CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL - Belo Horizonte - MG

Industria 4.0
Professor: Adriano Chaves Lisboa
Aluno: Michelle Hanne Soares de Andrade

Modelagem e Otimização da Produção Agrícola Familiar

Resumo

Os pequenos agricultores têm buscado aprimorar suas técnicas e adquirir conhecimento tecnológico em suas atividades agrícolas. Em contrapartida, as grandes empresas do agronegócio investem em recurso técnicos da industria 4.0, como inteligência artificial, IoT, gêmeos digitais, drones, equipamentos especializados e pesquisa genética. Esse cenário impulsiona a implementação de estratégias para os pequenos produtores que visam a eficiência dos processos, como a redução do desperdício de matéria-prima e insumos, promoção da sustentabilidade ambiental e expansão consciente das áreas cultivadas. Os pequenos produtores e a agricultura familiar, portanto, tem integrado métodos tradicionais com técnicas de melhoria de processos, com o propósito de aumentar a produtividade, garantir a qualidade dos produtos e mitigar o impacto ambiental, sendo uma vitrine de produtos orgânicos sustentáveis. Assim, o objetivo deste trabalho é a modelagem matemática do problema de produção agrícola com foco em maximizar o lucro. Utilizou-se na modelagem a Programação Linear e para a resolução numérica o Método Simplex.

Palavras-chave: Otimização da produção agrícola. Programação Linear. Método Simplex.

1 Introdução

O Brasil é uma potência agrícola global, conhecido pela sua vasta diversidade de produtos e pelo enorme potencial de produção. Com uma vasta extensão territorial, gama de ecossistemas e vasta diversidade climática, o país possui condições ideais para o cultivo de uma ampla variedade de culturas.

Segundo o IPEA (Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada)[3] o agronegócio brasileiro fechou 2023 com superávit acumulado de US$ 148,58 bilhões – crescimento de 4,9% em relação ao ano anterior. As exportações do setor somaram US$ 165,05 bilhões, e as importações, US$ 16,47 bilhões.

Entre os principais produtos agrícolas cultivados no Brasil, destacam-se a soja, o milho, o café, a cana-de-açúcar, o algodão, o feijão, o arroz, entre outros. Além disso, o país é líder mundial na produção e exportação de diversos produtos, como a soja, o café, a carne bovina, o suco de laranja, o açúcar e o

milho. Segundo a EMBRAPA [2] a participação do Brasil no mercado mundial de alimentos saltou de 20,6 bilhões para 100 bilhões de dólares, entre 2010 e 2020, com destaque para carne, soja, milho, algodão e produtos florestais.
Neste contexto, pequenas e médias propriedades agrícolas mostram-se menos favorecidas no mercado em termos de gestão. Muitas propriedades agrícolas se deparam com dúvidas de quais culturas devem ser produzidas para maximizar o lucro.
Este trabalho possui foco no pequeno produtor agrícola, ou dito agricultura familiar, e busca aplicar técnicas de modelagem e otimização para maximizar o lucro da produção.
A modelagem matemática e a otimização de problemas ajudam o pequeno agricultor na tomada de decisão, orientando por exemplo, sobre a quantidade ideal a ser produzida de cada produto.

1.1 Justificativa

A produção agrícola do Brasil é fundamental para a economia do país, contribuindo significativamente para o PIB nacional e gerando empregos em todo o território. Além disso, as exportações agrícolas desempenham um papel crucial na balança comercial brasileira, gerando divisas e contribuindo para o desenvolvimento econômico do país.

De acordo com a Confederação Nacional dos Trabalhadores Rurais Agricultores e Agricultoras Familiares (Contag) [1], no Brasil, a agricultura familiar ocupa uma extensão de área de 80,9 milhões de hectares, o que representa 23% da área total dos estabelecimentos agropecuários brasileiros. São responsáveis por 10,1 milhões de empregos (67%). A agricultura familiar responde por 23% do valor bruto da produção agropecuária brasileira e pela dinamização econômica de 90% dos municípios brasileiros com até 20 mil habitantes (68% do total).

