Končna aritmetika - plavajoča vejica

- število v plavajoči vejici zapišemo kot:

$x = \pm m \cdot b^e$ kjer je $m = 1\ c_1 c_2 c_3 \dots c_t$ v dvojiškem sistemu.

mantisa ↑ ↑ baza $\quad L \le e \le U$

(dolžina t)

- števila so normalizirana, lahko so tudi subnormalizirane (vodilni bit je 0 in eksponent je $L-1$) (npr. $1 \cdot c_1 c_2 \dots$)
- zapis označimo $P(b, t, L, U)$

Primer: - standard za enojno natančnost je $P(2, 24, -125, 128)$
- to je 32-bitna aritmetika (1 bit za $\pm$, 24 za mantiso, ostalo za exp)
- dvojna natančnost $P(2, 53, -1021, 1023)$ 64-bitna

- Posebna števila: NAN, $\pm\infty$
- Kako zapišemo decimalna števila v binarni aritmetiki

$5_{(10)} = 101_{(2)} \quad 5:2 = 2$ ost 1 $\quad 2:2 = 1$ ost 0 $\quad 1:2 = 0$ ost 1

$1/8_{(10)} = 0{,}001_{(2)} \quad 0{,}125 \cdot 2 = 0{,}25 \mid 0 \quad 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5 \mid 0 \quad 0{,}5 \cdot 2 = 1 \mid 1 \Rightarrow 0{,}001$

$1/3_{(10)} = 0{,}0 \quad 0{,}333333\dots \cdot 2 = 0{,}666\dots \mid 0 \quad 0{,}666 \cdot 2 = 1{,}333\dots \mid 1 \Rightarrow 0{,}010101\dots$

- za $x \in \mathbb{R}$ velja: če $|x|$ med max in min pozitivnim številom in $fe(x)$ njegovo najbližje predstavljeno število dosljeno z zaokroževanjem:

$$fe(x) = x(1+\delta) \qquad |\delta| \le u$$

kjer je $u = \frac{1}{2} b^{1-t}$

- osnovna zaokrožitvena napaka $u \approx 10^{-8}$ ali $u \approx 10^{-16}$

Napake pri računanju

(a) Neodstranljive napake D_n (zaradi napake pri podatkih)

(b) Napaka metode D_m (zaradi aproksimacije, npr. Taylorjeva vrsta)

(c) Zaokrožitvene napake D_z (zaradi zaokroževanja na predstavljiva števila)

Celotna napaka $D = D_m + D_n + D_z$

Če je vrsta alternirajoča $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad a_n \ge 0 \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n \right| \le a_{N+1}$

Primer vpliva napak

Naloga: Rekurzivno želimo računati člene dveh zaporedij

(a) $a_{n+1} - \frac{5}{2} a_n + a_{n-1} = 0 \qquad a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2}$

(b) $a_{n+1} - \frac{10}{3} a_n + a_{n-1} = 0 \qquad a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{3}$

(a) Nastavek $a_n = \lambda^n$

$$\lambda^{n+1} - \frac{5}{2}\lambda^n + \lambda^{n-1} = 0 \qquad \lambda \ne 0$$

$$\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}$$

Če sta $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ in $\lambda_1 \ne \lambda_2$: $\quad a_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n = \alpha 2^n + \beta 2^{-n}$

Koef. α, β dobimo iz začetnih pogojev.

$$1 = \alpha + \beta$$

$$\tfrac{1}{2} = \alpha 2 + \beta \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \beta = 1 \qquad a_n = 2^{-n}$$

(b) Nastavek $a_n = \lambda^n$

$$\lambda^{n+1} - \frac{10}{3}\lambda^n + \lambda^{n-1} = 0$$
$$\lambda^2 - \frac{10}{3}\lambda + 1 = 0$$
$$(\lambda - 3)(\lambda - \frac{1}{3}) = 0$$
$$a_n = \alpha 3^n + \beta 3^{-n}$$
$$1 = \alpha + \beta$$
$$\frac{1}{3} = \alpha 3 + \beta \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad a_n = 3^{-n}$$

Dobimo ogromne napake

$$b_{n+1} - \frac{10}{3} b_n + b_{n-1} = 0 \qquad b_0 = 1 \qquad b_1 = \frac{1}{3} + \varepsilon$$
$$|\varepsilon| \leq u \approx 10^{-16}$$

Podobno kot prej

$$\lambda^2 - \frac{10}{3}\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

Iz začetnih pogojev sledi

$$b_0 = 1 = A + B$$
$$\frac{1}{3} + \varepsilon = 3A + \frac{B}{3}$$
$$\cancel{1} + 3\varepsilon = 9A + \cancel{1} - A$$
$$A = \frac{3}{8}\varepsilon \qquad B = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon$$

$$b_n = \frac{3}{8}\varepsilon\, 3^n + (1 - \frac{3}{8}\varepsilon) 3^{-n}$$

Ko n raste, začne $\frac{3\varepsilon}{8} 3^n$ prevladovati

Numerično reševanje linearnih sistemov

Množenje matrik in vektorjev

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$

$$A x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j$$

Primer: Sistem $Ax = b$ ima rešitev natanko tedaj, ko je rang A = rang$([A, b])$

$\Rightarrow$ Če ima $Ax = b$ rešitev, potem je

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_j = b \quad , \text{ kar pomeni, da je}$$

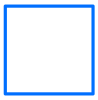
b lin. komb. stolpcev $a_1 \dots a_n$ torej mora biti rang (A) = rang $([A \mid b])$

$\Leftarrow$ Če je rang A = rang $[A \mid b]$ potem je b lin. komb. stolpcev A

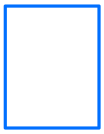
Matrični zapis sistema enačb

$$Ax = b$$

Najprej se omejimo na primer $m = n$



$m = n$



$m > n$

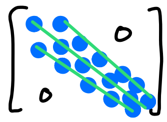
predoločen sistem

$m < n$

nedoločen sistem

Pomembni so sistemi, ki imajo posebno matriko:

1. A zgornje trikotna
2. A spodnje trikotna
3. A je tridiagonalna matrika
4. A je diagonalna

$A =$ 

Vektorske in matrične norme

Def: Vektorska norma je preslikava $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, za katero je

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Primeri

1. $\sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum |x_i|^2} = \|x\|_2$ 2-norma
2. $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ 1-norma
3. $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ p-norma $p \geq 1$
4. $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ ∞-norma

Def: Matrična norma je preslikava $\| \ \| : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ za katero velja

1. $\|A\| = 0 \iff A = 0$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|AC\| \leq \|A\| \|C\|$ submultiplikativnost

Norme

$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ 1-norma (največja stolpična vsota)

$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ ∞-norma (največja vrstična norma)

$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ Frobeniusova norma

$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i (A^T A)}$ spektralna norma

lastne vrednosti A

Splošno: operatorska norma, ki je porojena z neko vektorsko normo $\|\cdot\|$ je

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Primer

$$\sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2$$

Def: Število občutljivosti (pogojenostno število) za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det A \neq 0$ je

$$\mathcal{K}(A) = \|A^{-1}\| \, \|A\|$$

Zanima nas, kako je rešitev sistema $Ax=b$ občutljiva na motnje v A in b.

