• Prehod iz 19. v 20. stol.: ne samo težave pri opisu pojavov, ko $v \to c$ ampak tudi v mikroskopskem svetu (atomi, jedra)
→ za večino problemov v tem sistemu, bo zadoščala nerelativistična obravnava.

• Dosedaj smo bili vajeni, da lahko fizikalne količine (zlasti energija, vrtilna količina VK) zavzamejo poljubne vrednosti. V kvantni fiziki to ni več res: energije se lahko v fiz. sistemih spremeni (oz. izmenja) samo v določenih "obrokih" oz kvantih. Spomnimo se el. naboj: e_0, $2e_0$, $3e_0$ ... (Millikanov poskus). Ukvarjali se bomo zlasti s kvantizacijo E in GK.

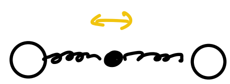
• V kvantnem svetu se zabriše razlika med valovanjem in delci: valovanje se včasih obnaša kot delci, delci dobijo valovne lastnosti:
→ valovno - delčna dualnost (wave - particle duality)

• Najbolj presenetljivo: ni več absolutnih napovedi obnašanja fiz. sistema. (npr. točnih trajektorij).

Klasična fizika: $\vec{r}(0), \dot{\vec{r}}(0) \xrightarrow{H} \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$ ob vseh $t > 0$

Kvantna fizika: napovemo lahko samo verjetnost izidov merjenj

Sevanje črnega telesa

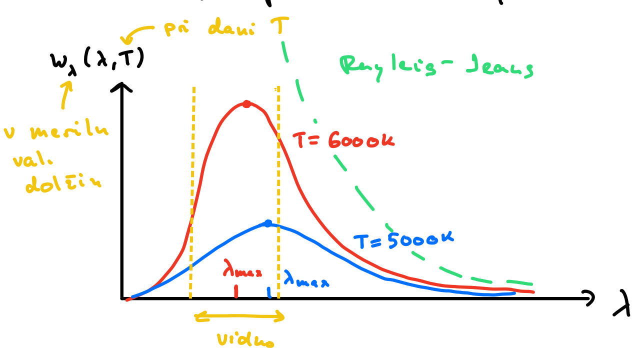


• Od tod dobimo prve indikacije za kvantno naravo sevanja

• Absorbcija svetlobe na telesu → povečana kin. en. atomov (na "vzmeteh" v kristalni strukturi) → telo se ogreje → toda pospešeni delci sevajo → energija se izseva → telo se ohladi

Ko je absorbcija = emisija ⇒ termično ravnovesje

Vsa telesa pri $T \neq 0$ sevajo termično (toplotno) sevanje.



Spekter je odvisen samo od T.

Poznali so tudi zvezo $\lambda_{max} = \frac{\text{konst.}}{T}$

$\underbrace{\text{konst.} = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{mK}}_{\text{Wienov zakon}}$

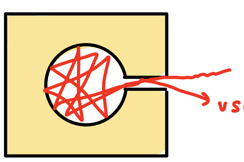
Telo, ki absorbira vse vpadno sevanje = črno telo

Jožef Stefan: empirično pokazal, da velja

$$\boxed{j = \sigma T^4} \qquad \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Stefan - Boltzmanov zakon

Črno telo (izpeljava neodvisna od geometrije)



od povprečenja po kotih sipanja

$$\underset{[W/m^2]}{j} = \frac{1}{4} c \underset{[J/m^3]}{w}$$

energijska gostota

Rezultat iz statistične mehanike: # nihajnih načinov v votlini (analogno štetju načinov nihanja na struni (1d) oz. opni (2d)):

kot stoječe valovanje

$$n(\lambda) = \frac{dn}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4}$$

(verjamemo)

Klasična predstava: vsak nihajni način prinese $k_B T$ energije

$k_B T$

$$w_\lambda(\lambda, T) = k_B T \, n(\lambda) = \boxed{\frac{8\pi k_B T}{\lambda^4}}$$

Na žalost $\int_0^\infty w_\lambda(\lambda, T)\, d\lambda \to \infty$ Rayleigh-Jeans

Ultravijolična katastrofa

Planckov zakon

- Kako spraviti $w_\lambda \to 0$ ko $\lambda \to 0$?
- Planck (1900): empirična formula, ki jo lahko izpeljal os privzetka, da so energije nihajočih nabojev (⇒ sevanje, ki ga oddajajo) lahko samo mnogokratniki ε: $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots$ kjer je ε sorazmerna s frekvenco oscilatorjev

$$E_n = n\varepsilon = n \underbrace{h\nu}_{} = n\frac{hc}{\lambda} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

najmanjši prispevek en. — kvant ("obrok") energije izsevanega fotona

h … Planckova konstanta (sorazm. konst. med frekvenco in energijo)

$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js (uporabna zveza: $hc = 1240$ eV·nm)

h prečna

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Js ($\hbar c = 197$ MeV fm)

$$\boxed{w_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}}$$

Planckov zakon (sevanje črnega telesa)

V limiti $\lambda \gg 0$ dobim Rayleigh-Jeans

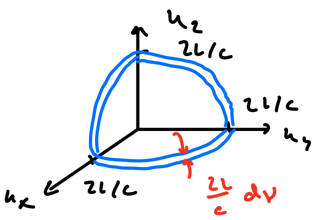
Izpeljava

Potrebujemo tri reči:
a) prešteti število načinov EM valovanja pri dani T, V
b) verjetnost, da se pri dani T v votlini pojavi način z energijo E (to bo del. Maxwell-Boltzmannova porazdelitev)
c) izračunati povprečno energijo na način (mode)