No entanto, apesar do enorme potencial agrícola do Brasil, existem desafios significativos a serem enfrentados, como o desmatamento ilegal, degradação ambiental e a falta de infraestrutura. Para garantir a sustentabilidade do setor agrícola e maximizar seu potencial, é fundamental investir em práticas agrícolas sustentáveis, promover a conservação ambiental e desenvolver políticas públicas que incentivem a inclusão social e o desenvolvimento rural.

2 Problema de Programação Linear

A programação linear e o método simplex foram introduzidos durante a Segunda Guerra Mundial por George Dantzig para resolver problemas logísticos e de planejamento [7], [6].

Desde então, estas técnicas têm sido amplamente aplicadas em diversas áreas.

- **Engenharia:** Planejamento de produção, alocação de recursos, e otimização de processos.
- **Economia:** Modelagem de mercado, análise de custos e receitas, e otimização de portfólios.
- **Logística:** Problemas de transporte, roteirização de veículos, e gerenciamento de cadeias de suprimentos.
- **Agricultura:** Planejamento de cultivos, otimização do uso de terras e recursos.
- **Finanças:** Planejamento financeiro, análise de investimentos, e gestão de risco.

A programação linear é uma ferramenta poderosa para a tomada de decisões em situações que envolvem múltiplas restrições e objetivos claros e quantificáveis.

2.1 Formulação Matemática de Um Problema de Programação Linear (PPL)

A programação linear é uma técnica matemática utilizada para resolver problemas de otimização onde o objetivo é maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a restrições lineares. Estes problemas são expressos por meio de um modelo matemático que inclui:

1. **Função Objetivo:** Uma função linear que se deseja maximizar ou minimizar.
2. **Restrições:** Um conjunto de desigualdades ou igualdades lineares que limitam os valores das variáveis.
3. **Variáveis de Decisão:** As variáveis que serão ajustadas para encontrar a solução ótima.

Conforme mencionado por Lachtermancher [4], para que um problema possa ser modelado como um problema de programação linear (PPL), ele deve apresentar as seguintes características:

- **Proporcionalidade:** A contribuição de cada variável para a função objetivo e para cada restrição deve ser diretamente proporcional ao valor da variável. Isso implica que se você dobrar o valor da variável, a contribuição para a função objetivo e para as restrições também dobra.

- **Aditividade:** A função objetivo e as restrições devem ser somas lineares das variáveis de decisão. Isso significa que os efeitos combinados das variáveis podem ser obtidos pela soma dos efeitos individuais de cada variável.
- **Certividade:** Todos os coeficientes nas funções objetivo e nas restrições devem ser conhecidos com certeza. Não há lugar para incerteza ou variabilidade nos parâmetros do modelo.
- **Divisibilidade:** As variáveis de decisão podem assumir valores fracionários. Isto é, as soluções podem incluir quantidades fracionárias, não sendo restritas apenas a valores inteiros.

Uma dos métodos mais utilizados para resolver Problemas de Programação Linear é Simplex, onde o objetivo é maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a restrições lineares. A seguir, uma explicação de como o método Simplex funciona.

2.2 Método Simplex

O método Simplex é poderoso e eficiente para resolver problemas de programação linear. Ele explora a estrutura geométrica do problema, movendo-se de um vértice a outro do poliedro de soluções viáveis, garantindo que a solução ótima será encontrada em um número finito de passos. A seguir uma visão geral do algoritmo do método Simplex.

