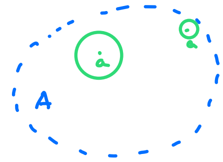
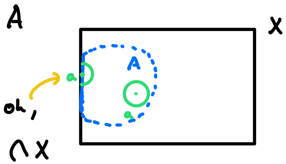
Množica v $\mathbb{R}^n$



$A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$

- A je odprta v $\mathbb{R}^n$, če za $\forall a \in A$ $\exists \varepsilon > 0$ tako da $K(a,\varepsilon) \subseteq A$
- A je odprta v X, če za $\forall a \in A$ $\exists \varepsilon > 0$ tako da $K(a,\varepsilon) \cap X \subseteq A$



tudi ok, ker smo $\cap X$

A je odprta v X a ne v $\mathbb{R}^n$

- A je zaprta v X, če je $X \setminus A$ odprta v X
  ($\{\emptyset\}$ in X sta vedno odprti v X)
- X je povezana, če sta X in $\{\emptyset\}$ edini podmnožici mn. X ki sta hkrati odprti in zaprti v X.
- X je povezana s potmi, če za $\forall a, b \in X$ $\exists \gamma: [0,1] \to X$: $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$
  γ je zvezna. Vsaka s potmi povezana množica je povezana.
- X je kompaktna $\Leftrightarrow$ je zaprta in omejena.

Fourierova vrsta

$f \in L^1(-L, L)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n \geq 1} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{n\pi i}{L}x} \qquad c_n \in \mathbb{C}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad c_n = \frac{\langle u, u_n\rangle}{\langle u_n, u_n\rangle} \qquad \langle f, g\rangle = \int f \cdot \bar{g}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

Če je f zv. odv. je Four. razvoj povsod enak funkciji f.

$$\boxed{\hat{f}(\vec{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\, e^{-i\langle\vec{\omega}, \vec{x}\rangle}\, dV(\vec{x})}$$

$\boxed{f(\vec{x}) \text{ odvisna le od } |\vec{x}| \Rightarrow \hat{f}(\vec{\omega}) \text{ odvisna le od } |\vec{\omega}|}$

Dirichletov problem

D (omejeno) območje v $\mathbb{R}^2$
$f: \partial D \to \mathbb{R}$ zvezna
Iščemo $u: \bar{D} \to \mathbb{R}$
$u: D \to \mathbb{R}$ harmonična
$u|_{\partial D} = f$

smerni / normalni odvod

Rešitev: $\iint \ldots dS$ ali
$$u(\vec{r}_0) = \int_{\partial D} \underbrace{\partial_{\vec{n}} G(\vec{r}, \vec{r}_0)}_{\text{Poissonovo jedro}} f(\vec{r})\, ds$$

Greenova funkcija za $D \subseteq \mathbb{R}^2$
$G(\vec{r}, \vec{r}_0) : \bar{D} \times D \to \mathbb{R}$ z naslednjimi lastnostmi:

1. $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\log|\vec{r} - \vec{r}_0| + u(\vec{r}, \vec{r}_0)$,
   u harmonična na D
   (kot funkcija $\vec{r}$)
   [$\Delta G = \delta_{\vec{r}, \vec{r}_0}$
2. $G(\vec{r}, \vec{r}_0)|_{\vec{r} \in \partial D} = 0$

Za $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je vse isto le:
$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} + u(\vec{r}, \vec{r}_0)$

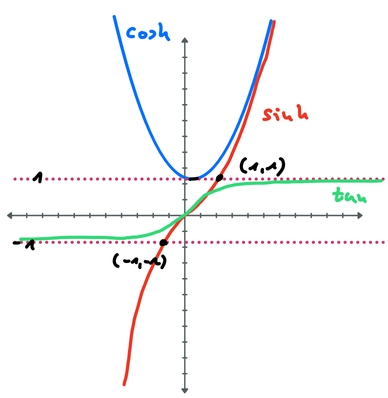
Taylorjeve vrste

$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2$
$(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$
$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$
$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Geometrijska vrsta $\quad 1 + q + q^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Trigonometrija

