# Osnove teorije Hilbertovih prostorov

Naj bo $V$ vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ( generično $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ )

**Def** Skalarni produkt na $V$ je polj. preslikava

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

ki zadošča pogojem:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3. Za $\forall y \in V$ je $x \mapsto \langle x, y \rangle$ lin. preslikava na $V$ $\quad \left( \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \right)$
4. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \quad ( = \langle x, y \rangle$, če $\mathbb{K} \in \mathbb{R} )$
   $( \Rightarrow \quad \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

**Def** Norma, ki izhaja iz skal. prod $\langle \cdot , \cdot \rangle$ na $V$, je preslikava $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$, def. s predpisom

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

To je res norma, saj velja:

1. $\| x \| \geq 0 \quad \forall x \in V$
2. $\| x \| = 0 \iff x = 0$
3. $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \| \quad \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$
4. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (trikotniška neenakost)

Prve tri last. so direktne posl. definicij, zadnja pa sledi iz naslednje ocene:

**Trditev** (Neenakost Cauchy-Bunjakovski - Schwartz)

$$| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \, \| y \|$$

Enakost velja natanko tedaj, ko sta $x, y$ kolinearna $\quad ( y = \lambda x \quad \lambda \in \mathbb{K} )$

**Dokaz** Če sta $x$ ali $y$ enaka $0$, očitno imamo enakost. Privzemimo, da $x, y \neq 0$.
Def $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ takole:

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda) &= \| y + \lambda \langle y, x \rangle x \|^2 \\
&= \langle y + \lambda \langle y, x \rangle x , \; y + \lambda \langle y, x \rangle x \rangle \\
&= \| y \|^2 + \lambda \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\langle y, x \rangle} \langle y, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle \lambda \overline{\langle y, x \rangle} \langle x, x \rangle \\
&= \| y \|^2 + 2 \lambda | \langle x, y \rangle |^2 + \lambda^2 | \langle x, y \rangle |^2 \| x \|^2
\end{aligned}$$

Torej je $\psi$ kvadratna funkcija s pozitivnim vodilnim členom in je minimum
$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \psi(\lambda) = \psi(\lambda_0)$, kjer je $\lambda_0 = - \frac{1}{\| x \|^2}$ ter

$$\min \psi(\lambda) = \| y \|^2 - \frac{(2 | \langle x, y \rangle |)^2}{4 | \langle x, y \rangle |^2 \| x \|^2} = \| y \|^2 - \frac{| \langle x, y \rangle |^2}{\| x \|^2} \geq 0$$

Opazimo, da kadar nastopi enakost, je tedaj $\varphi(\lambda_0)=0$ za neki $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, oz. $\|y + \lambda_0 \langle y, x\rangle x\|^2 = 0$ oz. po ②, $y + \lambda_0 \langle y+x \rangle x = 0$, to pa je kolinearnost. $\square$

Velja:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \quad (\text{če je } \mathbb{K}=\mathbb{R};\ \text{za } \mathbb{K}=\mathbb{C} \text{ dobimo } +\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

odštejemo $\Rightarrow$ $\boxed{\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}}$ za $\forall x, y \in V$ (če $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

Torej, če $\|\cdot\|$ izhaja iz skalarnega produkta, lahko z zgornjo formulo ga tudi rekonstruiramo iz norme. Če pa enačbi seštejemo, dobimo paralelogramsko identiteto.

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2} \qquad (\mathbb{K}=\mathbb{R})$$

Izkaže se, da $\|\cdot\|$ zadošča paralel. id. natanko tedaj, ko izhaja iz nekega skal. prod.

Vemo, da norma na vekt. pr. porodi metriko:

def. $d: V\times V \to [0,\infty)$ s predpisom
$d(x,y) = \|x-y\|$

Velja:
① $d(x,y) \geq 0$
② $d(x,y) = 0 \iff x = y$
③ $d(x,y) = d(y,x)$
④ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

**Def.** Vekt. pr. s skalar. prod. je Hilbertov, če je v metriki, ki jo porodi skal. prod. (oz. norma, ki izhaja iz njega) poln (če je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v (polnem) prostoru $X$, ima v njem nujno tudi limito.