Um problema típico de programação linear pode ser descrito na forma padrão como:

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0
\end{aligned}$$

Industria 4.0
Professor: Adriano Chaves Lisboa
Aluno: Michelle Hanne Soares de Andrade

Algorithm 1 Método Simplex

Entrada: Um problema de programação linear na forma padrão
Saída: A solução ótima (se existir)

Inicialização:
Escolha uma solução básica factível inicial (SBF)

while a solução atual não é ótima **do**
    Passo 1: Verificação de Otimalidade
    Calcule os coeficientes reduzidos (costos reduzidos) das variáveis não-básicas
    if todos os coeficientes reduzidos ≤ 0 (para maximização) **then**
        A solução atual é ótima; termine
    end if

    Passo 2: Seleção da Variável de Entrada
    Selecione a variável não-básica com o coeficiente reduzido mais positivo (para maximização)

    Passo 3: Determinação da Variável de Saída
    Calcule as razões entre as constantes das restrições e os coeficientes correspondentes da variável de entrada
    Selecione a variável básica correspondente à menor razão positiva

    Passo 4: Atualização da Solução Básica
    Realize a pivotagem para atualizar a solução básica
end while

Fim

Exemplo

Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- **Formule o problema na forma padrão** com variáveis de folga s_1 e s_2:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- **Inicialize** com $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 4$, $s_2 = 6$.
- **Construa a tabela Simplex inicial**:

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6
z	-3	-2	0	0	0

- **Itere** através dos passos do algoritmo até encontrar a solução ótima.

3 Problema de Produção Agrícola Familiar

Dado uma pequena produção rural, ou familiar, o número de culturas plantadas normalmente está restrito à área. Este problema consiste em realizar o cálculo para para maximizar o lucro e calcular a área em m^2 a ser plantado para cada tipo de cultura. O problema em questão foi modelado por alguns autores, como Goldbarg e Luna (2005) apud Ramos (2021) [7], entre outros [5].

A tabela 1 mostra os dados extraídos do Estudo de Caso de Ramos (2011) [7]. Onde exibe a produtividade em quilogramas por m^2 dos principais produtos do local e o lucro por quilogramas de produção, representado em reais. A área cultivável da propriedade rural é de 12.000 m^2 e a produção máxima está limitada a $5.400kg$ por mês. Portanto, são plantados 10 canteiros de $12m$ de largura por $100m$ de comprimento.

A modelagem do problema de otimização da produção agrícola familiar será detalhada na seção 3.1.

Tabela 1: Dados da Produção Agrícola Familiar

Cultura	**Produtividade (kg/m^2)**	**Lucro por kg de produção**
Alface	0,15	1,10 reais
Tomate	0,10	0,95 reais
Tomatinho	0,28	0,85 reais
Pimentão	0,11	0,75 reais

3.1 Formulação do Problema

Vamos formular o problema de programação linear para maximizar o lucro da plantação das culturas de alface, tomate, tomatinho e pimentão, dado os dados de produtividade e lucro por kg de produção, além das restrições de capacidade máxima de armazenamento e área cultivável.

Definição das variáveis de decisão Sejam:

- x_1: área plantada de alface em m²
- x_2: área plantada de tomate em m²
- x_3: área plantada de tomatinho em m²
- x_4: área plantada de pimentão em m²

Função objetivo A função objetivo é maximizar o lucro total. O lucro de cada cultura é dado pelo produto da produtividade, da área plantada e do lucro por kg de produção:

$$\text{Lucro total} = 1.10 \times 0.15 \times x_1 + 0.95 \times 0.10 \times x_2 + 0.85 \times 0.28 \times x_3 + 0.75 \times 0.11 \times x_4$$
$$\text{Lucro total} = 0.165x_1 + 0.095x_2 + 0.238x_3 + 0.0825x_4$$

Restrições As restrições do problema são:

- Limite de capacidade de produção:

$$0.15x_1 + 0.10x_2 + 0.28x_3 + 0.11x_4 \leq 5400 \tag{2}$$

- Limite de área cultivável:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12000 \tag{3}$$

- Restrições associadas à demanda da propriedade rural m^2:

$$x_1 \geq 2600 \tag{4}$$

$$x_2 \geq 1600 \tag{5}$$

$$x_3 \geq 500 \tag{6}$$

$$x_4 \geq 700 \tag{7}$$

- Todas as áreas devem ser não-negativas:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{8}$$