ⓐ Struna (1d): dovoljena taka λ, da $\sin(2\pi L/\lambda) = 0$

$$\to \lambda_n = \frac{2L}{n} \to \nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{cn}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Kocka (3d):
$$\nu = \frac{c}{2L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$



oz. $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L}{c}\nu\right)^2$ kot radij krogle računamo "$4\pi r^2 \, \Delta r$" v prostoru frekvenc (volumen $1/8$ pike)

$$\frac{1}{8} 4\pi \left(\frac{2L}{c}\nu\right)^2 \frac{2L}{c} d\nu = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} d\nu \, V$$

$$V = L^3$$

le en oktant

V resnici (verjamemo na zalog) še $2\times$ več načinov, ker ima lahko vsak foton 2 polarizaciji

\# načinov na frekvenčni interval $N_\nu = \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3} V$

→ Spektralna energijska gostota

$$w_\nu(\nu, T) = \frac{N_\nu}{V} \langle E \rangle$$

povprečna energija na način

→ Energijski tok

$$j_\nu(\nu, T) = \frac{c}{4} w_\nu(\nu, T)$$

b, c

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n f(E_n) E_n}{\sum_n f(E_n)} \qquad \leftarrow \text{spomnimo se } x_T = \frac{\sum_n m_n x_n}{\sum_n m_n}$$

Uteži so Boltzmanovi faktorji $f(E) = e^{-E/k_BT}$

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n n h\nu \, e^{-nh\nu/k_BT}}{\sum_n e^{-nh\nu/k_BT}} \underset{x = \frac{h\nu}{k_BT}}{=} k_BT \frac{\sum_n n x e^{-nx}}{\sum_n e^{-nx}}$$

Najprej imenovalec (= fazna vsota, Z)

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

Števec: trik: odvajamo $Z(x)$:

$$-x\frac{dZ}{dx} = -x\frac{d}{dx}\left(\sum_n e^{-nx}\right) = x\sum_n n e^{-nx} = -x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) =$$

$$x \sum_n n e^{-xn} = \frac{x e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

Sestavimo vse skupaj

$$w_\nu(\nu, T) = \frac{N_\nu}{V}\langle E \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_BT \frac{x e^{-x}}{(1-e^{-x})} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_BT \frac{h\nu/k_BT}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

$$\boxed{w_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}}$$

Planckov zakon v merilu frekvenc

z vel. dolžinami

$$w_\lambda(\lambda,T) = w_\nu(\nu,T)\,\Bigg|\underbrace{\frac{d\nu}{d\lambda}}_{\frac{c}{\lambda^2}}\Bigg| = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T}-1}$$

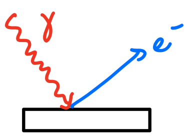
Od tod
$$j_\lambda(\lambda,T) = \frac{c}{4}\,w_\lambda(\lambda,T)$$
$$j_\nu(\nu,T) = c/4\;w_\nu(\nu,T)$$

in po integralu po celotnem spektru

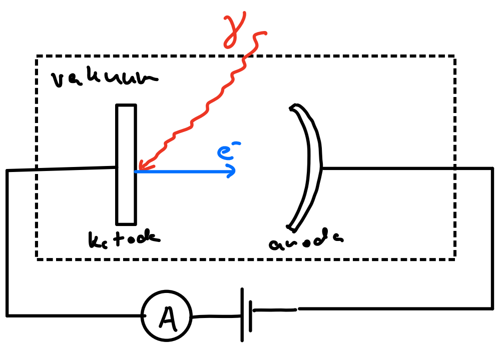
$$j = \int_0^\infty j_\lambda(\lambda,T)\,d\lambda = \int_0^\infty j_\nu(\nu,T) = \sigma T^4$$

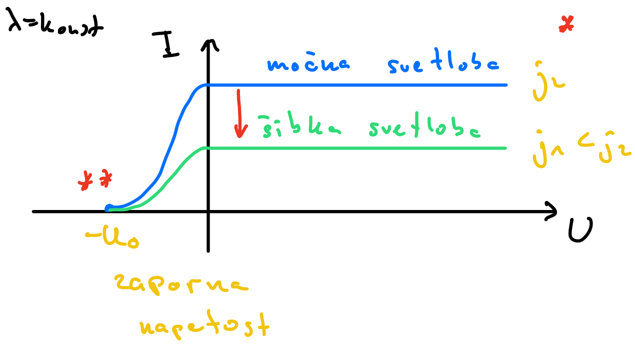
Fotoelektrični pojav

- Odkril Hertz leta 1887, pojasnil Einstein 1905
- Planckova hipoteza o oscilacijah. emitiranih fotonih (v črnem telesu) ... hν
- Ideja okrog "hν" je bila sprejeta s skepso
- Einstein: kvantizacija ne velja le za črno telo, ampak je splošna lastnost svetlobe
- Poskus zelo preprost



kovina (foto katoda)





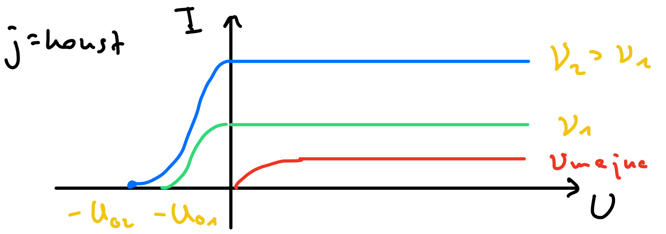
* dovolj veliki U, vsi e⁻ pridejo do anode, tok je nasičen

↓ klasično pričakujemo, da bo tok nehal teči, ko bo vpadna svetloba prešibka.