**Primer** metr. prost. ki ni poln
$(0,1)$ $\quad x_n = \frac{1}{n}$
$\Rightarrow x_n$ je Cauchyjevo zap.
Toda $(0,1)$ ne vsebuje limite $x_n = \frac{1}{n} \to 0 \notin (0,1)$

**Primeri** Hilbertovih prostorov

① $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ za $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad y = (y_1, \dots, y_n)$

Norma $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Pogosto za $\|x\|_2$ uporabimo oznako $|x|$.
Na $\mathbb{R}^n$ imamo tudi druge norme, npr

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p} \qquad 1\leq p < \infty$$

D.N. Ali te norme izhajajo iz skalarnega produkta?

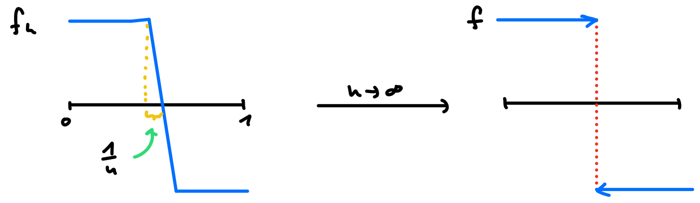
② $\mathbb{C}^n$ $\quad \langle z, w\rangle = z_1\bar{w}_1 + \dots + z_n\bar{w}_n$ ; $z = (z_1, \dots, z_n)$ $\quad w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$
$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$ $\qquad d(z,w) = |z-w|$

③ $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$

$V = C(J)$ (zvezne kompleksne funkcije na $J$)

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \qquad \text{Opomba: } \int u+iv = \int u + i\int v$$

To je prostor s skalarnim produktom. Toda $V$ ni Hilbertov prostor:




$$\int_0^1 |f_n - f|^2 \to 0$$

Toda $f$ ni zv. zato $f \notin V$

④ $L^2(J) = \left\{ f : J \to \mathbb{C}\ ;\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_J |f|^2} < \infty \right\}$ To niso le zv. funk. pač pa tudi t.i. Lebesguovo merljive (in kvadratno integrabilne). To je vekt. prostor in celo Hilbertov.

⑤ $\ell^2 = \{$ vse s kvadratom sumabilne zaporedja $\}$

$= \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ a_n \in \mathbb{C} \text{ in } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$

$= \left\{ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(n)|^2 < \infty \right\}$

Za $a = (a_n)_n \in \ell^2$ ter $b = (b_n)_n \in \ell^2$ def.

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

To je skal. prod. na $\ell^2$ in v njem je $\ell^2$ Hilbertov prostor. Velja torej

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}$$

Ta prostor je osnovni model za separabilne Hilbertove prostore.

Def. Metrični prostor $M$ je separabilen če vsebuje števno gosto množico. To pomeni, če $\exists\, N \subset M$ da:

- $N$ ima največ števno neskončno elementov
- $N$ je gosta v $M$

Def. Množica $N \subset M$ je gosta (ang. dense), če za $\forall x \in M$ in $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in N$ da: $d(x,y) < \varepsilon$. Primer $\mathbb{Q}$ so gosta v $\mathbb{R}$.

## Osnovne lastnosti prostorov s skal. prod.

- $X$ vekt. pr.
- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ skal. prod na $X$
- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
- $d(x,y) = \|x - y\|$

**Def.** Pravimo, da sta $x, y \in X$ pravokotna, če je $\langle x, y \rangle = 0$. Označimo $x \perp y$.

**Trditev** (pitagorov izrek) Za $x \perp y$ velja $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

**Dokaz** $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle}_{=0 \quad x\perp y} + \langle y,y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2$

Podobno za n-terice medsebojno $\perp$ vektorjev

Če $x_j \perp x_k \Rightarrow \|x_1+\dots+x_n\|^2 = \|x_1\|^2+\dots+\|x_n\|^2$

**Def** Naj bo $A \subseteq X$ polj. podmnožica. Množica

$$A^\perp = \{y\in X;\ y\perp a \text{ za } \forall a\in A\}$$

se imenuje <u>ortogonalni komplement</u> množice $A$ (v $X$).

