



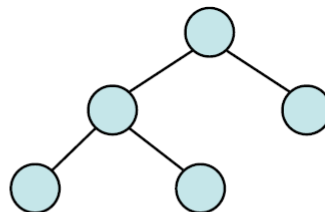
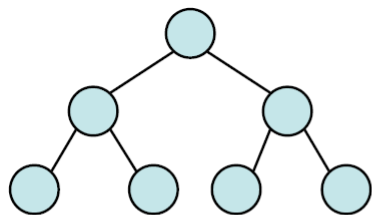
Quem se prepara, não para.

Estrutura de Dados

Professora: Michelle Hanne Soares de Andrade
michelle.andrade@newtonpaiva.br

Árvores Binárias de Pesquisa

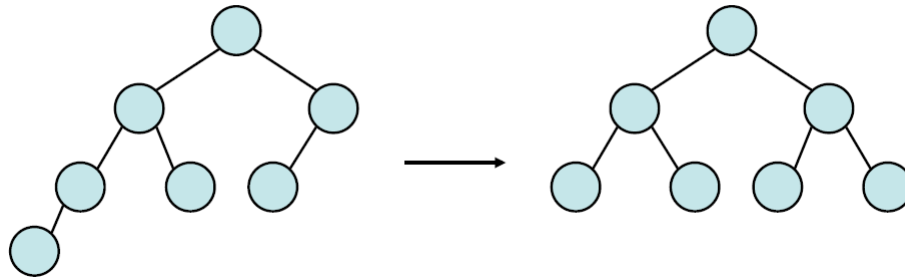
- As árvores binárias de pesquisa são, em alguns casos, pouco recomendáveis para as operações básicas (inserção, remoção e busca).
- Árvore binária completamente balanceada:
 - Ocorre quando a árvore está cheia ou quase cheia com o nível $n-1$ completo



- Uma árvore binária completa leva um tempo na ordem de $O(\log n)$ para operações de inserção, remoção e pesquisa. O que é, sem dúvida, muito bom

Árvores Balanceadas

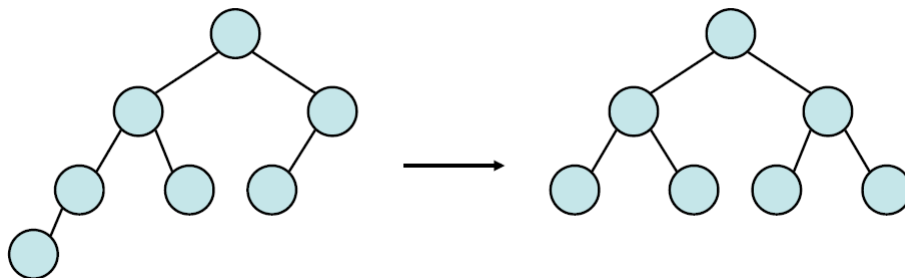
- Árvore binária completamente balanceada:
 - Após uma inserção ou remoção a árvore pode deixar de ser completa. **A solução seria aplicar um algoritmo que tornasse a árvore novamente completa**, porém o custo para realizar esta operação seria de $O(n)$



Árvores Balanceadas

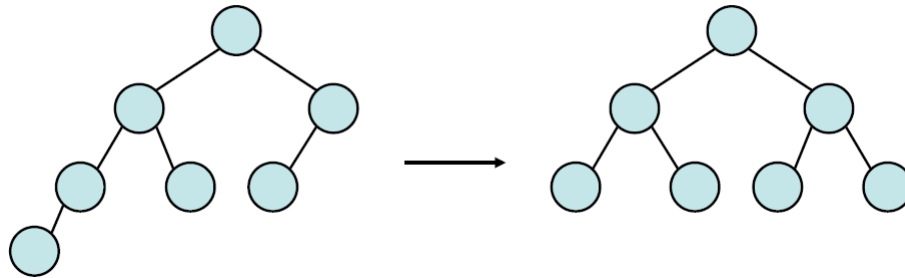
Percebe-se que todos os nós tiveram sua posição na estrutura alterados.

Na maioria dos casos, utiliza-se árvores quase balanceadas.



