geslo je "EMP"

Elektrostatika

Coulombova sila med naboji

Elektrostatika opisuje sile med mirujočimi naboji ki so konstantni / časovno nespremenljivi.
Točkasti nabiti delci med seboj delujejo s silo

$$\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

ε_0 ... influenčna konstanta

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Velikost in enote električnega naboja

- Naboj merimo v $C = As$
- Naboj je (praviloma) mnogokratnik e_0 $\quad e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19} As$

Pojav	Naboj
naboj kvarka	$\frac{1}{3} e_0$, $\frac{2}{3} e_0$
naboj e^-	e_0
naboj na kondenzatorju	$10^{-7} As$
naboj pri blisku	$1 - 100 As$
akumulator	$0{,}2 - 10^6 As$
naboj zemlje (brez atmosfere)	$5 \cdot 10^5 As$
(z atmosfero)	$1 As$
elektrarna v enem letu	$10^{14} As$

Jakost električnega polja

- V Faradayevi oz. Maxwellovi sliki se delovanje / interakcije med nabitimi delci opiše z delovanjem električnega polja.
- El. polje je posrednik interakcije.
- El. silo izračunamo kot $\vec{F} = e\vec{E}$ $\quad (\vec{F}_{21} = e_1 \vec{E}_2)$
- Smer $\vec{E}$ je vedno določena s smerjo sil
- Električno polje za točkast naboj $\quad \vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$
- Transformacijske lastnosti $\vec{E}$:

  $\vec{E}$ je vektor torej se pri ortogonalni transformaciji transformira kot vektor.

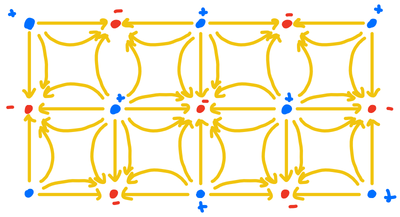
  $\vec{E}' = \underline{a}\vec{E}$

  $|\vec{E}|^2$ ... intenziteta .. je skalar, rotacijsko invarianten
- Velikosti jakosti E

Pojav	E
kozmično sevanje	$10 \mu V/m$
polje znotraj žice	$0{,}5\ mV/m$
polje v zem. atmosferi	$100 - 300\ V/m$
prebojna jakost v atm.	$1 - 3\ MV/m$
polje preko bio. membran	$10\ MV/m$
polje v laserju	$100\ TV/m$

Električne silnice

- Električne silnice kažejo v smeri el. polja.
- Uvedemo jih kot krivuljo $\dot{\vec r}(s) = \frac{d\vec r}{ds} = \frac{\vec E(\vec r(s))}{|\vec E(\vec r(s))|}$
- Primer: nariši silnice



Faradayjeva konstrukcija

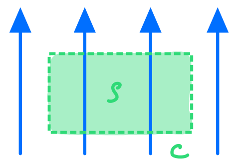
- Silnice se ne sekajo
- Gostota silnic ustreza jakosti el. polja
- Silnice so nezaključene

Električna cirkulacija

$$\Gamma_e = \oint_c \vec E \cdot d\vec r$$

po zaključeni zanki c

Primer



$\Gamma_e = 0$

Za vsa statična polja velja $\Gamma_e = 0$

iz česar sledi

$$\boxed{0 = \oint_c \vec E \cdot d\vec r = \int_S (\nabla \times \vec E)\, d\vec S}$$

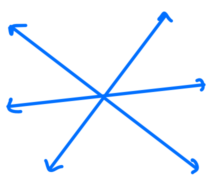
$c = \partial S$

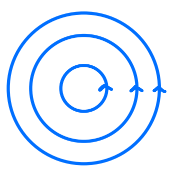
Stokesov izrek

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec E = 0}$$

Torej je statično el. polje brezvrtinčno

Primer: kakšni sta polji:





$E = E_0(r)\frac{\vec r}{r}$

$\vec B = B_0 \hat e_\varphi = B_0\left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0\right)$

$\nabla \times \vec r = 0$

$$\nabla \times \vec B = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{y}{r} & -\frac{x}{r} & 0 \end{vmatrix} = \left(\overset{=0}{\partial_z \frac{x}{r}}, -\overset{=0}{\partial_z \frac{y}{r}}, \overset{\neq 0}{-\partial_x \frac{x}{r} + \partial_y \frac{y}{r}}\right)$$

Električni pretok

$$\Phi_e = \int_S \vec E \cdot d\vec S$$

Kakšna je ploskev S? Poljubna

Posebna ploskev je zaključena ploskev $\Rightarrow$ Gaussov izrek $\oint \vec E\, d\vec S = \frac{e}{\varepsilon_0}$

Električni potencial

Elektrostatski oz. električni potencial uvedemo kot skalarno funkcijo oz. polje kot

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})}$$

Zakaj uvesti φ? Ker je skalar

Primer: el. potencial točkastega naboja
$\vec{E} = -\nabla\varphi$

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\nabla\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \varphi_0\right)$$

↳ potencial je do konstante natančen

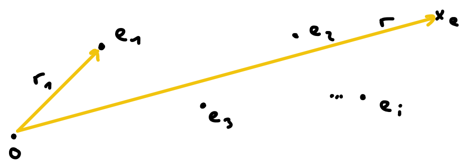
$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \varphi_0$ za točkasti naboj

↳ temu se reče umeritev (da določimo φ_0)

↳ v tem primeru je konstanta v splošnem pa je lahko tudi funkcija

Princip superpozicije

Obravnavamo:



Kakšna je sila na e?
V takem sistem je sila na naboj e

$$\vec{F} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{e_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Princip superpozicije

Enako velja za $\vec{E}$ in φ (kar pogosto ne velja za druge fizikalne polja)

Gostota naboja

El. naboj je pogosto porazdeljen, zato se uvede količino volumska gostota naboja

Diskretno:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i e_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Zvezno:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{de}{dV}$$

Z uporabo gostote naboja $\Rightarrow \vec{F}, \vec{E}, \varphi$

$$\vec{F} = \int_V \rho(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r})\,d^3\vec{r} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,d^3\vec{r}' \qquad \varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3\vec{r}'$$

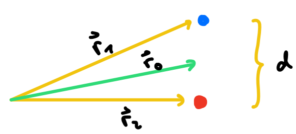
Primeri gostote naboja

1. Točkast naboj

$$\rho(\vec{r}) = e\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

↳ tu se nahaja naboj

2. Točkast dipol



$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) &= e\left(\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) - \delta(\vec{r}-\vec{r}_2)\right)\\ &= e\,\delta(\vec{r}-(\vec{r}_0+\delta\vec{r})) - e\,\delta(\vec{r}-(\vec{r}_0+\delta\vec{r}))\\ &= -e\,\delta\vec{r}\,\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) - e\,\delta\vec{r}\,\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\\ &= -\underbrace{e\,2\delta\vec{r}}_{\vec{p}}\,\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \ldots\end{aligned}$$

$\vec{p}$ dipolni moment

predpostavimo da $\delta\vec{r}$ majhen
$f(\vec{r}+\vec{h}) = f(\vec{r}) + \nabla f(\vec{r})\,\vec{h}$

$$\nabla(\vec p\,\delta(\vec r-\vec r_0)) = \underbrace{(\nabla\cdot\vec p)}_{=0}\,\delta(\vec r-\vec r_0) + \vec p\,\nabla(\delta(\vec r-\vec r_0))$$

3D delta ... enote $\frac{1}{m^3}$

$$\dots = -\nabla(\underbrace{\vec p\,\delta(\vec r-\vec r_0)}_{\vec P})$$

$\vec P$ ... polarizacija ... gostota dipolnega momenta na enoto volumna

$$\boxed{\rho = -\nabla\cdot\vec P = -\nabla\cdot(\vec p\,\delta(\vec r-\vec r_0))}$$

volumska gostota naboja

volumska gostota dipolnega momenta

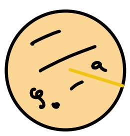
V sistemu el. dipolov sta gostota naboja in polarizacija neposredno povezani

③ Površinsko porazdeljen naboj

Naboj na tanki plasti ... $\sigma(\vec\rho)$ → teče po površini

$$\rho(\vec r) = \sigma(\vec\rho)\,\delta(z-z_0)$$

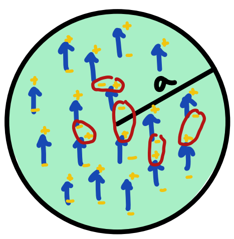
④ Volumsko porazdeljena gostota



$$\rho(\vec r) = \begin{cases}\rho_0 & \text{za } r<a\\ 0 & \text{sicer}\end{cases} = \rho_0\,H(a-r)$$

→ Heavyside

⑤ Volumsko porazdeljeni dipoli



Enakomerno po volumnu porazdeljeni dipoli

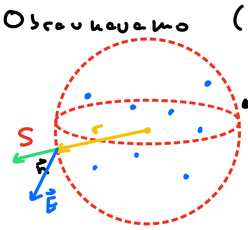
$$\vec P(\vec r) = \begin{cases}\vec P_0 & \text{če } r<a\\ 0 & \text{sicer}\end{cases} = \vec P_0\,H(a-r)$$

$$\begin{aligned}\rho(\vec r) &= -\nabla\cdot\vec P(\vec r) = \\ &= -\nabla\cdot(\vec P_0\,H(a-r)) = \\ &= -(\nabla\cdot\overset{=0}{\vec P_0})\,H(a-r) - \vec P_0\,\nabla H(a-r) = \\ &= -\vec P_0\,\delta(a-r)\,\frac{\vec r}{r}\end{aligned}$$

gostota naboja je le na robu krogle, v notranjosti se naboji "izničijo".

Integralna oblika Gaussovega izreka

Obravnavamo (diskretna slika):



sklenjena površina, površina naboje zaobjame

Zanima nas el. pretok skozi tako sk. pov., ki zaobjema naboje e_i.

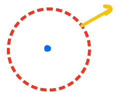
$$\oint_S \vec E\cdot d\vec S = \oint_S E\,dS\cos\theta(\vec r) = \oint \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec r-\vec r_i|^2}\cos\theta_i\,dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \underbrace{\oint_S \frac{e_i\cos\theta_i}{|\vec r-\vec r_i|^2}\,dS}_{4\pi}$$

teče po sferi

kje je i-ti naboj

kot med lokalno normalo in E i-tega naboja

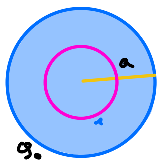


Npr. izberimo $\vec{r}_1 = 0$ $\qquad \vec{E} \parallel \vec{n} \qquad \theta_1 = 0$

$$\frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{\cos\theta_1}{|\vec{r}-\underset{0}{\vec{r}_1}|^2}\, dS = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{1}{r^2}\, dS = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{\cancel{r^2}}\cancel{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{e_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{e}{\varepsilon_0}} \qquad \text{Gaussov izrek}$$

Primer uporabe: el. polje enakomerno nabite krogle



$\rho = 0$

$$\rho_0 = \frac{3e}{4\pi a^3} \qquad \rho = \begin{cases} \rho_0 & r < a \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, d^3r$$

1. $r < a$

$$\oint E\, dS \cos\underset{0}{\theta} = E\oint dS = \underbrace{E\, 4\pi r^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{e}{\frac{4\pi a^3}{3}}\frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r \qquad E \propto r$$

2. $r > a$

$$\oint_{\partial V} E\, dS \cos\theta = E\oint dS = E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0\int H(a-r)\, dV = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{4\pi a^3}{3}$$

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad E \propto \frac{1}{r^2}$$

Diferencialna oblika Gaussovega izreka

↳ velja v vsaki točki, integralski pa na določenem območju

Uporabimo izrek Gauss-Ostrogradskega

$$\oint_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\, d^3r$$

Dif. oblika Gaussovega izreka

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \underline{\nabla\cdot\vec{E}}\, d^3r = \underline{\frac{1}{\varepsilon_0}}\int_V \underline{\rho(\vec{r})}\, d^3r \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Poissonova in Laplaceova enačba

Poissonova enačba je osnovna enačba, ki določa elektrostatski potencial in sicer sledi iz:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \text{Poissonova enačba}$$

→ če v prostoru ni naboja $\rho = 0$ $\Rightarrow \boxed{\nabla^2\varphi = 0}$ Laplaceova enačba

Greenove funkcije Poissonove enačbe

Metoda Greenove funkcije se uporablja za iskanje splošne rešitve v našem primeru Poissonove enačbe.

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Rešitev iščemo kot konvolucijo:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \underbrace{G(\vec{r}-\vec{r}')}_{\text{Greenova funkcija}} \rho(\vec{r}')\, d^3\vec{r}'$$

predpostavimo, da je rešitev take oblike

Kaj je Greenova funkcija? Uporabimo nastavek v Poissonovi en.

$$\nabla^2\varphi = \nabla^2 \int G(\vec{r}-\vec{r}')\, \rho(\vec{r}')\, d^3\vec{r}' = \int \nabla^2 G(\vec{r}-\vec{r}')\, \rho(\vec{r}')\, d^3\vec{r}' = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

deluje na $\vec{r}$ in ne na $\vec{r}'$

Če naj to velja:

$$\underbrace{\nabla^2 G(\vec{r}-\vec{r}')}_{\text{“}\nabla^2\varphi\text{”}} = -\underbrace{\frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}')}{\varepsilon_0}}_{\text{“naboj točkast se nahaja”}}$$

Če primerjamo to s prvotno enačbo vidimo da je G rešitev Poissonove enačbe za točkast naboj, ki se nahaja v $\vec{r}'$

Kakšna je Greenova funkcija? Gremo v Fourierov prostor

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')}\, G(\vec{k})\, d^3\vec{k}$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')} \cdot 1 \cdot d^3\vec{k}$$

Vstavimo v enačbo

$$\nabla^2 \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')}\, G(\vec{k})\, d^3\vec{k} + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')}\cdot 1\cdot d^3\vec{k} = 0$$

$$\int d^3\vec{k}\left(\nabla^2\left(e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')}G(\vec{k})\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')}\right) = 0$$

deluje na $\vec{r}$

$$\int d^3\vec{k}\left(\underbrace{-\vec{k}^2 G(\vec{k}) + \frac{1}{\varepsilon_0}}_{=0}\right)e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')} = 0$$

$$\Rightarrow \quad G(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2}$$

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')}\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}\, d^3\vec{k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin\theta d\theta\, \cancel{k^2} dk\, \frac{1}{\varepsilon_0 \cancel{k^2}}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2\varepsilon_0}\int_{-1}^{1}\int_0^\infty d\cos\theta\; e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')\cos\theta} = \dots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(\vec{r}-\vec{r}')}$$

Splošna rešitev Poissonove enačbe

$$\varphi(\vec r) = \int G(\vec r-\vec r')\,\rho(\vec r')\, d^3 r' \qquad G(\vec r - \vec r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(\vec r-\vec r')}$$

$$\boxed{\varphi(\vec r) = \int \frac{\rho(\vec r')}{4\pi\varepsilon_0(\vec r-\vec r')}\, d^3 r'}$$

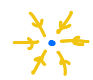
Ustrezno pa za el. polje:

$$\vec E = -\nabla\varphi = -\int \nabla \frac{\rho(\vec r')}{4\pi\varepsilon_0(\vec r-\vec r')}\, d^3 r' = -\int \frac{\rho(\vec r')\,(\vec r-\vec r')}{4\pi\varepsilon_0(\vec r-\vec r')^3}\, d^3 r'$$

Earnshawjev teorem

"Nabor točkastih nabojev ne more biti v stabilnem ravnovesju samo kot posledica elektrostatskih interakcij med naboji."