**Trditev** Za $\forall A\subseteq X$ je $A^\perp$ je zaprt vekt. podprostor v $X$

**Dokaz** Linearnost: $y,z\perp a \Rightarrow \langle y+z,a\rangle = \langle y,a\rangle+\langle z,a\rangle = 0+0=0$

$\langle \lambda y,a\rangle = \lambda\langle y,a\rangle = 0$

Zaprtost: $\left.\begin{array}{l} y_n\in A^\perp \\ y_n\to y\in X\end{array}\right\} \Rightarrow y\in A^\perp$

Vz. $a\in A$. Želimo $\langle y,a\rangle=0$

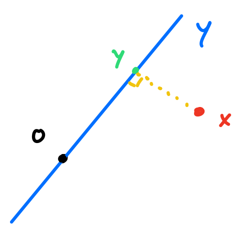
Vemo $\left.\begin{array}{l} \bullet\ \langle y_n,a\rangle=0 \\ \bullet\ y_n\to y\end{array}\right\}$ Dovolj: $\langle y,a\rangle = \lim\limits_{n\to\infty}\langle y_n,a\rangle$

Velja $|\langle y,a\rangle - \langle y_n,a\rangle| = |\langle y-y_n,a\rangle| \underset{\text{Cauchy - Schwartz}}{\le} \overset{0}{\|y-y_n\|}\,\overset{\text{konst}}{\|a\|} \to 0$

$\Rightarrow \lim\langle y_n,a\rangle = \langle y,a\rangle$

$\square$

**Def** Naj bo $Y\le X$ ($Y$ vekt podprostor v $X$). Vz. $x\in X$. Pravimo, da je $y\in Y$ ortogonalna (pravokotna) projekcija vektorja $x$ na podprostor $Y$, če je $x-y\perp X$




Oznaka $y = P_Y x$

Preslikava $P_Y: X\to Y$
$x\mapsto y$

se imenuje ortogonalni projektor prostora $X$ na podprostor $Y$

Obstoj? Enoličnost?

**Trditev** Naj bo $X$ pr. s skal. prod. in $Y\le X$ lin. podprostor. Denimo, da za $\forall x\in X$ $\exists$ neki $P_Y x$ kot iz prejšnje def. Tedaj velja:

1. $P_Y x$ je enolično določen
2. $P_Y x$ je najboljši približek za $x$ v $Y$, v smislu $\|x-P_Yx\| = d(x,Y)$
3. preslikava $P_Y$ je linearna

④ preslikava $P_Y$ je zvezna, celo skrčitev $\|P_Y x\| \le \|x\|$ za $\forall x \in X$

⑤ $Y$ je zaprt v $X$ ⇒ Torej $P_Y$ ne $\exists$ za vse podprostore

**Dokaz**

① Denimo, da $\exists\, y_1, y_2 \in Y$ da: ¿
odšt. $y_2 - y_1 \perp Y$

$\Rightarrow \quad y_2 - y_1 \perp y_2 - y_1 \qquad (\text{saj } y_2 - y_1 \in Y)$

$\Rightarrow \quad y_2 - y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1$

② Vz. $y \in Y$. Velja:

$$x - y = (x - P_Y x) + (P_Y x - y)$$

⇒ Pitagorov izrek ⇒ $\|x-y\|^2 = \|x - P_Y x\| + \underbrace{\|P_Y x - y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x - P_Y x\|^2$

Enakost $\Leftrightarrow$ $y = P_Y x$

③ Pišimo $P = P_Y$

Vz. $x_1, x_2 \in X$. Ker je $x_1 - Px_1,\ x_2 - Px_2 \in Y^\perp$ je tudi
$(x_1 + x_2) - (Px_1 + Px_2) \in Y^\perp$
$Px_1, Px_2 \in Y \Rightarrow Px_1 + Px_2 \in Y$

$P_Y(x_1 + x_2)$: je (edini) element $w$ iz $Y$ da:
$(x_1 + x_2) - w \in Y^\perp$

Toda $Px_1 + Px_2$ je tak $\Rightarrow$ $P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2$

Homogenost dokažemo podobno

④ Iz Pitagorovega izreka ker dekompozicija:

$$x = \underbrace{(x - Px)}_{\in Y^\perp} + \underbrace{Px}_{\in Y}$$

$\Rightarrow \quad \|x\|^2 \geq \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2 \geq \|Px\|^2$

⑤ Naj za $(y_n)_n \subset Y$ velja $y_n \longrightarrow x$ za neki $x \in X$. Dokažimo $x \in Y$.