Árvores Balanceadas

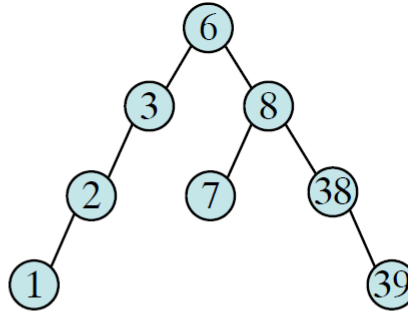
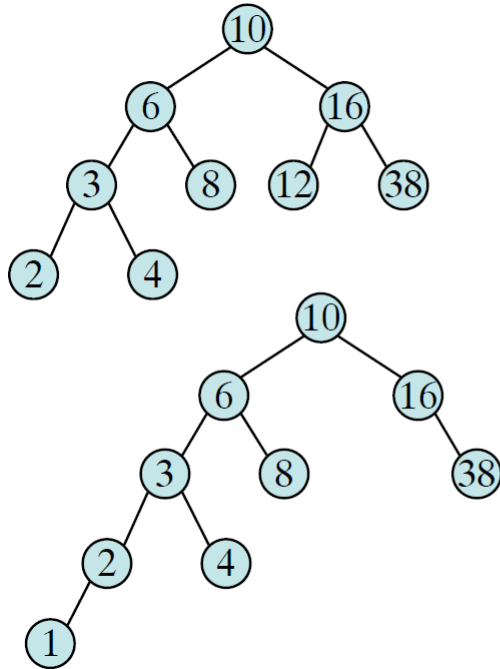
- Vários são os critérios (métodos) para definir balanceamento. Alguns são:
 - Restrições imposta na diferença das alturas das subárvores de cada nó. Ex. AVL
 - Todos os nós folhas no mesmo nível



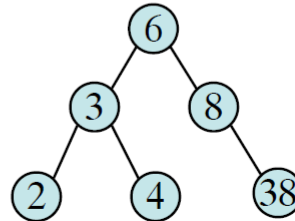
Árvores AVL

- Foram introduzidas por Adel'son-Vel'skii e Landis em 1962
 - São baseadas em árvore binárias de pesquisa
 - A medida em que as operações de inserção e remoção são efetuadas a árvore é balanceada
- Definição:
 - Uma árvore binária T é dita AVL quando, para qualquer nó v de T , a diferença entre a altura das subárvores esquerda $h_e(v)$ e direita $h_d(v)$ é no máximo em módulo igual a 1.

Árvores AVL



- se uma árvore T é dita AVL, então todas as suas subárvores também são AVL



Árvores AVL

Balanceamento de um nó

– O fator de balanceamento:

- É dado pela altura da subárvores da esquerda $h_e(v)$ menos a altura da subárvore da direita $h_d(v)$.

$$FB(v) = h_e(v) - h_d(v)$$

Nós balanceados

- São aqueles onde os valores de FB são -1, 0 ou 1

• $FB(v)$:

- +1: subárvore esquerda mais alta que a direita
- 0: subárvore esquerda igual a direita
- 1: subárvore direita mais alta do que a esquerda

Nós desregulados ou desbalanceados

- São aqueles onde os valores de FB são diferentes de -1, 0 ou 1

• $FB(v)$:

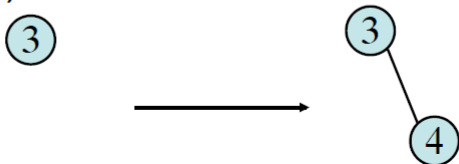
- >1: subárvore esquerda está desbalanceando o nó v
- <-1: subárvore direita está desbalanceando o nó v

Árvores AVL

Verificando a ocorrência do desbalanceamento de um nó

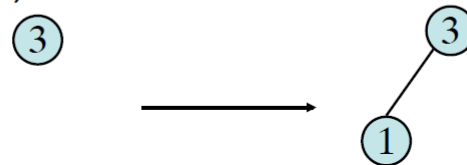
–Quando Ocorre?

- Se um nó tem $FB(v)=0$ e é feita uma inserção no lado **direito**, o $FB=-1$, ou seja, subtrai uma unidade (na remoção é invertido)



–Quando Ocorre?