Lema: naj bo $Ax=b$ in $(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$. Če je $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$, je

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mathcal{K}(A)}{1-\mathcal{K}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Reševanje sistema $Lx=b$ kjer je L spodnje trikotna matrika ($\det L \neq 0$)

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_{11} x_1 & & &= b_1 \\ l_{21} x_1 &+ l_{22} x_2 & &= b_2 \\ \vdots & & \ddots & \quad \vdots \\ l_{n1} x_1 &+ \cdots & + l_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

Direktno vstavljanje (prema substitucija)

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Število operacij

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 + 1 + (i-1) + (i-1) \right) = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 2\,\frac{(n+1)n}{2} - n$$

$$= n^2 = \mathcal{O}(n^2)$$

Obratno vstavljanje

$Ux = b$ $\qquad$ U zgornje trikotna

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right) \qquad i = n, n-1, \dots, 1$$

Število operacij $\quad \mathcal{O}(n^2)$

LU razcep

Znamo $Lx = b$ $\quad Ux = b$

L: spodnje trikotna, U: zgornje trikotna

Ideja LU razcepa
- problem prevedik na reševanje enostavnejšega sistema
- ekonomično rešiko sistem
- iz rešitve enostavnejšega sistema dobimo rešitev originalnega sistema

Če se za A pozna LU razcep

$$A = LU \; ; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \diagdown \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pok –
$$Ax = b$$
$$LUx = b$$
$$L(Ux) = b \qquad y = Ux$$

rešimo $Ly = b$

rešimo $Ux = y$

Ali vedno $\exists$ LU razcep? Ne

Primer $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & z \\ 0 & w \end{bmatrix}$

$y = 0 \qquad xy + 0 = 2$

$\qquad\qquad 0 + 0 = 2$ X

Opazimo $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Izrek Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sta ekvivalentni izjavi:
- $\exists$ enolični razcep $A = LU$, U neizrojena $\Leftrightarrow$ A neizrojena
- vse vodilne podmatrike $A(1:k, 1:k)$ $k = 1, 2, \dots, n$ so nesingularne (det $\neq 0$)

Dokaz $(\Rightarrow)$ $A = LU$, $1 \le k \le n$

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A_{kk} & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] \end{array} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{kk} & 0 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{kk} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{bmatrix}}_{U}$$

$\Rightarrow$ L_{kk} spodnje trikotna, U_{kk} zgornje trikotna

$L_{kk} U_{kk} = A_{kk} \quad \Rightarrow \quad A_{kk}$ neizrojena

Izrek Za vsako nesingularno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, najdemo tako permutacijsko matriko P da obstaja LU razcep za PA (vedno obstaja LU razcep za matriko ki ji premešamo vrstice)

Prejšnji primer $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $PA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Algoritem: LU razcep z delnim pivotiranjem

Na j-tem koraku algoritem naredimo naslednje:

- Naj bo $A^{(j)}$ transformirana matrika A na j-tem koraku

$$\Big[\ A \to A^{(1)} = \begin{bmatrix} \times & \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix} \to A^{(2)} = \begin{bmatrix} \times & \times \\ 0 & \times \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \dots$$

$$\to A^{(j)} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & & \times & \\ 0 & \times & \times & & \times & \\ 0 & 0 & \times & & \times & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \times & \\ & & & & \times & \\ \vdots & & & & \times & \\ 0 & & & & \times & \end{bmatrix} j+1$$

$j+1$

poiščem največji element po abs. vred.

- Zamenjamo vrstico z največjim elementom z $(j+1)$-vrstico (delno pivotiranje)
- Izvedemo Gaussovo eliminacijo vrstic $j+2, \dots, n$:

$$A^{(j+2)} = L_{j+1} A^{(j+1)}$$

$$l_{kj} = \frac{a_{kj}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}$$

Da se videti, da je

$$L_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & +l_{j+1,j} & \ddots \\ & & & \vdots & \\ & & & +l_{nj} & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} U$$

Primer: izračunaj LU razcep brez pivotiranja

kvocient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & -2 \\ 1 & 4 & 8 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

enojno enke po diagonali

niso enojno enke po diagonali

Časovna zahtevnost LU razcepa je $\frac{2}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{6} n = \mathcal{O}(n^3)$

Uporaba LU razcepa z delnim pivotiranjem

① Reševanje sist. lin. enačb $Ax = b$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $b \in \mathbb{R}^n$:

- $PA = LU$ $O(n^3)$ operacij

$PAx = Pb$

$LUx = Pb$

$L(Ux) = c$ $y = Ux$

$Ly = c \Rightarrow y$ $O(n^2)$ direktno vstavljanje

$Ux = y \Rightarrow x$ $O(n^2)$ obratno vstavljanje

② Reševanje matričnega sistema

$$AX = B \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad B \in \mathbb{R}^{n \times p} \qquad X \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

zapišemo po stolpcih

$$A[x_1, x_2, \dots, x_p] = [b_1, b_2, \dots, b_p]$$

Rešujemo sistem $Ax_j = b_j$ $j = 1, \dots, p$

Uporabimo le en LU razcep

Čas. zah. $\underbrace{O(n^3)}_{LU} + p(\underbrace{O(n^2)}_{\text{obratno}} + \underbrace{O(n^2)}_{\text{direktno}})$

③ Računanje inverza A^{-1} (skoraj nikoli zares ne potrebujemo)

$$A A^{-1} = I \qquad X = A^{-1}$$
$$A X = I \qquad \text{uporabimo točko 2}$$

④ Računanje determinante

$$PA = LU$$
$$\det PA = \det LU$$
$$\det P \det A = \det L \det U$$
$$(-1)^k \cdot \det A = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

k št. menjav

Reševanje posebnih sistemov

Sistemi s simetrično, pozitivno definitno matriko A

Def. Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je sim. poz. def. če je simetrična $A = A^T$ in je $x^T A x > 0$ $\forall x \neq 0$

Alt. def. Vse lastne vrednosti so pozitivne

Za s.p.d. obstaja t.i. razcep Choleskega

Izrek Za s.p.d. mat. A $\exists$ nesingularna spodnje trikotna mat. V, da je

$$A = V V^T$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} = V V^T \qquad V = \begin{bmatrix} v_{11} & & & 0 \\ v_{21} & v_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ v_{n1} & \cdots & & v_{nn} \end{bmatrix}$$

$$v_{11}^2 = a_{11} \quad \Rightarrow v_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad a_{11} > 0$$

Algoritem:

$$v_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2 \right)^{1/2}$$

$j = k+1, \dots, n$

$$v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}} \left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji} v_{ki} \right)$$

Časovna zahtevnost $O(n^3)$

$Ax = b \qquad A$ je s.p.d.

