

# PREDIKTIVNO VODENJE NA OSNOVI MODELA

Igor Škrjanc  
Laboratorij za avtomatiko in kibernetiko  
Fakulteta za elektrotehniko

Prosojnice za predavanja, november 2022



- 1 Koncept prediktivnega vodenja
- 2 Osnovni principi prediktivnega vodenja
  - Model impulznega odziva
  - Model v obliki odziva na stopnico
  - Model v obliki prenosne funkcije
  - Primer: Izračun predikcije izhodnega signal s pomočjo Diofantske enačbe
  - Model v obliki zapisa v prostoru stanj
- 3 Razvoja osnovnega prediktivnega regulatorja
- 4 Prediktivno funkcijski regulator kot metodologija za načrtovanje vodenja
  - Prediktivno funkcijski regulator z modelom prvega reda
  - PFC regulator na osnovi modela v prostoru stanj
  - PFC regulator na osnovi modela v prostoru stanj za referenčni signal rampe
  - Prediktivno vodenje z omejitvami - MBPC z omejitvami
    - Simulacijski primer PFC koncept + PSO
    - Primer mikroomrežja



# Koncept prediktivnega vodenja

S stališča možnosti uporabe v industrijskih aplikacijah imajo metode prediktivnega vodenja **pomembne prednosti** pred ostalimi strategijami vodenja:

- primerne so za vodenje procesov z zahtevnejšo dinamiko,
- primerne so za procese z mrtvim časom in neminimalno fazo,
- splošen koncept omogoča vodenje tako univariabilnih kot multivariabilnih procesov,
- omogočajo predkompenzacijo (feedforward) merljivih motenj,
- pri vodenju lahko upoštevamo omejitve v velikosti reguliranega in regulirnega signala ter omejitve v hitrosti sprememb regulirnega signala,
- precejšnja prostost pri načrtovanju, pri čemer gledamo na parametre načrtovanja kot na specifikacije,
- prediktivni regulator lahko vnaprej generira ustrezen regulirni signal, če vnaprej poznamo potek referenčne trajektorije (looking-ahead zmožnost),
- ni eksplicitnega odvajanja (zato šum meritev ne povzroča problemov),
- ni eksplicitnega integriranja (zato ni problema integralskega pobega),
- osnovni princip je lahko razumljiv tudi za neeksperte.

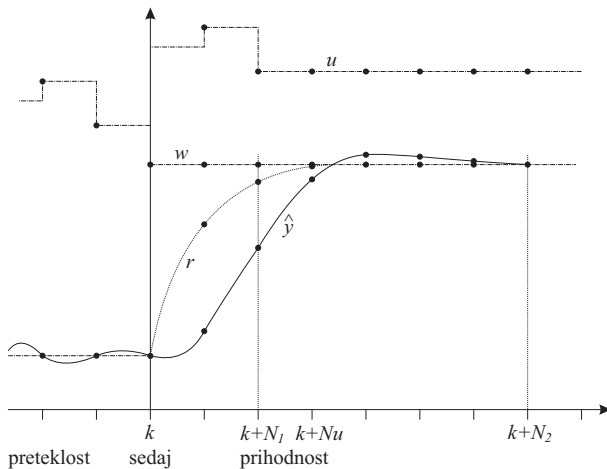
**Bistvene slabosti** metod prediktivnega vodenja pa so:

- potrebujemo dober dinamični model procesa (konstrukcija modela lahko predstavlja celo do 80% celotnega potrebnega časa pri razvoju neke realne aplikacije prediktivnega vodenja),
- vse metode so računsko precej zahtevne, kar lahko postane problematično pri vodenju procesov s hitrejšo dinamiko.



# Osnovni principi prediktivnega vodenja

Metodologija prediktivnega vodenja je naslednja (slika 1):



Slika 1: Princip prediktivnega vodenja



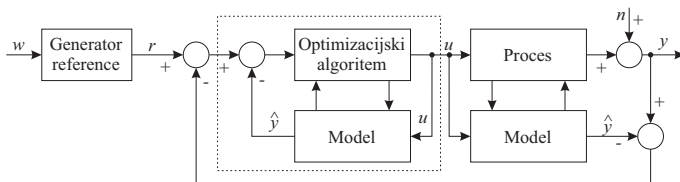
- Ob vsakem diskretnem časovnem trenutku  $k$  izračunamo **napoved izhodnega signala procesa**  $\hat{y}(k+j)$  za določen horizont opazovanja v prihodnosti ( $j = N_1, \dots, N_2$ ). Napovedane vrednosti označimo kot  $\hat{y}(k+j|k)$  in predstavljajo  $j$ -koračno napoved modela
- vrednosti  $N_1$  in  $N_2$  pa označujeta **spodnjo** in **zgornjo vrednost predikcijskega horizonta**. Spodnja in zgornja vrednost predikcijskega horizonta izhodnega signala določata **interval ujemanja** (*coincidence interval*), znotraj katerega želimo doseči ujemanje izhodnega signala s predpisanim obnašanjem. Napoved izhodnega signala procesa izračunamo s pomočjo modela procesa. Napovedane vrednosti pa so seveda odvisne tudi od regulirnega scenarija v prihodnosti  $u(k+j|k)$ ,  $j = 0, \dots, N_u - 1$ , ki ga **nameravamo** uporabiti od trenutka  $k$  naprej.
- če želimo ujemanje v eni sami točki, govorimo o **horizontu ujemanja**
- Definiramo **referenčno trajektorijo** (*ang. reference trajectory*)  $r(k+j|k)$ ,  $j = N_1, \dots, N_2$ , s katero opišemo kako naj se odziv procesa obnaša. Oziroma kako naj doseže referenčno vrednosti  $w(k)$  (*ang. setpoint trajectory*).
- Vektor prihodnjih regulirnih signalov ( $u(k+j|k)$ ,  $j = 0, \dots, N_u - 1$ ) izračunamo z **minimizacijo** ustrezne **kriterijske funkcije** tako, da minimiziramo napovedano napako med  $r(k+j|k)$  in  $\hat{y}(k+j|k)$ ,  $j = N_1, \dots, N_2$ . Pri tem pri nekaterih metodah uporabimo **strukturiranje** (*ang. structuring*) prihodnjih regulirnih signalov, kar bomo opisali kasneje.
- **Za vodenje uporabimo** samo prvi element  $u(k|k)$  **optimalnega** vektorja regulirnih signalov  $u(k+j|k)$ ,  $j = 0, \dots, N_u - 1$ .
- V naslednjem diskretnem trenutku imamo na voljo nov merjeni izhod procesa in celotni postopek, se ponovi. Ta princip se imenuje **strategija pomičnega horizonta** (*ang. receding horizon strategy*).



Osnovno shemo zaprtozančnega sistema vodenja si lahko ogledamo na sliki 2. V idealnem primeru, ko ni motenj in ko se model idealno ujema s procesom, rezultira shema v odprtozančno optimalno vodenje (v praksi je povratna zanka seveda vedno delujoča).

Pri opisani strategiji lahko izluščimo naslednje pomembne elemente prediktivnega vodenja:

- napoved oz. predikcija na osnovi modela procesa,
- generiranje modelno-referenčne trajektorije,
- algoritmizirano računanje regulirnega scenarija.



Slika 2: Shema prediktivnega vodenja



- Model v obliki impulznega odziva procesa (imenovan tudi utežna funkcija, konvolucijski model ali FIR (ang. *Finite Impulse Response*) model)

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i u(k-i) \approx \sum_{i=1}^n h_i u(k-i) = H(q^{-1})u(k) \quad (1)$$

kjer so  $h$  vrednosti impluznega odziva procesa v posameznih časovnih trenutkih in  $H(q^{-1}) = h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots + h_n q^{-n}$ ,  $q^{-1}$  pa je operator časovnega zamika  $q^{-1}u(k) = u(k-1)$ .