- Se um nó tem $FB(v)=0$ e é feita uma inserção no lado **esquerdo**, o $FB=1$, ou seja, soma uma unidade (na remoção é invertido)



	ArvEsq	ArvDir
Inserção	+1	-1
Remoção	-1	+1

Rebalanceando nós desregulados

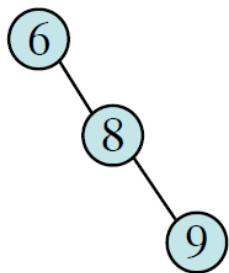
- Quando uma inserção ou remoção realizada em um nó altera o balanceamento da árvore, é necessário efetuar uma transformação na árvore, tal que:
 - **O percurso em ordem fique inalterado em relação a árvore desbalanceada.** Isto é, a árvore continua a ser uma árvore binária de pesquisa
 - A árvore transformada saiu de um estado de desbalanceamento para um estado de balanceamento

- Rotações
 - Tipos de rotações
 - Esquerda Simples
 - Direita Simples
 - Esquerda Dupla
 - Direita Dupla

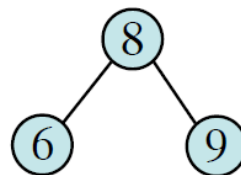
Operação que altera o balanceamento de uma árvore T , mantendo a sequência de percurso em-ordem

Árvores AVL

- Rotação Esquerda Simples (RES)



Percurso em ordem: 6, 8 e 9

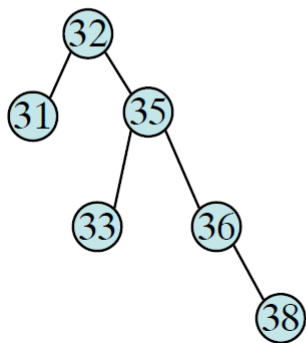


Percurso em ordem: 6, 8 e 9

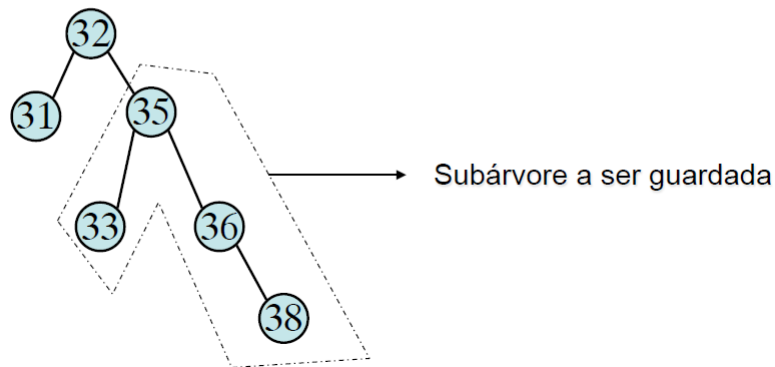
- Após a rotação a esquerda a árvore ficou balanceada e o percurso em-ordem permanece o mesmo

Árvores AVL

Exemplo Rotação Esquerda Simples



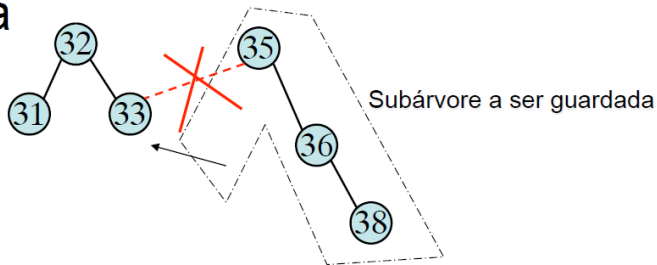
Passos para efetuar a RES –Guarde a subárvore direita



Árvores AVL

Passos para efetuar a RES

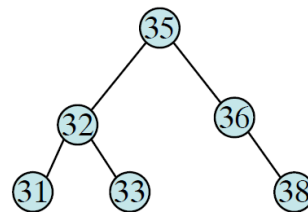
- Troque a subárvore guardada pela subárvore esquerda da árvore guardada



Árvores AVL

Passos para efetuar a RES

- Ponha na subárvore esquerda da subárvore guardada a árvore restante
- verifique o balanceamento