$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp \sin x \qquad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp \cot x \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
$\cot(\pi - x) = -\cot x$



Trigonometrične formule:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$
$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Holomorfne funkcije

- Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ območje (tj. odprta povezana množica). Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ je *holomorfna* v točki $z \in D$, če obstaja limita $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$.
- Vsaka potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je holomorfna na svojem konv. območju (konv. radij $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$).
- Funkcije cos, sin, ch, sh so definirane kot potenčne vrste in so holomorfne povsod. Velja $\cos z = \mathrm{ch}(iz)$, $i \sin z = \mathrm{sh}(iz)$, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. $= \mathrm{ch}\, iz + \mathrm{sh}\, iz$
- Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ funkcija, definirana na območju $D \subseteq \mathbb{C}$. Pišimo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $u, v : D \to \mathbb{R}$. Potem je f holomorfna na D natanko tedaj, ko sta u, v zvezno parcialno odvedljivi in veljata Cauchy-Riemannovi enakosti: $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$. Tedaj je $f' = u_x + iv_x$, u in v pa sta harmonični funkciji.

Kompleksni integral

- $\int_\gamma f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\dot{z}(t)dt$

brez lukenj

- Naj bo f holomorfna na enostavno povezanem območju D, $\alpha \in D$ in γ sklenjena pot v D, ki ne gre skozi α. Potem je:
  (1) $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ — index povezanosti ovojno število
  (2) $\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = I_\gamma(\alpha) f(\alpha)$
  (3) $\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz = I_\gamma(\alpha) \cdot \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$

Laurentova vrsta

- *Laurentov razvoj* holomorfne funkcije f na kolobarju $r < |z-\alpha| < R$ je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-\alpha)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz,$$

kjer je γ poljubna sklenjena pot na danem kolobarju z ovojnim številom $I_\gamma(\alpha) = 1$. Prva vrsta v formuli konvergira vsaj na območju $|z-\alpha| < R$, druga pa vsaj na območju $|z-\alpha| > r$.

Logaritem, Liouvillov izrek in princip identičnosti

- $\log z = \log |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$
- Če je f *cela* funkcija (tj. holomorfna na $\mathbb{C}$) in je $|f|$ omejena, potem je f konstantna (Liouvillov izrek).
- Naj bosta f, g holomorfni na območju D. Če se f in g ujemata na množici $A \subseteq D$ s stekališčem v D, potem je $f = g$ na D (princip identičnosti).

Residuum

- Če je α izolirana singularnost funkcije f in $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ njen Laurentov razvoj okrog α, potem je $\mathrm{Res}(f, \alpha) = c_{-1}$ *residuum* funkcije f v točki α.
- Če ima f pol stopnje največ m v točki α, je $\boxed{\mathrm{Res}(f,\alpha) = \frac{((z-\alpha)^m f(z))^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}}$.
- Če je D enostavno povezano območje, f holomorfna na $D \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ in γ sklenjena krivulja v D, potem je $\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, \alpha_j) I_\gamma(\alpha_j)$. indeks
- Naj bo R holomorfna funkcija s končno singularnostmi v zgornji polravnini in brez singularnosti na realni osi.
  (1) Če ima R ničlo stopnje vsaj 2 v neskončnosti (tj. obstaja limita $\lim_{z\to\infty} z^2 f(z)$), potem je
  $$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \mathrm{Res}(R, \alpha).$$
  (2) Če ima R ničlo stopnje vsaj 1 v neskončnosti (tj. obstaja limita $\lim_{z\to\infty} z f(z)$), potem je
  $$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\alpha>0} \mathrm{Res}(R(z)e^{iz}, \alpha).$$