** pri $U<0$ anoda e^- odbija, ko je eU_0, je ravno $(\frac{1}{2}mv^2)_{max} = eU_0$

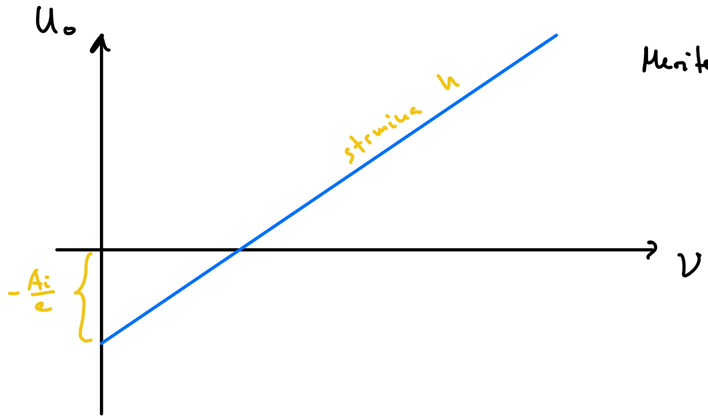
Presenetljivi rezultat: U_0 neodvisna od jakosti vpadne svetlobe.
Einsteinova razlaga: namesto da bi bila energija svetlobnega valovanja (enakomerno) porazdeljena po sredstvu/prostoru, bi bila energija svetlobe tudi sestavljena iz kvantov od njih pa ima vsak energijo $h\nu$ = foton. Ko tak kvant zadane foto katodo, vso njegovo energijo lahko absorbira en sam e^-. e^- mora še izbiti iz kovine, za kar potrebuje izstopno delo.

$$eU_0 = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{max} = h\nu - \overset{\text{tudi } \Phi}{A_i}$$



(pod to ν svetloba ne more več izbijati e^-)

$A_i = h\nu_{mejna}$



Meritev h

Zgled

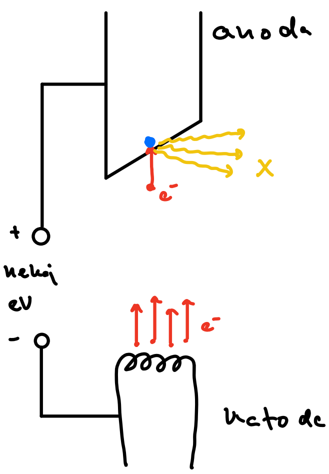
Pomislek: naredimo tako šibek izvir, da se bo energija za izbitje e^- nabirala "celo večnost" (klasična predstava). Vzamemo katodo iz K ($\Phi = 2{,}2\,eV$), nanjo posvetimo z $\lambda = 400\,nm$, jakost izvora $j = 10^{-2}\,W/m^2$, tipični polmer atoma $r = 10^{-10}\,m$. Energija, ki v času t "pade" na e^-

$$E = j\pi r^2 t$$, in to naj bo enako Φ

$$t = \frac{\Phi}{j\pi r^2} = 19\,min$$

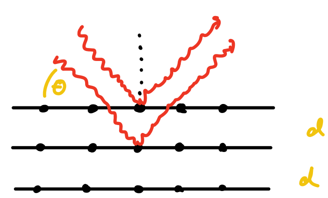
Po klasični predstavi bi morali čakati 19 min, da bi izbili e^-.
Kvantno: en sam foton ima dovolj energije, da izbije e^-.
fotonov je pri nizkih j sicer malo, a atomov je ogromno.

Rentgensko sevanje (žarki X)



fotoni nastajajo ob zaviranju
e^- v polju ⊕ jeder → zavorno sevanje
Röntgen žarkov ni mogel odkloniti
z mag. poljem ⇒ žarki X
ugotovil je, da imajo $\lambda \doteq 0{,}1\,nm$
(po uklonu ob prehodu skozi zaslonko)

Boljši način za meritev λ



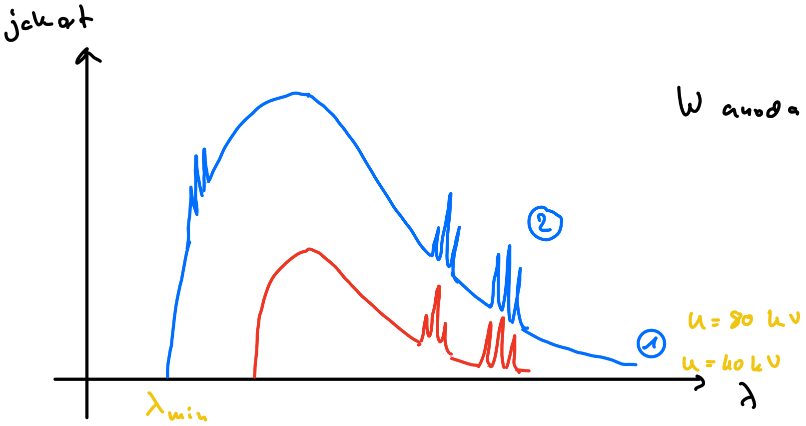
$2d \sin\theta = n\lambda$
(konstruktivne interference)

Meritev spektra RTG svetlobe je pokazala tri značilnosti:

1.) gladki (zvezni) del spektra ... od zavornega sevanja

2.) ostre črte, t.j. karakteristični del spektra

3.) spekter odrezan pri λ_{min}

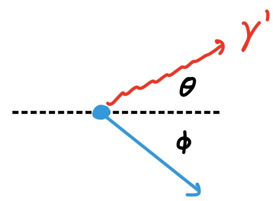


$$h\nu_{max} = h\frac{c}{\lambda_{min}} = W_{k,max} = eU_0 \Rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$$

Ustni izpit

Comptonov pojav

- prvič opažen pri sipanju RTG svetlobe na (skoraj) prostih e^- v atomih, kar velja tudi na drugih energijskih / prostorskih skalah
- pojav je relativističen



Ohranitev E in Gk

E: (1) $h\nu + mc^2 = h\nu' + \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$

p_x: (2) $\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + p\cos\phi$ $/\cdot c$

p_y: (3) $\frac{h\nu'}{c}\sin\theta = p\sin\phi$ $/\cdot c$

Kvadriramo (2) in (3) in ju seštejemo

$$p^2c^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = (h\nu - h\nu'\cos\theta)^2 + (h\nu'\sin\theta)^2$$

$$p^2c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2h^2\nu\nu'\cos\theta$$

S kvadriranjem (1) dobimo

$$h^2(\nu-\nu')^2 + 2h(\nu-\nu')mc^2 + \cancel{m^2c^4} = p^2c^2 + \cancel{m^2c^4}$$

$$h(\nu-\nu')mc^2 = h^2\nu\nu'(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1-\cos\theta) \qquad \lambda_c = \frac{h}{mc}}$$