⇒ Elektrostatski potencial v praznem prostoru nima minimumov ali maksimumov ampak kvečjemu sedla.

Če je točka stabilen minimum morajo vanj silnice sile kazati  $(\nabla\cdot\vec F \neq 0)$

Ampak v elektrostatiki:

$$\nabla\cdot\vec F = \nabla\cdot(-e\nabla\varphi) = -e\nabla^2\varphi \underset{\text{v praznem prostoru}}{=} 0$$

Torej točke so kvečjemu sedla.

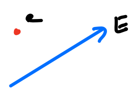
Thomsonov problem

Elektrostatska energija ima lahko minimume če naboje ogradiš, npr. na površino.

 npr. naboji na površini sfere

Elektrostatska energija

• V zunanjem polju



Gledamo naboj v zunanjem polju (ki ga ustvarjajo drugi naboji ampak ne naš)

$$\vec F = e\vec E$$

Izračunajmo energijo, kot potencial, ki je potreben, da ta naboj, ki "drži" na mestu

$$dA = -\vec F\cdot d\vec s = -e\vec E\cdot d\vec s = e\nabla\varphi\, d\vec s$$

Uporabimo energijski zakon

$$A = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{(1)}^{(2)} e\nabla\varphi\, d\vec s = e\varphi(2) - e\varphi(1)$$

Energija naboja v zun. polju (potenciala)

Zvezno sredstvo

$$\boxed{W = e\varphi = \int_V \rho(\vec r)\,\varphi(\vec r)\, d^3 r}$$

- Celotna elektrostatska energija

Sedaj pa nas zanima energija polja vseh nabojev. Zanima nas energija, ki je potrebna, da ustvarimo/nasujemo to gostoto $\rho(\vec r)$.

Sprememba energije, če dodamo dq naboja

$$dW = \int_V \underbrace{d\rho(\vec r)}_{\rho\, d\alpha} \varphi(\vec r)\, d^3\vec r \qquad \alpha \in [0,1]$$

Predpostavimo, da lahko gostoto vključimo z neskončno (parametrom) $\alpha = 0, \dots, 1$, ki narašča gostoto naboja med 0 in $\rho(\vec r)$. Uporabimo linearnost Poissonove enačbe.

$$\nabla^2 \alpha\, \varphi(\vec r) = -\frac{\alpha\, \rho(\vec r)}{\varepsilon_0}$$

$$dW = \int \rho\, d\alpha \cdot \varphi\, d^3\vec r$$

to je energija, da dodamo v sistem delček gostote naboja $\alpha\rho$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec r)\, \varphi(\vec r)\, d^3\vec r}$$

- Elektrostatska energija kot funkcional gostote naboja

Uporabimo Greenovo reprezentacijo el. potenciala

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}\, d^3\vec r$$

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \iint_V \frac{\rho(\vec r)\, \rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}\, d^3\vec r\, d^3\vec r\,'$$

Gostota elektrostatske energije polja

Elektrostatsko energijo lahko zapišemo z uporabo el. polja $\vec E$.

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec r)\, \varphi(\vec r)\, d^3\vec r = \frac{1}{2} \int (\nabla \cdot \vec E)\, \varepsilon_0\, \varphi(\vec r)\, d^3\vec r = \qquad \Big|\ \nabla(f\vec g) = (\nabla f)\cdot\vec g + f\,\nabla\vec g$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left(\nabla(\varphi \vec E) - (\nabla\varphi)\vec E\right) d^3\vec r = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \nabla(\varphi\vec E) + E^2\, d^3\vec r =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{\partial V} \underbrace{\underset{\sim \frac{1}{r^2}}{\vec E(\vec r)}\ \underset{\sim \frac{1}{r}}{\varphi(\vec r)}\ \underset{\sim r^2}{dS}}_{\sim \frac{1}{r}} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2\, d^3\vec r$$

velik volumen
$r \to \infty$

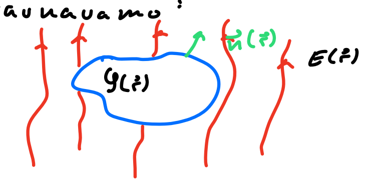
$$= 0 + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2\, d^3\vec r$$

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2\, d^3\vec r}$$

To je el. energija, ki jo ustvarja neka porazdelitev naboja

Sila kot funkcional električnega polja

Obravnavamo:



Zanima nas sila na telo, ki se nahaja v el. polju $E(\vec r)$.

↳ Celotno polje = lastno + zunanje polje.

to je celotno polje

Velja: $$\vec F = \int_V \rho(\vec r)\, E(\vec r)\, d^3\vec r$$

povsod po delu, kjer je $\rho(\vec r) \neq 0$

$$\vec a \otimes \vec b = [\quad]$$

$$\nabla(\vec E \otimes \vec E) = \vec E(\nabla \vec E) + (\vec E \cdot \nabla)\vec E$$

$$\frac{1}{2}\nabla(E^2) = (\vec E\cdot\nabla)\vec E + \vec E \times \underbrace{(\nabla \times \vec E)}_{=0}$$

za el. polje

$$\vec F = \varepsilon_0 \int_V (\nabla \vec E)\, \vec E\, d^3\vec r$$

$$= \varepsilon_0 \int_V \nabla(\vec E \otimes \vec E) - (\vec E \cdot \nabla)\vec E\, d^3\vec r$$

$$= \varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec E \otimes \vec E\, d\vec S - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \nabla E^2\, d^3\vec r$$

$$= \varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec E \otimes \vec E\, d\vec S - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\partial V} E^2\, d\vec S$$

$$\vec F = \varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec E \otimes \vec E - \frac{E^2}{2}\, d\vec S$$

$$\boxed{\vec F = \varepsilon_0 \int_{\partial V} \left(\vec E \cdot (\vec E \cdot \vec n) - \frac{1}{2} E^2 \vec n\right) dS}$$

↳ po zaključeni površini našega delca
$\vec E$ celotno el. polja.

Primer: točkast naboj
Kolikšna je sila? $F = 0$

$$\vec n = \hat e_r \qquad \vec E = E\, \hat e_r$$

$$\vec F = \varepsilon_0 \oint_{\partial V} \left(E^2 \hat e_r - \frac{1}{2} E^2 \hat e_r\right) dS = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \underbrace{\oint_{\partial V} \hat e_r\, dS}_{0} = 0$$

Napetostni tenzor el. polja

Dosleden zapis sile naboja v el. polju se napiše z uvedbo napetostnega tenzorja.

$$\boxed{F_i = \sum_k \oint_{\partial V} T_{ik}\, n_k\, dS}$$, kjer je

$$\boxed{T_{ik} = \varepsilon_0\left(E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik}\right)}$$ → napetostni tenzor

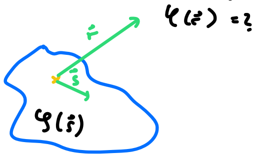
Velja tudi (Gauss-Ostrogradski)

$$F_i = \sum_k \oint_{\partial V} T_{ik}\, n_k\, dS = \sum_k \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\, dV$$

Iz tega zapisa lahko razberemo gostoto sile: $f_i = \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$

Zapis gostote sile kot divergence napetostnega tenzorja je splošen.

Multipolni razvoj električnega potenciala



Zanima nas el. polje ali potencial daleč stran in to po vodilnih prispevkih.

Velja $$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec s)}{|\vec r-\vec s|}\,d^3\vec s$$

Zanima nas $\vec r \gg \vec s$

$$\frac{1}{|\vec r-\vec s|} = \frac{1}{|\vec r|} - \vec s\,\underbrace{\nabla\frac{1}{|\vec r|}}_{-\frac{\vec r}{|\vec r|^3}} + \frac{1}{2}\,\vec s\,H\!\left(\frac{1}{|\vec r|}\right)\vec s + \dots \qquad H = \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

↳ Hessejeva matrika

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \rho(\vec s)\,d^3\vec s + \frac{\vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int \vec s\,\rho(\vec s)\,d^3\vec s + \dots$$

$$= \underbrace{\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{\text{monopol}} + \underbrace{\frac{\vec r\cdot\vec p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{\text{dipol}} + \dots$$

$\int_V \vec s\,\rho(\vec s)\,d^3\vec s = \vec p$ električni dipolni moment

V splošnem pa velja:

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\,\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

kjer so $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ krogelne funkcije / sferični harmoniki

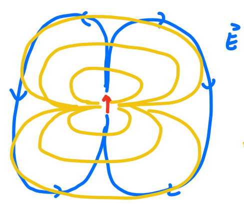
$q_{l,m}$ multipolni koeficienti $\quad q_{lm} = \int_V \rho(s)\,s^l\,Y_{lm}(\theta',\varphi')\,ds$

↳ po celotni porazdelitvi naboja

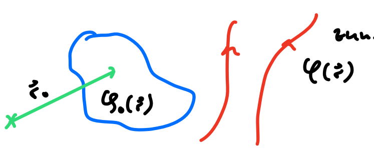
Polje in potencial točkastega dipola

$$\varphi(\vec r) = \frac{\vec r\cdot\vec p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec E = -\nabla\varphi = -\nabla\left(\frac{\vec r\cdot\vec p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = -\frac{\vec p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec p\cdot\vec r)\,\vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$



Multipolni razvoj elektrostatske energije



Zanima nas prispevki k energiji če lahko $\rho_0(\vec r)$ opišemo z multipoli

$$W = \int_V \rho_0(\vec r)\,\varphi(\vec r)\,d^3\vec r$$

Predpostavimo, da je večina energije zbrane okoli točke $\vec r_0$ (tam so multipoli).

$$\varphi(\vec r) \approx \varphi(\vec r_0) + (\vec r-\vec r_0)\,\nabla\varphi(\vec r_0) + \dots$$

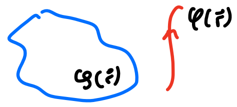
Potem je energija:

$$W = \int_V \rho_0(\vec r)\,\varphi(\vec r_0)\,d^3\vec r + \int_V \rho_0(\vec r)\,(\vec r-\vec r_0)\,\nabla\varphi(\vec r_0)\,d^3\vec r + \dots$$

$$\boxed{W = e\,\varphi(\vec r_0) - \vec E(\vec r_0)\,\vec p + \dots}$$

en. naboja   en. dipola   v zun. polju

Sila in navor na multipole v zun. el polju



zun. el polje

porazdelitev naboja si predstavljamo z multipoli

$$\vec F = -\nabla W \quad \Leftrightarrow \quad dW = -\vec F\, d\vec r$$

$$\vec F = -e\nabla\varphi(\vec r_0) + \nabla\left(\vec E(\vec r_0)\,\vec p\right) = -e\vec E(\vec r_0) + (\vec p\cdot\nabla)\vec E + \vec p\times(\underbrace{\nabla\times\vec E}_{=0})$$

$$\boxed{\vec F = -e\vec E + (\vec p\cdot\nabla)\vec E \,\Big|_{\vec r=\vec r_0}}$$

Zanima nas navor

smer osi

$$dW = -\vec M\, d\vec\Phi$$

$e\varphi - \vec p\,\vec E = W$ diferenciramo ob rotaciji

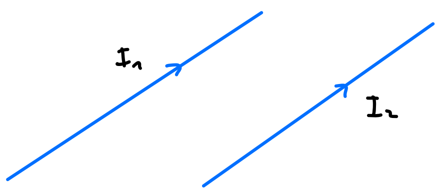
$$dW = 0 - d\vec p\cdot\vec E = -(d\vec\Phi\times\vec p)\,\vec E = (\vec p\times\vec E)\, d\vec\Phi$$

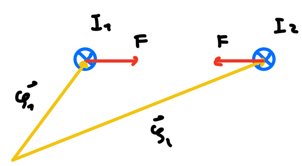
$$\boxed{\vec M = -\,\vec p\times\vec E\,\Big|_{\vec r=\vec r_0}}$$

Dipol se poskuša zavrteti tako, da so $\vec p \parallel \vec E$

Magnetostatika

Amperova sila med ravnimi tokovnimi vodniki





$$\boxed{\vec F = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I_1 I_2 L}{|\vec\rho_2-\vec\rho_1|}\,\frac{\vec\rho_2-\vec\rho_1}{|\vec\rho_2-\vec\rho_1|}}$$

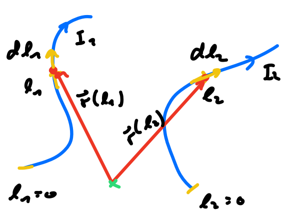
Sila na prvi vodnik

L — dolžina žice

Sila je za isto smerna tokova privlačna, za nasprotno usmerjena tokova pa odbojna.

Ta sila je magnetni analog Coulombove sile.

Amperova sila med poljubnimi vodniki



Sila na odseke žice

$$\boxed{d^2\vec F = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{(I_1 d\vec l_1)(I_2 d\vec l_2)}{|\vec r(l_2)-\vec r(l_1)|^2}\,\frac{\vec r(l_2)-\vec r(l_1)}{|\vec r(l_2)-\vec r(l_1)|}}$$

Ta formula je rezultat meritev. $d\vec l_1$ in $d\vec l_2$ določena s smerjo toka.