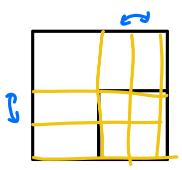
$A = V V^T$

$V V^T x = b \qquad V^T x = y$

$V y = b$

$V^T x = y$

Diagonalno pivotiranje



Tridiagonalni sistemi

Matrika je tridiagonalna

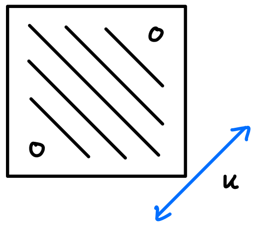
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ & l_{32} & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ u_{21} & a_{22} & & \\ & u_{32} & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

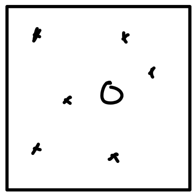
Glej prosojnice

Časovna zahtevnost $O(n)$

Posplošitev: pasovne matrike, t.j. k-diagonalne matrike



Razpršene matrike



SPARSE MATRIX

Numerično reševanje nelinearnih enačb

Zakaj numerično reševanje?

- polinomske enačbe st. ≥ 5
- enačba v splošnem ni podana

Reševali bomo $f(x)=0$ $\quad f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ali pa sistem $F(x)=0$

Izrek: Naj bo $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in $f(a)f(b)<0$ potem ima f na $[a,b]$ vsaj eno ničlo

Metoda bisekcije:

$$c = \frac{a+b}{2} \qquad \begin{array}{l} f(c)f(b) < 0 \Rightarrow a = c \\ f(c)f(a) < 0 \Rightarrow b = c \end{array}$$

Koliko korakov potrebujemo $\frac{|b-a|}{2^k} < \varepsilon \qquad k > \log_2 \frac{|b-a|}{\varepsilon}$

Navadna iteracija

Ideja: $f(x)=0$ pretvorimo v ekvivalentno obliko $x = g(x)$.
Računamo člene zaporedja

$$x_{r+1} = g(x_r) \quad , \quad x_0 \text{ izberemo}$$

Če $\lim_{r\to\infty} x_r = \alpha$, je $\alpha = g(\alpha)$ fiksna (ali negibna) točka g in hkrati rešitev $f(x)=0$

Kako določiti $g(x)$?

- $g(x) = x - f(x)$
- $g(x) = x - c f(x) \qquad c \neq 0$
- $g(x) = x - h(x) f(x), \quad h(x) \neq 0$

Primer $p(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$

$$g_1(x) = \frac{x^3+1}{5}$$
$$g_2(x) = \sqrt[3]{5x-1}$$
$$g_3(x) = \frac{1}{5-x^2}$$

Izrek: Naj iteracijska funkcija g na intervalu $I = [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ ustreza pogoju $|g(x)-g(y)| \le m|x-y|$, $x,y \in I$, $0 \le m < 1$.
Potem za $\forall x_0 \in I$ zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \dots$ konvergira k α.
Velja $|x_r - \alpha| \le m^r |x_0 - \alpha|$
in $|x_{r+1} - \alpha| \le \frac{m}{1-m} |x_r - x_{r-1}|$

Posledica: Naj bo $g(\alpha) = \alpha$ in g zvezno odvedljiva pri α. Če je

$|g'(\alpha)| < 1$, potem obstaja okolica I za α, da za $\forall x_0 \in I$

$x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \dots$ konvergira k α.

Točka α za katero je $g(\alpha) = \alpha$ in $|g'(\alpha)| < 1$ je privlačna, če pa je $|g'(\alpha)| > 1$, pa je odbojna.

Kako je s hitrostjo konvergence?

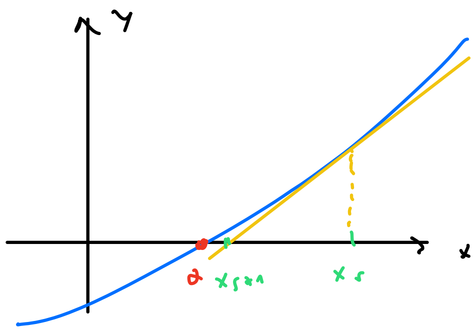
Def. Naj zaporedje $(x_r)_{r=0}^{\infty}$ konvergira k α. Pravimo, da je red konvergence enak $p > 0$, če obstajata konstanti $C_1, C_2 > 0$, da za pozne člene velja

$$C_1 |x_r - \alpha|^p \le |x_{r+1} - \alpha| \le C_2 |x_r - \alpha|^p$$

Lema: Naj bo g v okolici negibne točke α p-krat zvezno odvedljiva in naj bo $|g^{(k)}(\alpha)| = 0$, za $k = 1, 2, \dots, p-1$ ter $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Potem ima iterativna metoda $x_{r+1} = g(x_r)$ v bližini rešitve α red konvergence p.
- $p=1$ linearna konvergenca (na vsakem koraku konstantno mnogo točnih mest.)
- $p=2$ kvadratična konvergenca (na vsakem koraku se število točnih mest podvoji)
- $p=3$ kubična konvergenca (na vsakem koraku se število točnih mest potroji)
- $1 < p < 2$ superlinearna

Tangentna (Newtonova) metoda

$f(x) = 0 \iff x = g(x) = x - h(x) f(x)$ $\quad h(x) \neq 0$



$$x_{r+1} = x_r - \frac{f_r}{f'_r} \qquad r = 0, 1, \dots$$

Red konvergence 2

Trditev: če je α enostavna ničla f je red konv. vsaj 2. Če pa je večkratna ničla, je red konv. linearen. Ob pogoju, da konvergira.

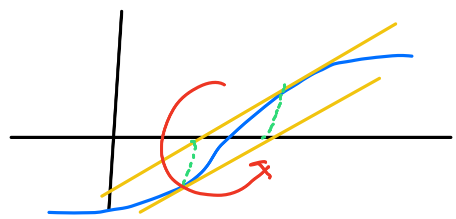
Izrek: Naj bo α enostavna ničla dvakrat zv. odv. funk. f. Potem $\exists$ okolica/interval I točke α in konst. $C > 0$, da tang. metoda konv. za vsak $x_0 \in I$ ter približki x_r zadoščajo oceni:

$$|x_{r+1} - \alpha| \leq C(x_r - \alpha)^2$$

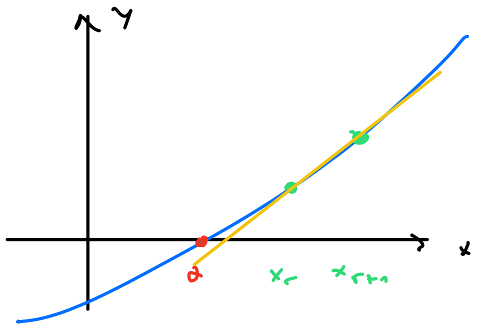
Trditev. Naj bo f na $I = [a, \infty)$ dvakrat zv. odv., naraščajoča in konveksna funkcija, ki ima ničlo $\alpha \in I$. Potem je α edina ničla in $\forall x_0 \in I$ tangentna metoda konvergira k α.