Matriz A, vetor b e vetor c Para colocar no formato padrão de programação linear $\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ sujeito a $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, tem-se: Montagem da Matriz $\mathbf{A}$

Restrições:

$$\begin{aligned}
-x_1 &\leq -2600 \\
-x_2 &\leq -1600 \\
-x_3 &\leq -500 \\
-x_4 &\leq -700 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 12000 \\
0.15x_1 + 0.10x_2 + 0.28x_3 + 0.11x_4 &\leq 5400
\end{aligned}$$

A matriz $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{b}$ são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.15 & 0.10 & 0.28 & 0.11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2600 \\ -1600 \\ -500 \\ -700 \\ 12000 \\ 5400 \end{bmatrix}$$

E o vetor $\mathbf{c}$ é:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.165 \\ 0.095 \\ 0.238 \\ 0.0825 \end{bmatrix}$$

3.2 Proposta de Solução

A solução proposta foi a implementação do algoritmo Simplex utilizando a linguagem Python. Foi realizada duas versões: (i) utilizando a biblioteca $linprog$ do pacote $scipy.optimize$, e (ii) versão que contem a implementação manual do método.

A seguir é apresentado a versão (i) da solução.

```
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog
import matplotlib.pyplot as plt

# Coeficientes da fun  o objetivo (negativos para maximiza  o)
c = -np.array([0.165, 0.095, 0.238, 0.0825])

# Matriz das restri  es
A = np.array([
    [-1, 0, 0, 0],
    [0, -1, 0, 0],
    [0, 0, -1, 0],
    [0, 0, 0, -1],
    [1, 1, 1, 1],
    [0.15, 0.10, 0.28, 0.11]
])

# Vetor de limites das restri  es
```

```
b = np.array([-2600, -1600, -500, -700, 12000, 5400])

# Chamando a fun  o linprog para resolver o problema
res = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=(0, None), method='highs')

# Obtendo os resultados
max_lucro = -res.fun
areas_plantadas = res.x

print(f"Lucro m ximo: R${max_lucro:.2f}")
print(f" rea plantada de Alface: {areas_plantadas[0]:.2f} m ")
print(f" rea plantada de Tomate: {areas_plantadas[1]:.2f} m ")
print(f" rea plantada de Tomatinho: {areas_plantadas[2]:.2f} m ")
print(f" rea plantada de Piment o: {areas_plantadas[3]:.2f} m ")