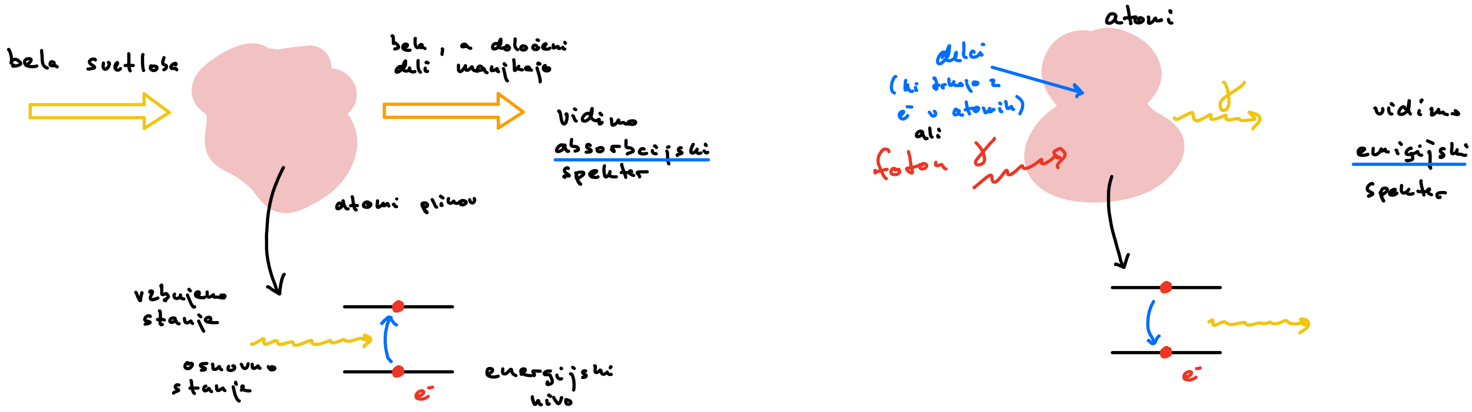
Comptonova val. dolžina $\lambda_c = 2{,}4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{nm}$

Limite

- $\theta = 0°$, e^- miruje tudi po trku, $\lambda' = \lambda$
- $\theta = 90°$, $\lambda' = \lambda + \lambda_c$
- $\theta = 180°$, e^- odleti nazaj (v smeri vpadnega γ), max možna $\Delta\lambda = 2\lambda_c$

Atomski spektri

- ne samo pri zavornem sevanju, črnem telesu, ... tudi pri vzbujanju atomov opazimo, da atomi lahko sprejmejo ali oddajo energijo le v "obrokih" (kvantih).



Oba spektra imata črte. Od kod se vzamejo?

Bohrov model vodikovega atoma

- Odlično napove vodikov spekter, toda model ni pravilen.
- $H = p^+ + e^-$ = "Sonce + Zemlja" → elipse (skoraj krožnica)
- Bohr: samo krožnice → tega koncepta se želimo sčasoma povsem znebiti.

Coulombski potencial: $V(r) = -\frac{kZe^2}{r}$ $\qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

izpeljave so dobre tudi za naboj $+Ze$ ali $-e$

$$F_c = \frac{kZe^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{kZe^2}{m_e r}} \text{ obodna hitrost} \longrightarrow \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{kZe^2}{2r}$$

$$T = -\frac{1}{2} V$$

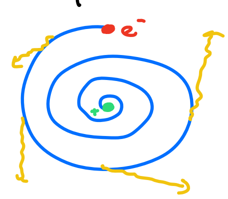
Klasično bi moral e^- kot pospešen naboj sevati s frekvenco, ki je enaka frekvenci kroženja:

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r}\sqrt{\frac{kZe^2}{m_e r}} \propto \frac{1}{r^{3/2}}$$

Celotna energija

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{kZe^2}{r} = \frac{kZe^2}{2r} - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{kZe^2}{2r} \propto -\frac{1}{r}$$

⇒ zaradi sevanja (= izgube E) bi se moral e^- gibati po vedno manjših krožnicah (spirala) posledično vedno večja frekvenca, itd. itd. To bi se zgodilo v $\approx 1\mu s$?!



Ni črt! To je vse narobe.

Bohrovi privzetki:

① e^- se lahko gibljejo samo po točno določenih orbitah, ne da bi sevali. Tem orbitam je rekel stacionarna stanja (kasneje: drug pojem)

② atom seva, ko e^- preide iz enega stac. stanja v drugega, frekvenca izsevane svetlobe je ν, tako da

$$h\nu = E_i - E_f \qquad i = \text{initial} \qquad f = \text{final}$$

③ Korespondenčno načelo: v limiti velikih orbit/energij (kasneje: visokih vzbuditev, visokih kvantnih števil) se morajo kvantni rezultati ujemati s klasičnimi.

① se ni obdržal (→ treba rešiti Schrödingerjevo enačbo za e^- v polju jedra)
② in ③ pa sta ostala v veljavi.