V splošnem nimamo nujno konvergence

Ciklično zaporedje



Sekantna metoda



$$x_{r+2} = x_r + \frac{f(x_r)\,(x_r - x_{r+1})}{f(x_r) - f(x_{r+1})}$$

Ta metoda ni primer navadne iteracije

Red konvergence je $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}62$

Še nekaj metod

1. Millerjeva metoda: parabola skozi zadnje tri točke.
2. Inverzna interpolacija: inverzno funkcijo aproksimiramo s parabolo in vzamemo vrednost aproksimante v točki 0.
3. Metoda (f, f', f''): pri izračunu novega približka uporabimo f, f', f''
4. Kombiniran Brentova metoda: inverzna interpolacija, bisekcija in sekantna metoda $\rightarrow$ fzero

Polinomske enačbe

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

Lahko uporabimo katerokoli od prej omenjenih metod, a bolje je izpeljati specifične metode. Za polinomske enačbe lahko poiščemo vse ničle (Horner)

Problem: vrstni red izločanja ničel

Problem lahko prevedemo na iskanje lastnih vrednosti matrike

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

pridružena matrika k polinomu in ima lastne vrednosti, ki so ravno ničle polinoma p

Manjka

Sistem nelinearnih enačb

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow F(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = G(X)$$

Tvorimo iteracijo $\quad x^{(r+1)} = G(x^{(r)})$

Trdi: če $\exists$ območje $\Omega \in \mathbb{R}^n$ z lastnostmi:

(a) $x \in \Omega \Rightarrow G(x) \in \Omega$

(b) $x \in \Omega \Rightarrow \rho(J_G(x)) \leq q < 1$

$J_G(x)$ ... Jakobijeva matrika funkcije G

$$J_G(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \end{bmatrix}$$

ρ ... spektralni radij = največja absolutna lastna vrednost

potem ima G v Ω natanko eno negibno točko α, $G(\alpha) = \alpha$ in zaporedje $x_{r+1} = G(x_r)$ konvergira za vsak $x_0 \in \Omega$

Opomba: če je $n=1$ a) $J_G(x) = \frac{dG}{dx} = G'(x)$

Posledice: Za konvergenco je dovolj

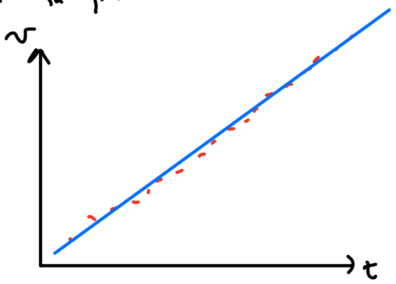
(a) $x \in \Omega \Rightarrow G(x) \in \Omega$

(b) $\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| \leq m < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$

Velja $\quad \|x^{(k)} - \alpha\| \leq \frac{m^k}{1-m} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$

Linearni problem najmanjših kvadratov

Primer: Hitrost tel. odv od časa $v(t) = \alpha t + \beta$. Hitrost izmerimo ob več časih t_j, $j = 1, 2, \dots, N$. Na voljo imamo približke $v_j \approx v(t_j)$, $j = 1, \dots, N$. Kako najbolje določimo α in β?



$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta &= v_1 \\ &\vdots \\ \alpha x_n + \beta &= v_n \end{aligned} \quad \Rightarrow A x = b$$

Iščemo $\quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2$

Primer: širjenje covid, $f(t) = a e^{bt}$

Lineariziramo model

$\log f = \underbrace{\log a}_{\tilde a} + bt \qquad a = e^{\tilde a}$

Problem min kvadratov

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad m >> n$ (velikostni red) $\quad b \in \mathbb{R}^m$

Iščemo $x \in \mathbb{R}^n$; napaka $\|Ax - b\|_2$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

Vektorju x^*, ki minimizira zgornjo normo pravimo rešitev.
Če A ni polnega ranga torej $\operatorname{rang} A < n$, potem rešitev ni enolična

Če je $\operatorname{rang} A < n$ in x^* rešitev po metodi najmanjših kvadratov je tudi $x^* + z$, $z \in \ker A$ tudi rešitev. ($\operatorname{rang} A < n \Rightarrow \dim \ker A \geq 1$)

$$\|Ax^* - b\|_2 = \|A(x^* + z) - b\|_2$$

Predpostavimo da $\operatorname{rang} A = n$

① Normalni sistem enačb

Izkaže se, da je rešitev ravno rešitev sistema $A^T A x = A^T b$

- $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (LU z delnim pivotiranjem, Cholesky, ...)
  - $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$
  - Poz. definitnost $A^T A$

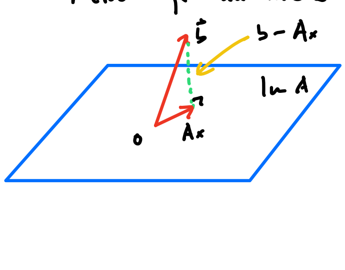
$x \neq 0$: $\quad x^T (A^T A) x > 0$ ok?

$(x^T A^T)(Ax) = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|_2^2 > 0$

Zakaj ni $\|Ax\|_2^2 = 0$?

Če bi $\|Ax\|_2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker A$, kar ni mogoče, ker je $x \neq 0$ in $\operatorname{rang} A = n$, $\ker A = \emptyset$

Metoda je numerično neuporabna, ker je $\overset{\text{občutljivost}}{\kappa}(A^T A) \approx \kappa(A)^2$



$(b - Ax) \perp \operatorname{Im} A \iff b - Ax \perp$ na vsak stolpec matrike A.

$A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \to (b - Ax) \perp a_i, \ \forall i$

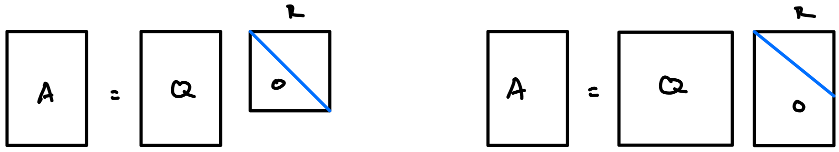
$\Rightarrow a_i^T (b - Ax) = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow A^T (b - Ax) = 0$

$\Rightarrow A^T A x = A^T b$

② QR razcep

Def. razcep $A = QR$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mat. z ortonormiranimi stolpci in $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zgornje trikotna mat., rečemo QR razcep.
Če je $A = QR$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonalna mat, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pa hkrati zgornje trikotna (zgornji trapez), potem je to razširjeni QR razcep



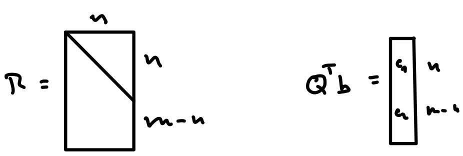
razširjeni QR

Če poznamo osnovni razcep QR je rešitev takole

$$A^T A x = A^T b \quad | A = QR$$
$$(QR)^T (QR) x = (QR)^T b$$
$$R^T \underbrace{Q^T Q}_{I} R x = R^T Q^T b \quad | (R^T)^{-1}$$ Vemo, da je R obrnljiva
$$R^{T^{-1}} R^T I R x = R^{T^{-1}} R^T Q^T b$$
$$\boxed{Rx = Q^T b}$$ Rešimo z obratnim vstavljanjem

Razširjeni QR razcep $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A^T A x = A^T b$$
$$R^T Q^T Q R x = R^T Q^T b$$
$$R^T R x = R^T Q^T b$$
Alternativno iščemo $\min \|Ax - b\|_2^2$
$$\|Ax - b\|_2^2 = \|QRx - b\|_2^2 = \|Q^T QRx - Q^T b\|_2^2 = \|Rx - Q^T b\|_2^2$$
Kdaj je $\|Rx - Q^T b\|_2^2$ minimalna?