Privzetek: $\|y_n - x\| \longrightarrow 0$. Ker je $P$ zvezna je $\|Py_n - Px\| \le \|y_n - x\| \longrightarrow 0$ oz. $Py_n \to Px$

Toda $y_n \in Y$, zato je $Py_n = y_n$. Videli smo:

$y_n \nearrow x$, $y_n \searrow Px$ v $X$. To je mogoče le, če $x = Px$ oz. $x \in Y$ $\square$

**Trditev** Naj bo $Y \le X$ končno dim. podprost. in $\{e_j\,;\ j = 1, \dots, n\}$ njegova baza, sestavljena iz paroma ortog. vektorjev z dolžino 1, torej:

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \ne k \end{cases}$$

Obstoj take baze: Gram-Schmidtova ortogonalizacija.

Tedaj je $P_Y x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \quad \forall x \in X$

**Dokaz** Velja:

$$x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \perp e_k \quad \text{za} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{\delta_{jk} = 1 \text{ za } j=k} = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0$$

Posledično je $y \perp \mathrm{Lin}\{e_1, \dots, e_n\} = Y$. Sledi, da je $\sum \dots = P_Y x$

**Def.** Pravimo, da je družina vektorjev $\{e_j, j \in \mathbb{N}\} \subset X$ ortonormiran sistem (ONS), če velja

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

Besselova neenakost

**Izrek** Naj bo $X$ vekt. pr. s skal. prod. in $\{e_j ; j \in \mathbb{N}\}$ ONS v $X$. Tedaj za $\forall x \in X$ velja

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

enakost velja ko je ONS tudi ONB (baza)

**Dokaz** Def $Y_n = \mathrm{Lin}\{e_1, \dots, e_n\}$

Po zadnji trditvi je $P_{Y_n} x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$

Pitagorov izrek $\|P_{Y_n} x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2$

Vemo: $\|P_{Y_n} x\| \leq \|x\|$ (Trditev (4))

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \forall n$$

Sedaj $n \to \infty$

Zaporedje delnih vsot $s_n = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2$ je naraščajoče ($|\langle x, e_j \rangle| \geq 0$) in omejeno (z $\|x\|^2$) zato je konvergentno. Limita je (po def. vsote neskončne vrste) ravno $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2$ □

Dimenzija

**Trditev** Naj bo:

- $X$ Hilbertov prostor
- $\{e_j ; j \in \mathbb{N}\}$ ONS in
- $(c_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2$

Tedaj $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ obstaja (konvergira) v $X$ (To pomeni, da $\exists \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$ v $X$)

Če označimo $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$, tedaj je $c_j = \langle x, e_j \rangle$

**Opomba** Zadnji dve trditvi povesta, da v Hilbertovem prostoru za poljuben ONS $\{e_j ; j \in \mathbb{N}\}$

vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ konvergira $\Leftrightarrow$ $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$

**Dokaz** Def. delne vsote $s_n = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$. Zaporedje $(s_n)_n$ je Cauchyjevo v $X$ (Pitagorov izrek).
Ker je $X$ poln, $\exists\, x = \lim_{n\to\infty} s_n$.

$\langle e_j, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle s_n, x\rangle$

Cauchyjevo zap: Vz $\varepsilon > 0$. Trdimo da $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ da $m, n \geq n_0$ velja $\|s_m - s_n\|_X < \varepsilon$

Računamo

$$s_m - s_n = \sum_{j=1}^{m} c_j e_j - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \overset{\text{denimo, da } m > n}{=} \sum_{j=n+1}^{m} c_j e_j$$

$$\Rightarrow \|s_m - s_n\|^2 = \Big\|\sum_{j=n+1}^{m} c_j e_j\Big\|^2 \overset{\text{Pit. izrek}}{=} \sum_{j=n+1}^{m} \underbrace{\|c_j e_j\|^2}_{|c_j|\|e_j\| = |c_j|\cdot 1} = \sum_{j=n+1}^{m} |c_j|^2 = \sigma_m - \sigma_n,$$

kjer je $\sigma_N = \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2$

Toda $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2$ konvergira saj po predpostavki $(c_j)_j \in \ell^2$, zato so
(po def. konvergentne vrste) njene delne vsote $(\sigma_N)_N$ konvergentno ($\Rightarrow$ Cauchyjevo)
zaporedje. Torej za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ da $m, n \geq n_0$ potem je $|\sigma_m - \sigma_n| < \varepsilon$.
Vidli: $\|s_m - s_n\|_X = |\sigma_m - \sigma_n|$

**Def** Naj bo $X$ Hilbertov prostor in $\mathcal{E} = \{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ ONS v $X$.
Vrsti $\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j$ pravimo Fourierova vrsta za $x \in X$ glede na $\mathcal{E}$,
števila $\langle x, e_j\rangle$ pa se imenujejo Fourierovi koeficienti.