Kako je z vrtilno količino e^- (ki "kroži" okoli jedra). Bohr jo je kvantiziral.

tirna vrtilna količina

$$\Gamma = m_e v r = n\hbar = n\frac{h}{2\pi} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

kvantno število ... za klasifikacijo orbit in splošneje kvantnih stanj pozneje

Od tod dobimo polmer orbit:

$$r = \frac{n\hbar}{m_e v} = \frac{n\hbar}{m_e}\left(\frac{m_e r}{kZe^2}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{r_n = \frac{n^2\hbar^2}{m_e k Z e^2} = \frac{n^2 r_B}{Z} \qquad r_B = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0{,}0529\,\text{nm}}$$

Radij n-te Bohrove orbite

Bohrov radij (postavi prostorsko skalo)

Celotna energija (e^- v polju p oz. $+Ze$)

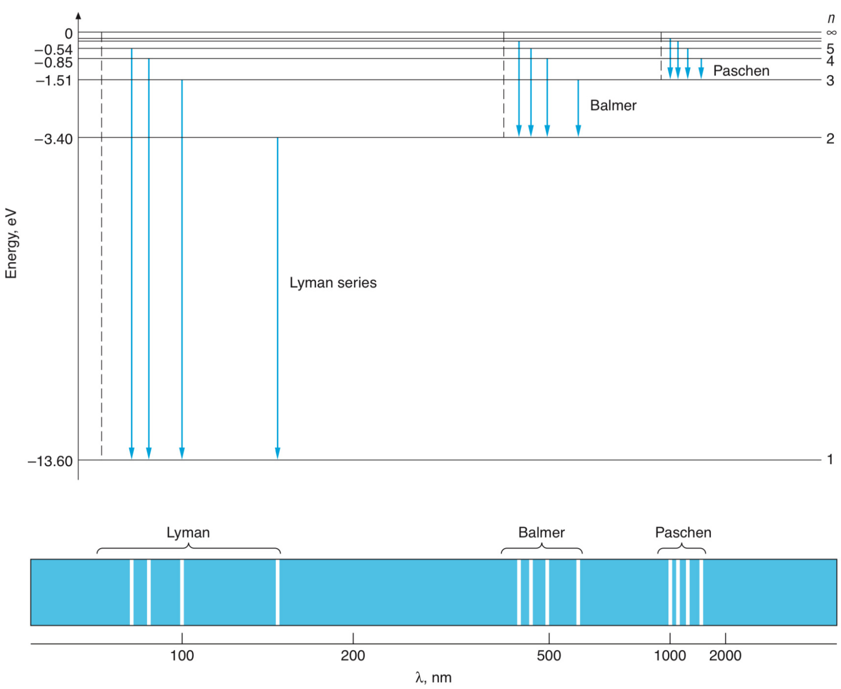
$$E_n = -\frac{kZe^2}{2r_n} = -\frac{kZe^2}{2}\,\frac{m_e k Z e^2}{n^2\hbar^2} = -\frac{m_e k^2 Z^2 e^4}{2n^2\hbar^2}$$

$$\boxed{E_n = -E_0\frac{Z^2}{n^2} \qquad E_0 = \frac{m_e k^2 e^2}{2\hbar^2} = 13{,}6\,\text{eV}}$$

ker je vezan sistem $\propto \frac{1}{n^2}$

na pamet

⇒ tudi energije e^- so kvantizirane



Ali velja ko res ponekod malo?

Kvantno $h\nu = E_0 z^2 \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) = E_0 z^2 \frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2} \overset{n \gg 1}{\approx} E_0 z^2 \frac{2}{n^3} = \frac{z^2 m_e k^2 e^2}{\hbar^2 n^3}$

Klasično: $h\nu_{klas} = h \frac{v}{2\pi r} = h \frac{(n\hbar / m_e r)}{2\pi r} = \frac{n\hbar^2}{m_e r^2} = \frac{z^2 m_e k^2 e^4}{\hbar^2 n^3}$, $r = \frac{n^2\hbar^2}{m_e k z e^2}$

de Brogliejeve hipoteza

- 1924: vedel, da se svetloba obnaša kot delci ("kvanti energije") → v doktoratu predpostavil, da obratno velja za delce, ki bi se obnašali kot valovanje ⇝ dualizem

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} \qquad \nu = \frac{E}{h}}$$ delcu pripišemo valovno dolžino in frekvenco

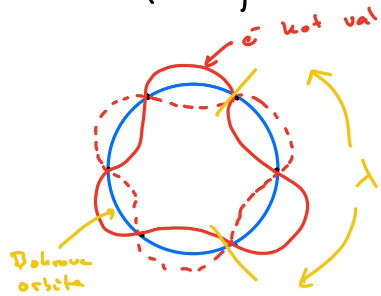
de Brogliejeva valovna dolžina delca

- za foton je to avtomatsko izpolnjeno $E = pc = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$
- po de Broglieju naj bi to veljalo tudi za delce z maso, ko je tako združiti z Bohrovo sliko in kvantizacijo VK v H atomu

$$m_e v r = n\hbar \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$o = 2\pi r = \frac{nh}{m_e v} = \frac{nh}{p} = n\lambda$$

obseg orbite



- sliši se osetevno: razlaga diskretnega značaja energijskih nivojev pak stoječih valovanj

⇓

Zakaj tega niso opazili že prej

↳ λ so premajhne

Ocena: de Brogliejeve val. dolžine ping-pong žogice $(m = 2g,\ v = 5\frac{m}{s})$

→ $\lambda = h/mv = 6{,}6 \cdot 10^{-23}$ nm ⇒ nemerljivo ukloni kot

(in sploh ne moremo narediti tako "reže", "mrežice", ...)

Kaj pa za e^-? $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $T = 10$ eV

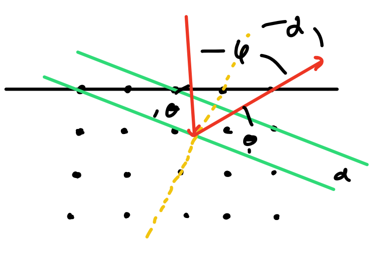
$p = \sqrt{2m_e T}$

→ $\lambda = h/p = \frac{h}{\sqrt{2m_e T}} = 0{,}39$ nm

↳ to si pa že! kristali

Davisson-Germer (1927) - meritev valovne dolžine e^-

Podatki so kazali močan max. pri $\varphi = 50°$ za $T = 54$ eV



Konstruktivno interferenco dobimo

$$\boxed{n\lambda = 2d \sin\theta}$$ Braggova enačba

$n\lambda = 2d\cos\alpha$ razmik med kristalnimi

$= 2D \sin\alpha \cos\alpha$ ravninami $d = D\sin\alpha$

$= 2D \sin\varphi$

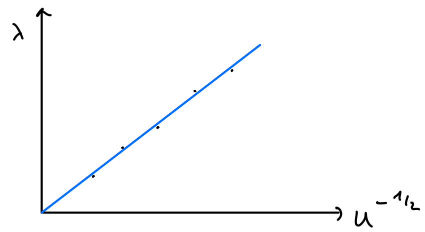
Razmik D sta poznala iz uklona žarkov X: $D = 0{,}215$ nm
iz izmerjenega kota: $\varphi = 50°$ sledi:
$$\lambda = D \sin\varphi = 0{,}165 \text{ nm}$$