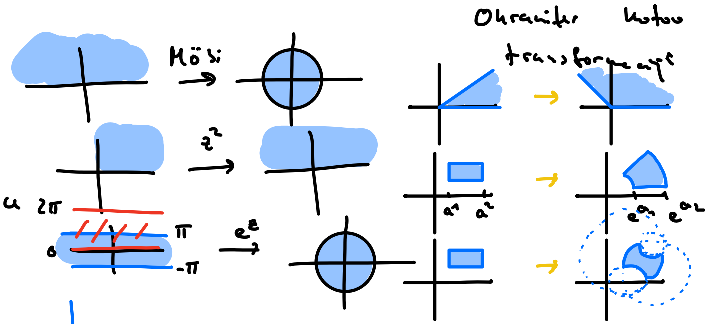
Princip maksima in biholomorfne preslikave

odprto in povezano

- Če je f nekonstantna in holomorfna na območju D, potem $|f|$ ne doseže maksimuma na D. Če je še f zvezna na $\bar{D}$ in je območje D omejeno, potem f na $\bar{D}$ doseže maksimum na ∂D.
- Funkcija $f(z) = z^t$, $t > 0$, biholomorfno preslika območje $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2,\ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$ na $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1^t < |z| < r_2^t,\ t\varphi_1 < \arg z < t\varphi_2\}$.
- Funkcija $f(z) = e^z$ biholomorfno preslika pravokotnik $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \in (a_1, a_2),\ \mathrm{Im}\, z \in (\varphi_1, \varphi_2)\}$ na $\{z \in \mathbb{C} \mid e^{a_1} < |z| < e^{a_2},\ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$.
- *Möbiusove transformacije* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad \neq bc$, biholomorfno preslikajo $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nase, so določene s slikami treh točk in ohranjajo množico $\{\text{premice v } \mathbb{C}\} \cup \{\text{krožnice v } \mathbb{C}\}$.
- Vse biholomorfne preslikave iz kroga $D(0,1)$ nase so Möbiusove transformacije oblike $f(z) = \omega \cdot \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, $|\alpha| < 1$, $|\omega| = 1$.

Princip maksima in minima
Naj bo f nekonstantna hol. funk. na odprti mn. D. Potem $|f|$ ne zavzame maksima na D, minim pa zavzame le v ničlah funkcije f.

Ohranitev kotov pri transformacije



Holomorfne funkcije

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna, $f = u + iv \to u, v$ harmonični

$u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ harmonična $\Rightarrow \exists f : D \to \mathbb{C}$ hol, $\mathrm{Re}\, f = u$

D enostavno povezano (brez lukenj)

Fourierova transformacija

- $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \widehat{f(x)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$
- $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}$ zvezna, $\hat{f}(\omega) \xrightarrow{|\omega|\to\infty} 0$
- $\widehat{f(x) e^{iax}} = \hat{f}(\omega - a)$ $\quad a \in \mathbb{R}$
- $\widehat{f(ax)} = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ $\quad a > 0$
- $\widehat{f(x-a)} = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$
- f odvedljiva in $f' \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f'} = i\omega \hat{f}$
- $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\, \hat{f} \cdot \hat{g}$ $\qquad \widehat{f \cdot g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}$
- $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
- $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ skoraj povsod
- $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int f \cdot \bar{g}\, dx$ (celo na $L^2(\mathbb{R})$)

f	$\hat{f}$
$e^{-\frac{x^2}{2}}$	$e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
$e^{-\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$
$\chi_{[-a,a]}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\omega)}{\omega}$

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

Kompleksne diferencialne enačbe

$y'' + p(z) y' + q(z) y = 0$

Če sta p in q holom.

je isto kot prej [illegible]

$y'' + a(z) y' + b(z) y = 0$
a, b holomorfni okrog α
$y = \sum_{n\geq 0} c_n (z-\alpha)^n$

Če nista holom. (imata pol)

$p(z)$ pol st ≤ 1 v $z = \alpha$
in $q(z)$ pol st ≤ 2 v $z = \alpha$
je nastavek $y = (z-\alpha)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$
$c_0 \neq 0 \qquad r \in \mathbb{C}$

(upamo, da dobimo dve rešitvi,
če dobimo le eno, računamo še za drugi r,
upamo da sta lin. neodv.
Če nista lin. neodv. rešitvi lahko dobimo
z determinanto Wronskega
$y_2 = y_1\, u(z) \Rightarrow$ damo v DE in
rešimo enačbo za u