Árvores AVL

Rotação Simples a Direita(RSD)

- A rotação a direita simples é simétrica a rotação esquerda simples
- Os quatro passos realizados na rotação esquerda simples se aplicam da mesma forma à rotação direita simples

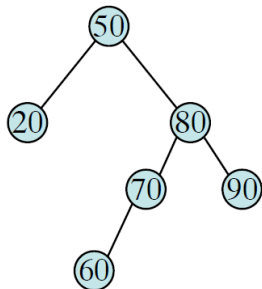
Árvores AVL

Rotação Dupla a Esquerda(RDE)

–Passos:

- Efetua-se uma rotação simples direita na subárvore direita do nó desbalanceado
- Realiza-se uma rotação simples esquerda no nó desbalanceado

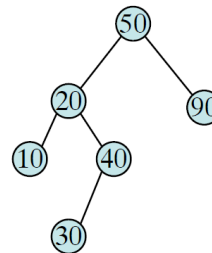
–Exemplo:



Rotação Dupla a Direita(RDD)

- É simétrica a rotação esquerda dupla
- Efetuar uma rotação simples esquerda na subárvore esquerda do nó desbalanceado
- Realizar uma rotação simples direita no nó desregulado

–Exemplo:



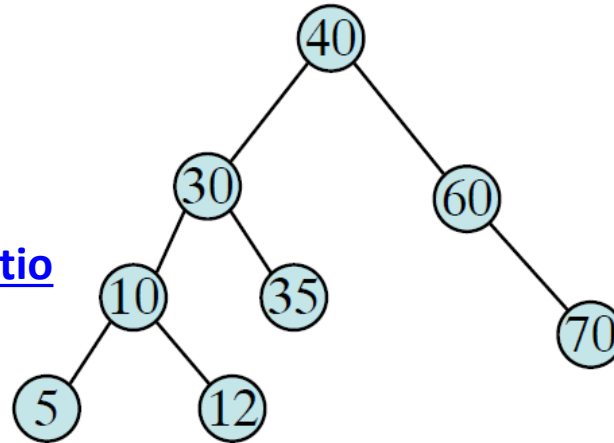
Árvores AVL

Inserção de elementos

- Procedimentos: percorrer a árvore até o ponto de inserção (usando a operação de busca)
- Inserir o novo elemento
- Balancear a árvore (quando necessário fazer rotações)

Exemplo

- Inserir na árvore AVL abaixo os seguintes elementos: **3,33,11 e 9**



<https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html>

<https://visualgo.net/en/bst>

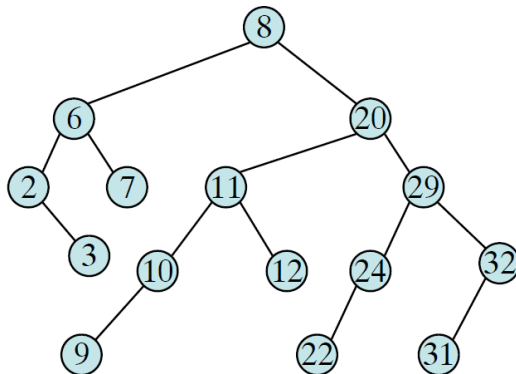
Árvores AVL

Remoção de Elementos

– Procedimentos

- Percorrer a árvore até o nó a ser removido (usando a operação de busca)
- Retirar o elemento (igual a árvore binária de pesquisa)
- Balancear a árvore (quando necessário fazer rotação)

Exemplo: remover 22,31,12,7 e 20



<https://visualgo.net/en/bst>

Referências

- <https://github.com/isaacmast/AVLTree>
- https://github.com/betsybailey/AVL_Tree
- NICOLETTI, Maria do Carmo, HRUSCHKA, Estevam R. Jr.. **Fundamentos da teoria dos grafos para computação**, - 3. ed. - Rio de Janeiro : LTC, 2018.
- ZIVIANI, N. **Projeto de Algoritmos com Implementações em Java e C++** . Consultoria em Java e C++ de F.C. Botelho, Cengage Learning Brasil, ISBN 9788522108213, 2012.