- Prednosti modela:

- ne potrebujemo skoraj nobenega predhodnega znanja o procesu (red procesa), primeren je tudi za procese z zahtevnejšo dinamiko, dobimo ga z neparametrično identifikacijo,
- enostaven izračun  $j$ -koračne napovedi izhodnega signala:

$$\hat{y}(k+j) = \sum_{i=1}^n h_i u(k+j-i) = H(q^{-1})u(k+j), \quad (2)$$

pri čemer upoštevamo, da so  $u(k+j)$  poznani. Ker izračun predikcije ne zahteva rekurzije, je enostaven in manj občutljiv za numerične napake.

- Slabosti modela impulznega odziva:

- neuporaben za nestabilne procese,
- zahteva veliko število parametrov, ki jih moramo poznati ali oceniti ( $n = 30 \div 50$ ).



- Model v obliki odziva procesa na stopnico (*uporabljen pri metodi DMC*), imenovan tudi FSR model (*ang. Finite Step Response*)

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(k-i) \approx \sum_{i=1}^n g_i \Delta u(k-i) = G(q^{-1})(1 - q^{-1})u(k), \quad (3)$$

- $g_i$  je vrednost odziva procesa na enotino stopnico v časovnem trenutku  $i$ ,  
 $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ ,  $n$  mora biti dovolj velik, da so od  $n$  naprej vsi  $g_i$  enaki med seboj,

- Napoved za  $j$  korakov v prihodnost izračunamo kot:

$$\hat{y}(k+j) = \sum_{i=1}^n g_i \Delta u(k+j-i) = G(q^{-1})(1 - q^{-1})u(k+j), \quad (4)$$

- Model v obliki odziva na stopnico ima enake prednosti in slabosti kot model v obliki impulznega odziva.





- Model predstavimo z diferenčno enačbo:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) = b_1 u(k-d-1) + \dots + b_{n_b} u(k-d-n_b) \quad (5)$$

- ali v obliki:

$$y(k) = \frac{q^{-d} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) \quad (6)$$

kjer je  $d$  mrtvi čas procesa ( $d \geq 0$ ), polinoma  $A(q^{-1})$  in  $B(q^{-1})$  pa sta:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) &= b_1 + q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \end{aligned} \quad (7)$$

- predpostavimo ( $\hat{B} = B$ ,  $\hat{A} = A$ ,  $\hat{d} = d$ , zato pišemo kar  $B, A, d$ ),



- Izračun predikcije izhodnega signala

$$\hat{y}(k+j) = q^j \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) \quad (8)$$

- če operator premika upoštevamo pri vhodu v proces, dobimo

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+j) &= \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+j) \\ &= q^{-d}B(q^{-1})u(k+j) - q \left( A(q^{-1}) - 1 \right) \hat{y}(k+j-1) \end{aligned} \quad (9)$$

- Pri tem je  $q \left( A(q^{-1}) - 1 \right) = a_1 + a_2q^{-1} + \dots + a_{n_a}q^{-(n_a-1)}$ , ker je  $A(q^{-1})$  monični polinom.
- Vse  $\hat{y}(k+j)$  za  $j \geq 1$  lahko izračunamo rekurzivno po enačbi 10 s pričetkom pri  $j = 1$ :

$$\hat{y}(k+1) = q^{-d}B(q^{-1})u(k+1) - q \left( A(q^{-1}) - 1 \right) \hat{y}(k) \quad (10)$$

- Gornji prediktor (v paralelni ali simulacijski obliki) zaradi rekurzivnega računanja predikcije akumulira napako pri predikciji.
- Možna izboljšava je uporaba serijsko-paralelnega modela (predikcijskega), kjer predikcijo izhoda modela zamenjamo z izmerjenim izhodom procesa  $y(k)$ . Če uporabljamo model v vodenju, je to smiselno.



- Predikcijo izhodnega signala

$$\hat{y}(k+j) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+j)$$

- zapišemo tako, da člen  $\frac{1}{A(q^{-1})}$  preoblikujemo v zapis vsote polinoma in ostanka

$$\frac{1}{A(q^{-1})} = E_j(q^{-1}) + q^{-j} \frac{F_j(q^{-1})}{A(q^{-1})} \implies E_j(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) = 1 \quad (11)$$

- Polinoma  $E_j$  in  $F_j$  dobimo tako, da rešimo Diofantsko enačbo

$$E_j(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) = 1 \quad (12)$$



- Kakšna morata biti reda the dveh polinomov, da dobimo enačbo, ki nam da enoumno rešitev. Če predpostavimo, da je red polinoma  $E_j$  enak  $n_e$  in red polinoma  $F_j$  enak  $n_f$ , potem imamo na levi strani polinom, ki je reda  $\max((n_e + n_a), (j + n_f))$ . Reda  $n_e$  in  $n_f$  izberemo tako, da velja  $n_e + n_a = j + n_f$ .
- To pomeni, da imamo  $n_e + n_a + 1$  enačb na osnovi katerih moramo izračunati neznane parametre za polinoma  $E_j$  in  $F_j$ , ki jih je skupaj  $n_e + 1 + n_f + 1$ .
- Potem velja, da imamo  $n_e + n_a + 1$  enačb, na osnovi katerih moramo določiti  $n_e + 1 + n_f + 1$  parametrov. Za rešitev mora biti število enačb enako številu parametrov, kar pomeni, da je  $n_f = n_a - 1$  in  $n_e = j - 1$ .
- To pomeni, da je polinom  $E_j(q^{-1})$  stopnje  $(j - 1)$  in polinom  $F_j(q^{-1})$  stopnje  $(n_a - 1)$  in sta enolično določena z  $j$  in  $A(q^{-1})$ .
- Če sedaj izraz iz enačbe 11 uporabimo v enačbi 10, dobimo

$$\hat{y}(k+j) = q^{-d}E_j(q^{-1})B(q^{-1})u(k+j) + q^{-j}F_j(q^{-1})\frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k+j) \quad (13)$$

- in če predpostavimo, da lahko merimo izhode procesa in zamenjamo  $\hat{y}(k)$  z  $y(k)$ , dobimo

$$\hat{y}(k+j) = q^{-d}E_j(q^{-1})B(q^{-1})u(k+j) + F_j(q^{-1})y(k) \quad (14)$$

- Ugotovimo lahko, da za vsak horizont predikcije  $j$  lahko izračunamo enolično določena polinoma  $E_j$  in  $F_j$ , ki določata predikcijo izhodnega signala pri tem horizontu.
- Polinoma lahko določimo tudi z dolgim deljenjem polinomov ali rekurzivnim algoritmom, ki je opisan v dodatku. Na tem mestu pa si pogledjmo izračun z Diofantsko enačbo na enostavnem primeru.



# Primer: Izračun predikcije izhodnega signal s pomočjo Diofantske enačbe

- Predpostavimo, da imamo model procesa, ki ga lahko zapišemo na naslednji način, s prenosno funkcijo v prostoru operatorja premika  $q$

$$G_p(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{0.2q^{-1} - 0.4q^{-2}}{(1 - 0.5q^{-1})(1 - 0.8q^{-1})} \quad (15)$$

števec  $B(q^{-1})$  je reda  $n_b = 2$ , imenovalec  $A(q^{-1})$  pa tudi  $n_a = 2$ . Zaradi preglednosti smo čisto zakasnitev  $d$  postavili na nič.

- Zapišimo Diofantsko enačbo za horizont  $j$ , kjer je red  $E_j$  enak  $n_e = j - 1$  in red  $F_j$  enak  $n_f = n_a - 1$ .
- Polinoma  $E_j$  in  $F_j$  dobimo tako, da rešimo Diofantsko enačbo. Za naš primer dobimo splošno rešitev:

$$\left(e_0 + e_1 q^{-1} + \dots + e_{j-1} q^{-(j-1)}\right) \left(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}\right) + q^{-j} \left(f_0 + f_1 q^{-1}\right) = 1 \quad (16)$$

kjer sta  $a_1 = -1.3$  in  $a_2 = 0.4$ .