# Nomes das culturas
culturas = ['Alface', 'Tomate', 'Tomatinho', 'Piment o']

# Criando o gr fico de barras
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.bar(culturas, areas_plantadas, color=['green', 'red', 'orange', '
    yellow'], label=' rea Plantada (m )')

# Adicionando o gr fico de linha para maximiza  o do lucro
plt.plot(culturas, areas_plantadas, color='blue', marker='o', linestyle='-
    ', linewidth=2, markersize=8, label='Solu  o  tima ')

# Configura  es do gr fico
plt.xlabel('Cultura')
plt.ylabel(' rea Plantada (m )')
plt.title(' rea Plantada e Solu  o  tima para Maximiza  o do Lucro')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

4 Análise e Resultados

A solução ótima foi obtida após 4 iterações, usando a implementação manual do algoritmo Simplex. Tanto na versão usando biblioteca quanto manual, o lucro máximo calculado foi de **R$2.328,55**, as variáveis de decisão apresentam os seguintes valores:

- Lucro máximo: R$ 2328.55

- Área plantada de Alface: 2600.00 m²
- Área plantada de Tomate: 1600.00 m²
- Área plantada de Tomatinho: 7100.00 m²
- Área plantada de Pimentão: 700.00 m²

A solução mostrou-se satisfatória para o problema, referente à área plantada e a rotatividade da cultura. A Figura 1 faz a comparação entre a área plantada e a solução ótima obtida.

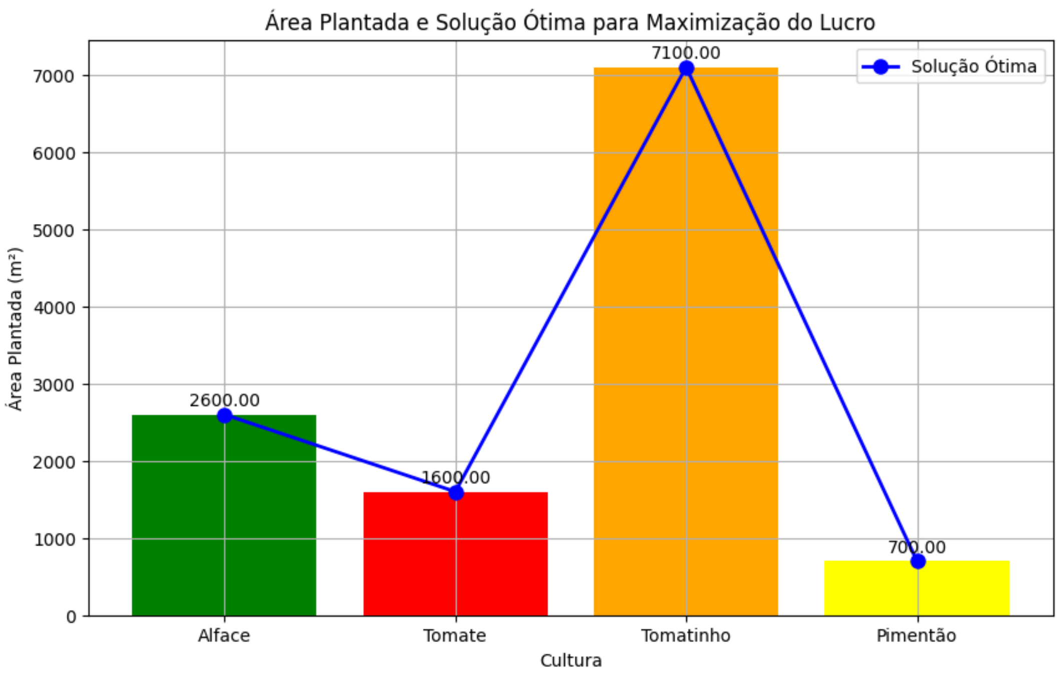

Figura 1: Otimização Linear do Problema de Agricultura Familiar

Destaca-se o tomatinho, que apresenta maior área plantada e maior lucro, conforme visto na Figura 2

Após a obtenção da solução ótima, foi realizada a análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo. Esta análise consiste em avaliar os impactos da solução frente aos intervalos de variação das constantes e dos coeficientes da função objetivo para os quais a base do método Simplex permanece inalterada. A variação dos coeficientes da função objetivo pode ocorrer nos intervalos abaixo:

- $x_1 : [0.16490, 0.16510]$

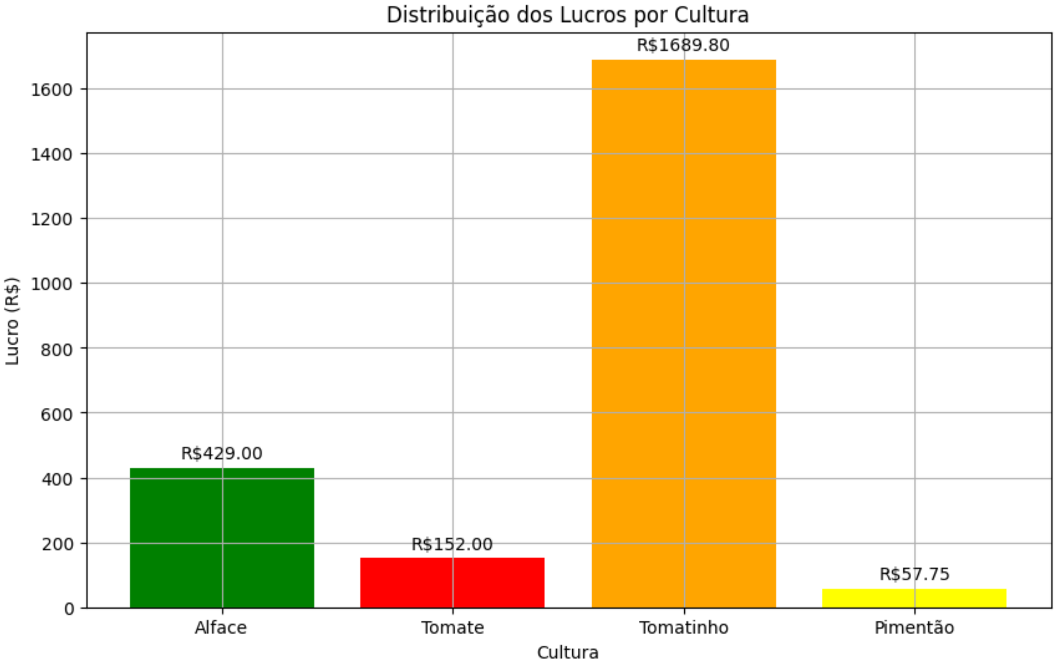

Figura 2: Lucro obtido por produto

- $x_2 : [0.09490, 0.09510]$
- $x_3 : [0.23790, 0.23810]$
- $x_4 : [0.08240, 0.08260]$

5 Conclusão