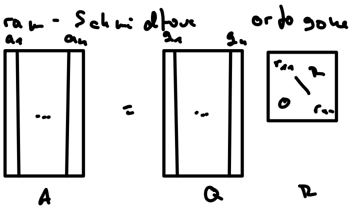


$$\|Rx - Q^T b\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} R_1 x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} R_1 x - c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|R_1 x - c_1\|^2 + \|c_2\|^2$$

$\Rightarrow$ izraz bo minimalen, ko bo $R_1 x = c_1$
Uporabimo obratno vstavljanje

Kako izračunati QR razcep?

- Gram-Schmidtova ortogonalizacija



$q_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 \qquad a_1 = r_{11} \cdot q_1 \Rightarrow r_{11} = \|a_1\|$

$r_{12} q_1 + r_{22} q_2 = a_2$ želimo $q_2^T q_1 = 0$

$$r_{12} q_1^T q_1 + r_{22} q_1^T q_2 = q_1^T a_2$$

$$r_{12} = q_1^T a_2$$

$$r_{22} q_2 = a_1 - r_{12} q_1$$

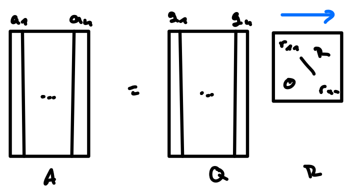
$$r_{22} = \| a_1 - r_{12} q_1 \|_2$$

$$q_2 = \frac{1}{r_{22}} (a_1 - r_{12} q_1)$$

$\vdots$

nadaljujemo

- Modificiran Gram - Schmidt



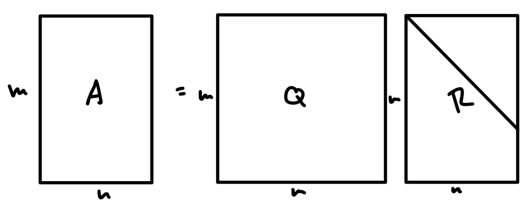
Elemente matrike R računamo po vrsticah

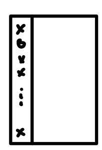
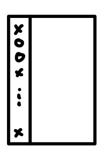
Izrek Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\operatorname{rang} A = n$. Potem $\exists$ enolični QR razcep, kjer je $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mat. z ort. stolpci, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zgornje trikotna s pozitivnimi diagonalnimi elementi.

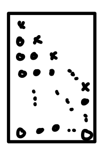
Pri reševanju predoločenega sistema z modif. GS moramo paziti, da ne izračunamo najprej QR razcepa in potem rešujemo trikotni sistem. Namesto tega razcepimo mat.

$$[A\, b] = [Q\; q_{n+1}] \begin{bmatrix} R & z \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$$ in rešujemo $Rx = z$

- Givensove rotacije



Ideja: $Q_1 A =$  $Q_2 Q_1 A =$  $\dots$

$\underbrace{Q_k Q_{k-1} \cdots Q_1}_{Q^T} A =$ 

Lema: če so Q_i, $i = 1, \dots, k$ ortogonalne je tudi $Q_k Q_{k-1} \cdots Q_1$.

Dokaz: indukcija na k:

$k=2$ $\quad Q_1, Q_2$ ortogonalni $\Rightarrow Q_2 Q_1$ ortogonalna

$$(Q_2Q_1)^T (Q_2Q_1) = Q_1^T (Q_2^T Q_2) Q_1 = I$$

$k>2$ sklepamo induktivno

Rotacija vektorja $x \in \mathbb{R}^2$ za kot φ je dana z $Q^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$

manjka

8. 4. 2. ura

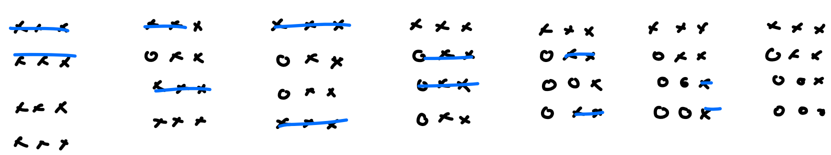
[illegible] →

$$Q_{ik} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & k & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & s & \\ & & & & 1 \cdots 1 & & \\ 0 & & & -s & & c & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$r = \sqrt{x_i^2 + x_k^2}$$
$$c = x_i / r$$
$$s = x_k / r$$

Matriko Q_{ik} imenujemo Givensova rotacija

Z ustreznim vrstnim redom rotacij



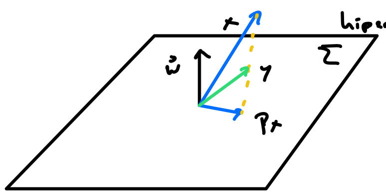
Število operacij $\approx 3mn^2 - n^3$

Če potrebujemo še Q: $6mn^2 - 3mn^2$

Householderjeva zrcaljenja

Ideja: Ali lahko vse elemente v trenutnem stolpcu (pod diagonalo) naenkrat postavimo na 0.

Householderjevo zrcaljenje



hiperravnina v $\mathbb{R}^m$ $\quad \dim \Sigma = m-1$

① $Px = x - \alpha w - \alpha w = x - 2\alpha w$

② $y \perp w \Rightarrow w^T y = 0 \Rightarrow w^T(x - \alpha w) = 0$

$$\alpha = \frac{1}{w^T w} w^T x, \quad w \neq 0$$

? Manjka 15. 4.