Vrednost izračunana po de Broglijevi formuli:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m\underbrace{T}_{54\,\text{eV}}}} = 0{,}167 \text{ nm}$$

"eU"

Kasneje



(IF)
⇒ interferenčni poskusi z delci danes zelo rutinska stvar

Opis "valovanja delcev" (matter waves)

Ravni val v klasični fiziki: IF e^- na kristalu bi pojasnili, če bi elektronskemu curku ($\parallel x$) pripisali valovanje

$$u(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\, mv}{h} = \frac{p}{\hbar} \to p = k\hbar$$

↳ val. število

Toda kaj valovi pri delčnem valovanju?

Odgovor je dal Max Born (1926): valovi valovna funkcija oz. verjetnostna amplituda
↳ wave function
in jo označimo s

$$\Psi \qquad (\text{v splošnem} \in \mathbb{C})$$

! Sama valovna funkcija ni opazljiva (observable) količina. Kar lahko opazimo / merimo je kvadrat ver. amp. Ψ^2, ki mu pravimo verjetnostna gostota

↙ konjugiranje

$$\boxed{\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)}$$

ver. gost. GR

Verjetnost, da delec ob času t najdemo na $[x, x+dx]$, je $\rho(x,t)\,dx$ in zanjo veljata nenegativnost in normalizacija

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)\,dx = 1$$

Ko Ψ ni odvisen od časa ga označimo z ψ.

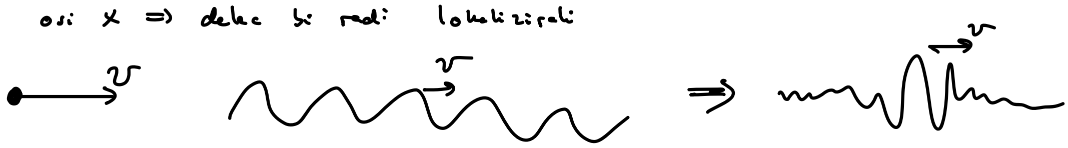
$$\Psi = \Psi(x,t)$$
$$\psi = \psi(x)$$

Za naše ravno valovanje:

$$\Psi(x,t) = A e^{-i(\omega t - kx)} \qquad A \in \mathbb{C}$$

$$\rho(x,t) = \Psi^*\Psi = |A|^2 \qquad \text{Verjetnostna gostota}$$

Ne ustreza naši predstavi o delcu (kroglici) ki se giblje s hitrostjo v, vzdolž osi x ⇒ delec bi radi lokalizirali



valovni paket

Superpozicija valov

Najprej sestavimo dva valovanji z malce različnima k: $k_1 = k + \Delta k$, $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$; $k_2 = k - \Delta k$, $\omega_2 = \omega - \Delta\omega$

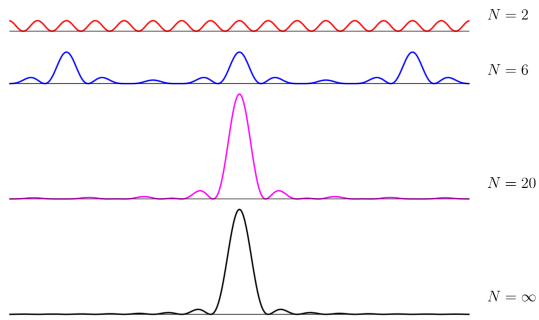
$$\Psi_{1,2}(x,t) = A\left(e^{-i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{-i(\omega_2 t - k_2 x)}\right) =$$

$$= A e^{-i(\omega t - kx)} \underbrace{\left(e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k x)} + e^{i(\Delta\omega t - \Delta k x)}\right)}_{2\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)}$$

$$= 2 A e^{-i(\omega t - kx)} \cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$$

$$\rho_{1,2}(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = 4|A|^2 \cos^2(\Delta\omega t - \Delta k x) \longrightarrow$$ Slika pri $N=2$ (še nimamo lokalizacije)

Konstrukcija valovnega paketa s superpozicijo ravnih valovanj



... kaj pa, če si seštli več valov, npr $N=6$

$$\{k_n\} = k \pm \frac{\Delta k}{3},\ k \pm \frac{\Delta k}{2},\ k \pm \Delta k$$

$$\{\omega_n\} = \omega \pm \frac{\Delta\omega}{3},\ \omega \pm \frac{\Delta\omega}{2},\ \omega \pm \Delta\omega$$

Radi bi dosegli limito $N \to \infty$

$$k_n = k \pm \frac{n\Delta k}{N} \qquad \omega_n = \omega \pm \frac{n\Delta\omega}{N} \qquad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\Psi(x,t) = A \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \exp\left(-i\left(\omega t + \frac{n}{N}\Delta\omega t - kx - \frac{n}{N}\Delta k x\right)\right)$$

$u = n/N \qquad dn = N\,du$

$$= NA e^{-i(\omega t - kx)} \int_{-1}^{1} \exp(-i(\Delta\omega t - \Delta k x)u)\,du$$

$$= NA e^{-i(\omega t - kx)} \frac{1}{-i(\Delta\omega t - \Delta k x)} \underbrace{\left(e^{-(\Delta\omega t - \Delta k x)} - e^{i(\Delta\omega t - \Delta k x)}\right)}_{2i\sin(\Delta\omega t - \Delta k x)}$$

$A = \frac{a}{2N}$, da bo vsota končna ($\sim \frac{1}{N}$)

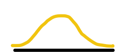
$$\Psi(x,t) = a e^{-i(\omega t - kx)} \frac{\sin(\Delta\omega t - \Delta k x)}{\Delta\omega t - \Delta k x}$$

$$\to \rho(x,t) = \underbrace{|a|^2 \frac{\sin^2(\Delta\omega t - \Delta k x)}{(\Delta\omega t - \Delta k x)^2}}_{\text{Valovni paket}}$$

V kvantni mehaniki načelno ne moremo določiti Gk delca, če smo ga lokalizirali.