Celotna sila na prvo žico

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \iint \frac{\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)}{|\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)|^2} \, d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

to zvezo se lahko prepiše v

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \iint_{①②} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)))}{|\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)|^3}$$

Električni tok

El. tok je gibanje nabitih delcev po vodniku, je skalar, $I = \frac{de}{dt}$.
V magnetostatiki je $I = konst.$

Gostota magnetnega polja

Podobno kot v elektrostatiki, lahko delovanje sile med vodniki opišemo z uvedbo magnetnega polja

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint\!\!\oint_{1\,2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)))}{|\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)|^3} = \oint_1 I_1 \, d\vec{l}_1 \times \Big(\underbrace{\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}(l_1)-\vec{r}(l_2))}{|\vec{r}(l_1)-\vec{r}(l_2)|^3}}_{\text{Uvedemo kot } B} \Big)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}(l_1)-\vec{r}(l_2))}{|\vec{r}(l_1)-\vec{r}(l_2)|^3}$$ Biot-Savartov zakon

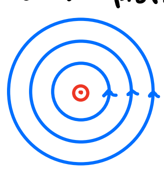
$$\vec{F} = \oint I \, d\vec{l}_1 \times \vec{B}$$

V magnetostatiki so zanke vedno sklenjene

Magnetne silnice

Uvedemo jih kot $\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$

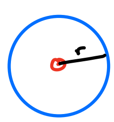
Značilni profili:



Silnice so vedno sklenjene

Magnetna cirkulacija

$$\Gamma_m = \oint_{zanka} \vec{B} \cdot d\vec{r} \neq 0$$



$\Gamma_m = B\,2\pi r$

V elektrostatiki je $\Gamma_e = 0$

$$\Gamma_m = \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{B} \, d\vec{S} \neq 0$$

Za B ne moremo reči, da je brezvrtinčno.

Magnetni pretok

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

po poljubni ploskvi

Velja je $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ $\Rightarrow$ Magnetni pretok skozi vsako zaključeno ploskev je enak 0, ker ponavadi ni mag. monopolov oz. silnice so vedno sklenjene

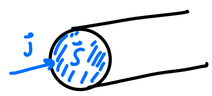
V diferencialni obliki

$$0 = \oint \vec{B}\, d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dV \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Gostota električnega toka

Električni tok ki je vezan na žico posplošimo na gostoto električnega toka.

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



$\vec{j}$ je vektor in ni omejen na žice

Primeri gostote toka

→ Zvezna porazdelitev naboja

gostota naboja

$$\vec{j}\, d\vec{S} = dI = d\left(\frac{de}{dt}\right) = d\left(\frac{\rho\, dV}{dt}\right) = \frac{\rho\, dS\; v\, dt}{dt} = \rho\, \vec{v}\, d\vec{S}$$

$$\boxed{\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\, \vec{v}(\vec{r})}$$

hitrost nabojev

Mikroskopska slika

→ Linearen vodnik

$$\vec{j} = I\, \delta^2(\vec{r})\, \hat{e}_z$$

→ Premikajoči točkasti naboj:

hitrost naboja

$$\vec{j}(\vec{r}) = e\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t))\, \vec{v}(t)$$

kje je naboj

→ Površinska gostota toka

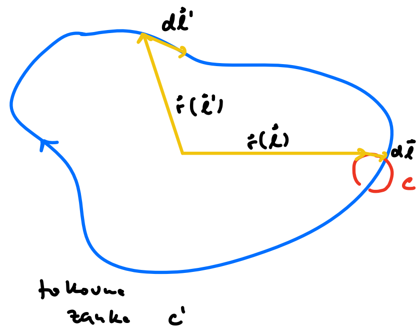
kje je površina

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma\, \delta(z - z_0)\, \vec{v} \quad ; \quad \vec{j}_s = \sigma \vec{v}$$

površinska gostota naboja

površinsk. gostota toka

Amperov izrek

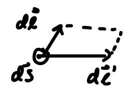


Navidezna zanka ki zaobjema tokovno zanko c'

Zanima nas B vzdolž c.

$$\Gamma_m = \oint_c \vec{B}\, d\vec{l} = \oint_c \Big(-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{c'} \underbrace{d\vec{l}' \times \nabla\Big(\frac{1}{\vec{r}(l)-\vec{r}(l')}\Big)\Big)\, d\vec{l}}_{\text{mešani produkt}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_c\oint_{c'} (\underbrace{d\vec{l}\times d\vec{l}'}_{d\vec{S}})\cdot \nabla\frac{1}{|\vec{r}(l)-\vec{r}(l')|}$$



posplošena površina

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \nabla\frac{1}{|\vec{r}(l)-\vec{r}(l')|}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \underbrace{\frac{dS\cos\theta}{|\vec{r}(l)-\vec{r}(l')|^2}}_{d\Omega}$$

$d\Omega$ diferencial prostorskega kota

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\, 4\pi = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$$ Amperov izrek

Prepišimo

$$\Gamma_\mu = \oint \vec{B}\, d\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{B}\, d\vec{S}$$
$$\parallel$$
$$\mu I = \mu\int \vec{j}\, dS$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Magnetni potencial

Ker mag. polje je vrtinčno ga ne moremo opisati s skalarnim potencialom.

$$\nabla\times\vec{B}\neq 0$$

Za el polje $\nabla\times\vec{E}=0$
$\Rightarrow \vec{E}=-\nabla\varphi$
rotor gradienta je vedno 0.

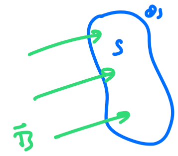
Vemo pa da so silnice B sklenjene

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

Vemo pa da je $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$ zato uvedemo vektorski magnetni potencial $\vec{A}$ kot

$$\boxed{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}}$$

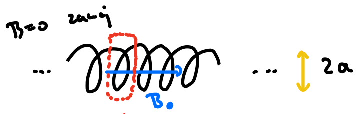
Magnetni pretok se zapiše kot:



$$\phi_m = \int \vec B\, d\vec S = \int \nabla\times\vec A\, d\vec S = \oint_{\partial S} \vec A\cdot d\vec r$$

Magnetni pretok skozi ploskev je enak cirkulaciji magnetnega potenciala po robu ploskve.

Vektorski mag. potencial dolge tuljave



Znotraj tuljave $\vec B = \vec B_0 = (0, 0, B_0)$

$\vec A$ mora biti oblike $\vec A = \frac{1}{2}\vec B_0 \times \vec r$ (znotraj tuljave)

Zunaj tuljave $\vec B = 0$

Pričakoval bi, da je zunaj $\vec A = 0$ ali $\vec A$ = konst.

Glejmo zanko tik ob zun. robu tuljave

$$\phi_m = \int \vec B\cdot d\vec S = B_0 \pi a^2$$

$$\| $$

$$\oint_{\partial S} \vec A\cdot d\vec r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A \neq 0$$

Poskusimo uganiti obliko $\vec A$

$$\vec A = c\, \vec B_0 \times \frac{\vec r}{r^2}$$

Izračunamo cirkulacijo

$$\oint_{\partial S} \left(c\, \vec B_0 \times \frac{\vec r}{r^2}\right)\cdot d\vec r = 2\pi c B_0 \quad \Rightarrow \quad 2c = a^2 \qquad c = \frac{a^2}{2}$$

$$\vec A = \frac{a^2}{2}\vec B_0 \times \frac{\vec r}{r^2}$$

→ Dobimo močno prostorsko odvisno polje čeprav $B = 0$

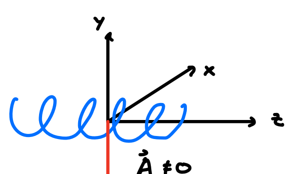
→ Na meji tuljave je $\vec A$ zvezen.

Umeritev

Uvedemo nov magnetni potencial $A' = A + \nabla S(\vec r)$. Potenciala $\vec A$ in $\vec A'$ ustrezata istemu $\vec B$. $\vec B = \nabla\times\vec A = \nabla\times\vec A'$.

Konkretno za dolgo tuljavo lahko dodaš

$$S(\vec r) = -\frac{B_0 a^2}{2}\arctan\frac{y}{x}$$



Potem je $\vec A$ zunaj tuljave

$$\vec A = \frac{a^2}{2}\vec B_0 \times \frac{\vec r}{r^2} - \nabla\left(\frac{B_0 a^2}{2}\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{B_0 a^2}{2}\frac{2\pi}{a}\delta(\phi - \pi)\,\hat e_\phi$$

edino vzdolž osi $-y$ je $\vec A \neq 0$ drugje zunaj je $\vec A = 0$

Magnetna sila

Magnetna sila na vodnik

$$\vec{F} = \int_{\text{po vodniku}} I \, d\vec{l} \times \vec{B}$$

Za splošno gostoto polja $(I\,d\vec{l} = \vec{j}\, d^3\vec{r})$

$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B} \, d^3\vec{r}$$

po volumnu kjer je $\vec{j} \neq 0$

Primer: sila na gibajoč točkast naboj

$$\vec{j} = e\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t))\, \vec{v}$$

$$\vec{F} = \int e\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t))\, \vec{v} \times \vec{B}\, d^3\vec{r} = e\, \vec{v} \times \vec{B}$$

Kirchhoffova enačba

Zanima nas čemu zadošča vektorski magnetni potencial. Uporabimo Amperov zakon

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Uporabimo Helmholtzov izrek, ki pravi, da vsako vektorsko polje $\vec{A}$ lahko zapišemo kot $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, kjer pa je $\nabla \cdot \vec{A}_1 = 0$ in $\nabla \times \vec{A}_2 = 0$. Vsako vek. polje lahko razstavimo na brezvrtinčno in brezizvorno.

Lahko uporabimo umeritev $\vec{A}_2 = 0$ (v resnici je lahko $\vec{A}_2$ karkoli kar $\nabla \times \vec{A}_2 = 0$). Zato je $\nabla \vec{A} = \nabla(\vec{A}_1 + \underbrace{\vec{A}_2}_{0}) = \nabla \vec{A}_1 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$ Kirchhoffova enačba

Enačba je podobna Poissonovi enačbi $\Rightarrow$ Sklepamo o rešitvi:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,'}$$ Splošna rešitev

povsod kjer $\vec{j} \neq 0$

Od tod sledi (je usklajeno) Biot-Savartov zakon

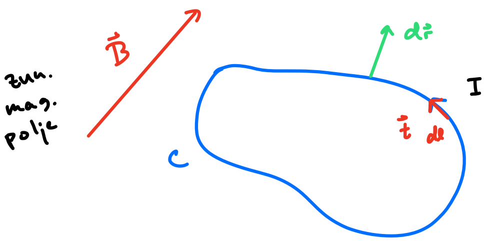
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, d^3\vec{r}\,'$$

deluje na $\vec{r}$

Magnetna energija

Magnetna energija v zunanjem polju

Vpeljemo jo v stacionarni aproksimaciji $\Rightarrow$ tokovi so od nič različni, ampak se s časom ne spreminjajo.



lokalna smer zanke

Sila na zanko $\vec F = I\oint_c d\vec l\times\vec B = I\oint_c \vec t\times\vec B\,dl$

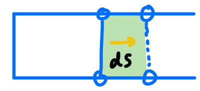
Če zanko premaknemo za $d\vec r$ opravimo delo

$$dA = -\vec F\cdot d\vec r = -I\oint_c \vec t\times\vec B\,dl\cdot d\vec r = -I\oint_c \underbrace{(d\vec r\times\vec t)\,dl}_{d\vec S}\cdot\vec B$$

površina, ki jo zanka opiše pri premiku

$$dA = -I\,\vec B\cdot d\vec S$$

$$A = -I\int_S \vec B\cdot d\vec S = -I\,\Phi_m$$

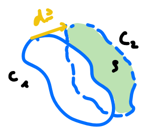


Energija z uporabo magnetnega potenciala $\vec A$.

$$A = -I\int_S \vec B\cdot d\vec S = -I\int_S(\nabla\times\vec A)\cdot d\vec S \overset{\text{Stokes}}{=}$$

$$= -I\int_{c_2}\vec A\cdot d\vec r + I\int_{c_1}\vec A\cdot d\vec r$$

← ros →



Uporabimo $I\,d\vec r = \vec j\,d\vec r^{\,3}$

$$A = -\int_{V_2}\vec j\,\vec A\,d^3\vec r + \int_{V_1}\vec j\,\vec A\,d^3\vec r = \Delta W$$

po dogodku — pred dogodkom

Torej en. gostote toka v zun. $\vec B$ je enaka

$$\boxed{W_m = -\int_V \vec j\cdot\vec A\,d^3\vec r}$$

Volumen, kjer teče j

Gostota energije $\boxed{w = -\vec j\cdot\vec A}$

Magnetna energija polja kot funkcional toka

Iz Kirchhoffove enačbe vemo:

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec j'(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\,d^3\vec r'$$

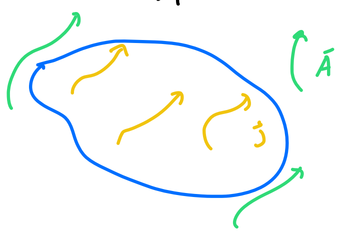
tisti j' ki $\vec A$ ustvarja, drugi kot $\vec j$

Tako dobimo energijo tokov $\vec j$ v polju, ki ga ustvarjajo tokovi $\vec j'$ kot:

$$\boxed{W = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{V'V}\frac{\vec j(\vec r)\,\vec j'(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\,d^3\vec r\,d^3\vec r'}$$

Celotna magnetna energija

Zanima nas celotna magnetna energija polja $\vec A$, ki ga ustvarja gostota toka $\vec j$. Uporabimo analogijo z elektrostatiko



$\vec j$ ustvari $\vec A$. Uvedemo parameter α, ki postopoma vključi tok $\vec j: 0 \to \vec j$, ki ustreza $\alpha: 0 \to 1$

Smo pri nekem α, ki mu ustreza potencial $\hat{A}$ in dodamo malo toka $d\vec j = \vec j\, d\alpha$. Potem

$$dW = -\int_V d\vec j\, \hat{\vec A}\, d^3\vec r = -\int \vec j\, d\alpha\ \alpha \cdot \vec A\, d^3\vec r$$

uporabimo linearnost Kirchoffove enačbe

$$W = \int_0^1 \alpha\, d\alpha \int \vec j \vec A\, d^3\vec r = \boxed{-\frac{1}{2}\int \vec j \cdot \vec A\, d^3\vec r}$$

Prejšnji izraz ne upošteva, da je za vzpostavitev toka $\vec j$ potrebna energija (to je drugače kot v elektrostatiki, kjer je naboj stalen). Torej za vzpostavitev toka je potrebna energija:

$$P = -U I = -I\int_C \vec E\, d\vec r = I\frac{\partial}{\partial t}\int \vec B\, d\vec S = \frac{\partial W}{\partial t}$$

uporabimo

$$\oint \vec E\, d\vec r = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec B\, d\vec S$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow W = I\int \vec B\, d\vec S = I\int \nabla\times A\, d\vec S = \underbrace{I \oint \vec A\cdot d\vec r}_{\vec j\, d^3\vec r} = \int \vec j \vec A\, d^3\vec r$$

Celotna energija polja je torej

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \vec j\cdot\vec A\, d^3\vec r}$$

To je energija celotnega polja $\vec A$, ki ga ustvarja gostota $\vec j$ (upoštevamo tudi da je potrebno $\vec j$ tudi ustvariti).