- Če izvedemo množenje in seštejemo člene z istimi potencami za  $j = 1$ , dobimo

$$e_0 + (e_0 a_1 + f_0) q^{-1} + (e_0 a_2 + f_1) q^{-2} = 1 \quad (17)$$

- Kar, po enačenju koeficientov polinoma na levi in desni (konstanta), rezultira v  $e_0 = 1$ ,  $f_0 = -a_1 = 1.3$  in  $f_1 = -a_2 = -0.4$ . To pomeni, da je polinom

$$E_1(q^{-1}) = 1$$

in

$$F_1(q^{-1}) = 1.3 - 0.4 q^{-1}$$



# Primer: Izračun predikcije izhodnega signal s pomočjo Diofantske enačbe

- V primeru horizonta  $j = 2$ , dobimo

$$e_0 + (e_0 a_1 + e_1) q^{-1} + (e_0 a_2 + e_1 a_1 + f_0) q^{-2} + (e_1 a_2 + f_1) q^{-3} = 1 \quad (18)$$

- Enačenje koeficientov polinoma da  $e_0 = 1, e_1 = -e_0 a_1 = 1.3, f_0 = -e_0 a_2 - e_1 a_1 = 1.29$  in  $f_1 = -e_1 a_2 = -0.52$ . Polinoma sta enaka

$$E_2(q^{-1}) = 1 + 1.3q^{-1}$$

in

$$F_2(q^{-1}) = 1.29 - 0.52q^{-1}$$

- V primeru horizonta  $j = 3$  pa dobimo

$$E_3(q^{-1}) = 1 + 1.3q^{-1} + 1.29 q^{-2}$$

in

$$F_3(q^{-1}) = 1.157 - 0.516 q^{-1}$$

- Ob upoštevanju enačbe 14 dobimo naslednje predikcije za izhod procesa

$$\hat{y}(k+1) = E_1(q^{-1})B(q^{-1})u(k+1) + F_1(q^{-1})y(k)$$

$$\hat{y}(k+2) = E_2(q^{-1})B(q^{-1})u(k+2) + F_2(q^{-1})y(k)$$

$$\hat{y}(k+3) = E_3(q^{-1})B(q^{-1})u(k+3) + F_3(q^{-1})y(k)$$



# Primer: Izračun predikcije izhodnega signal s pomočjo Diofantske enačbe

- Če zapišemo vrednosti za naš primer, dobimo

$$\hat{y}(k+1) = (0.2q^{-1} - 0.4q^{-2})u(k+1) + (1.3 - 0.4q^{-1})y(k)$$

$$\hat{y}(k+2) = (0.2q^{-1} - 0.14q^{-2} - 0.52q^{-3})u(k+2) + (1.29 - 0.52q^{-1})y(k)$$

$$\hat{y}(k+3) = (0.2q^{-1} - 0.14q^{-2} - 0.26q^{-3} - 0.516q^{-4})u(k+3) + (1.157 - 0.516q^{-1})y(k)$$

ali drugače

$$\hat{y}(k+1) = 0.2u(k) - 0.4u(k-1) + 1.3y(k) - 0.4y(k-1)$$

$$\hat{y}(k+2) = 0.2u(k+1) - 0.14u(k) - 0.52u(k-1) + 1.29y(k) - 0.52y(k-1)$$

$$\hat{y}(k+3) = 0.2u(k+2) - 0.14u(k+1) - 0.26u(k) - 0.516u(k-1) + 1.157y(k) - 0.516y(k-1)$$

- oziroma v matrični obliki, kjer ločimo neznane in znane vrednosti vhodega in izhodnega signala

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \hat{y}(k+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ -0.14 & 0.2 & 0 \\ -0.26 & -0.14 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 \\ -0.52 \\ -0.516 \end{bmatrix} u(k-1) + \begin{bmatrix} 1.3 & -0.4 \\ 1.29 & -0.52 \\ 1.157 & -0.516 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix}$$

- Zapis predikcije izhodnega signala

$$\underline{y}^+ = \underline{G}u^+ + \underline{\Gamma}u^- + \underline{F}y^-$$



# Primer: Izračun predikcije izhodnega signal z deljenjem polinomov

- Izračun predikcije izhodnega signala  $\hat{y}(k+j) = q^j \frac{0.2q^{-1} - 0.4q^{-2}}{(1-0.5q^{-1})(1-0.8q^{-1})} u(k)$
- delimo polinoma

$$\frac{q^j}{A(q^{-1})} \quad (20)$$

- V primeru horizonta  $j = 1$ , dobimo

$$\frac{q^1}{A(q^{-1})} = q^1 + \frac{1.3 - 0.4q^{-1}}{A(q^{-1})} \quad (21)$$

- V primeru horizonta  $j = 2$ , dobimo

$$\frac{q^2}{A(q^{-1})} = q^2 + 1.3q^1 + \frac{1.29 - 0.52q^{-1}}{A(q^{-1})} \quad (22)$$

- V primeru horizonta  $j = 3$ , dobimo

$$\frac{q^3}{A(q^{-1})} = q^3 + 1.3q^2 + 1.29q^1 + \frac{1.157 - 0.516q^{-1}}{A(q^{-1})} \quad (23)$$

- Izračun predikcije izhodnega signala

$$\hat{y}(k+3) = \left( q^3 + 1.3q^2 + 1.29q^1 + \frac{1.157 - 0.516q^{-1}}{A(q^{-1})} \right) B(q^{-1})u(k) \quad (24)$$

$$\hat{y}(k+3) = \left( q^3 + 1.3q^2 + 1.29q^1 \right) B(q^{-1})u(k) + \left( 1.157 - 0.516q^{-1} \right) y(k) \quad (25)$$



$$\hat{y}(k+1) = \left( q^1 + \frac{1.3 - 0.4q^{-1}}{A(q^{-1})} \right) B(q^{-1})u(k) \quad (26)$$

$$\hat{y}(k+1) = \left( q^1 \right) B(q^{-1})u(k) + \left( 1.3 - 0.4q^{-1} \right) y(k) \quad (27)$$

$$\hat{y}(k+1) = (1) B(q^{-1})u(k+1) + \left( 1.3 - 0.4q^{-1} \right) y(k) \quad (28)$$

$$\hat{y}(k+2) = \left( q^2 + 1.3q^1 + \frac{1.29 - 0.52q^{-1}}{A(q^{-1})} \right) B(q^{-1})u(k) \quad (29)$$

$$\hat{y}(k+2) = \left( q^2 + 1.3q^1 \right) B(q^{-1})u(k) + \left( 1.29 - 0.52q^{-1} \right) y(k) \quad (30)$$

$$\hat{y}(k+2) = \left( 1 + 1.3q^{-1} \right) B(q^{-1})u(k+2) + \left( 1.29 - 0.52q^{-1} \right) y(k) \quad (31)$$

$$\hat{y}(k+3) = \left( q^3 + 1.3q^2 + 1.29q^1 + \frac{1.157 - 0.516q^{-1}}{A(q^{-1})} \right) B(q^{-1})u(k) \quad (32)$$

$$\hat{y}(k+3) = \left( q^3 + 1.3q^2 + 1.29q^1 \right) B(q^{-1})u(k) + \left( 1.157 - 0.516q^{-1} \right) y(k) \quad (33)$$

$$\hat{y}(k+3) = \left( 1 + 1.3q^{-1} + 1.29q^{-2} \right) B(q^{-1})u(k+3) + \left( 1.157 - 0.516q^{-1} \right) y(k) \quad (34)$$



