25)$. Temos que $\bar{x} = 52$. A probabilidade de significância (ou p-valor) é obtida calculando-se a probabilidade do valor observado na estatística do teste, ou seja,

$$P\left(\bar{X} > 52\right) = \left(Z > \frac{52 - 50}{5}\right) = 1 - \Phi(2/5) \approx 0.34$$

Devemos interpetar o p-valor como "observados os dados, quão verossímil é a hipótese nula?" e, neste caso, ela é bastante verossímil (a probabilidade de observarmos $\bar{X} > 52$, dado H_0 verdadeira, é de 0.34) e portanto não rejeitamos H_0.

Exercício 3

Exemplo

Suponha que queiramos testar $H_0 : \mu = 50$ contra $H_1 : \mu > 50$, onde μ é a média de uma normal $N(\mu, 900)$. Extraída uma amostra de $n = 36$ elementos da população, obtemos $\bar{x} = 52$. Calcule a probabilidade de significância $\hat{\alpha}$ do teste.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 343.

- A probabilidade de significância é o p-value

Exercício 3

A probabilidade de significância $\hat{\alpha}$ é mais comumente conhecida como *p-valor*. Observe que sob H_0, $\bar{X} \sim N(50, 25)$. Temos que $\bar{x} = 52$. A probabilidade de significância (ou p-valor) é obtida calculando-se a probabilidade do valor observado na estatística do teste, ou seja,

$$P\left(\bar{X} > 52\right) = \left(Z > \frac{52-50}{5}\right) = 1 - \Phi(2/5) \approx 0.34$$

Devemos interpetar o p-valor como "observados os dados, quão verossímil é a hipótese nula?" e, neste caso, ela é bastante verossímil (a probabilidade de observarmos $\bar{X} > 52$, dado H_0 verdadeira, é de 0.34) e portanto não rejeitamos H_0.

Exercício 4

Para decidirmos se os habitantes de uma ilha são descendentes da civilização **A** ou **B**, iremos proceder do seguinte modo:

(i) selecionamos uma amostra de 100 moradores adultos da ilha, e determinamos a altura média deles;

(ii) se essa altura média for superior a 176, diremos que são descendentes de **B**; caso contrário, são descendentes de **A**.

Os parâmetros das alturas das duas civilizações são:
A: $\mu = 175$ e $\sigma = 10$; **B**: $\mu = 177$ e $\sigma = 10$.
Defina: *Erro do tipo I* – dizer que os habitantes da ilha são descendentes de **B** quando, na realidade, são de **A**.
Erro do tipo II – dizer que são de **A** quando são de **B**.

- A probabilidade de significância é o p-value

Exercício 4

(a) Qual a probabilidade do erro de tipo I? E do erro de tipo II?

(b) Qual deve ser a regra de decisão se quisermos fixar a probabilidade do erro de tipo I em 5%? Qual a probabilidade do erro de tipo II, nesse caso?

(c) Se $\sigma_A = 5$, como ficariam as respostas de (b)?

Exercício 4

(a) Note que H_0 : moradores são de A. Nossa região crítica é dada por $RC = \{\bar{X} > 176\}$, a região em que rejeitamos H_0. Note também que $\mathrm{Var}(\bar{X})$ é σ^2/n. Então

$$P(\text{erro tipo I}) = P(\bar{X} > 176|\mu = 175) =$$

$$P\left(Z > \sqrt{100}\frac{176-175}{10}|\mu = 175\right) = 1 - \Phi(1) = 0.159$$

De modo análogo, a probabilidade do erro de tipo II é dada por

$$P(\text{erro tipo II}) = P(\bar{X} \leq 176|\mu = 175) =$$

$$P\left(Z \leq \sqrt{100}\frac{176-175}{10}|\mu = 175\right) = \Phi(-1) = 0.159$$

Exercício 4

(b) Queremos fixar c para que $P(\bar{X} > c|\mu = 175) = 0.05$. Para isto, basta que

$$P(\bar{X} > c|\mu = 175) = P\left(Z > \sqrt{100}\frac{c-175}{10}\right) = 1 - \Phi(c - 175) = 0.0!$$

Note que $\Phi(z) = 0.95 \Leftrightarrow z = 1.64$, então temos que $(c - 175) = 1.64$ ou $c = 176.64$. Nossa regra de decisão agora é classificar o indivíduo como descendente de B se sua altura for superior a 176.64. Note que, agora, temos um erro do tipo II de

$$P(\bar{X} \leq 176.64|\mu = 177) = \Phi\left(\sqrt{100}\frac{176.64 - 177}{10}\right) = 0.359$$

Exercício 4

(c) Se $\sigma_A = 5$, o valor de c para que o erro do tipo I seja 0.05 é

$$P\left(Z > \sqrt{100}\frac{c - 175}{5}\right) = 1 - \Phi(2(c - 175)) = 0.05$$

Que é dado por $2(c - 175) = 1.64$ ou $c = 175.82$. O novo erro do tipo II agora é

$$P(\bar{X} \leq 175.82|\mu = 177) = \Phi\left(\sqrt{100}\frac{175.82 - 177}{10}\right) = 0.119$$