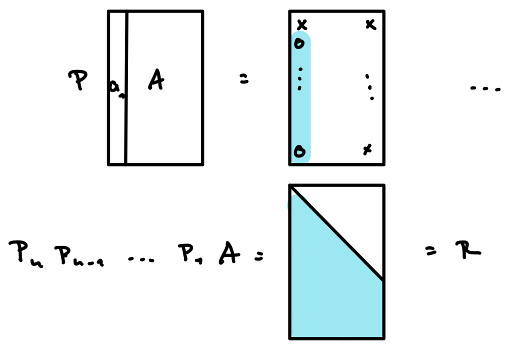
Lastnosti: P

① $P = P^T$

② $P^2 = I \rightarrow PP^T = I \Rightarrow P$ ortog.

$$P^2 = \left(I - \frac{2}{w^T w} w w^T\right)^2 = I - \frac{4}{w^T w} w w^T + \frac{4}{(w^T w)^2} w (w^T w) w^T = I$$

Kako P uporabiti za QR razcep



$$\Rightarrow A = QR = \underbrace{(P_1 P_2 \dots P_n)}_{Q} R$$

Recimo, da imamo $x \in \mathbb{R}^m$. Iščemo Householderjevo zrcaljenje P tako, da $Px = \pm k \hat{e}_1$

Če vzamemo $|k| = \|x\|_2$, $w = x \pm k e_1$

$$w = \begin{bmatrix} x_1 \pm \|x\|_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Ker je $P = I - \frac{2}{w^T w} w w^T$, želimo, da je $w^T w = \|w\|_2^2$ čim večja. Torej predznak izberemo kot $\operatorname{sgn}(x_1) = \begin{cases} 1; & x_1 \geq 0 \\ -1; & x_1 < 0 \end{cases}$

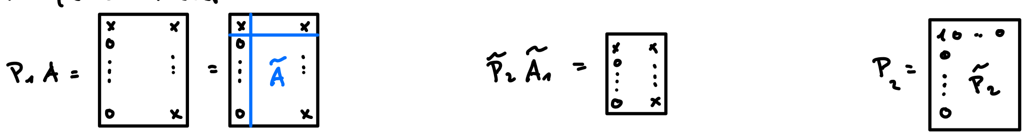
Primer: $x = (3, 0, 4)^T$ $\qquad Px = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\|x\|_2 = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \operatorname{sgn} x_1 = + \qquad w = \begin{bmatrix} 3+5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad w \cdot x = 40$

$$P = I - \frac{2}{w^T w} w w^T = I - \frac{2}{80} w w^T$$

$$Px = x - \frac{2}{80} w \cdot 40 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kako izvajamo razcep?



Splošno je $P_i = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_i \end{bmatrix}$

Primerjava metod:

Reševanje predoločenega sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, rang $A = n$

- normalni sistem: mn^2 (nestabilen)
- modificiran G-S: $2mn^2$ (bolj stabilen)
- Givens: $3mn^2 - n^3$
- Householder: $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$

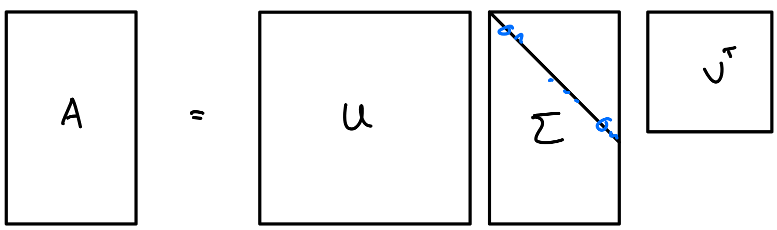
Singularni razcep (singular value decomposition SVD)

Izrek: za $\forall$ mat $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ obstaja singularni razcep

$$A = U \Sigma V^T$$

kjer sta $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni in $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kvazi diagonalna matrika z elementi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots \geq \sigma_n > 0$

stolpci U levi singularni vektorji
stolpci V desni singularni vektorji
$\sigma_1 \dots \sigma_n$ singularne vrednosti



Lema: Če je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, rang $A = n$, je minimum $\|Ax - b\|_2$ dosežen pri vektorju

$$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j^T b}{\sigma_j} v_j$$

Izrek: Naj bo $A = U\Sigma V^T$ sing. razcep $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \ge n$, in rang $A > k$ za nek $k < n$. Naj bo $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Potem je

$$\min_{\operatorname{rang} B = k} \|B - A\|_2 = \|A_k - A\|_2 = \sigma_{k+1}$$

in

$$\min_{\operatorname{rang} D = k} \|D - A\|_F = \|A_k - A\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i^2}$$

Primer uporabe

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ fotografija velikosti $m \times n$ z odtenki sive barve kot elementi. Zgornji izrek pove, kako lahko A aproksimiramo z matrikami ranga k.

Problem lastnih vrednosti

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; (x, λ), $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ je lastni par za A, če je

$$Ax = \lambda x$$

λ last. vred., x je last. vektor.
y je levi lastni vektor če je

$$y^H A = \lambda y^H$$

Dovolj je osredotočiti se na desne last. vek.

Lema Levi in desni last. vektorji mat A, ki pripadajo različnim last. vred. so ortogonalni.

Kako izračunati λ?

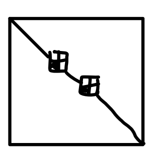
Iskanje ničel karakterističnega polinoma $\det(A - \lambda I)$ numerično ni dober pristop.
Uporabljamo različne stabilne algoritme za num. računanje last. vred. in vekt..
Izbor algoritma je odvisen od tega kaj želimo izračunati.

- Ali je mat. majhna in polna ali velika in razpršena?
- Ali je mat. simetrična?
- Ali potrebujemo vse last. vred.?
- Ali potrebujemo tudi lastne vekt.?

Izrek Za vsako mat. A $\exists$ unitarna mat U in zgornje trikotna mat. T, da je

$$U^H A U = T \quad \text{(Schurova forma)}$$

Izrek Za vsako realno mat A $\exists$ ortogonalna mat Q in kvazi zgornje trikotna mat. T, da je $Q^T A Q = T$

$T =$ 

Potenčna metoda

Algoritem:

- izberemo normiran vektor $z_0 \in \mathbb{R}^n$
- $y_{k+1} = A z_k$; $z_{k+1} = \frac{1}{\|y_{k+1}\|} y_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$

Izrek Naj bo λ_1 dominantna last. vred. A, torej $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Če ima z_0 neničelno komponento v smeri lastnega vektorja, ki pripada λ_1, potem zaporedje vektorjev z_k po smeri konvergira k last. vekt., ki pripada λ_1.

Ideja dokaza, ko ima A n lin. neodv. last. vekt. $v_1, v_2, \dots, v_n$:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad ; \quad \alpha_1 \neq 0$$

$$A z_0 = A \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k v_i \Rightarrow$$

$$A^k z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k v_i$$

$$\frac{A^k z_0}{\|A^k z_0\|} = \frac{\sum \alpha_i \lambda_i^k v_i}{|\lambda_1|^k \| \sum \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i \|} = \frac{\lambda_1^k \sum \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i}{|\lambda_1|^k \| \sum \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i \|} \xrightarrow{k \to \infty} \beta v_1$$

Metoda lahko pride do problema za primera:

- $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$; $\lambda_1 = -\lambda_2$
- $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$; $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

Koliko korakov iteracije? $\|z_{k+1} - z_k\| \leq \varepsilon$ (ni dobro)

Izkaže se da je dober kriterij Rayleighov koeficient

$$\rho(x, A) = \frac{x^H A x}{x^H x}$$

Če je (x, λ) lastni par je

$$\rho(x, A) = \frac{x^H A x}{x^H x} = \frac{x^H \lambda x}{x^H x} = \lambda$$

Zaustavitveni pogoj $\|A z_k - \rho_k z_k\| \leq \varepsilon$,
kjer je $\rho_k = \rho(z_k, A)$.