# Primer: Izračun predikcije izhodnega signal s pomočjo Diofantske enačbe

- Če zapišemo vrednosti za naš primer, dobimo

$$\hat{y}(k+1) = (0.2q^{-1} - 0.4q^{-2})u(k+1) + (1.3 - 0.4q^{-1})y(k)$$

$$\hat{y}(k+2) = (0.2q^{-1} - 0.14q^{-2} - 0.52q^{-3})u(k+2) + (1.29 - 0.52q^{-1})y(k)$$

$$\hat{y}(k+3) = (0.2q^{-1} - 0.14q^{-2} - 0.26q^{-3} - 0.516q^{-4})u(k+3) + (1.157 - 0.516q^{-1})y(k)$$

ali drugače

$$\hat{y}(k+1) = 0.2u(k) - 0.4u(k-1) + 1.3y(k) - 0.4y(k-1)$$

$$\hat{y}(k+2) = 0.2u(k+1) - 0.14u(k) - 0.52u(k-1) + 1.29y(k) - 0.52y(k-1)$$

$$\hat{y}(k+3) = 0.2u(k+2) - 0.14u(k+1) - 0.26u(k) - 0.516u(k-1) + 1.157y(k) - 0.516y(k-1)$$

- oziroma v matrični obliki, kjer ločimo neznane in znane vrednosti vhodega in izhodnega signala

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \hat{y}(k+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ -0.14 & 0.2 & 0 \\ -0.26 & -0.14 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 \\ -0.52 \\ -0.516 \end{bmatrix} u(k-1) + \begin{bmatrix} 1.3 & -0.4 \\ 1.29 & -0.52 \\ 1.157 & -0.516 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix}$$

- Zapis predikcije izhodnega signala

$$\underline{y}^+ = \underline{G}\underline{u}^+ + \underline{\Gamma}\underline{u}^- + \underline{F}\underline{y}^-$$



- Model v obliki zapisa v prostoru stanj:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{b}u(k) \quad (35)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}(k), \quad (36)$$

kjer so  $\underline{x}$  stanja procesa,  $\underline{A}$  sistemska matrika,  $\underline{b}$  vhodni vektor in  $\underline{c}^T$  izhodni vektor. Ker pri realnih procesih v glavnem ne zasledimo direktnih povezav med vhomom in izhodom procesa, jih v zgornjem zapisu nismo zajeli.

- Predikcijo izhodnega signala izračunamo po enačbi:

$$\hat{y}(k+j) = \underline{c}^T \underline{x}(k+j) = \underline{c}^T \left( \underline{A}^j \underline{x}(k) + \sum_{i=1}^j \underline{A}^{i-1} \underline{b}u(k+j-i) \right) \quad (37)$$

- Model v tej obliki je uporaben za načrtovanje vodenja multivariabilnih sistemov. Računska zahtevnost je večja in če stanja niso direktno merljiva, moramo uporabiti opazovalnike stanj.
- Z uporabo zapisa v prostoru stanj lahko dobro rešujemo problem vodenja, kjer so referenčni signali različnih polinomskih oblik.



# Razvoja osnovnega prediktivnega regulatorja na primeru

- Kriterijska funkcija upošteva odstopanje od napovedi reguliranega signala od želene reference na izbranem časovnem intervalu, ki ga imenujemo interval ujetanja  $[N_1, N_2]$ .
- Poleg odstopanja reguliranega signala od želene reference pa upošteva kriterijska funkcija še stroške, ki so potrebni za sledenje referenčno vrednosti, izražajo pa se z odstopanji od regulirnega signala od njegove ustaljene vrednosti v intervalu do horizonta regulirnega signala  $N_u$ .

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \left( y(k+j) - r(k+j) \right)^2 + \lambda \sum_{j=0}^{N_u} \left( \Delta u(k+j) \right)^2 \quad (38)$$

- Reguliramo proces s prenosno funkcijo

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.4z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}} \quad (39)$$

- Zahtevamo regulirni zakon v inkrementalni obliki zato pomnožimo prenosno funkcijo z operatorjem  $\Delta = 1 - z^{-1}$  v števcu in imenovalcu in dobimo

$$(1 - 0.6z^{-1})(1 - z^{-1})Y(z) = 0.4z^{-1}\Delta U(z) \quad (40)$$

- oziroma v časovnem prostoru

$$y(k) = 1.6y(k-1) - 0.6y(k-2) + 0.4\Delta u(k-1) \quad (41)$$



# Primer: Razvoja osnovnega prediktivnega regulatorja na primeru

- Izbremo parametre  $N_1 = 1, N_2 = 3$  in  $N_u = 1$ . Za ostali del regulirnega signala pri  $N_u > 1$  predpostavimo, da so spremembe enake nič.
- Kriterijska funkcija je naslednja

$$J = \sum_{j=1}^3 \left( y(k+j) - r(k+j) \right)^2 + \lambda \sum_{j=0}^1 \left( \Delta u(k+j) \right)^2 \quad (42)$$

kjer je  $\lambda$  parameter, ki uravnava razmerje med kvaliteto vodenja in za to potrebnimi stroški.

- Predikcijo dobimo na osnovi deljenja, z rekurzijo ali z uporabo Diofantske enačbe

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1) &= 1.6y(k) - 0.6y(k-1) + 0.4\Delta u(k) \\ \hat{y}(k+2) &= 1.6\hat{y}(k+1) - 0.6y(k) + 0.4\Delta u(k+1) = \\ &= 1.96y(k) - 0.96y(k-1) + 0.4\Delta u(k+1) + 0.64\Delta u(k) \\ \hat{y}(k+3) &= 1.6\hat{y}(k+2) - 0.6\hat{y}(k+1) + 0.4\Delta u(k+2) = \\ &= 2.1760y(k) - 1.1760y(k-1) + 0.4\Delta u(k+2) + 0.64\Delta u(k+1) + 0.784\Delta u(k) \end{aligned}$$

- oziroma v matrični obliki ob upoštevanju dejstva, da se regulirna veličina po intervalu ne spreminja več ( $\Delta u(k+2) = 0$ )

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \hat{y}(k+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.64 & 0.4 \\ 0.7840 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.6 & -0.6 \\ 1.96 & -0.96 \\ 2.1760 & -1.1760 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix} \quad (43)$$

- Skrajšani zapis matrične enačbe za predikcijo izhoda procesa je

$$\underline{y}^+ = \underline{G}\underline{\Delta u}^+ + \underline{F}\underline{y}^-$$

kjer oznake  $+$  pomenijo, da gre za signale v prihodnosti (ki so neznani) in oznaka  $-$ , da gre za pretekle (znane) vrednosti signalov.

- Če bi imeli sistem, ki bi imel višji red polinoma v števcu prenosne funkcije procesa, bi se na desni strani zgornje enačbe pojavil še izraz  $\underline{\Gamma}\underline{\Delta u}^-$ , ki ga bomo zaradi popolnosti pri izpeljavi regulacijske zakonitosti upoštevali. V našem primeru velja  $\underline{\Gamma} = \underline{0}$
- Kriterijsko funkcijo 42 lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} J &= \left(\underline{y}^+ - \underline{r}^+\right)^T \left(\underline{y}^+ - \underline{r}^+\right) + \lambda \underline{\Delta u}^{+T} \underline{\Delta u}^+ = \\ &= \left(\underline{G}\underline{\Delta u}^+ + \underline{\Gamma}\underline{\Delta u}^- + \underline{F}\underline{y}^- - \underline{r}^+\right)^T \cdot \left(\underline{G}\underline{\Delta u}^+ + \underline{\Gamma}\underline{\Delta u}^- + \underline{F}\underline{y}^- - \underline{r}^+\right) + \lambda \underline{\Delta u}^{+T} \underline{\Delta u}^+ \end{aligned}$$

kjer vektor  $\underline{r}^+$  zajema tri prihodnje vrednosti referenčnega signala.