Gostota magnetne energije

Celotno energijo želimo prepisati v odvisnosti od $\vec B$ (in ne $\vec A$)

$$W = \frac{1}{2}\int \vec j \vec A\, d^3\vec r = \frac{1}{2\mu_0}\int (\nabla\times\vec B)\vec A\, d^3\vec r$$

$$\left[\nabla(\vec B\times\vec A) = (\nabla\times\vec B)\cdot\vec A - (\nabla\times\vec A)\vec B\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int \nabla(\vec B\times\vec A) + \vec B^2\, d^3\vec r = \frac{1}{2\mu_0}\int \vec B^2 d^3\vec r + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}\int_{\partial V} \vec B\times\vec A\, d\vec S}_{=0}$$

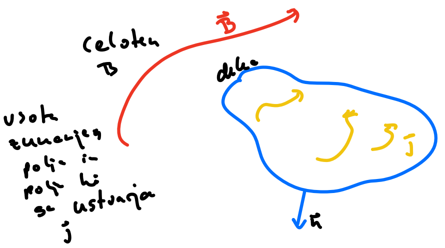
$\propto \frac{1}{r}$ $\propto \frac{1}{r^2}$ $\propto r^2$

Če je V velik gre $\frac{1}{r}\to 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0}\int \vec B^2 d^3\vec r \\ w &= \frac{\vec B^2}{2\mu_0}\end{aligned}}$$

Sila kot funkcional magnetnega polja

Kakšna sila deluje na delec z gostoto toka $\vec{j}$, ki se nahaja v magnetnem polju.



$$\vec{F} = \int \vec{j} \times \vec{B} \, d^3\vec{r} \longrightarrow \int dS$$

integral po površju delca in potrebujemo samo B.

$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B} \, d^3\vec{r} = \frac{1}{\mu_0} \int (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \, d^3\vec{r} =$$

kjer je $\vec{j} \neq 0$

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \nabla B^2 - \nabla (\vec{B} \otimes \vec{B}) + \vec{B} \underbrace{(\nabla \vec{B})}_{=0}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int \nabla (\vec{B} \otimes \vec{B}) - \nabla \frac{\vec{B}^2}{2} \, d^3\vec{r}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial V} \left(\vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \right) d\vec{S}}$$

pogleda po površini delca na katerega računamo silo.

V zvezi nastopa celoten $\vec{B}$.

Tenzor napetosti magnetnega polja

Uvedemo tenzor napetosti mag. polja kot

$$F_i = \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial V} T_{ik} \, n_k \, dS \qquad T_{ik} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_k - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ik} \right)$$

normala

Zapišemo lahko tudi

$$F_i = \int_{\partial V} T_{ik} \, n_k \, dS = \int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \, dV$$

volumska gostota sile

Multipolni razvoj magnetnega polja

Zanima nas magnetni potencial $\vec{A}$ daleč stran od njegovega izvira.
Velja:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d^3\vec{r}\,'$$

Razvijemo za $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} - (\vec{r}\,' \cdot \nabla)\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,' \cdot \vec{r}}{r^3} + \ldots$$

Magnetni potencial do drugega (dipolnega) reda se zapiše kot:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \underbrace{\int \vec{j}(\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,'}_{\text{vektor}} + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underbrace{\int \vec{j}(\vec{r}\,') \cdot (\vec{r}\,' \cdot \vec{r}) \, d^3\vec{r}\,'}_{\text{dipolni člen, tenzor}} + \ldots$$

V primerjavi z elektrostatiko, monopolni člen tu je vektor in ne skalar.

Monopolni člen

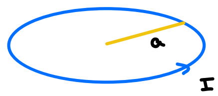
$$\int \vec{j}(\vec{r}\,') \, d^3\vec{r}\,' = 0 \qquad \text{tokovnice so sklenjene}$$

Dipolni člen

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int \vec{j}(\vec{r}\,') \, (\vec{r}\,' \cdot \vec{r}) \, d^3\vec{r}\,' = \frac{\mu_0 \, \vec{m} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \qquad \vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}\,' \times \vec{j} \, d^3\vec{r}\,' \quad \text{magnetni dipol}$$

Amperova ekvivalenca

Izračunaj magnetni dipolni moment krožne zanke



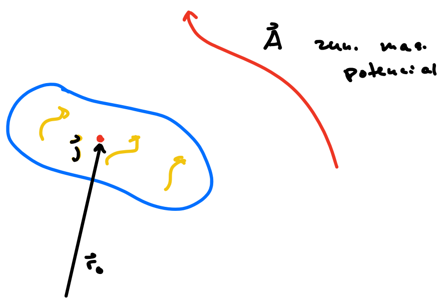
$$\vec{p}_m = \vec{m} = \frac{1}{2}\int_V \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')\, d^3r' = \frac{1}{2}\int \vec{r}\,' \times (I\,\hat{e}_\varphi)\, dl = \frac{Ia}{2}\int \hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi \, dl =$$

$$= \frac{aI}{2}\,\hat{e}_z\, 2\pi a = \pi a^2 I\, \hat{e}_z = \vec{S} I$$

Amperova ekvivalenca: tokovna zanka v mag. polju je ekvivalentna magnetnemu dipolu v zun. mag. polju

Multipolni razvoj magnetne energije

Zanima nas energija gostote toka v zun. mag. polju



$$W = -\int_V \vec{j}_0(\vec{r})\, \vec{A}(\vec{r})\, d^3r$$

Razvijmo $\vec{A}$ okrog $\vec{r}_0$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}_0) + (\vec{r}-\vec{r}_0)\nabla_0 \vec{A}(\vec{r}_0) + \dots$$

↳ ∇ po $\vec{r}_0$

$$W = -\int_V \vec{j}_0(\vec{r})\, \vec{A}(\vec{r}_0)\, d^3r - \int_V \vec{j}_0(\vec{r})\, (\vec{r}-\vec{r}_0)\, \nabla_0 \vec{A}(\vec{r}_0)\, d^3r$$

$$= -\vec{A}(\vec{r}_0) \underbrace{\int_V \vec{j}_0(\vec{r})\, d^3r}_{\substack{=0 \\ \text{ni izvorov,} \\ \text{monopolni člen}}} - \int_V \underbrace{\overset{j}{\vec{j}_0(\vec{r})}\Big((\overset{i}{\vec{r}-\vec{r}_0})}\, \underbrace{\overset{i}{\nabla_0}\Big)\overset{j}{\vec{A}}(\vec{r}_0)}_{\frac{\partial A_j}{\partial r_{0,i}}}\, d^3r$$

△ Glej naprej

Naj bo

$$\underbrace{\int j_0(\vec{r})_j\, (\vec{r}-\vec{r}_0)_i\, d^3r}_{\text{matrika}} = -\int j_0(\vec{r})_i\, (\vec{r}-\vec{r}_0)_j\, d^3r$$

Simetrizacija tenzorja

$$\frac{1}{2}\int j_0(\vec{r})_j\, (\vec{r}-\vec{r}_0)_i - j_0(\vec{r})_i\, (\vec{r}-\vec{r}_0)_j\, d^3r$$

Potem

$$W = -\frac{\partial A(\vec{r}_0)_j}{\partial r_{0,i}}\, \frac{1}{2}\int j_0(\vec{r})_j\, (\vec{r}-\vec{r}_0)_i - j_0(\vec{r})_i\, (\vec{r}-\vec{r}_0)_j\, d^3r =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \underset{\vec{B}}{\vec{j}_0(\vec{r})}\, \Big(\underset{\vec{A}}{(\vec{r}-\vec{r}_0)}\, \underset{\vec{C}}{\nabla_0}\Big)\, \underset{\vec{D}}{\vec{A}(\vec{r}_0)} - \underset{\vec{A}}{(\vec{r}-\vec{r}_0)}\, \Big(\underset{\vec{B}}{\vec{j}_0(\vec{r})}\, \underset{\vec{C}}{\nabla_0}\Big)\, \underset{\vec{D}}{\vec{A}(\vec{r}_0)}\, d^3r = \dots$$

Uporabimo

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$\dots = -\underbrace{\frac{1}{2}\int \big[(\vec{r}-\vec{r}_0)\times \vec{j}_0(\vec{r})\big]}_{\vec{p}_m}\cdot\big[\underbrace{\nabla_0 \times \vec{A}(\vec{r}_0)}_{\vec{B}(\vec{r}_0)}\big]\, d^3r$$

$$W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}(\vec{r}_0)$$ energija mag. dip. v zun. mag. polju

Sila in navor dip. v zunanjem polju

Sila $\qquad \vec F = -\nabla W \iff dW = -F\,dr$

$$= \nabla(\vec m\cdot\vec B) = \vec m \times \underbrace{(\nabla\times\vec B)}_{\mu_0 \vec j\, = 0} + (\vec m\cdot\nabla)\vec B = (\vec m\cdot\nabla)\vec B$$

↳ tok ki ustvarja zun. polje, ki je daleč stran

$$\boxed{\vec F = (\vec p_m\cdot\nabla)\vec B}$$

Navor $\qquad dW = -\vec M\, d\vec\varphi$

Zavrtimo dipol $\qquad d\vec m = d\vec\varphi \times \vec m$

$$dW = -d(\vec m\, \vec B) = -d\vec m\cdot\vec B = (-d\vec\varphi\times\vec m)\,\vec B = -d\vec\varphi\,(\vec m\times\vec B)$$

$$\boxed{\vec M = \vec p_m \times \vec B}$$

Simetrizacija tenzorja △

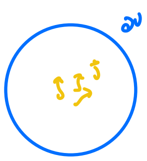
Izrek Gauss-Ostrogradskega
Tenzor pretvorimo v tenzor, ki ima "preprostejšo" strukturo.
Klasična formulacija

$$\oint_{\partial V} \vec A\cdot d\vec S = \int_V \nabla\vec A\, dV$$

Uporabimo izrek G-O za tenzor 3. ranga $\vec r\otimes\vec r\otimes\vec A$

$$\oint_{\partial V} r_i r_j A_k \overset{\text{normala}}{n_k}\, dS = \int_V \left(r_i A_j + r_j A_i + r_i r_j(\nabla\vec A)\right) dV$$

Če uporabimo v kontekstu gostote toka $\vec A = \vec j$



$$\underbrace{\oint_{\partial V} r_i r_j\, j_k\, n_k\, dS}_{=0} = \int_V \left(r_i j_j + r_j j_i + r_i r_j \underbrace{(\nabla\vec j)}_{=0}\right) dV$$

$$\Rightarrow \int_V r_i j_j\, dV = -\int_V r_j\, j_i\, dV$$

Kvazistatična polja

Indukcija

Lenzovo pravilo: Sprememba magnetnega pretoka skozi tokokrog (zanko) požene električni tok, ki se upira vzroku svojega nastanka.

Maxwellova formulacija elektromagnetne indukcije

Kvantitativni zakon (Faradayev) indukcije

$$\boxed{\Gamma_e = -\frac{d}{dt}\Phi_m}$$

el. cirkulacija   mag. pretok

$$\Gamma_e = \oint_c \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$

zanka c je rob ploskve S.

$$\oint_c \vec{E}\, d\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{E}\, dS = \int -\frac{d}{dt}\vec{B}\, d\vec{S}$$

oblika zanke se ne spreminja s časom

$$\boxed{\nabla\times E = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

Kinematične Maxwellove enačbe

↑ ne vsebuje nobenega parametra

Maxwellov impulz magnetnega polja

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{d}{dt}(\nabla\times\vec{A}) = -\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

kar velja splošno

Povezava z 2. Newtonovim zakonom:

$$\vec{F} = e\vec{E} = -e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial e\vec{A}}{\partial t} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

gib. količina

$$\vec{p} = -e\vec{A}$$

gib. kol. če pa nimamo mase.

Zveza $e\vec{A}$ predstavlja gibalno količino in indukcija je impulz k gibalni količini ki jo vnesemo v sistem

Popravljen (kvazistatičen) sistem Maxwellovih enačb

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}\ (+\ \dots)$$

za kvazistatična EM polja

in $\nabla\cdot\vec{j} = 0$ kontinuitetna (ohranitvena) enačba

Elektromagnetna potenciala za kvazistatična polja

Zanima nas kako zapisati $\vec{E}$ in $\vec{B}$ z osnovnima potencialoma φ in $\vec{A}$.

→ Velja: $\nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}}$

→ Velja: $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \nabla\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad \boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

V kvazistat. sis. je $\vec{E}$ podan z el. in mag. potencialom.

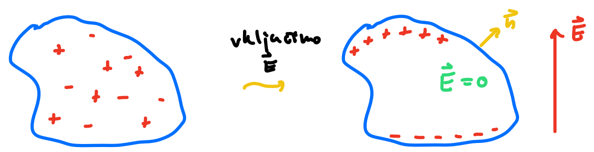
Prevodniki in Ohmov zakon

Snovi, v katerih so nosilci naboja prosto gibljivi, imenujemo prevodniki. Za prevodnike velja Ohmov zakon

$$\boxed{\vec{j} = \sigma_e\vec{E}} \qquad U = RI$$

σ električna prevodnost; za žica

V ravnovesju v prevodniku velja



$\vec{j} = 0$, $\vec{E} = 0$ (v prevodniku je dovolj e^-)

Kje je naboj?

Znotraj $E = 0$ → $\nabla\cdot\overset{0}{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → $\rho = 0$

Gibljivi naboj je na površini prevodnika

Na površini velja

$$\vec{E}\cdot\vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Inducirana površinska gostota naboja zasenči zunanje el. polje.

Električno je v ravnovesju vedno pravokotno na površino prevodnika ($\vec{n}\times\vec{E} = 0$) $\vec{n}\parallel\vec{E}$. Če ne bi bilo pravokotno bi tekel el. tok. Površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev.

