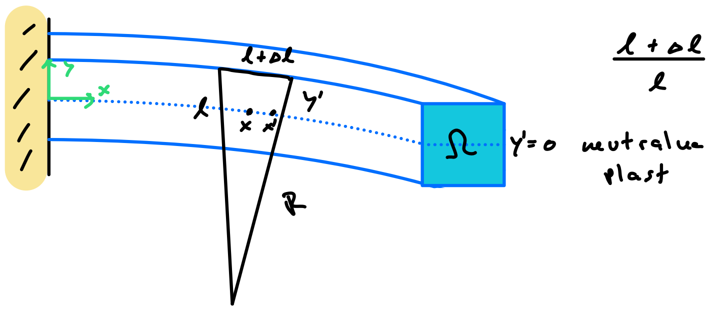
Upogib

1 Teorija

Razteg palice v vzdolžni smeri pri dani sili podaja Hookov zakon:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \qquad (1)$$

Ta linearna zveza velja le na določenem intervalu $[0, \sigma_{max}]$. Poglejmo sedaj upogib palice. Iz geometrije lahko določimo



$$\frac{l+\Delta l}{l} = \frac{R+y'}{R} \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{y'}{R} \qquad (2)$$

Po enačbi (1) in (2) sledi

$$\frac{F}{S} = E\frac{y'}{R} \qquad (3)$$

Vsota vseh navorov sil ki delujejo na območju Ω je:

$$M = \int_\Omega E\frac{y'}{R}\, y'\, dS = \frac{EJ}{R} \qquad J = \int_\Omega y'^2\, dS \qquad (4)$$

ročica navora

Za pravokotno palico velja $J = \frac{ab^3}{12}$, za okroglo pa $J = \frac{\pi r^4}{4}$.
Sedaj želimo dobiti funkcijo odmika nevtralne ploskve pri dani obremenitvi in dani legi, $u(x)$. Ker se palica šibko upogiba velja:

$$u''(x) = \frac{1}{R} \quad \text{ukrivljenost} \Rightarrow M = EJu''(x) \qquad x \in [0, l]$$

Prav tako lahko zapišemo $M(x)$:

$$M(x) = \int_{x_0}^{x} f(x')(x-x')\,dx + M_0$$

odvajamo

$$M'(x) = \int_{x_0}^{x} f(x')\,dx = F(x) = EJu'''$$

odvajamo

$$M''(x) = f(x) = EJu'''' \qquad (5)$$

Enačbo želimo rešiti za naš primer z nastavkom $u(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ in začetnimi pogoji:

- $u'''(x=0) = -F_0/EJ$ diskretna sila
- $u(l/2) = 0$ palica podprta
- $u''(l/2) = 0$ v vpetem koncu ni navora
- $u''''(x) = 0$

Iz teh pogojev sledi

$$u(x) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ}\left(1 + 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \qquad u(0) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ} \qquad (6)$$

② Rezultati

Iz geometrijskih meritev postavitve lahko izračunamo vztrajnostna momenta za pravokotno in okroglo palico

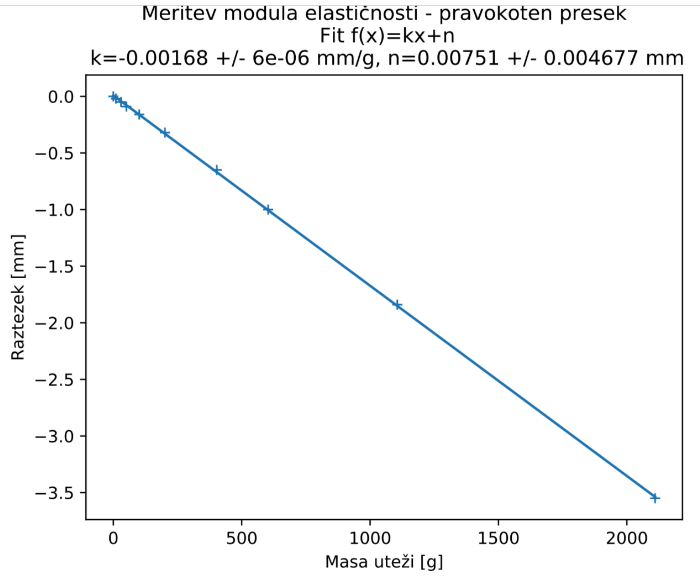
$a = (7{,}20 \pm 0{,}02)\,mm$ $\qquad 2R = (7{,}22 \pm 0{,}02)\,mm$