**Def** Naj bo $X$ Hilbertov prostor. Pravimo, da je ONS $\mathcal{E} = \{e_j ; j \in \mathbb{N}\}$ kompleten (KONS),
če za $\forall x \in X$ velja

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j$$

Torej $x$ sovpada (je enak) svoji fourierovi vrsti

**Trditev** Naj bo $X$ Hilbertov prostor in $\mathcal{E} = \{e_j ; j \in \mathbb{N}\}$ ONS na $X$. Naslednje izjave so ekvivalentne:

1. $\mathcal{E}$ je KONS
2. za $\forall x, y \in X$ je $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle y, e_j\rangle}$
3. za $\forall x \in X$ je
$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \qquad \text{Parsevalova identiteta}$$
4. $\mathcal{E}$ ni vsebovan v nobenem strogo večjem ONS.
5. $\mathcal{E}^{\perp} = \{0\}$

**Dokaz** $1 \Rightarrow 2$ $\quad x = \lim_{n\to\infty} x_n$ in $x_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$

$y = \lim_{n\to\infty} y_n$ in $y_n = \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle e_j$

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle \overset{?}{=} \lim \langle x_n, y_n\rangle$$

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leq |\langle x - x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y - y_n\rangle| \overset{\text{Cauchy Schwartz}}{\leq} \underbrace{\|x - x_n\|}_{0}\|y\| + \underbrace{\|x_n\|}_{\text{omejen}}\underbrace{\|y - y_n\|}_{0} \to 0$$

2 ⇒ 3 ko $y=x$ vstavimo v 2

3 ⇒ 4 Denimo, da $\exists\, \mathcal{F} \subset X$, $\mathcal{F}$ ONS in $\mathcal{E} \subsetneq \mathcal{F}$. Vzemimo $f_0 \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$.
Naj bo $x = f_0$. Tedaj je $\langle x, e_j \rangle = 0$ $\forall j \in \mathbb{N}$ ($e_j \in \mathcal{F} \leftarrow$ ONS)
Hkrati je $\|x\| = 1$. Torej 3 ne velja za $x$.

4 ⇒ 5 (spet dokaz s protislovjem)
Denimo, da $\exists\, f_0 \in \mathcal{E}^{\perp} \setminus \{0\}$. Lahko privzamemo, da $\|f_0\| = 1$. Sedaj je $\mathcal{F} = \mathcal{E} \cup \{f_0\}$ spet ONS, ki pa strogo vsebuje $\mathcal{E}$ (če bi imeli $f_0 \in \mathcal{E}$, bi iz $f_0 \perp \mathcal{E}$ sledilo $f_0 \perp f_0$, zato $f_0 = 0$, to pa ni resnično).

5 ⇒ 1 Vz. polj. $x \in X$. Def $h = x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$. Velja $\langle h, e_k \rangle = 0$ za $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$h = x - \lim_{N \to \infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j}_{x_N}$$

Za $N > k$ je $\langle x - x_N, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle h, e_k \rangle = \langle h, e_k \rangle - \langle x - x_N, e_k \rangle = \langle \underbrace{h - (x - x_N)}_{\to 0}, e_k \rangle$$

□

**Opomba:** V neskončno dim. prostorih se t.i. lin dimenzija ne ujema s kardinalnostjo KONS.

Primer $\mathcal{E} = \{e_j \,;\, j \in \mathbb{N}\}$ je (števen) KONS v $\ell^2$
$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

Toda $\operatorname{Lin} \mathcal{E} = \{$"končne" zaporedje$\} \subsetneq \ell^2$

Spomnimo: lin. kombinacije so (po def.) vedno končne.