Časovna konstanta prevodnika

Ko vključimo električno polje se v prevodniku prerazporedi naboj. Zanima nas kako hitro se vzpostavi ravnovesje. Uporabimo kontinuitetno enačbo:

$$\nabla j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

$$\nabla(\sigma E) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\partial t$$

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},0)\,e^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \text{ značilni čas}$$

Velja kot je prevodnost σ pri ko prevodnik prišel v ravnovesje

Npr. za železo $\tau = 8{,}85 \cdot 10^{-19}$ s

Mikroskopski izvor prevodnosti

Ohmov zakon lahko dobimo iz preproste mikroskopske slike. Uporabimo Drudejev model prevodnika:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{-m\gamma\vec{v}}_{\text{proces disipacije}} + \underbrace{e\vec{E}(t)}_{\text{sila na naboj delca}} \qquad \vec{v} \text{ ... hitrost enega delca}$$

(sila upora, viskoznost)
(v kristalih sipanje,
v elektrolitih viskoznost)

Ko $E = 0$ je rešitev $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-\gamma t}$ hitrost pada s časom.

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}e^{-2\gamma t} \qquad \text{disipacija energije - izvor Joulove toplote}$$

Ko $E \neq 0$, nastavek: $\vec{v}(t) = \frac{e}{m}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')}\vec{E}(t')\,dt'$

Vemo $\vec{j} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{gostota naboja}}}{\rho}\vec{v} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{številska volumska gostota}}}{n}e\vec{v}$

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{m}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')}\vec{E}(t')\,dt'$$

Za $E =$ konst.

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')}\,dt'$$

$$\vec{j} = \underbrace{\frac{ne^2}{m\gamma}}_{\sigma}\vec{E}$$

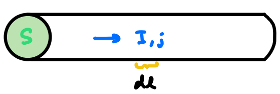
$$\boxed{\sigma_E = \frac{ne^2}{m\gamma}}$$

Tipične vrednosti $\qquad S = \text{Siemens} = \frac{1}{\Omega}$

Al	$3{,}7 \cdot 10^{7}$ S/m
Cu	$5{,}9 \cdot 10^{7}$ S/m
Superprevodnik	∞
Steklo	10^{-15} S/m

Upornost

El. tok omejimo na vodnik



$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \qquad \int d\vec{l}$$

$$\int\vec{j}\cdot d\vec{l} = \sigma\int^{2}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\sigma(\varphi(2) - \varphi(1)) = \sigma U$$

$$\Downarrow \int\vec{j}\cdot\hat{t}\,\frac{d^2r}{S(l)} = I\int\frac{dl}{S(l)}$$

Vpeljemo upornost $\boxed{R = \int\frac{dl}{\sigma S(l)}} \quad \Rightarrow \quad U = RI$

Disipacija energije

Na naboje v EM polju delujejo električne in magnetne sila. Magnetna sila je vedno $\perp$ na tir delca, zato ne troši energije (ne spremeni hitrosti). K disipaciji prispeva le el. sila $F = \int \rho \vec{E}\, d^3\vec{r}$ izračunamo Joulovo moč:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = \int \underset{\text{gostota sil}}{\vec{f}}\cdot\vec{v}\, d^3\vec{r} = \int \frac{\vec{j}}{\rho}\cdot(\rho\vec{E} + \overbrace{\vec{j}\times\vec{B}}^{=0})\, d^3\vec{r} = \int \vec{j}\cdot\vec{E}\, d^3\vec{r}$$

Kapacitivnost

V splošnem želimo vpeljati kapacitivnost prevodnikov. Vzamemo N prevodnikov $i=1,\dots,N$

$\varphi(\partial V_i) = \text{konst}$ potencial na robu prevodnika je konstanten.

(a) Gledamo celotno energijo polja

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

po vseh nabojih

Ker prevodniki, so naboji le na površini

$$\rho\, d^3\vec{r} \to \sum_i \sigma_i\, dS_i$$

$$\Rightarrow W_e = \frac{1}{2}\sum_i \oint \overset{\text{konst}}{\varphi}\, \sigma_i\, dS_i = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint \sigma_i\, dS_i = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i e_i$$

po površini i-tega prevodnika

(b) Isti račun izvedemo drugače

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\iint_V \frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3\vec{r}'\, d^3\vec{r} = \dots$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3\vec{r}'$$

Predpostavimo, da je ves naboj na površini prevodnika: $\rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \sum_i \sigma_i\, dS_i$

$$\dots = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{ij}\iint \frac{\sigma_i\sigma_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\, dS_i\, dS_j = \dots$$

po površini i-tega in j-tega prevodnika

Uvedemo $\int \sigma_i\, dS_i = e_i$

$$\dots = \frac{1}{2}\sum_{ij} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\, e_i e_j}\, e_i e_j \iint \frac{\sigma_i\sigma_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\, dS_i\, dS_j}_{C_{ij}^{-1}}$$

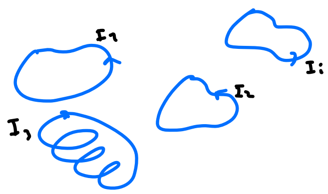
inverzni tenzor (medsebojne) kapacitivnosti

Združimo

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i e_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} C_{ij}^{-1} e_i e_j \qquad C_{ij}^{-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\, e_i e_j}\iint \frac{\sigma_i\sigma_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\, dS_i\, dS_j}$$

$$\varphi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} e_j \qquad e_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j \qquad (e = C\varphi)$$

Induktivnost



Imamo $i = 1, \dots, N$ tokovnih zank, po katerih teče tok I_i.
Računamo magnetno energijo polja.

ⓐ $$W_m = \frac{1}{2}\int \underbrace{\vec{j}\,\vec{A}\,d^3\vec{r}}_{I d\vec{l}} = \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint_i \vec{A}\,d\vec{l} =$$

po i-ti zanki

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \int \underbrace{\nabla\times A}_{B}\, d\vec{S} = \frac{1}{2}\sum_i I_i\, \phi_{m_i}$$

↳ magnetni pretok skozi i-to zanko

ⓑ Zapišemo na drug način

$$W_m = \frac{1}{2}\int \vec{j}\,\vec{A}\,d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_V \frac{\vec{j}(\vec{r})\,\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3\vec{r}\,d^3\vec{r}' =$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3\vec{r}'$$

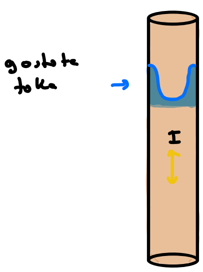
$$= \frac{1}{2}\sum_{ij} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\, I_i I_j \oint_i\oint_j \frac{d\vec{l}_i\, d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}}_{L_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{ij} L_{ij}\, I_i I_j$$

Kjer je $\boxed{L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_i\oint_j \frac{d\vec{l}_i\, d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}}$ tenzor induktivnosti

L_{ii} ... lastna induktivnost (npr. induktivnost ene tuljave)

Velja $\boxed{\phi_{m_i} = \sum_j L_{ij}\, I_j}$ $\qquad (U = L\dot{I},\ \phi_L = LI)$ $\quad \frac{d}{dt}$

Kožni pojav (skin efekt)



Ko izmenični tok teče skozi prevodnik, se razporedi tako, da je gostota toka največja blizu sten prevodnika.

Osnovne enačbe

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad (\varphi = 0 \text{ razen na površini})$$
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$
$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\sigma_E\vec{E}$$

Delujemo z rotorjem

$$\nabla\times(\nabla\times E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times B) = -\mu_0\sigma_E\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times(\nabla\times B) = \mu_0\sigma_E\,\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\sigma_E\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Uporabimo zvezo $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

Dobimo $(\nabla\cdot B = 0,\ \nabla\cdot E = 0) \Rightarrow$

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\sigma_E\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
$$\nabla^2\vec{B} = \mu_0\sigma_E\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

to sta difuzijski enačbi za $\vec{E}$ in $\vec{B}$.

Iščemo rešitve

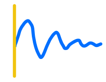
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = -i\omega\mu_0\sigma_E \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \underbrace{-i\omega\mu_0\sigma_E}_{k^2} \vec{B} \qquad k = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\sigma_E}$$

Torej rešitev v 1D $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = k^2 E\right)$

$$E \propto e^{-kz} = \underbrace{e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\,z}}_{\text{exp padanje}}\ \underbrace{e^{i\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\,z}}_{\text{osciliranje}}$$



Vdorna globina $= \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_E}}$

debelina kože

Za Cu $\nu = 60\,\text{Hz}$ je vdorna globina $\sim 1\,\text{cm}$ $\Rightarrow$ El. kabli premeri za

Za Cu $\nu = 750\,\text{MHz}$ (internet) je vdorna globina $\sim 1\,\mu\text{m}$

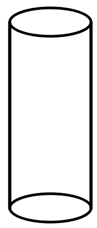
za še hitrejšo komunikacijo uporabljamo optiko

Geometrija polj

cilindrične koordinate + cil. baza

Od nič različni samo: E_z in B_φ

izmenični tok



$$E_z(r,t) = E_z(r)\, e^{-i\omega t}$$

$$B_\varphi(r,t) = B_\varphi(r)\, e^{-i\omega t}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} = -i\omega\mu_0\sigma B_\varphi$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E_z}{\partial r} = -i\omega\mu_0\sigma E_z$$

Veljati mora še povezava med $\vec{E}$ in $\vec{B}$:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega B_\varphi = (\nabla\times\vec{E})_\varphi = -\frac{\partial E_z}{\partial}$$

Rešitev enačb $E_z(r) = A\, J_0(kr)$ modificirane Besselove funkcije

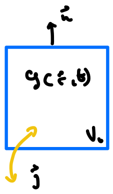
$\rightarrow B_\varphi(r) = -iA\frac{k}{\omega} J_1(kr)$ $\quad k^2 = i\omega\mu_0\sigma_E$

Maxwellove enačbe

Maxwellova teorija EM polja povezuje el. in mag. polje, $\vec{E}(\vec{r},t)$ in $\vec{B}(\vec{r},t)$, z gostoto naboja in gostoto toka, $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$, ki sta izvira polj.

Zavedajmo se Helmholzovega izreka, ki trdi, da je poljubno vektorsko polje popolnoma določeno, če poznamo njegovo div. in rotor.

Ohranitev naboja - kontinuitetna enačba



Zanima nas celoten naboj v V_0:

$$e(t) = \int_{V_0} \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r}$$

V splošnem ta $e(t)$ ni konstanten, ker $\vec{j}$ lahko stalno prinaša / odnaša naboj.

Torej
$$\frac{de}{dt} = -\int_{\partial V_0} \vec{j}\,\vec{n}\, dS = -\int_{V_0} \nabla \vec{j}\, d^3\vec{r}$$
$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}\int \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$ kontinuitetna enačba

Maxwellov premikalni tok

Osnovne Maxwellove enačbe v kvazistatični sliki so oblike

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \underbrace{\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}}$$

ta enačba implicira, da je vedno

$$/\cdot\nabla \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\nabla(\nabla\times\vec{B})}_{=0} = \mu_0 \underbrace{\nabla\vec{j}}_{\neq 0}$$ ⇒ ker pa ne zadošča kontinuitetni enačbi

To se reši z dopolnitvijo enačbe s premikalnim tokom

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \underbrace{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

↪ premikalni tok - neničeln za časovno spremenljivo E.

$$\nabla(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\nabla\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla E$$
$$0 = \mu_0\nabla\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$
$$0 = \nabla\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$ ... kontinuitetna enačba

Dopoln set Maxwellovih enačb

I. enačba $\quad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

II. enačba $\quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$

III. enačba $\quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

IV. enačba $\quad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

kinematični enačbi (II., III.)

povezave polj z izviri

Ohranitveni zakoni

Maxwellove enačbe ohranjajo naboj, gibalno količino, vrtilno količino in celotno energijo EM polja.

Ohranitev energije

Vzamemo III in IV enačbo in križno zmnožimo

$$/\cdot\vec B$$
$$\vec B(\nabla\times\vec E) = -\vec B\cdot\frac{\partial\vec B}{\partial t}$$
$$/\,\vec E\cdot$$
$$\vec E\cdot(\nabla\times\vec B) = \vec E\,\mu_0\vec j + \vec E\,\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}$$
$$\Big]\ -$$

$$\mu_0\varepsilon_0\vec E\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \vec B\frac{\partial\vec B}{\partial t} = \vec E(\nabla\times\vec B) - \vec B(\nabla\times\vec E) - \mu_0\vec E\vec j \qquad /:\mu_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec B^2\right) = -\frac{1}{\mu_0}\nabla(\vec E\times\vec B) - \vec j\cdot\vec E$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\vec P + \vec j\vec E = 0}$$

Kontinuitetna enačba za energijo v diferencialni obliki

kjer $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec B^2$ ... volumska gostota energije

$\vec P = \frac{1}{\mu_0}\vec E\times\vec B$ ... Poyntingov vektor (smer širjenja energije)

V integralni obliki (za nek volumen V_0)

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0} w\,d^3r}_{\text{Celotna energija}} = \underbrace{-\int_{\partial V_0}\vec P\,d\vec S}_{\text{Odtok/pritok skozi površino}} - \underbrace{\int\vec j\cdot\vec E\,d^3r}_{\text{npr. Ohmske izgube}}}$$

Torej celotna energija v nekem volumnu se lahko spreminja kot posledica odtoka/dotoka skozi površino ali po nivoju celotnega volumna (npr. ohmske izgube)

Ohranitev gibalne količine

Obravnavamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0(\vec E\times\vec B)\right) = \varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}\times\vec B + \varepsilon_0\vec E\times\frac{\partial\vec B}{\partial t} =$$

$$\nabla\times\vec B = \mu_0\vec j + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec E}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec B)\times\vec B - \vec j\times\vec B - \varepsilon_0\vec E\times(\nabla\times\vec E)$$

predelamo $(\nabla\times\vec B)\times\vec B$ in $\vec E\times(\nabla\times\vec E)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\varepsilon_0(\vec E\times\vec B)}_{\text{gostota gibalne količine }\vec g}\Big) = \nabla\Big(\underbrace{\varepsilon_0\vec E\otimes\vec E - \varepsilon_0\frac{1}{2}E^2 I + \frac{1}{\mu_0}\vec B\otimes\vec B - \frac{1}{2\mu_0}B^2 I}_{\text{napetostni tenzor EM polja } T}\Big) - \Big(\underbrace{\rho\vec E + \vec j\times\vec B}_{\text{gostota EM sile } \vec f}\Big)$$

Torej

$$\boxed{\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0}$$

Cauchyjeva kontinuitetna enačba za gib. količino

$\vec g = \varepsilon_0(\vec E\times\vec B)$ — Gibalna količina

$T_{ik} = \varepsilon_0 E_i E_k - \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\delta_{ik} + \frac{1}{\mu_0}B_iB_k - \frac{1}{2\mu_0}B^2\delta_{ik}$ — Napetostni tenzor

$\vec f = \rho\vec E + \vec j\times\vec B$ — Lorentzova gostota sile

V integralni obliki

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V g_i\, d^3r = \int_{\partial V} T_{ik}\, dS_k - \int_V f_i\, d^3r$$

V danem volumnu se gibalna količina lahko spremeni kot posledica delovanja napetostnega tenzorja na površini telesa ali kot posledica Lorentzove volumske sile.