- Poiščimo vektor prihodnjih vrednosti regulirnega signala, ki minimizira kriterijsko funkcijo:

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\Delta u}^+} = 2\underline{G}^T \left(\underline{G}\underline{\Delta u}^+ + \underline{\Gamma}\underline{\Delta u}^- + \underline{F}\underline{y}^- - \underline{r}^+\right) + 2\lambda \underline{\Delta u}^+ = 0$$

iz česar sledi

$$\underline{\Delta u}^+ = (\underline{G}^T \underline{G} + \lambda \underline{I})^{-1} \underline{G}^T \left(\underline{r}^+ - \underline{\Gamma}\underline{\Delta u}^- + \underline{F}\underline{y}^-\right)$$



- Po vstavitvi matrik  $\underline{G}$  in  $\underline{F}$  za naš primer ter  $\underline{\Gamma}$  (v našem primeru 0) in izbranem  $\lambda = 0.1$  dobimo rešitev za napoved  $\Delta u(k)$  in  $\Delta u(k+1)$ .
- Za regulacijo uporabimo samo prvo vrstico za spremembo v trenutku opazovanja  $\Delta u(k)$ , ki je enaka

$$\Delta u(k) = -2.6648y(k) + 1.1485y(k-1) + 0.9374r(k+1) + 0.4390r(k+2) + 0.1400r(k+3)$$

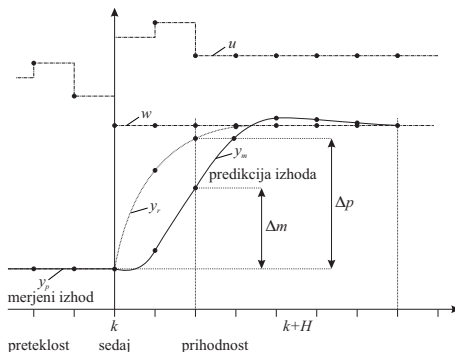
- Ta enačba predstavlja regulirni zakon.
- Opazimo lahko, da ta zakon zahteva poznavanje prihodnjih vrednosti referenčnega signala. Če le teh ne poznamo, jih v praksi zamenjamo z njegovo trenutno vrednostjo.
- Splošna značilnost prediktivnega regulatorja in prednosti pred PID regulatorjem je v bolj umirjenem regulirnem signalu in v odzivu z manj prenehaja.



# Prediktivno funkcijski regulator kot metodologija za načrtovanje vodenja

- Strategija PFC vodenja temelji na uporabi dinamičnega modela procesa za predikcijo izhoda procesa pri določenem horizontu ujemanja
- Cilj pristopa je določiti tak izhod regulatorja, da se pri horizontu ujemanja  $H$  ujemata spremembi med predikcijo referenčne vrednosti  $y_r(k+H)$  in trenutno vrednostjo izhoda  $y_p(k)$  in med predikcijo izhoda modela  $y_m(k+H)$  in  $y_m(k)$ :

$$y_r(k+H) - y_p(k) = y_m(k+H) - y_m(k) \quad (45)$$



Slika 3: PFC princip.





- PFC algoritem za proces, ki ga opišemo dinamičnim linearnim modelom prvega reda v zveznem prostoru:

$$Y_m(s) = \frac{K_m}{T_m s + 1} U(s) \quad (46)$$

- Enačbo 46 v diskretnem prostoru zapišemo kot:

$$y_m(k+1) = a_m y_m(k) + b_m u(k) \quad (47)$$

kjer je  $y_m(k)$  izhod modela,  $u(k)$  pa vhod v model oziroma proces. Zveza med časovno konstanto in ojačenjem ter parametroma  $a_m$  in  $b_m$  je sledeča:

$$a_m = e^{-\frac{T_s}{T_m}} \quad (48)$$

$$b_m = K_m(1 - a_m) \quad (49)$$

kjer je  $T_s$  čas vzorčenja.



- Za izpeljavo regulacijskega zakona je potrebno podati referenčno trajektorijo zaprtozančnega procesa. Ta je podana v obliki referenčnega modela, ki zagotavlja sledenje referenci  $w$ :

$$y_r(k+1) = a_r y_r(k) + b_r w(k) \quad (50)$$

- Da zagotovimo sledenje referenci, mora biti ojačenje tega modela enako ena. Na podlagi tega pogoja dobimo vrednost parametra  $b_r$ :

$$b_r = (1 - a_r) \quad (51)$$

- Referenčni model definira želeno obnašanje celotnega zaprtozančnega sistema z vidika odnosa med referenco in izhodom procesa.
- Regulacijski zakon je dobljen z rešitvijo enačbe 45. PFC predvideva horizon ujemanja  $H$  ( $N_1 = N_2 = H$ ) in utežni faktor regulirnega signala  $\lambda = 0$ .
- V horizonu ujemanja naj bi izhod modela procesa sovpadal z referenčnim odzivom. To pomeni, da morata biti spremembi izhoda modela procesa in referenčnega modela od koraka  $k$  do koraka  $k + H$  enaki (glej sliko 3):

$$\Delta_p = \Delta_m \quad (52)$$



# Prediktivno funkcijski regulator z modelom prvega reda

- Kot vidimo, je vodenje na podlagi modela praktično odprtozanko vodenje procesa. Saj optimiramo izhod modela glede na referenčni model.
- Spremembo referenčnega modela lahko zapišemo kot:

$$\Delta_r = y_r(k + H) - y_r(k) \quad (53)$$

- Zaprta zanka je vključena v regulacijski algoritem posredno s tem, da so začetne vrednosti referenčnega modela enake trenutnim vrednostim procesa. Torej, da je izhod referenčnega modela v  $k$ -tem trenutku enak izhodu procesa ( $y_r(k) = y_p(k)$ ).
- Spremembo, ki jo napravi izhod procesa, da doseže referenco zapišemo kot:

$$\Delta_p = y_r(k + H) - y_p(k) \quad (54)$$

- in spremembo modela procesa kot:

$$\Delta_m = y_m(k + H) - y_m(k) \quad (55)$$

- Izhod modela procesa oziroma referenčnega modela v  $k$ -tem koraku za korak  $k + H$  dobimo tako, da rešimo slednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} y_m(k + 1) &= a_m y_m(k) + b_m u(k) \\ y_m(k + 2) &= a_m y_m(k + 1) + b_m u(k + 1) = \\ &= a_m^2 y_m(k) + a_m b_m u(k) + b_m u(k + 1) \\ &\vdots \\ y_m(k + H) &= a_m y_m(k + H - 1) + b_m u(k + H - 1) = \\ &= a_m^H y_m(k) + a_m^{H-1} b_m u(k) + a_m^{H-2} b_m u(k + 1) + \dots + b_m u(k + H - 1) \end{aligned} \quad (56)$$



- Pri reševanju optimizacijskega problema predpostavimo konstanten prihodnji regulacijski signal (*ang. mean level control*).
- To pomeni, da pri optimizaciji ne bomo računali vrednosti vseh vhodov od trenutka  $k$  do trenutka  $k + H$ .
- Pri nekaterih algoritmi se optimirajo vrednosti regulacijskega signala  $u$  za vsak trenutek od  $k$  do  $k + H$ . Vendar se kot izhod regulatorja uporabi le vrednost  $u(k)$ . Temu principu pravimo princip premikajočega horizonta (*ang. receding horizon*).
- Če upoštevamo predpostavko o konstantnem prihodnjem regulacijskem signalu ( $u(k) = u(k + 1) = \dots = u(k + H - 1)$ ) lahko zapišemo predikcijo za  $k + H$ -ti korak iz sistema enačb 56 v naslednji obliki:

$$y_m(k + H) = a_m^H y_m(k) + a_m^{H-1} b_m u(k) + a_m^{H-2} b_m u(k) + \dots + b_m u(k) \quad (57)$$