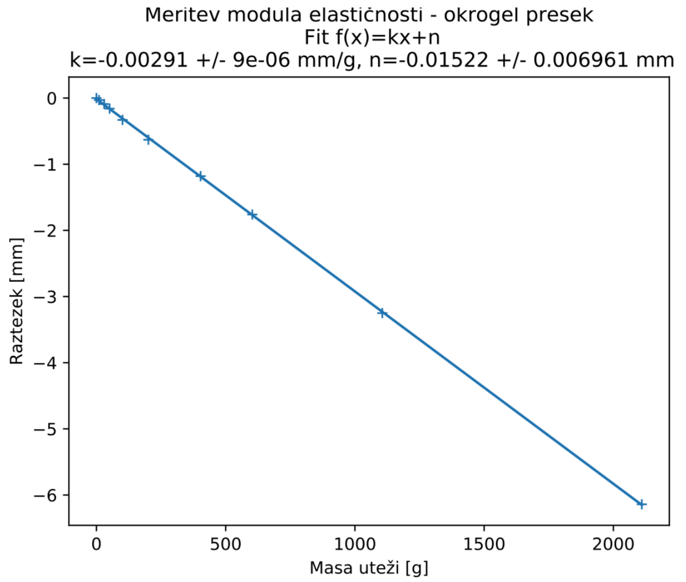
$b = (7{,}08 \pm 0{,}02)\,mm$ $\qquad l_o = (641 \pm 1)\,mm$

$l_\square = (641 \pm 1)\,mm$ $\qquad m_o = (208 \pm 1)\,g$

$m_\square = (261 \pm 1)\,g$

$J_\square = (213 \pm 2)\,mm^4$ $\qquad J_o = (133 \pm 2)\,mm^4$





Iz prvih dveh grafov lahko preberemo koeficient $\Delta u(m)/\Delta m = k$ in velja $E = -g l^3/48 J k$, tako dobimo:

$E_\square = (150 \pm 2)\,GPa$

$E_o = (139 \pm 2)\,GPa$

Na podlagi podatkov iz tabele lahko sklepamo, da gre za mehkejšo kovino, morda baker. Če izračunamo gostoti dobimo

$\rho_\square = (7990 \pm 80)\,kg/m^3$

$\rho_o = (7925 \pm 70)\,kg/m^3$

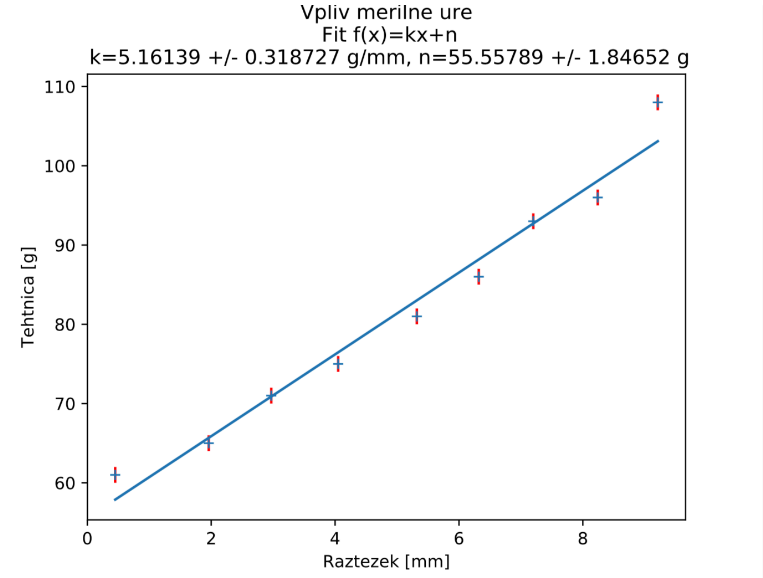
Iz prvih dveh grafov lahko razberemo tudi linearno odvisnost med F_o in $u(o)$.