Hitrost konvergence je linearna.
Odvisna je od razmerja $|\lambda_2| / |\lambda_1|$.

Ko poiščemo dominantno last. vred. λ_1, lahko problem reduciramo na iskanje manjših last. vred.

Redukcija v primeru $A = A^T$ (Hotellingova redukcija):

Kaj želimo? Iščemo mat B, ki ima enake last. vred. kot A, razen λ_1, ki pa gre v 0.

$A: |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \dots \geq |\lambda_n|$
$B: |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$

$B = A - \lambda_1 x_1 x_1^T$, kjer je (x_1, λ_1) last. par, ki pripada A in $\|x_1\|_2 = 1$.

Naj bo λ_i $i = 2, 3, \dots, n$ last. vred. mat A in x_i pripadajoči last. vek.

$$B x_i = (A - \lambda_1 x_1 x_1^T) x_i = A x_i - \lambda x_1 x_1^T x_i = \lambda_i x_i - \lambda_1 x_i \cdot 0 = \lambda_i x_i \Rightarrow$$

(λ_i, x_i) last. par za B.

$$B x_1 = (A - \lambda_1 x_1 x_1^T) x_1 = A x_1 - \lambda_1 x_1 (x_1^T x_1) = \lambda_1 x_1 - \lambda_1 x_1 \cdot 1 = 0 \cdot x_1$$

$(0, x_1)$ last. par.

Householderjeva redukcija za splošno mat

- poišči ortogonalno mat Q:
  $Q x_1 = k e_1$ $\quad(x_1, \lambda_1)$ domin. last. par
  (Householder)
- mat $B = Q A Q^T$ ima obliko $\quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{bmatrix}$

lastne vred. mat C pa se ujemajo s preostalimi last. vred. B.

Splošna redukcija
Redukcija lastnih vrednosti za splošno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Lema Mat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $PAP^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularna, imata enake lastne vred.

Dokaz (x, λ) lastni par za $A \overset{?}{\Rightarrow} (y, \lambda)$ last. par za PAP^{-1}

$x \neq 0$, $Ax = \lambda x$, $Px = y \neq 0 \Rightarrow x = P^{-1} y$

$$PAP^{-1} y = PAx = P\lambda x = \lambda Px = \lambda y$$

Ideja splošne redukcije

Recimo, da smo s potenčno metodo izračunali naj večji lastni par (x, λ) matrike A.

$$A v_1 = \lambda_1 v_1$$

Poiščimo Householderjevo zrcaljenje P ker $P^2 = I \Rightarrow P^{-1} = P$

$$P v_1 = k e_1 \Rightarrow P^{-1} e_1 = \frac{1}{k} v_1 = P e_1$$

Vemo: $P = I - \frac{2}{w^T w} w w^T$; $w = v_1 \pm \|v_1\|_2 e_1$

Uporabimo lemo.

Mat A in $PAP^{-1} = PAP$ imata enake lastne vrednosti

$(PAP)e_1 = PA(Pe_1) = (PA)(\frac{1}{k} v_1) = \frac{1}{k} P(Av_1) = \frac{1}{k} P(\lambda_1 v_1) = \frac{\lambda_1}{k} P v_1 =$

$= \frac{\lambda_1}{k} k e_1 = [\lambda_1, 0, 0, \ldots, 0]^T \Rightarrow$

$$PAP = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b^T \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] = \tilde{A}$$

$\tilde{A}$ in A imata enake lastne vrednosti

$\det(\tilde{A} - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)\det(A_1 - \lambda I) \Rightarrow$ lastne vred. A_1 so ravno $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Iščemo lastne vrednosti mat $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

Inverzna iteracija

Želimo poiskati najmanjšo last. vred. (po abs.) in pripadajoči last. vektor

Problem je enak iskanju največje last. vred. za inverzno matriko A^{-1} $\quad \left(\lambda_{A^{-1}} = \frac{1}{\lambda_A}\right)$

Izvajamo potenčno metodo na mat A^{-1}.

Paziti moramo:

$$y_{k+1} = A^{-1} z_k \qquad z_{k+1} = \frac{1}{\|y_{k+1}\|} y_{k+1}$$

Rešujemo sistem

$$A y_{k+1} = z_k$$

$\Rightarrow$ LU razcep s pivotiranjem izračunamo le enkrat.

Ko izračunamo lastni vektor $\Rightarrow$ uporabimo Rayleighov kvocient za lastno vrednost.

Kaj pa obratno? Imamo približek σ za last. vred. λ mat. A, kako izračunati pripadajoči last. vekt za λ.

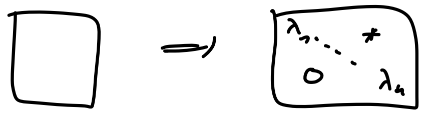
Ideja: izvajamo inverzno iteracijo na mat $A - \sigma I$.

QR iteracija

Osnovna varianta:

$$A_0 = A$$
$$k = 0, 1, \ldots$$
$$A_k = Q_k R_k$$
$$A_{k+1} = R_k Q_k$$

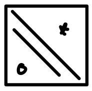
Lema: Če ima mat A paroma različne absolutne vrednosti, potem zap $(A_k)_{k\geq 0}$ konv. proti Schurovi formi:



Izboljšave:

- Mat A reduciramo v zgornjo Hessenbergovo mat. (podobnostno):

$PAP^T =$



Velja: Če je A zg. Hessenbergova se struktura ohranja med QR iteracij.

- Hitrost konvergence pospešimo s premiki

Metode za simetrične matrike

PAP^T podobnostna transformacija ($PP^T = I$) t.d. je PAP^T zgornja Hessen., potem je za sim. mat. PAP^T celo tridiagonalna.
Privzamemo da je A tridiagonalna

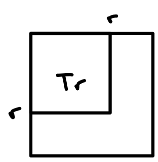
Sturmovo zaporedje

Naj bo

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

ireducibilna $b_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots n-1$

Naj bo T_r vodilna $r \times r$ podmatrika mat T

$T =$ 

$$f_r(\lambda) = \det(T_r - \lambda I)$$

Velja $f_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1} - \lambda) f_r(\lambda) - b_r^2 f_{r-1}(\lambda)$; $f_0(\lambda) = 1$, $f_1(\lambda) = a_1 - \lambda$

Zaporedje $\{f_r\}_{r=0}^{n}$ je zap. polinomov in ničle f_n so lastne vrednosti mat T.