- Če upoštevamo, da je  $(1 + a_m + \dots + a_m^{H-2} + a_m^{H-1})(1 - a_m) = (1 - a_m^H)$  se enačba 57 poenostavi v:

$$y_m(k + H) = a_m^H y_m(k) + \frac{b_m}{1 - a_m} (1 - a_m^H) u(k) \quad (58)$$



- Podobno enačbo dobimo za predikcijo izhoda referenčnega modela, kjer smo upoštevali konstantno prihodnjo referenco ( $w(k) = w(k+1) = \dots = w(k+H-1)$ ):

$$y_r(k+H) = a_r^H y_r(k) + (1 - a_r^H)w(k) \quad (59)$$

- Spremembi  $\Delta_p$  in  $\Delta_m$  sedaj zapišemo kot:

$$\Delta_p = a_r^H y_r(k) + (1 - a_r^H)w(k) - y_p(k) \quad (60)$$

$$\Delta_m = a_m^H y_m(k) + \frac{b_m}{1 - a_m}(1 - a_m^H)u(k) - y_m(k) \quad (61)$$



- Če sedaj rešimo enačbo 52 ob upoštevanju, da je  $y_r(k) = y_p(k)$ , dobimo sledeč regulirni zakon:

$$u(k) = \frac{(1 - a_r^H)(w(k) - y_p(k))}{\frac{b_m}{1 - a_m}(1 - a_m^H)} + \frac{y_m(k)}{\frac{b_m}{1 - a_m}} \quad (62)$$

- Ob upoštevanju

$$K_m = \frac{b_m}{(1 - a_m)} \quad (63)$$

in

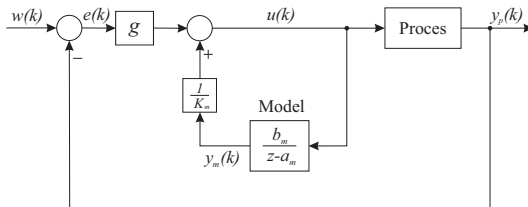
$$g = \frac{1 - a_r^H}{K_m(1 - a_m^H)} \quad (64)$$

lahko enačbo 62 zapišemo v bolj pregledni obliki kot:

$$u(k) = g(w(k) - y_p(k)) + \frac{1}{K_m} y_m(k) \quad (65)$$



- Regulacijski zakon (en. 65) lahko ponazorimo z bločno shemo na sliki 4.



Slika 4: Bločna shema regulatorja PFC.



- Za vodenje **procesov višjih redov in multivariabilnih procesov** razvijemo prediktivni regulator na osnovi modela v prostoru stanj.
- Izpeljava regulacijskega zakona temelji na isti ideji kot pri regulatorju PFC z modelom prvega reda.
- Model procesa v prostoru stanj zapišemo:

$$\underline{x}_m(k) = \underline{A}_m \underline{x}_m(k) + \underline{B}_m u(k) \quad (66)$$

$$\underline{y}_m(k) = \underline{C}_m \underline{x}_m(k) \quad (67)$$

- V prostoru stanj je podan tudi referenčni model:

$$\underline{x}_r(k) = \underline{A}_r \underline{x}_r(k) + \underline{B}_r w(k) \quad (68)$$

$$\underline{y}_r(k) = \underline{C}_r \underline{x}_r(k) \quad (69)$$

- ker mora imeti referenčni model ojačenje enako ena, morajo matrike  $\underline{A}_r$ ,  $\underline{B}_r$  in  $\underline{C}_r$  izpolnjevati naslednji pogoj:

$$\underline{C}_r (\underline{I} - \underline{A}_r)^{-1} \underline{B}_r = \underline{I} \quad (70)$$





- Predikcijo v časovnem trenutku  $k$  za  $H$  korakov v prihodnosti dobimo podobno kot v primeru regulatorja PFC z modelom prvega reda (konstantni regulirni signal v prihodnosti):

$$\underline{x}_m(k+H) = \underline{A}_m^H \underline{x}_m(k) + (\underline{A}_m^H - \underline{I})(\underline{A}_m - \underline{I})^{-1} \underline{B}_m \underline{u}(k) \quad (71)$$

$$\underline{y}_m(k+H) = \underline{C}_m \underline{x}_m(k+H) \quad (72)$$

- Podobno zapišemo enačbo za referenčni model:

$$\underline{x}_r(k+H) = \underline{A}_r^H \underline{x}_r(k) + (\underline{A}_r^H - \underline{I})(\underline{A}_r - \underline{I})^{-1} \underline{B}_r \underline{w}(k) \quad (73)$$

$$\underline{y}_r(k+H) = \underline{C}_r \underline{x}_r(k+H) \quad (74)$$

- Ponovno rešimo enačbo 52, kjer je inkrement modela:

$$\Delta_m = \underline{C}_m (\underline{A}_m^H \underline{x}_m(k) + (\underline{A}_m^H - \underline{I})(\underline{A}_m - \underline{I})^{-1} \underline{B}_m \underline{u}(k)) - \underline{y}_m(k) \quad (75)$$

- in inkrement procesa

$$\Delta_p = \underline{C}_r (\underline{A}_r^H \underline{x}_r(k) + (\underline{A}_r^H - \underline{I})(\underline{A}_r - \underline{I})^{-1} \underline{B}_r \underline{w}(k)) - \underline{y}_p(k) \quad (76)$$



- Regulirni zakon dobimo v naslednji obliki:

$$\underline{u}(k) = G_0^{-1}(\underline{y}_r(k+H) + \underline{y}_m(k) - \underline{y}_p(k) - \underline{C}_m \underline{A}_m^H \underline{x}_m(k)) \quad (77)$$

- kjer je:

$$\underline{y}_r(k+H) = \underline{C}_r(\underline{A}_r^H \underline{x}_r(k) + (\underline{A}_r^H - \underline{I})(\underline{A}_r - \underline{I})^{-1} \underline{B}_r \underline{w}(k)) \quad (78)$$

- in  $G_0$ :

$$G_0 = \underline{C}_m(\underline{A}_m^H - \underline{I})(\underline{A}_m - \underline{I})^{-1} \underline{B}_m \quad (79)$$

- Če izberemo referenčni model tako, da je  $\underline{C}_r = \underline{I}$  in  $\underline{B}_r = (\underline{I} - \underline{A}_r)$ , se regulacijski zakon (enačba 77) poenostavi. Predikcijo referenčnega signala na ta način lahko zapišemo kot:

$$\underline{y}_r(k+H) = \underline{A}_r^H \underline{y}_r(k) + (\underline{I} - \underline{A}_r^H) \underline{w}(k) \quad (80)$$



- Rešimo enačbo 52 ob upoštevanju  $\underline{y}_p(k) = \underline{y}_r(k)$ , kjer je:

$$\Delta_m = \underline{C}_m(\underline{A}_m^H \underline{x}_m(k) + (\underline{A}_m^H - \underline{I})(\underline{A}_m - \underline{I})^{-1} \underline{B}_m \underline{u}(k)) - \underline{y}_m(k) \quad (81)$$

- in

$$\Delta_p = \underline{A}_r^H \underline{y}_r(k) + (\underline{I} - \underline{A}_r^H) \underline{w}(k) - \underline{y}_p(k) \quad (82)$$

- Dobimo poenostavljen regulacijski zakon:

$$\underline{u}(k) = \underline{G}(\underline{w}(k) - \underline{y}_p(k)) + G_0^{-1} \underline{y}_m(k) - G_0^{-1} \underline{C}_m \underline{A}_m^H \underline{x}_m(k) \quad (83)$$

- kjer je:

$$\underline{G} = G_0^{-1} (\underline{I} - \underline{A}_r^H) \quad (84)$$

in  $G_0$ :

$$G_0 = \underline{C}_m (\underline{A}_m^H - \underline{I})(\underline{A}_m - \underline{I})^{-1} \underline{B}_m \quad (85)$$

- Kot vidimo iz enačbe 77 in 83 regulator obstaja le, če je vrednost izraza  $G_0$  različna od nič.
- Izraz  $G_0$  je različen od nič za stabilne, vodljive in spoznavne procese.