V neskončno dim. prostorih KONS $\neq$ ONB
končno dim. prostorih KONS $=$ ONB

## Fourierove vrste v $L^2(0,1)$

Ideja: aproksimirati funkcijo s preprostejšimi funkcijami

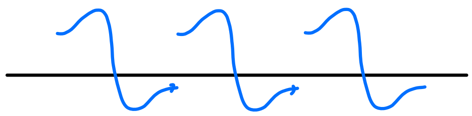
„Vsaka funkcija je limita polinomov" (Taylorjev izrek)
„Vsaka funkcija je limita trigonometričnimi funkcijami" (Fourier, Bernoulli, Euler)
"
"Vsaka funkcija je funkcija valovanja"

Za $\forall n \in \mathbb{Z}$ def. $\boxed{e_n(x) = e^{2\pi i n x}}$ ; $x \in \mathbb{R}$ $\qquad e_n : \mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1\}$

To so 1-periodične funkcije ($e_n(x+1) = e_n(x)$)

Imenujemo jih (osnovne) trigonometrične funkcije. Spomnimo $e^{it} = \cos t + i \sin t$

Pogoj za aprox. $f$ z $e_n$: pričakujemo, da so tudi $f$ 1-periodične



Takšne $f$ lahko enačimo s f. na $\underbrace{\text{en. krožnici}}_{\text{torus} = \mathbb{T}}$ v $\mathbb{C}$

Alternativno, gledamo funkcije na $[0,1]$ z $f(0) = f(1)$.
Spomnimo: skal. prod. na $L^2(I)$ je def. kot

$$\langle f, g \rangle_{L^2(I)} = \int_0^1 f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$$

Hitro vidimo (D.N.): glede na zgornji skal. prod. je množica

$$\mathcal{E} = \{e_n ; n \in \mathbb{Z}\}$$

ONS v $L^2(I)$

Izkaže se $\mathcal{E} = \{e_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ je KONS v $L^2(I)$

**Def.** Za $f \in L^2(I)$ je njen $n$-ti Fourierov koeficient def. kot:

$$\boxed{\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x}\,dx}$$

Fourierova vrsta za $f$ v točki $x \in \mathbb{T}$ je takšna vrsta

$$\boxed{Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}} \qquad \left(= \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n\right.$$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} + \hat{f}(-n) e^{-2\pi i n x} \right) = \dots$$

$$\hat{f}(n) e^{2\pi i n x} + \hat{f}(-n) e^{-2\pi i n x} = \left(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\right) \cos(2\pi n x) + i \left(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)\right) \sin(2\pi n x)$$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \underbrace{\cos(2\pi n x)} + b_n \underbrace{\sin(2\pi n x)} \right)$$

valovanje

kjer je $a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi n x\,dx$

$$b_n = i\left(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)\right) = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2\pi n x\,dx$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{a_k - i b_k}{2} \qquad \hat{f}(-k) = \frac{a_k + i b_k}{2} \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

**Posledica** (tega, da je $\mathcal{E}$ KONS v $L^2(\mathbb{T})$)
Za $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ je

$$\lim_{N \to \infty} \Big\| f - \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e_n}_{S_N f} \Big\| = 0$$

**Izrek** Isto (↑) velja tudi v $L^p(\mathbb{T})$ za $1<p<\infty$. (Dokaz je bistveno težji in daljši)
( $L^p(\mathbb{T}) = \{f: [0,1] \to \mathbb{T} \quad \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} < \infty \}$ )

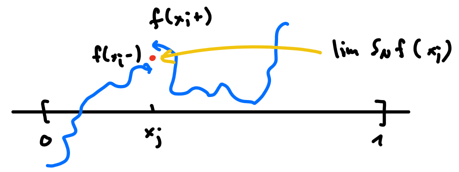
Konvergenca po točkah
**Izrek** (L. Carleson 1966) Če je $f \in L^2(\mathbb{T})$ tedaj

$$S_N f \longrightarrow f$$ po točkah (skoraj povsod na $\mathbb{T} = [0,1]$).