Ohranitev vrtilne količine

Vzamemo ohranitev gibalne količine

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - f_i \qquad / \; x_j$$

$$\frac{\partial\, x_j g_i}{\partial t} = x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - x_j f_i$$

$$\frac{\partial\, x_j T_{ik}}{\partial x_k} = x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + T_{ik}\,\delta_{jk}$$

$(\vec{a}\times\vec{b})_k = \varepsilon_{kij}\, a_i b_j$

$$\frac{\partial x_j g_i}{\partial t} = \frac{\partial x_j T_{ik}}{\partial x_k} - T_{ij} - x_j f_i \qquad / \; \varepsilon_{\ell j i} \quad \text{vektorski produkt}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\underbrace{\varepsilon_{\ell j i}\, x_j g_i}_{\text{vrtilna količina}}\big) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varepsilon_{\ell j i}\, x_j T_{ik}\right) - \underbrace{\varepsilon_{\ell j i} T_{ij}}_{\text{ker je } T_{ij} \text{ simetričen, } \varepsilon_{\ell j i} \text{ pa antisim. je to enako } 0.} - \underbrace{\varepsilon_{\ell j i}\, x_j f_i}_{\text{navor}}$$

Uvedemo: gostota vrtilne količine $\gamma_\ell = \varepsilon_{\ell j i}\, x_j g_i$

gostota navora $m_\ell = \varepsilon_{\ell j i}\, x_j f_i$

Dobimo $\boxed{\frac{\partial \gamma_\ell}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varepsilon_{\ell j i}\, x_j T_{ik}\right) + m_\ell = 0}$ kontinuitetna enačba za vrtilno količino

Prepišemo v integralsko obliko $\int dV$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \gamma_\ell\, d^3r - \oint_{\partial V}\left(\varepsilon_{\ell j i}\, x_j T_{ik}\right) n_k\, dS + \int m_\ell\, d^3r = 0$$

Vrtilna količina EM polja se torej spreminja kot posledica delovanja napetostnega tenzorja na površini in volumskih navorov.

Elektromagnetno polje v snovi

Električno polje v snovi

Kako se spremenijo Maxwellove enačbe če polje vstavimo v snovi

Vezan naboj

Celotna gostota naboja v snovi je sestavljena iz dveh prispevkov:

- zunanji naboj, ki ga lahko poljubno spreminjamo
- vezan naboj, ki ga ne moremo spreminjati, je določen z mikroskopsko porazdelitvijo

Vezan naboj definiramo kot: $\rho_v = \overline{\sum_i e_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)}$

Povprečimo ga preko tisti hidrodinamskega volumna → zgladi mikroskopske variacije, dovolj je zvezno spreminjanje vezanega naboja po snovi.

Prva Maxwellova enačba se prepiše v

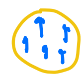
$$\nabla \cdot \vec{E} = \underbrace{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}_{\text{zunanji naboj}} + \underbrace{\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}}_{\text{vezan naboj}}$$

Snov obravnavamo makroskopsko, na nivoju polja.

Polarizacija

Vezan naboj v snovi se izrazi kot polarizacija. Uvede se:

$$\boxed{\rho_v = -\nabla \vec{P}}$$

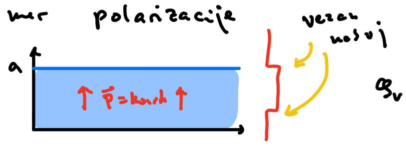
(spomni se računa  naboj ki ni nosa)

Dobimo zvezo:

$$\boxed{\nabla(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \quad \text{oz} \quad \rho = \nabla \vec{D}}$$

Kjer uvedemo gostoto električnega polja $\vec{D}$, kot $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.
Izvori $\vec{D}$ so izključno zunanji naboji. Odziv snovi na el. polje je, da pride do prerazporeditve naboja in ustvari se polarizacija, ki zunanje polje ojača ali oslabi.

Primer polarizacije



$$\rho_v = -\nabla\vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = -P\delta(z) + P\delta(z-a)$$

Konstitutivne relacije za električno polje v snovi

Porazdelitev vezanih nabojev, ρ_v je odvisna od snovi in zunanjega polja. Torej

$\vec{P} = \vec{P}(\vec{D})$, ta funkcija je v principu poljubna

Konstitutivne relacije

Za majhna zunanja polja in homogene ter izotropne snovi razvijemo $\vec{P}(\vec{D})$ do prvega člena:

$$\boxed{\vec{P}(\vec{D}) = \chi_E \vec{D} + \mathcal{O}(\vec{D}^2)}$$

električna susceptibilnost

Ponavadi se zapiše

$$\boxed{\chi_E = 1 - \frac{1}{\varepsilon}}$$

ε...dielektričnost (dielektrična funkcija (frekvenčno odvisna))

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_\varepsilon \vec{D}$$

$$\left(1 - 1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{in} \quad \vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E}}$$

osnovni izrazi, ki opisujeta polarizacijo in polje v homogeni izotropni snovi.

Polarizacija in gostota električnega dipolnega momenta

Zanima nas, kaj točno je vektorsko polje polarizacije. Poissonova enačba z nabojem v snovi

$$-\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Rešitev

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \underbrace{\frac{\nabla' \vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\nabla'\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) - \vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)} d^3r'$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_V \nabla'\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d^3r'}_{\underbrace{\oint_{\partial V}\frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{S}}_{=0}} + \int_V \vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d^3r'$$

$$\vec{P}\big|_{\partial V} = 0$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' + \int_V \vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\underbrace{\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)}_{-\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)} d^3r'$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' - \nabla\int_V\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\vec{P}(\vec{r}\,')\,d^3r'$$

Če $\rho(\vec{r}\,') = 0$ ni zunanjega naboja

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' \qquad *$$

Primerjamo dobljeno z el. pot. za el. dipol, ki je oblike

$$* \qquad \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\,'\,\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \qquad \text{dipol je pri } \vec{r}\,'$$

Da dobimo iz * rešitev * moramo vzeti

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \vec{p}\,'\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

⇒ Polarizacija ustreza volumski gostoti el. dip. momenta. !

Slika snovi v el. polju:
Zunanje el. polje v snovi razmakne težišče poz. in neg. nabojev (v atomih, molekulah, ...) zato se pojavijo električni dipoli. Njihova volumska gostota ustreza polarizaciji.

Klasifikacija snovi po odzivu na električno polje

Glede na vrednost dielektrične funkcije ločimo:

- dielektriki: imajo končno vrednost ε, lahko skladiščijo energijo. Neidealni dielektriki imajo frekvenčno odvisen $\varepsilon(\omega)$. Plastika, kristali, ...
- prevodniki: imajo neskončno vrednost ε. Idealno senčijo el. polje v notranjosti
- in drugi

Magnetno polje v snovi

V snovi obstajajo vezani tokovi, ki so kvantnega izvora (npr. pomisli o gibanju e^- v atomih oz. po orbitalah). Če ni zun. mag. polje je hidrodinamsko povprečje magnetnih polj vezanih tokov enako 0. Če je zun. mag. polje pa se lahko lokalne fluktuacije vezanih tokov odzovejo nanj. Dobimo neto vezano gostoto toka.

Vezan tok v snovi

V snovi imamo:

- $\vec{j}$ zunanja gostota el. toka
- $\vec{j}_v$ vezana gostota el. toka

Vezan tok def. kot

$$\vec{j}_v = \overline{\sum_i \vec{j}_i\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)}$$

↑ kor. koordinate atomov

IV Maxwellova en.

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\vec{j}_v + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Magnetizacija

Uvedemo novo vekt. polje magnetizacije kot:

$$\boxed{\vec{j}_v = \nabla\times\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}}$$

Vezani tokovi so povezani z magnetizacijo in časovnim spreminjanjem polarizacije

S tako definicijo $\vec{j}_v$ in ρ_v zadoščata kontinuitetni enačbi:

$$\nabla\vec{j}_v + \frac{\partial\rho_v}{\partial t} = 0$$

$$\nabla(\nabla\times M) + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\vec{P} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_v = 0$$

$$0 \quad - \frac{\partial}{\partial t}\rho_v + \frac{\partial}{\partial t}\rho_v = 0 \quad ✓$$

Sedaj lahko zapišemo:

$$\nabla\times\underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)}_{\vec{H}} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Vpeljemo jakost mag. polja $\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}$

Opazimo, da je $\vec{H}$ odvisna le od zunanjih tokov (v resnici izvirov). !

Konstitutivna relacija za magnetizacijo

Magnetizacija je odvisna od zun. mag. polja $\vec{H}$.

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}) \qquad \text{poljubna funkcija } \vec{H}.$$

konstitutivna relacija

v linearni aproksimaciji za homogeno izotropno snov:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} + \mathcal{O}(\vec{H}^2)$$

magnetna susceptibilnost

uvedemo tudi

$$\mu = 1 + \chi_m$$

magnetna permeabilnost

Torej

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \chi_m \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}}$$

Velja v linearni konstitutivni relaciji.

Magnetizacija in gostota magnetnega dipolnega momenta

Kaj je vektor magnetizacije?

Obravnavamo:

$$j_v = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 j + \nabla \times \vec{M}$$

uvedemo $\nabla \times \vec{A}$

Zapišeš enačbo za $\vec{A}$ in poiščeš rešitev za $\vec{A}$ (po Kirchhoffovi enačbi), primerjaš z rešitvijo od $\vec{A}$ za magnetni dipol.

$\Rightarrow$ Magnetizacija je volumska gostota magnetnih dipolov !

Klasifikacija snovi po odzivu na mag. polje

Glede na vrednost permeabilnosti ločimo:

- paramagneti: $\mu > 1$ oz $\chi_m > 0$, $\vec{H} \parallel \vec{M}$
  Mag. polje v snovi se ojači, v mag. polju se snov obnaša kot magnet, ko pa polja ni se razmagneti.
  Npr: kovine
- diamagneti: $\mu < 1$ oz $\chi_m < 0$, $\vec{H} \parallel -\vec{M}$, mag. polje snov oslabi, magnetizacija je prisotna samo ko je snov v zun. polju, drugače izgine.
  Npr: superprevodniki ($\mu = 0$, idealni diamagneti)
- feromagneti: Imajo trajno magnetizacijo, ki je neodvisna od velikosti zun. polja, $\vec{M}$ je močno temperaturno odvisna (nad Curiejevo temperaturo M izgine).
  Npr: magneti $\vec{M} = \vec{M}_0$, ne velja linearna aproksimacija

in drugi

Maxwellove enačbe v snovi

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \vec{D} = \rho & \nabla \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}}$$

+ 2 konstitutivni relaciji: $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}) \xrightarrow{\text{lin. hom. snov}} \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$

$\vec{P} = \vec{P}(\vec{D}) \longrightarrow \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$

V anizotropni snovi: $\varepsilon \rightsquigarrow \underline{\varepsilon} \to \vec{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \vec{E}$ (tekoči kristali izkoriščajo to)

$\mu \rightsquigarrow \underline{\mu} \to \vec{B} = \mu_0 \underline{\mu} \vec{H}$ (trdi diski)

V nelinearnih snoveh (npr. v nelinearni optiki, modri/zeleni laser)

$$\vec{D} = \_\_\, \vec{E} + \_\_\, \vec{E}\vec{E} + \_\_\, \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \dots$$

$$\vec{B} = \_\_\, \vec{H} + \_\_\, \vec{H}\vec{H} + \_\_\, \vec{H}\vec{H}\vec{H} + \dots$$

Ohranitev energije

Kontinuitetna enačba ohrani obliko

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{P} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

kjer pa sedaj $w = \int_0^{\vec{D}} \vec{E}(\vec{D})\, d\vec{D} + \int_0^{\vec{B}} \vec{H}(\vec{B})\, d\vec{B}$ konstitutivne relacije

$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ Poyntingov vektor

če $\vec{E} \propto \vec{D}$ in $\vec{H} \propto \vec{B}$ dobimo kvadratno formo $w \propto B^2, D^2$

Energija EM polja v snovi

Zanima nas, kolikšna je razlika EM energij, če v del prostora vstavimo EM aktivno snov ($\mu \neq 1$, $\varepsilon \neq 1$)

- Električno polje

$$\underbrace{W}_{\text{s snovjo}} - \underbrace{W_0}_{\text{brez snovi}} = \iint \vec{E}\, d\vec{D}\, dV - \iint \vec{E}_0\, d\vec{D}_0\, dV \overset{\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}}{=} \int \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{D^2}{2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{D_0^2}{2} dV = \int \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} - \frac{\vec{E}_0 \vec{D}_0}{2}\, dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int (\vec{E}\vec{D}_0 - \vec{E}_0 \vec{D})\, dV - \frac{1}{2}\int \underbrace{(\vec{E} + \vec{E}_0)}_{-\nabla\varphi} (\vec{D} + \vec{D}_0)\, dV$$

$$-\frac{1}{2}\int \nabla\varphi\, (\vec{D} - \vec{D}_0)\, dV =$$

Predpostavimo $\nabla(\vec{D} - \vec{D}_0) = 0$
$\Rightarrow \rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})$ gostota naboja je enaka za $\vec{D}$ in $\vec{D}_0$.

$$= -\frac{1}{2}\int \nabla(\varphi(\vec{D} - \vec{D}_0))\, dV + \frac{1}{2}\int \varphi \underbrace{\nabla(\vec{D} - \vec{D}_0)}_{=0} dV =$$

$$= -\frac{1}{2} \oint_{\partial V} \varphi (\vec{D} - \vec{D}_0)\, dS = 0$$

če smo dovolj daleč stran (izven snovi) $\vec{D} = \vec{D}_0$

$$\Rightarrow W - W_0 = -\frac{1}{2}\int \vec{E}\vec{D}_0 - \vec{E}_0 \vec{D}\, dV$$

če je prostor izven snovi vakuum

$$= -\frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \vec{E}\vec{E}_0\, dV = -\frac{1}{2}\int_V \vec{P} \cdot \vec{E}\, dV$$

po snovi; vakuum; polarizacija v snovi; el. polje brez snovi

- Magnetno polje

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\int \vec{H}\vec{B}\, dV - \frac{1}{2}\int \vec{H}_0 \vec{B}_0\, dV = \frac{1}{2}\int \vec{B}\vec{H}_0 - \vec{B}_0\vec{H}\, dV + \underbrace{\frac{1}{2}\int (\vec{B}+\vec{B}_0)(\vec{H}-\vec{H}_0)\, dV}_{=0} =$$

Predpostavim $\nabla \times (H - H_0) = 0$ gostota toka se ne spremeni

jakost mag. polja brez snovi

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\int_V \mu_0 (\mu - 1)\, \vec{H}\vec{H}_0\, dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{M}\vec{H}_0\, dV$$

po snovi

magnetizacija v snovi

Ohranitev gibalne količine

Cauchyjeva kontinuitetna enačba za gibalno količino in linearne konstitutivne relacije

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0$$

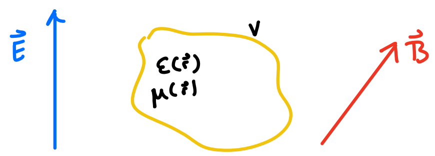
kjer: $\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B}$ gostota gib. kol.