# PFC regulator na osnovi modela v prostoru stanj za referenčni signal rampe

- Klasični regulatorji so neustrezni za sledenje rampi brez pogreška za proporcionalne tipe procesa. Zaradi zahteve po odprtozančni prenosni funkciji druge vrste (2 pola v koordinatnem izhodišču). To posledično povzroči probleme s stabilnostjo sistema.
- PFC na osnovi modela v prostoru stanj uspešno reši problem sledenja rampi.
- Regulirni signal za proporcionalne procese v primeru sledenja rampi ima obliko rampe

$$u(k + H) = u(k) + H\Delta u(k)$$

- Za določitev regulirnega signala moramo določiti  $u(k)$  in  $\Delta u(k)$ .
- Rešujemo sistem dveh enačb, ki jih dobimo pri dveh horizontih ujemanja  $H_1$  in  $H_2$ .
- Predikcijo v časovnem trenutku  $k$  za  $H$  korakov v prihodnosti dobimo

$$y_m(k + H) = \underline{C}_m \underline{A}_m^H x_m(k) + \Sigma_0(H)u(k) + \Sigma_1(H)\Delta u(k) \quad (86)$$

(87)

- Pri poenostavitvi za

$$\Sigma_0(H) = \underline{C}_m \left( \underline{A}_m^{H-1} + \underline{A}_m^{H-2} + \cdots \underline{I} \right) \underline{B}_m = \underline{C}_m \left( \underline{I} - \underline{A}_m^H \right) \left( \underline{I} - \underline{A}_m \right)^{-1} \underline{B}_m$$

$$\Sigma_1(H) = \underline{C}_m \left( \underline{A}_m^{H-2} + 2\underline{A}_m^{H-3} + \cdots + (H-2)\underline{A}_m + (H-1)\underline{I} \right) \underline{B}_m$$

$$\Sigma_1(H) = \underline{C}_m \left( H\underline{I} - \Sigma_0(H) \right) \left( \underline{I} - \underline{A}_m \right)^{-1} \underline{B}_m$$



# PFC regulator na osnovi modela v prostoru stanj za referenčni signal rampe

- Pogrešek med referenčno trajektorijo  $w$  in izhodom procesa  $y_p$  označimo z  $e$ .
- PFC regulator vnaša dinamiko, ki zahteva eksponencialno izregulacijo pogreška  $e(k)$ . To pomeni

$$e(k+H) = a_r^H e(k) \quad (88)$$

kjer je  $a_r$  konstanta, ki določa hitrost izregulacije pogreška,  $0 < a_r < 1$ .

- Vrednost modelne referenčne spremenljivke pri horizontu ujemanja  $H$  je enaka,  $y_r(k+H)$

$$y_r(k+H) = w(k+H) - a_r^H e(k) \quad (89)$$

- Vrednost izhoda procesa pri v trenutku  $k$  enako definiramo glede na vrednost reference in pogreška

$$y_p(k) = w(k) - e(k) \quad (90)$$

- Inkrement procesa pri horizontu ujemanja  $H$  je definiran kot razlika med  $y_r(k+H)$  in vrednostjo izhodnega signala  $y_p(k)$

$$\Delta_p(H) = y_r(k+H) - y_p(k) = (w(k+H) - a_r^H e(k)) - (w(k) - e(k)) \quad (91)$$

- inkrement procesa je odvisen od prirastka zaradi spremembe reference in eksponencialnega zmanjševanja pogreška med referenco in izhodom

$$\Delta_p(H) = w(k+H) - w(k) + (1 - a_r^H) (w(k) - y_p(k)) = (1 - a_r^H) e(k) \quad (92)$$



# PFC regulator na osnovi modela v prostoru stanj za referenčni signal rampe

- Inkrement modela procesa  $\Delta_m(H)$  pri horizontu ujemanja  $H$  je definiran kot razlika med  $y_m(k+H)$  in vrednostjo izhoda modela  $y_m(k)$

$$\Delta_m(H) = \underline{C}_m \underline{A}_m^H x_m(k) + \Sigma_0(H)u(k) + \Sigma_1(H)\Delta u(k) - y_m(k) \quad (93)$$

- Zapišimo osnovno enačbo enakosti med inkrementom procesa in model pri horizontu ujemanja  $H$ ,  $\Delta_p(H) = \Delta_m(H)$

$$w(k+H) - w(k) + (1 - a_r^H)(w(k) - y_p(k)) = \underline{C}_m \underline{A}_m^H x_m(k) + \Sigma_0(H)u(k) + \Sigma_1(H)\Delta u(k) - y_m(k) \quad (94)$$

- Če predpostavimo, da imamo referenco rampe, ki jo lahko zapišemo kot

$$w(k+H) = w(k) + H\Delta w \quad (95)$$

- Dobimo poenostavljeno enakost pri horizontu ujemanja  $H$

$$H\Delta w + (1 - a_r^H)(w(k) - y_p(k)) - \underline{C}_m \underline{A}_m^H x_m(k) + y_m(k) = \Sigma_0(H)u(k) + \Sigma_1(H)\Delta u(k) \quad (96)$$



# PFC regulator na osnovi modela v prostoru stanj za referenčni signal rampe

- Imamo eno enačbo in dve neznani vrednosti, ki določata regulirni signal,  $u(k)$  in  $\Delta u(k)$
- Določimo dve enačbi pri dveh (zadosti različnih) horizontih ujemanja  $H_1$  in  $H_2$

$$H_1 \Delta w + (1 - a_r^{H_1}) (w(k) - y_p(k)) - \underline{C}_m \underline{A}_m^{H_1} \underline{x}_m(k) + y_m(k) = \Sigma_0(H_1)u(k) + \Sigma_1(H_1)\Delta u(k) \quad (97)$$

$$H_2 \Delta w + (1 - a_r^{H_2}) (w(k) - y_p(k)) - \underline{C}_m \underline{A}_m^{H_2} \underline{x}_m(k) + y_m(k) = \Sigma_0(H_2)u(k) + \Sigma_1(H_2)\Delta u(k) \quad (98)$$

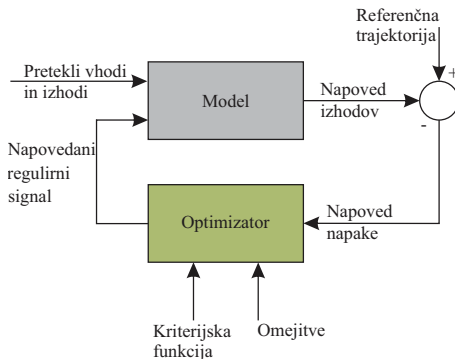
- v matrični obliki



# Prediktivno vodenje z omejitvami - MBPC z omejitvami

Glavni elementi MBPC so

- prediktivni model procesa
- kriterijska funkcija
- izračun regulacijskega zakona (analitično ali z optimizacijo)
- omejitve



Slika 5: Koncept prediktivnega vodenja na osnovi modela



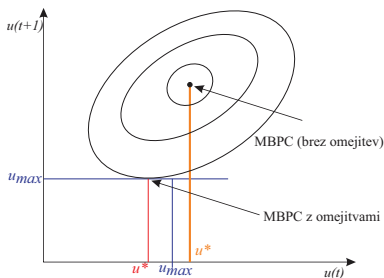


MBPC in izračun regulirnega zakona:

- če v sistemu ni omejitev ali jih ne upoštevamo, potem je optimizacijo kriterijske funkcije mogoče izvesti analitično (GPC, DMC, PFC)
- če so v sistemu omejitve, potem rešitev dobimo s pomočjo optimizacije (omejitve izvršnih členov, ekonomski vidiki navadno rezultirajo v delovanju sistema na mejah omejitev)

Za optimizacijske probleme z omejitvami moramo zagotoviti naslednje:

- kvadratično kriterijsko funkcijo
- eksistenco realne rešitve optimizacijskega problema z omejitvami, ki zadostuje vsem omejitvam
- konveksen prostor kriterijske funkcije z omejitvami, kar omogoča eksistenco enkratne rešitve