A modelagem matemática do problema de produção agrícola familiar, utilizando a Programação Linear e o Método Simplex, mostrou-se eficiente para maximizar o lucro na agricultura familiar. A análise resultou em um lucro máximo de R$ 2.328,55, com áreas plantadas de 2.600 m² de alface, 1.600 m² de tomate, 7.100 m² de tomatinho e 700 m² de pimentão. A otimização indicou que a maior parte da área deveria ser dedicada ao tomatinho, devido ao seu maior lucro por área plantada. A solução obtida respeitou todas as restrições impostas, como a capacidade máxima de produção e a área cultivável total, demonstrando a eficácia do modelo proposto em fornecer uma estratégia de cultivo rentável e sustentável, podendo ser aplicada para a solução de problemas da agricultura familiar.

Referências

[1] Confederação Nacional dos Trabalhadores Rurais Agricultores e Agricultoras Familiares (Contag). *Anuário Estatístico da Agricultura Familiar*. Departamento Intersindical de Estatísticas e Estudos Socioeconômicos (Dieese), 2022.

[2] EMBRAPA. *O agro brasileiro alimenta 800 milhões de pessoas, diz estudo da Embrapa*. EMBRAPA, 2021. URL `https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/59784047/o-agro-brasileiro-alim`

[3] Diego Ferreira and José Ronaldo de C. Souza Jr. *Comércio exterior do agronegócio em 2023*. IPEA - Carta de Conjuntura, 2024. URL `https://www.ipea.gov.br/`.

[4] Gerson Lachtermacher. *Pesquisa operacional na tomada de decisões.* Person, 2009.

[5] José Geraldo Pacheco Ormond, Sergio Roberto Lima de Paula, Paulo de Sá Campello Faveret Filho, and Luciana Thibau Moreira da Rocha. Agricultura orgânica: quando o passado é futuro. *BNDES Setorial*, (15):3–34, mar 2002. URL `http://web.bndes.gov.br/bib/jspui/handle/1408/2479`. Bibliografia: p. 33-34.

[6] Darci Prado. *Programação Linear*, volume 7 ed. Nova Lima: Falconi, 2016. URL `https://revistas.ufpr.br/floresta/article/view/2350`.

[7] Thallia ALine Ramos. *Otimização da Produção Agrícola e Minimização dos Custos de Transportes*. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021. URL `https://revistas.ufpr.br/floresta/article/view/2350`.

O projeto encontra-se disponível em https://github.com/mihanne/industria4.0.