Gaussov valovni paket

- Stranskih oscilacij se želimo znebiti.
- Vsakemu valu damo drugo amplitudo in tako računamo zvezno
- Gledamo samo krajevni del: $\psi(x) = \int A(k) e^{ikx} dx \qquad A(k) = A_0 e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2}$



$$\psi(x) = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma_k^2} + ikx\right) dk$$

$$= A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k-k_0}{\sqrt{2}\sigma_k} - \sqrt{2} i \sigma_k x\right)^2 - \sigma_k^2 x^2 + ik_0 x\right) dk$$

$$= A_0 e^{-\sigma_k^2 x^2 + ik_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{k-k_0}{\sqrt{2}\sigma_k} - \sqrt{2} i \sigma_k x}_{u}\right)^2\right) dx \qquad u\ ,\ du = \frac{dk}{\sqrt{2}\sigma_k}$$

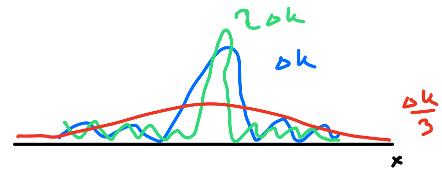
$$= \sqrt{2}\sigma_k A_0 e^{-\sigma_k^2 x^2 + ik_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du$$

$\psi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sigma_x} A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}\right) e^{ik_0 x}$ $\sigma_x = \frac{1}{2\sigma_k}$ Gaussov valovni paket

lokalizacija v kraju   lokalizacija GK $p = k\hbar$

Načelo nedoločenosti (uncertainty principle)

- Nedoločenost lege v $\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)$ valovnem paketu



$$p = \bar{p} \pm \sigma_p \qquad \sigma_p = \hbar \Delta k$$

- širino verjetnostne gostote (po nekem merilu) lahko tolmačimo kot negotovost oz. nezanesljivost, s katero lahko določimo lego delca.
- $t=0$ vrh v izhodišču, prvi minimum $\sin \Delta k \Delta x = 0 \to \Delta k \Delta x = \pi$ $\Delta x = \frac{\pi}{\Delta k}$

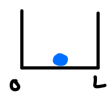
  $\sigma_p = \hbar \Delta k$ $\Delta x \equiv \sigma_x = \frac{\pi \hbar}{\sigma_p} = h/\sigma_p 2$ oz $\underbrace{\sigma_x \sigma_p}_{\text{produkt nedoločenosti (lege in GK)}} = \frac{h}{2} = \pi \hbar$

- Heisenberg (1927) je do načela formuliral in pokazal, da ima produkt $\sigma_x \sigma_p$ spodnjo mejo

  $\boxed{\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}}$ Heisenbergovo načelo nedoločenosti

  enačaj dosežemo pri Gaussovem paketu

Zgled: takoj ko delec zapremo v škatlo, dobi $p \neq 0$.



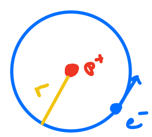
Merilo za negotovost p:

$$\sigma_p^2 = (\Delta p)^2 = \overline{(p-\bar{p})^2} = \overline{p^2} - \overset{=0}{\bar{p}^2} = \overline{p^2} \geq \left(\frac{\hbar}{L}\right)^2$$

$$E_k = \overline{p^2}/2m \geq \hbar^2/2mL^2$$ neničelna kin. en.

Zgled: izpeljava energije osnovnega stanja H

e^- na krožni orbiti (Bohrov model):



$E = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{ke^2}{r}$ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ Če vzamemo za red velikosti negotovosti lege kar $\Delta x \approx r$

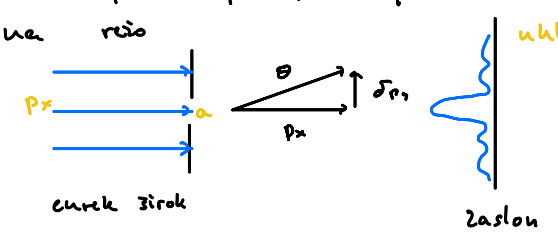
$$(\Delta p)^2 = \overline{p^2} \geq \frac{\hbar^2}{(\Delta x)^2} = \frac{\hbar^2}{r^2}$$

→ energija je $E = \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{ke^2}{r}$ Pri katerem r je E min

$$\left.\frac{\partial E}{\partial r}\right|_{r=r_{min}} = 0 \Rightarrow r_{min} = \frac{\hbar^2}{ke^2 m_e} = r_B \Rightarrow E_{min} = -\frac{k^2 e^4 m_e}{2\hbar^2} = -13{,}6\,\mathrm{eV}$$

Sipanje delcev na reži

- reža širine a, ki je primerljiva z de Broglijevo val. dolžino delcev v curku, ki vpade na režo



curek širok in dolg

zato $\sigma_{p_x} \approx 0$

$\sigma_{p_y} \approx 0$

Ko pride skozi režo, ima delec $\sigma_y = \frac{a}{2}$ (ocena)

GK: $p_y = 0 \pm \sigma_{p_y}$

↳ ocenimo sled na položaj prvega minimuma

$\frac{a}{2} \sin\theta = \frac{\lambda}{2}$

θ ocena ↓, de Broglie

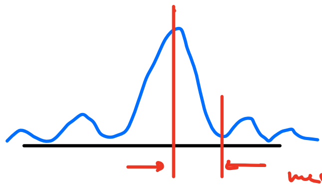
$$\sigma_{p_y} = \tan\theta \, p_x \doteq p_x \sin\theta = p_x \frac{\lambda}{a} = p_x \frac{h}{p_x} \frac{1}{a} = \frac{h}{a} = \sigma_{p_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_y \sigma_{p_y} = \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{a} = \frac{h}{2}$$