Slika 6: Kriterijska funkcija z omejitvami



- če upoštevamo linearne omejitve, potem lahko prediktivni regulacijski zakon izračunamo z rešitvijo optimizacijskega problema s kvadratičnim programiranjem (QP). QP je optimizacijski problem s kvadratično kriterijsko funkcijo in linearnimi omejitvami in ga lahko rešimo numerično,

$$\min_{\Delta u(k+j)} J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \left( y(k+j) - r(k+j) \right)^2 + \lambda \sum_{j=0}^{N_u} \left( \Delta u(k+j) \right)^2 \quad (99)$$

$$u_{min} \leq u(k+j) \leq u_{max}, j = 1, \dots, N_u \quad (100)$$

$$\Delta u_{min} \leq \Delta u(k+j) \leq \Delta u_{max}, j = 1, \dots, N_u \quad (101)$$

$$y_{min} \leq \hat{y}(k+j) \leq y_{max}, j = 1, \dots, N_2 \quad (102)$$

- rešitev zgornjega optimizacijskega problema nam da rešitve  $u(k+j), j = 1, \dots, N_u$ , kjer je za optimizacijo potrebno dobiti napovedi (predikcijo) izhoda procesa, ki jo dobimo na osnovi modela,
- za časovne trenutke  $j > N_u$  predpostavljamo konstanten regulirni signal.
- Matlab primer: PFC in PSO optimizacija.



## Koncept PFC in PSO optimizacija:

- Predpostavimo eksponencialno izregulacijo regulacijskega pogoška  $e(k)$ , kjer je  $e(k) = w(k) - y_p(k)$ . Ob predpostavki konstantne reference  $w(k)$  dobimo

$$e(k+H) = a_r^H e(k), \quad 0 < a_r < 1 \quad (103)$$

kjer je  $a_r$  konstanta referenčnega modela.

- Vrednost referenčnega modela pri horizontu ujemanja  $H$  je enaka,  $y_r(k+H)$

$$y_r(k+H) = w(k+H) - a_r^H e(k) \quad (104)$$

- Inkrement procesa pri horizontu ujemanja  $H$  je definiran kot razlika med  $y_r(k+H)$  in vrednostjo izhodnega signala  $y_p(k)$

$$\Delta_p(H) = y_r(k+H) - y_p(k) = (w(k+H) - a_r^H e(k)) - (w(k) - e(k)) \quad (105)$$

- in ob predpostavki  $w(k) = w(k+H)$

$$\Delta_p(H) = (1 - a_r^H) e(k) \quad (106)$$

- iz osnovne enačbe PFC koncepta ( $\Delta_m(H) = \Delta_p(H)$ ) sledi

$$y_m(k+H) = y_m(k) + (1 - a_r^H) e(k) \quad (107)$$

- optimalno vodenje dobimo (najhitrejši odzivi ob upoštevanju omejitev), če gre  $a_r \rightarrow 0$

$$y_m(k+H) = y_m(k) + e(k)$$



(108)

- Optimizacija delovanja mikroomrežja Huatacondo, Čile



Slika 7: Optimizacija delovanja mikroomrežja



- Optimizacija delovanja mikroomrežja Huatacondo, Čile

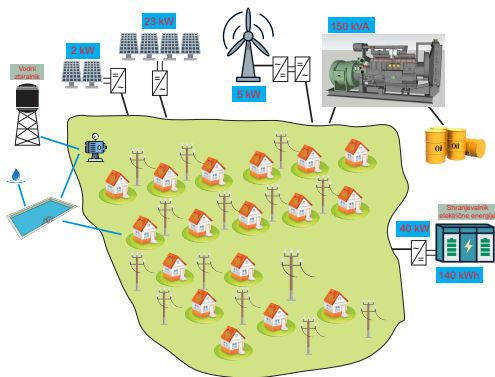


Slika 8: Optimizacija delovanja mikroomrežja



# Prediktivno vodenje z omejitvami - primer mikroomrežja

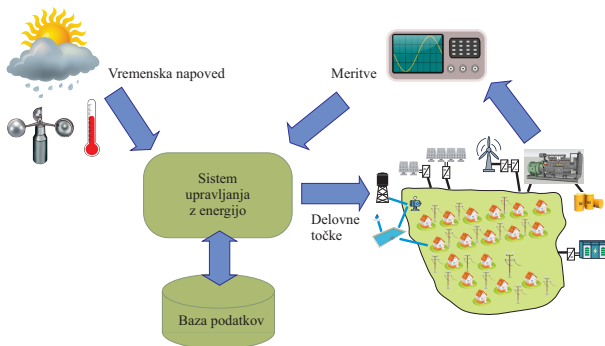
- **Vhodi:** razpoložljiva moč solarne elektrarne  $PS$ , minimalna in maksimalna moč,  $PS_{min}$  in  $PS_{max}$ , moč vetrne elektrarne,  $PE$ , minimalna in maksimalna,  $PE_{min}$  in  $PE_{max}$ , profil uporabniške porabe,  $PL$ , poraba vode  $WC$ , napetost baterij  $V_i$  in tok  $I_i$ , nivo vodnih rezervarjev  $VT_i$  in stanje dizelskih agregatov  $BG_i$  (on/off).
- **Izhodi:** referenčna moč dizelskih agregatov ( $PD$ ), invertorska moč  $PI$ , binarni signal vodnega napajalnega sistema  $BP$ .



Slika 9: Shema delovanja mikroomrežja



- Sistem upravljanja z energijo (EMS - Energy Management System) zagotavlja sprotno nastavljene točke za vsako proizvodno enoto in informiranje odjemalcev (mehanizem upravljanja na strani povpraševanja (DSM - Demand System Management))



Slika 10: Sistem upravljanja z energijo (EMS)



- **Kriterijska funkcija:** EMS, ki temelji na MPC, minimizira operativne stroške pri zagotavljanju potreb po vodi in obremenitvi, ob upoštevanju napovedi vremenskih razmer za dva dni vnaprej ( $N = 192$ , 15-minutni koraki).

$$J = \delta_1 \sum_{j=1}^N C(k+j) + \sum_{j=1}^N C_s(k+j) + \delta_2 C_{US} \sum_{j=1}^N P_{US}(k+j) + C_{Tf} \sum_{j=1}^N V_{Tf}(k+j) + C_H(N) \quad (109)$$

$C$  je cena goriva za dizelski agregat,  $C_s$  je cena start-up procedure za dizelski agregat,  $P_{US}$  je cena neporabljene energije,  $V_{Tf}$  je cena nedobavljene vode in  $C_H$  je penalizacija življenske dobe.

- **Omejitve:** Izpolnjena mora biti bilanca moči v mikroomrežju in fizične omejitve posameznih moči.

$$P_S(k+j) + P_E(k+j) + P_D(k+j) + P_I(k+j) + P_{US}(k+j) = P_L(k+j) + B_P(k+j)P_p \quad (110)$$

$P_S$  je moč solarne elektrarne,  $P_E$  je moč veterne elektrarne,  $P_D$  je moč dizelskega agregata,  $P_I$  je moč invertorja,  $P_{US}$  je neporabljena moč in na strani porabe moči nastopata moč bremena omrežja  $P_L$  in moč vodnih črpalk  $P_p$ .

- Modeliranje sistema: konvencionalnega in obnovljivega dela sistema z linearnimi modeli.





## Končna opažanja:

- EMS na osnovi MPC izkazuje izboljšano delovanje predvsem zaradi upoštevanja napovedi posameznih dejavnikov.
- Operativni stroški mikroomrežja z uporabo EMS na osnovi MPC so zmanjšani (posebno v primeru posebnih profilov uporabe) v primerjavi z uporabo klasičnih sistemov.
- Prednosti DSM so dosežene tudi s preusmeritvijo potrošnikov v obdobja, ko je na voljo več obnovljivih virov.
- EMS omogoča učinkovito upravljanje oskrbe z vodo z aktivacijo vodne črpalke kot prilagodljive obremenitve, zlasti v obdobjih s presežkom energije.