$T_{ik} = E_i D_k - \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\,\delta_{ik} + B_i H_k - \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\,\delta_{ik}$ napetostni tenzor za linearne konstitutivne relacije

Vendar: za splošne konstitutivne relacije ni nujno, da lahko uvedeš napetostni tenzor. Ne da se zapisati $\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \nabla \cdot \_\_$ zato obstajajo različni poskusi / približki takih zapisov.

Sila na nehomogeno snov EM polju

Predstavljajmo si snov v EM polju, kjer je $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ in $\mu = \mu(\vec{r})$



Če to snov premaknemo, se spremeni $\varepsilon(\vec{r})$ in $\mu(\vec{r})$. Zanima nas na tak volumen / delec V. Silo na delec zapišemo kot:

$$F_i = \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\, dV$$

po volumen telesa

Najprej gledamo elektrostatični del

$\frac{1}{2}\nabla E^2 = \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}$

$\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0 \vec{E}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(E_i D_k - \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\,\delta_{ik}\right) = E_i \frac{\partial D_k}{\partial x_k} + E_k \frac{\partial D_i}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon(\vec{r})\frac{\partial E^2}{\partial x_i}$$

$$\vec{F} = \int_V \underbrace{\vec{E}(\nabla\cdot\vec{D}) + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{D} - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{E}) - (\vec{E}\nabla)\vec{D}}_{=0}\, dV - \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 \nabla\varepsilon(\vec{r})\, E^2\, dV$$

Po predpostavki:
- $\nabla\cdot\vec{D} = 0$ ni zunanjih nabojev prostih /
- $\nabla\times\vec{E} = 0$ ni indukcije

Torej $\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V E^2 \nabla\varepsilon(\vec{r})\, dV}$ za nehomogen dielektrik. Sila kaže v smeri največjega spreminjanja ε.

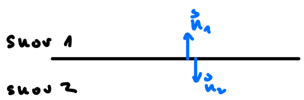
Optična pinceta

Analogno za magnetno polje

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2} \int \mu_0 \nabla \mu(\vec{r})\, H^2\, dV}$$

lin. konst. relacija
ni prostih tokov $(\nabla \times H = 0)$

Robni pogoji za Maxwellove enačbe

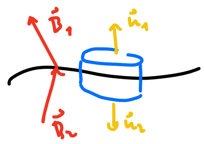


normalne komponente — tangentne komponente

Velja: $\quad D_{1n} - D_{2n} = \sigma \qquad E_{1t} - E_{2t} = 0$

$\qquad B_{1n} - B_{2n} = 0 \qquad H_{1t} - H_{2t} = K$ ← površinski tok

Robni pogoj za $\vec{B}$



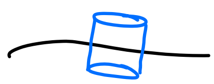
$$\nabla \vec{B} = 0 : \int_V \nabla \vec{B}\, dV = \oint_{\partial V} \vec{B}\, d\vec{S} =$$

$$= \int_{(1)} \vec{B}_1 \vec{n}_1\, dS + \int_{(2)} \vec{B}_2 \vec{n}_2\, dS + \underbrace{\int_{plašč} \vec{B}_{plašč}\, \vec{n}_{plašč}\, d\vec{S}}_{\lim_{višina \to 0} = 0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \vec{B}_1 \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \vec{n}_2$$

$$0 = B_{1n} - B_{2n}$$

Robni pogoj za $\vec{D}$



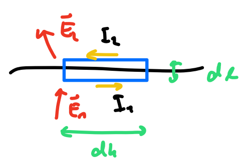
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\int \nabla \vec{D}\, dV = \int_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{S} = \int \rho\, dV = \int_{\partial V} \sigma\, dS$$

$$\int_{\partial V} \vec{D}\, d\vec{S} = \int_{(1)} \vec{D}_1 \vec{n}_1 dS + \int_{(2)} \vec{D}_2 \vec{n}_2 dS + \underbrace{\int_{plašč} \vec{D} \vec{n}\, dS}_{\lim = 0}$$

$$= D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

Robni pogoj za $\vec{E}$



$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

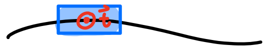
$$\int_S \nabla \times \vec{E}\, dS = \int_{\partial S} \vec{E}\, d\vec{l} = \vec{E}_1 \vec{t}_1\, dh + \vec{E}_2 \cdot \vec{t}_2\, dh + \underbrace{\vec{E}_{rob} \cdot \vec{t}_3\, dl + \vec{E}_{rob}\, \vec{t}_4\, dl}_{\to 0}$$

$$\parallel$$

$$-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}\, d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{rob}\, dl\, dh \xrightarrow{dl \to 0} 0$$

$$\Rightarrow \quad E_{1t} - E_{2t} = 0$$

Robni pogoj za $\vec{H}$



$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

površinska gostota toka → v smeri normale zanke

$$\int \nabla \times H \, d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{H} \, d\vec{r} = \underbrace{\int \vec{j} \, d\vec{S}}_{K dh} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int \vec{D} \, d\vec{S}}_{\to 0} = \vec{H}_1 \vec{t}_1 \, dh + \vec{H}_2 \vec{t}_2 \, dh + \underbrace{\vec{H}_{1n} \vec{t}_3 \, dl + \vec{H}_{2n} \vec{t}_4 \, dl}_{=0}$$

$\lim_{dl \to 0}$

$$K \, dh = \vec{j} \, \vec{t} \, dh \, dl$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$

Frekvenčna odvisnost dielektrične funkcije

Dielektrična funkcija oz. lomni količnik so odvisni od frekvence. $\varepsilon = \varepsilon(\omega) = n^2(\omega)$

Uporabimo Fourierovo transformacijo, da prevedemo sistem v frekvenčno domeno.

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$ predpostavli linearen odziv

$$\varepsilon(\omega) = \underbrace{\varepsilon_r(\omega)}_{\text{realna komp}} + i \underbrace{\varepsilon_i(\omega)}_{\text{imag. komp.}}$$

Re komponenta določa npr. lom svetlobe, ... Im komponenta pa določa absorpcijo

Kramers - Kronigove relacije

Realni in imaginarni del dielektrične funkcije sta sklopljena, če poznaš enega lahko določiš drugega. In sicer velja:

$$\mathrm{Re}\, \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\mathrm{Im}\, \varepsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\mathrm{Im}\, \varepsilon(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int \frac{\mathrm{Re}\, \varepsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Kjer $\mathcal{P}$ pomeni glavno Cauchyjevo vrednost integrala

$$\mathcal{P} \int \frac{g(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\omega - \varepsilon} \frac{g(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega + \varepsilon}^{\infty} \frac{g(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Te relacije sledijo iz definicije integrala glavne vrednosti Hilbertove transformacije in Plemljeve enačbe. Pomembne so v različnih spektroskopskih tehnikah, kjer z meritvijo ene komponente lahko dobimo še drugo

Disipacija energije in $\mathrm{Im}\, \varepsilon(\omega)$

$\mathrm{Im}\, \varepsilon(\omega)$ nam ustvari fazni zamik med $\vec{D}$ in $\vec{E}$. Gostota energije (mag. del posebej):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Sprememba energije med časom T_1 in T_2 $\quad w(2) - w(1) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial w}{\partial t} dt = \ldots$

$$\dots = \int_{T_1}^{T_2} \vec E \frac{\partial \vec D}{\partial t}\, dt =$$

Gremo v frekvenčni prostor

$$\vec E(t) = \frac{1}{2\pi}\int \vec E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$
$$\vec D(t) = \frac{1}{2\pi}\int \vec D(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{2\pi}\int \vec E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \; \frac{1}{2\pi}\int \underbrace{\vec D(\omega')}_{=\,\varepsilon(\omega')\varepsilon_0 \vec E(\omega')} (-i\omega')\, e^{-i\omega' t} d\omega' \, dt =$$

$$= \varepsilon_0 \iint \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega'}{2\pi}(-i\omega')\,\varepsilon(\omega')\,\vec E(\omega)\,\vec E(\omega') \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} e^{-i(\omega+\omega')t}\, dt}_{\substack{T_1 \to -\infty \\ T_2 \to \infty \\ 2\pi\,\delta(\omega+\omega')}}$$

⋮

ločeno integriraj po ω potem pa še po ω' in seštej.
Izvedi integral po volumnu. Dobimo

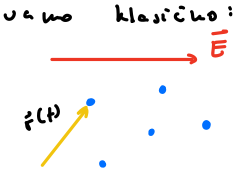
$$W(2) - W(1) = \varepsilon_0 \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \omega \,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) \int |E(r,\omega)|^2 d^3r$$

Razlika energij je $\propto \mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$

Modeli $\varepsilon(\omega)$

Gibalna enačba za vezan naboj

V dielektriku imamo vezane naboje, ki se ne morejo poljubno gibati po snovi.
Obravnavamo klasično:



$$m\frac{d^2\vec r}{dt^2} = \underbrace{-m\gamma\dot{\vec r}}_{\substack{\text{dušenje/} \\ \text{disipacija} \\ \text{(sipanje na} \\ \text{nečistočah/} \\ \text{viskoznost)}}} \underbrace{- m\omega_0^2\vec r}_{\substack{\text{vezan naboj} \\ \text{v harmonskem} \\ \text{potencialu}}} + \underbrace{e\vec E}_{\substack{\text{zunanje} \\ \text{polje}}}$$

Uporabimo Fourierovo transformacijo $\vec r(t) = \frac{1}{2\pi}\int \vec r(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$

$$-m\omega^2 \vec r(\omega) = i\omega m\gamma \vec r(\omega) - m\omega_0^2 \vec r(\omega) + e\vec E(\omega)$$

$$\Rightarrow \vec r(\omega) = \frac{e\vec E(\omega)}{m\omega_0^2 - i\omega m\gamma - m\omega^2} = \frac{e\vec E(\omega)}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$

Torej $\vec P(\omega) = e\vec r(\omega)\, n$

volumska številska gostota

$$\vec P(\omega) = \frac{e^2 n \vec E(\omega)}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$

Velja tudi: $\vec P = \varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1)\vec E$

$$\Rightarrow \varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1) = \frac{e^2 n}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}+1}$$

Splošna frekvenčna odvisnost

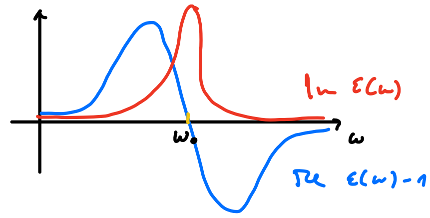
Opisana odvisnost se večkrat uporablja v približkih:

- Debyjeva relaksacija (zanemariš ω^2)

$$\vec P(\omega) = \frac{e^2 n}{m\omega_0^2}\frac{\vec E(\omega)}{1-i\omega\tau} \qquad \tau = \frac{\gamma}{\omega_0} \text{ relaksacijski čas}$$

tipično ustreza relaksaciji dipolnih momentov v molekulah, $\omega \sim 10^7 - 10^9$ Hz

• Lorentzove relaksacije (upoštevamo vse člene)



$$\varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1) = \frac{(\varepsilon(0)-1)\,\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$

Tipično nihanje molekul $\omega \approx 10^{12} - 10^{16}$ Hz

• Plazemska relaksacija (zanemarimo $\omega_0 \to 0$ in $\gamma \to 0$)

prosti delci ni upora

$$\varepsilon(\omega) = 1-\frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega^2} = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}$$ plazemska frekvenca

Elektroni v snovi, ki so prosti, $\omega > 10^{16}$ Hz

V realnih snoveh imaš lahko več vzrokov / virov vezave in disipacije (več ω_0, γ) odziv snovi je tako superpozicija vseh teh efektov.

Primer: voda

Uporabi se Debyjevo relaksacijo pri nizkih frekvencah in Lorentzovo pri visokih frekvencah. In sicer

$$\varepsilon(i\omega) = 1+\sum_{i=1}^{1}\frac{d_i}{1+\omega\tau_i}+\sum_{i=1}^{11}\frac{f_i}{\omega_i^2+g_i\omega+\omega^2}$$

kjer so d_i, τ_i, f_i, g_i fenomenološke / fitane konstante

Hamiltonske metode v teoriji polja

Teorija EM polja se pogosto uporablja v okviru Hamiltonovega oz Euler-Lagrangevega formalizma.