Nedoločenost energije in časa

$$\varphi(x=0, t) = a^2 \frac{\sin^2(\Delta\omega t)}{(\Delta\omega t)^2}$$

↑ za $\sin^2 x / x^2$ paket



prvi minimum $\sin(\Delta\omega t_0) = 0$ $\qquad t_0 \approx \sigma_t$

delec mimo nas potuje $\approx$ na $[-t_0, t_0]$

$E = \hbar\omega$ energija delca

Toda v val. paketu je več frekvenc → energija ni točno določena

je na intervalu $[\omega - \Delta\omega, \omega + \Delta\omega]$

⇒ nedoločenost energije

$$\sigma_E = \hbar \Delta\omega$$

$\sin(\Delta\omega t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega t_0 = \pi \qquad$ 1. minimum

$$t_0 = \sigma_t = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{\hbar\pi}{\hbar\Delta\omega} = \frac{h}{2\sigma_E} \qquad \sigma_t\sigma_E = \frac{h}{2}$$

Natančnejši račun $\boxed{\sigma_t \sigma_E \geq \frac{\hbar}{2}}$

- Načelo nedoločnosti je samo načelo → nedokazljivo, a deluje.
- Očitno v nasprotju z eksaktno napovedjo trajektorij $x(0), \dot{x}(0) \to x(t)$ itd., načeloma ni mogoče.
- Napovedujemo lahko verjetnosti, da je delec med npr. $x = a$ in $x = b$.
- Obnašanje (kvantnih) sistemov ni deterministično.

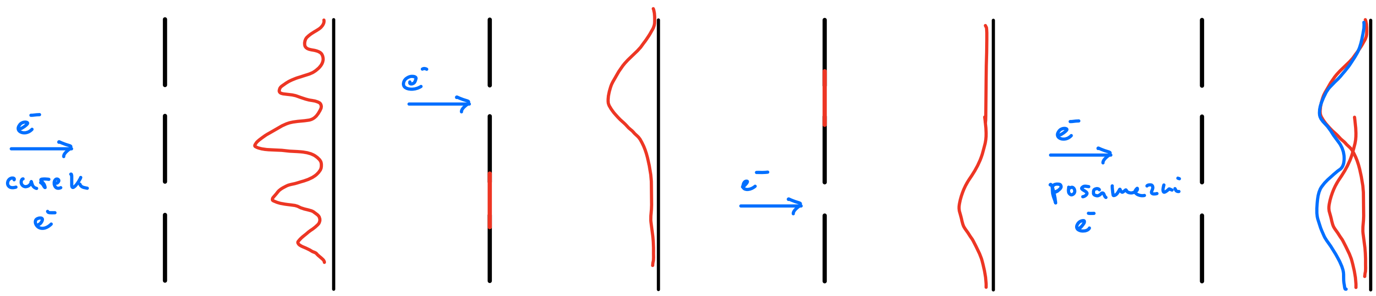
Zgled V makroskopskem svetu ne pride do izraza načelo nedoločnosti

Telo, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $v = 1\,\mathrm{m/s}$ Recimo, da lahko lego določimo na $\sigma_x = 10^{-15}\,\mathrm{m}$ natančno.

Nedoločenost hitrosti $\sigma_v = \frac{\sigma_p}{m} = \frac{h}{m\sigma_x} = 10^{-18}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

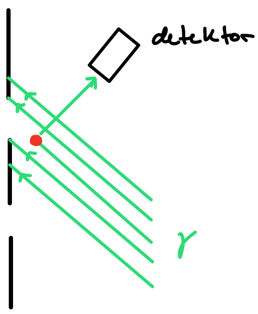
pri mikroskopskih delcih $m \to m_e$ $\quad \sigma_v > c$ pri istem σ_x

Interferenčni poskusi z delci (double slit experiment)



(a) (b) (c) (d) Se ne zgodi nam če opazujemo e^-

- λ (de Broglie) mora biti primerljiv z razmikom med režama, a
- Konstruktivno IF pričakujemo pod koti θ, kjer velja $a \sin\theta = n\lambda$ (a)
- Če posamezno režo zapremo, IF izgine → samo uklonska slika, kot bi jo pričakovali z ene same reže (b) (c)
- Odprti dve reži, vanju pošiljamo posamezne elektrone. Dobimo (a) in ne (d)
  ⇒ Delci interferirajo sami s seboj!



- Lahko merimo, skozi katero režo je šel elektron.
  ⇒ to res lahko storimo in ugotovimo režo, skozi katero je šel, a IF slika izgine
  ⇒ delec se obnaša drugače, če ga opazujemo, kot če ga ne
  ⇒ kolaps valovne funkcije
- Delec smo zmotili, ker je bila $\lambda_{svetlobe}$ prevelika ⇒ vzemimo manjšo λ ⇒ dobimo IF, a ne vemo, skozi katero režo je šel.

Ψ_1 = VF, ki opisuje "tir" e skozi prvo režo

Ψ_2 = VF

$\Psi_{12} = \Psi_1 + \Psi_2$ skupna VF = superpozicija

(a) Verjetnostna gostota na zaslonu — Koherentna vsota, ne moremo določiti reže

$$\rho_{12}^{(a)} = |\Psi_{12}|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_1 \Psi_2^* = \;\; + \;\; + \text{ IF slika}$$

(b),(c) ena reža zaprta

$$\rho_1^{b} = |\Psi_1|^2 \,, \quad \rho_2^{c} = |\Psi_2|^2$$

(d) $\rho_{12}^{(d)} = \rho_1^{b} + \rho_2^{c} = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \cancel{\emptyset}$ Nekoherentna vsota, ok, kadar lahko ugotovimo, po kateri poti je šel delec.