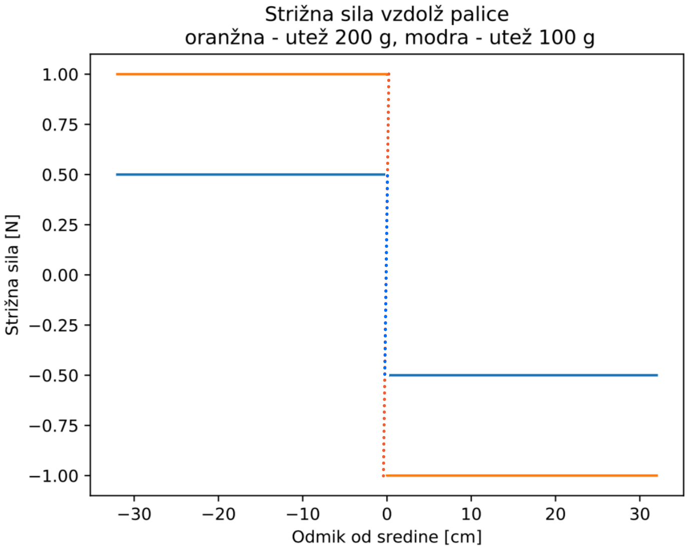
Izračunamo lahko tudi približek F_{max}

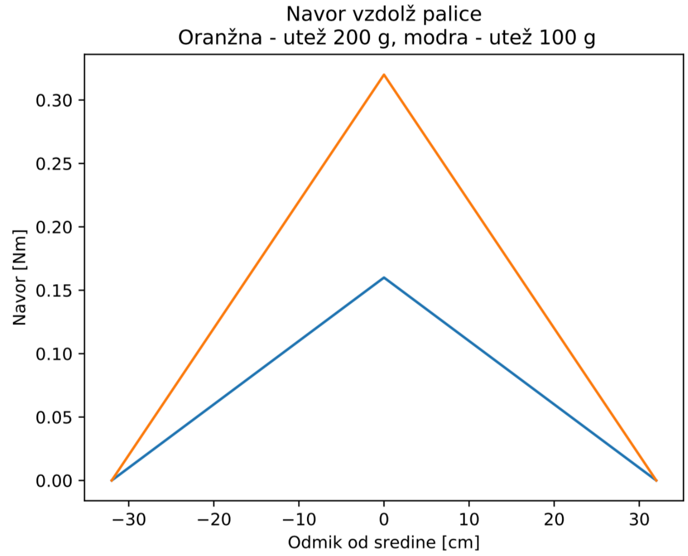
$F_{max} \approx 0{,}1\% \,\frac{8EJ}{Dl}$ $\qquad D$ je b ali $2r$

$F_{max\,\square} \approx 56\,N$ $\qquad F_{max\,o} \approx 32N$

Ocenimo lahko tudi, da se palica zaradi lastne teže upogne za okoli 0,4 mm.







Potek strižne sile in navora vzdolž palice lahko izpeljemo s pomočjo $u(x)$ in sicer velja:

$$M = EJ\,u''(x) \qquad F = EJ\,u'''(x)$$

Za naš primer

$$M(x) = \frac{F_0 l}{4} - \frac{F_0 x}{2} \qquad F(x) = -\frac{F_0}{2}$$

Ker smo enačbo $u(x)$ definirali le za $x > 0$ in predpostavili simetričnost za $x < 0$.