Osnove Hamiltonskih metod v klasični fiziki

• E-L enačbe:

Npr: obravnavamo gibanje delca, ki se giblje po tiru $\vec{r}(t)$ in s hitrostjo $\dot{\vec{r}}(t)$

Akcija

$$S = \int L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\,dt$$

Lagrangeva funkcija

za en delec

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

Z variacijo (minimizacijo) akcije $\delta S = 0$ dobimo E-L enačbe

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0$$ DE 2. reda

• Hamiltonove enačbe

Uvedemo impulz $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}$

Uvedemo Hamiltonovo funkcijo $H = \dot{\vec{r}}\,\vec{p} - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

Za en delec $H = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})$

Veljajo Hamiltonove enačbe

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \qquad \dot{\vec{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$$ 2 DE 1. reda

Lagrangeva funkcija nabitega delca v EM polju

Hočemo napisati Lagrangevo funkcijo za točkast nabit delec.
Začnemo z Lorentzovo silo

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

2. Newtonov zakon $\quad m\dot{\vec{v}} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

$$= -e\nabla\varphi - e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + e\,\underbrace{\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})}_{\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\nabla)\vec{A}}$$

$$= -e\nabla\varphi - e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + e\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - e(\vec{v}\nabla)\vec{A}$$ supstancialni odvod

$$= -e\nabla\varphi + e\nabla(\vec{v}\vec{A}) - e\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + e\vec{A}) = \nabla(-e\varphi + e\vec{v}\vec{A})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\vec{r}}}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}}\vec{A}\right)\right) = \nabla(-e\varphi + e\dot{\vec{r}}\vec{A})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\vec{r}}}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}}\vec{A} - e\varphi\right)\right) = \nabla\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\varphi + e\dot{\vec{r}}\vec{A}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\varphi + e\dot{\vec{r}}\vec{A}}$$

Opazi: L se izraža z EM potenciali in ne polji.
Za tako def. L je izpolnjen pogoj E-L enačb $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\vec{r}}}L - \frac{\partial}{\partial\vec{r}}L = 0$
ki da $m\ddot{\vec{r}} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

Hamiltonova funkcija nabitega delca v EM polju

$$H(\vec{p},\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}\vec{p} - \mathcal{L}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A} \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}$$

$$H = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}\vec{p} - \frac{1}{2}m\left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}\right)^2 + e\varphi - e\left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}\right)\vec{A}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi}$$

kanonični impulz ($\vec{p}$) — kinetični impulz ($\vec{p} - e\vec{A}$)

V QM Hamiltonova funkcija postane operator.

Schwarzschildova invarianta

Zanima nas Lagrangeva funkcija za zvezno porazdeljen naboj, ki se nahaja v zunanjem polju φ in $\vec A$.

Za en delec $$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec r}^2 \underbrace{- e\varphi + e\dot{\vec r}\vec A}_{\to\, L_{DP}}$$ ta del $\mathcal{L}$ opisuje sklopitev s polji

Za zvezno porazdeljen naboj

$$L_{DP} = -\int \rho(\vec r,t)\,\varphi(\vec r,t)\, d^3 r + \int \vec j(\vec r,t)\,\vec A(\vec r,t)\, d^3 r = \int \mathcal{L}_{DP}\, d^3 r$$

$\vec j$ ↳ gostota toka

$\mathcal{L}_{DP}$: volumska gostota Lagrangeve funk. = Schwartzschildova invarianta

$$\mathcal{L}_{DP} = -\rho\varphi + \vec j \vec A$$

Lagrangeva funkcija EM polja

Zanima nas L. funk., ki ustreza nosilcu delcev kot izvorom polja, ki so dodatno lahko še v zunanjem polju. Zapišemo L iz dveh prispevkov:

$$L = \int \mathcal{L}(\vec r,t)\, d^3 r = \int \underbrace{\mathcal{L}_P(\vec r,t)}_{\text{prispevek polja izvirov}}\, d^3 r + \int \underbrace{\mathcal{L}_{DP}(\vec r,t)}_{\text{prispevek zunanjega polja}}\, d^3 r$$

Ugenemo $\boxed{\mathcal{L}_P = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2}$

ta oblika vodi do prave oblike Maxwellovih enačb, zapisanih za φ in $\vec A$ (spomni se tudi izračunov za energijo polj). Celotna gostota L EM polja je torej:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \underbrace{\vec E^2}_{-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec A}{\partial t}} + \frac{1}{2\mu_0}\underbrace{\vec B^2}_{\nabla\times\vec A} - \rho\varphi + \vec j\vec A$$

E-L in Rieman-Lorentzove enačbe

Celotno akcijo torej zapišemo kot:

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi(\vec r,t), \underbrace{\vec A_i(\vec r,t)}_{\text{po komponentah}})\, dt\, d^3 r$$

Kar da E-L enačbe ($\delta S = 0$):

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial\varphi/\partial t)}\right) + \nabla\left(\frac{\partial L}{\partial(\nabla\varphi)}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial A_i/\partial t)}\right) + \nabla\left(\frac{\partial L}{\partial(\nabla A_i)}\right) - \frac{\partial L}{\partial A_i} = 0 \end{aligned}}$$

Kar da Rieman-Lorentzove enačbe:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\nabla^2 A_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = -\mu_0 j_i \end{aligned}}$$

To so splošne enačbe za φ in $\vec A$, ki sledijo iz časovno odvisnih Maxwellovih enačb.

Posebna teorija relativnosti

EM polja in Lorentzove transformacija

Predpostavimo, da imamo dva sistema, S in S', kjer se S' giblje z neko hitrostjo v in sicer v x smeri.

$\vec{v}$ (blizu svetlobne hitrosti)

S	S'
(x, y, z, t)	(x', y', z', t')
$\vec{E}, \vec{B}$	$\vec{E}', \vec{B}'$

Transformacije med sistemoma je Lorentzova transformacija:

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

Zanima nas, kako se transformirajo polja $E, B \leftrightarrow E', B'$

Ključna predpostavka je, da so Maxwellove enačbe enake v S in S'

V sistemu S' velja (ni izvorov, ni snovi):

$$\nabla' \cdot \vec{E}' = 0 \qquad \nabla' \vec{B}' = 0$$

$$\nabla' \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \qquad \nabla' \times \vec{B}' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}$$

Najprej vzamemo 1. in 3. enačbo

$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E'_{z'}}{\partial z'} = 0$$

$$\frac{\partial E'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_{x'}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial E'_{z'}}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_{y'}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E'_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E'_{x'}}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_{z'}}{\partial t'}$$

npr

$$= -c\gamma\left(\frac{\partial B'_{z'}}{\partial ct} + \beta \frac{\partial B'_{z'}}{\partial x}\right)$$

vstavimo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial ct'} &= \gamma\left(\frac{\partial}{\partial ct} + \beta \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x'} &= \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial ct}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

Enako narediš še za 2. in 4. enačbo in dobiš ob primerjavi z Maxwellovimi en. v sistemu S sistem enačb za komponente polj. Razmislek je, kakšno kombinacijo komponent $\vec{E}'$ in $\vec{B}'$ potrebuješ, da dobiš nazaj orig. Max. en. v sistemu S. Dobimo:

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= E'_{x'} & B_x &= B'_{x'} \\ E_y &= \gamma(E'_{y'} + vB'_{z'}) & B_y &= \gamma\left(B'_{y'} - \frac{v}{c^2}E'_{z'}\right) \\ E_z &= \gamma(E'_{z'} - vB'_{y'}) & B_z &= \gamma\left(B'_{z'} + \frac{v}{c^2}E'_{y'}\right) \end{aligned}}$$

Lorentzove transf. za EM polja

Posledica 1

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z =$$
$$= E_{x'} B_{x'} + \gamma^2 (E_{y'} + v B_{z'})(B_{y'} - \frac{v}{c^2} E_{z'}) + \gamma^2 (E_{z'} - v B_{y'})(B_{z'} + \frac{v}{c^2} E_{y'})$$
$$= E_{x'} B_{x'} + \gamma^2 (E_{y'} B_{y'} + E_{z'} B_{z'} - \frac{v^2}{c^2} B_{z'} E_{z'} - \frac{v^2}{c^2} E_{y'} B_{y'})$$
$$= E_{x'} B_{x'} + E_{y'} B_{y'} + E_{z'} B_{z'} = \vec{E}' \cdot \vec{B}'$$

Skalarni produkt je invarianten, koti se ohranjajo.

Posledica 2 $\quad E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2$

Ta dva člena nastopata v Lagrangevi funkciji (opisujeta energijo polj). Ohranja se samo skupna energija. Vsota obeh je invariantna na Lorentzovo transf.

Torej, v posebni relativnosti se ohranjajo koti med polji, samo velikosti polj so odvisne od sistema, ohranja se samo skupna en.

Prostor Minkovskega

Ideja je, da se teorijo relativnosti formulira s štirivektorji, ki po posebni teoriji relativnosti ohranjajo evklidsko (minkovsko) metriko, pri splošni teoriji relativnosti pa je metrika odvisna od porazdelitve mase.

Štirivektor dogodka (koordinat)

$$X_\mu = (x, y, z, ct)$$

indeks spodaj — kovariantni vektor

$i = 1 \dots 3$ negrški indeks po krajevnih koord.

grški indeks $1 \dots 4$ teče po vseh koordinatah

indeks zgoraj — kontravariantni vektor $\quad X^\mu = (x, y, z, -ct)$

Alternativne oznake:

- $\mu = 0, 1, 2, 3$ — časovna komponenta
- v literaturi lahko obratno uvedena kontra/kovariantni vektorji

Lorentzova transformacija ohranja kvadrat (velikost) štirivektorja:

$$\underset{S}{X_\mu X^\mu} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \underset{S'}{x'_\mu x^{\mu'}}$$

z enako idejo se uvede tudi druge štirivektorje

Štirivektor gostote toka

Gostota naboja in Lorentzove transformacije

Naboj mora biti invarianten na Lorentzovo transf. (drugače bi naboj pridobivali/izgubljali s prehajanjem med sistemi). Torej

$$e = \int_S \rho \, d^3 r = \int_{S'} \rho' \, d^3 r'$$

$$= \int \rho \, dx\,dy\,dz = \int \rho' \, dx'\,dy'\,dz'$$
$$\int \rho' \, \gamma dx\,dy\,dz$$

$x' = \gamma(x - \beta c t)$
$y' = y$
$z' = z$
$ct' = \gamma(ct - \beta x)$

$\Rightarrow \quad \rho = \gamma \rho'$

to je invarianta na L.T.

Štirivektor gostote toka

Uvede se ga kot $\qquad$ 3D: $\vec{j} = \rho \vec{v}$

$$j_\mu = \frac{\rho}{\gamma} u_\mu \qquad u_\mu = (\gamma \vec{v}, \gamma c)$$

četverec hitrosti

$$j_\mu = (\vec{j}, c\rho) \qquad j^\mu = (\vec{j}, -c\rho)$$

Opazi, da v njem ni nastopa γ, kar kaže na smiselnost uvedbe.
Ker je uveden kot pravi štirivektor se skladno transf. z Lor. transf.

$$j_x' = \gamma(j_x - \beta c \rho)$$
$$j_y' = j_y$$
$$j_z' = j_z$$
$$c\rho' = \gamma(c\rho - \beta j_x)$$

Torej: razcep štirivektorja na kaj je $\vec{j}$ in kaj vidimo kot ρ je relativen, je odvisen od koordinatnega sistema. Velja tudi:

$$j_\mu j^\mu = \text{invarianta} = j^2 - c^2 \rho^2$$

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{dosin}$$

Štirivektor EM potenciala

Spomnimo se Riemann-Lorentzovih enačb za $\vec{A}$ in φ:

$$\Box^2 \varphi = \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Box^2 \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

D'Alembertov operator $(\Box^2)$ je tudi Lorentzovo invarianto

$$\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

štirivektor odvodov $\left(\nabla, -\frac{\partial}{\partial ct}\right)$

ρ in $\vec{j}$ tvorita četverec j_μ, torej tudi $\vec{A}$ in φ bosta tvorila četverec.

Štirivektor EM potenciale

$$A_\mu = (\vec{A}, \frac{\varphi}{c}) \qquad A^\mu = (\vec{A}, -\frac{\varphi}{c})$$

Torej lahko R-L en. prepišemo v Lorentzovo manifestni formi

$$\boxed{\Box^2 A_\mu = -\mu_0 j_\mu} \qquad \text{oz.} \qquad \Box^2 A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

to je enačba v 4D prostoru. Je najbolj kompakten zapis "Maxwellovih enačb".

$$A_x' = \gamma(A_x - \beta \frac{\varphi}{c})$$
$$A_y' = A_y$$
$$A_z' = A_z$$
$$\frac{\varphi'}{c} = \gamma(\frac{\varphi}{c} - \beta A_x)$$

invarianta četverca

$$A_\mu A^\mu = A^2 - \frac{\varphi^2}{c^2}$$

Razcepitev štirivektorja EM potenciala je odvisna od koord. sis.

Schwartzschildova invarianta v relativistični dinamiki

Želimo zapisati Lagrangev člen za nabit delec v EMP v relativistični obliki. In sicer:

$$-\int \rho \varphi \, d^3r \, dt + \int \vec{j} \cdot \vec{A} \, d^3r \, dt = \int j_\mu A^\mu \, d^4x_\mu$$

Kovariantni tenzor EM polja

Zanima nas, kakšen je kovarianten (torej manifestno inv. na Lor. transf.) zapis osnovnih fizikalnih polj $\vec{E}$ in $\vec{B}$. Poglejmo najprej E_x

$$E_x = -c\frac{\partial \varphi/c}{\partial x} - c\frac{\partial A_x}{\partial tc} = -c\frac{\partial A_4}{\partial x^1} + c\frac{\partial A_1}{\partial x^4} =$$

$$= c\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^4} - \frac{\partial A_4}{\partial x^1}\right)$$

Velja

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$
$$A_\mu = (\vec{A}, \frac{\varphi}{c})$$
$$x_\mu = (x, y, z, ct)$$
$$x^\mu = (x, y, z, -ct)$$

Poglejmo še B_x

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}$$

Obe komponenti se izražata kot nekakšen 4D rotor

$$(\nabla \times \vec{c})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial c_j}{\partial x_k}$$

Na osnovi tega razmisleka uvedemo tenzor EMP

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

je antisimetričen $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

Komponente tenzorja so komponente polj $\vec{E}$ in $\vec{B}$. Tako smo polji združili v eno količino. V tej formi $\vec{E}$ in $\vec{B}$ postaneta eno EM polje.

Kontravariantni tenzor EMP

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\gamma} g^{\nu\kappa} F_{\gamma\kappa}$$

kjer je metrični tenzor $g^{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_z & B_y & \frac{E_x}{c} \\ B_z & 0 & -B_x & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & B_x & 0 & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

Iz kovariantnega in kovariantnega tenzorja dobiš dve invarianti:

- $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2B^2 - 2\frac{E^2}{c^2}$ = invarianta
- $\det F_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\vec{B}\cdot\vec{E})^2$ = invarianta
  kot med $\vec{B}$ in $\vec{E}$ se ne spreminja

Kovariantna akcija EMP

Za akcijo EMP smo izpeljali

$$S = \int \left(\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 - \rho \varphi + \vec{j}\cdot\vec{A} \right) d^3r \, dt$$

$$\rightarrow \quad \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2 = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\rightarrow \quad \vec{j}\cdot\vec{A} - \rho\varphi = j_\mu A^\mu$$

$$\rightarrow \quad \int d^3r\,dt = \frac{1}{c} \int d^4x_\lambda$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{c} \int \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu \right) d^4x_\lambda$$

Ta kovariantni zapis je osnova za kvantizacijo polja v kvantni elektrodinamiki.