**Izrek** Naj bo $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Privzemimo naslednje lastnosti:

- $f$ je odsekoma zvezna (torej zv. na $\mathbb{T}$ razen morda v končno mnogo točkah $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ v katerih pa ima levo in desno limito:

$$f(x+) = \lim_{\delta \searrow 0} f(x+\delta)$$
$$f(x-) = \lim_{\delta \searrow 0} f(x-\delta)$$




to so skoki funkcije $f$ v točki $x$)

- Na $\mathbb{T} \setminus X$ je funkcija odvedljiva in je odvod $f'$ omejen

[Preprostejše toda močnejše predpostavke: $f$ je odsekoma zvezno odvedljiva]

Tedaj
$$S_N f \xrightarrow{\text{konv. po točkah}} \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad \text{za } N \to \infty \quad (\forall x \in \mathbb{T})$$

**Opomba**

1. Sklep ni odvisen od (tega, kako izberemo) $f(x_j)$.
2. Sklep pove, da (ob danih predpostavkah) v točkah $x \in \mathbb{T}$, kjer je $f$ zvezna sledi $S_N f(x) \to f(x)$

**Parsevalova identiteta** za $\mathcal{E}$

$$\left( \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \right)$$

Če je $f \in L^2(\mathbb{T})$, tedaj

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

**Primer** $f = \chi_{[0,1/2]} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 

$f(x) = 1$ če $x \in [0, 1/2]$
$f(x) = 0$ če $x \in [1/2, 1]$

Tedaj je
$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx = \int_0^1 \chi_{[0,1/2]}(x) \, dx = \frac{1}{2}$$

Za $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} \, dx = \int_0^{1/2} e^{-2\pi i n x} \, dx = \frac{1}{-2\pi i n} e^{-2\pi i n x} \Big|_0^{1/2} = \frac{i}{2\pi n}\left(e^{-\pi i n} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i n}\left(1 - \overbrace{e^{-i\pi n}}^{= \cos \pi n = (-1)^n}\right) = \frac{1 - (-1)^n}{2\pi i n} = \frac{1}{\pi i n} \begin{cases} 1 ; & n \text{ lih} \\ 0 ; & n \text{ sod} \end{cases}$$

in hkrati $\hat{f}(0)$
$$\hat{f}(0) = \int_0^1 f(x) e^0 \, dx = \frac{1}{2}$$

Sedaj iz Parsevalove identitete sledi

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{n \text{ lih} \\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\, 2\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ lih}}} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

**Posledica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Dokaz** Označimo $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Sledi

$$s = \Big(\sum_{n \text{ lih}} + \sum_{n \text{ sod}}\Big)\frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ lih}} \frac{1}{n^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}}_{\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}s} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}s$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\pi^2}{6}$$

**Riemann-Lebesgueova lema**

Za $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ velja

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\,dx}^{a_n/2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,dx}^{b_n/2} = 0$$

**Dokaz** Dovolj: $f$ realna. Res, če je $F$ kompleksna, sta $\mathrm{Re}\,F$ in $\mathrm{Im}\,F$ spet iz $L^2$ $\left(\int|F|^2 = \int|\mathrm{Re}\,F|^2 + \int|\mathrm{Im}\,F|^2\right)$, zato lahko upor. izrek zanju, saj

$$\int_0^1 F(x)\cos(2\pi n x)\,dx = \int_0^1 \mathrm{Re}\,F(x)\cos(2\pi n x)\,dx + i\int_0^1 \mathrm{Im}\,F(x)\cos(2\pi n x)\,dx$$

Sedaj naj bo $f$ realna.

Velja $\hat{f}(n) = \frac{a_n}{2} - i\,\frac{b_n}{2}$. Hkrati iz $f\in L^2$ sledi (Parseval. id.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

V posebnem $|\hat{f}(n)|^2 \to 0$ za $n\to\infty$

$$|\hat{f}(n)|^2 = \frac{a_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4}$$

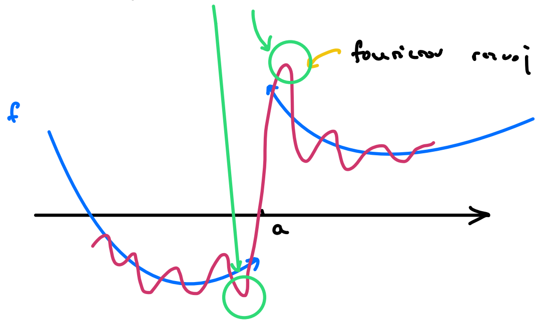
$a_n \in \mathbb{R}$ saj $f$ real.

$$0 \le a_n^2 \le 4|\hat{f}(n)|^2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0$$

Podobno za $b_n$

$\square$

**Izrek** Wilbraham - Gibbsov fenomen




Fourierov razvoj v okolici skoka funkcije sko vrednost preseže za 9% velikosti skoka.