Izrek: Polinomi f_r, $r = 0, 1, \dots, n$ tvorijo t.i. Sturmovo zap., kar pomeni da je

① $f_0(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda$
② Če je $f_r(\lambda_0) = 0$ za $r < n$, je $f_{r-1}(\lambda_0) f_{r+1}(\lambda_0) < 0$
③ Če je $f_n(\lambda_0) = 0$, potem je $f_{n-1}(\lambda_0) f_n'(\lambda_0) < 0$

Izberimo λ_0 in z $u(\lambda_0)$ označimo število ujemanj predznakov v zaporedju števil $f_r(\lambda_0)$, $r = 0, 1, \dots, n$

Vsako notranjo ničlo štejemo za eno ujemanje, ničlo na koncu pa ne

Primeri

f_0

λ_0

?

λ_0 + 0 + + −

$u(\lambda_0) = 2$

λ_0 − − − + 0

$u(\lambda_0) = 2$

Lema: št. ujemanj $u(\lambda_0)$ je enako št. lastnih vred. mat. T, ki so strogo večje od λ_0

Ideja uporabe:

natanko ena last. vrednost

$\lambda_0^{(2)} \to u(\lambda_0^{(2)}) = 4$

$\lambda_0^{(1)} \to u(\lambda_0^{(1)}) = 5$

Primer: Koliko lastnih vred. mat $T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ je manjših od -1?

$\lambda_0 = -1$

$a_r = -2 \qquad b_r = 1$

$f_0(-1) = 1$

$f_1(-1) = a_1 - (-1) = -2 + 1 = -1$

$f_2(-1) = (-2-(-1))(-1) - 1 \cdot 1 = 0$

$f_3(-1) = (-2+1)(0) - 1(-1) = 1$

$f_4(-1) = (-2+1)\, 1 - 1 \cdot 0 = -1$

1 −1 0 1 −1

$u(-1) = 1$

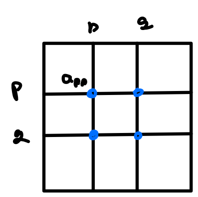
$\Rightarrow$ ena lastna vrednost je večja od -1, tri last. vred. so ≤ -1

Jacobijeva iteracija za simetrične matrike

- matriko ne reduciramo na tridiagonalno
- z množenji z Givensovimi rotacijami z leve in z desne poskušamo matriko spremeniti v diagonalno.
- če želimo "uničiti" element (p,q) v A, poiščemo Givensovo rotacijo

$$R = \begin{bmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{bmatrix},$$

da je $R^T \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$



Iz kode se, da je

$$c = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} \qquad s = ct$$

kjer je $t = \dfrac{\mathrm{sign}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1+\tau^2}}$ $\qquad \tau = \dfrac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{pq}}$

Def: za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ def off set $\quad \mathrm{off}(A) = \sqrt{\sum_{\substack{j,k=1,n \\ j\neq k}}^{n} |a_{jk}|^2}$

Lem: če je mat A' dobljena iz A z enim korakom Jacobijeve metode na elementu (p,q) je

$$\mathrm{off}(A')^2 = \mathrm{off}(A)^2 - 2a_{pq}^2$$

Variante Jacobijeve iteracije
- klasična varianta: uničujemo po abs. vrednosti največji izvendiag. element.
- ciklična varianta: vedno v enakem vrstnem redu zaporedoma vse izvendiag.
- pragovna varianta: uničujemo v enakem vrstnem redu ampak samo elemente ki so po abs. vred. nad predpisano mejo (prag).

Polinomska interpolacija

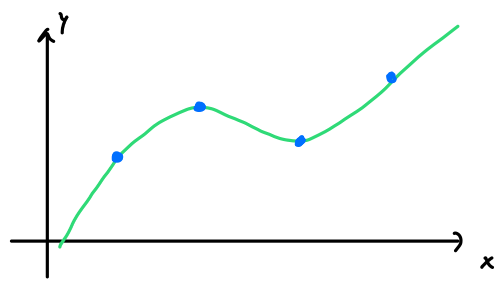
Osnovni problem interpolacije:

podane so vrednosti f_i, $i=0,1,\dots,n$ v paroma različnih točkah x_i $i=0,1,\dots,n$
Iščemo polinom p najnižje stopnje za katerega velja

$$p(x_i) = f_i \quad \forall i$$

Takemu polinomu rečemo interpolacijski polinom

Lema: za podatke (x_i, f_i) $i=0,1,\dots,n$, kjer so x_i paroma različne točke obstaja natanko en interpolacijski polinom p_n stopnje $\leq n$.



- Interpolacijski polinom lahko uporabimo za izračun vrednosti pri $x \neq x_i$
- Namesto polinoma lahko uporabimo katerokoli drugo funkcijo
- Če je n velik potem imamo numerične težave
- Alternativa je uporaba polinomov nizkih stopenj, ki jih lepimo → zlepki (splines)

Klasična oblika interpolacijskega polinoma

$$p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f_0$$
$$\vdots$$
$$a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f_n$$

$$V a = f$$

$$V = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^n & & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Sistem ima natanko eno rešitev $\Leftrightarrow \det V \neq 0$

ker $x_i \neq x_j$

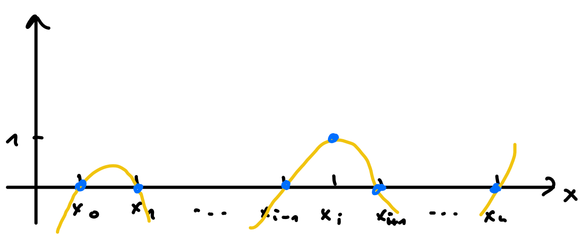
Velja: $\det V = \prod_{i<j} (x_i - x_j) \neq 0$

Časovna zahtevnost $O(n^3)$

Lagrangeova oblika

Izberimo bazo Lagrangeovih polinomov

$$l_{n,i}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \qquad i = 0, 1, \dots, n$$



Iščemo polinom $l_{n,i}$ za katere je $l_{n,i}(x_j) = \delta_{ij}$

$$\Rightarrow l_{n,i}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

$$l_{n,i}(x) = C \cdot \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x - x_k)$$

Torej $l_{n,i}(x_i) = 1 = C \prod (x_i - x_k)$

$$C = \frac{1}{\prod (x_i - x_k)}$$

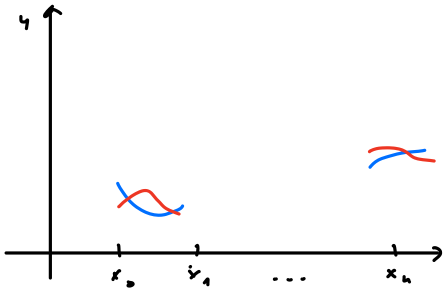
$$\Rightarrow l_{n,i}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Definirajmo

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, l_{n,j}(x) = f_i \, l_{n,i}(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Časovna zahtevnost $O(n^2)$

Napaka pri interpolaciji



f dejanska funkcija

p intr. polinom

$|f(x) - p_n(x)| = ?$

Lema: Če je f $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva in je p_n interpolacijski polinom, ki se z f ujema pri paroma različnih točkah $x_0, x_1, \dots x_n$, $x_i \in (a,b)$. Potem obstaja $\xi \in (a,b)$ da je

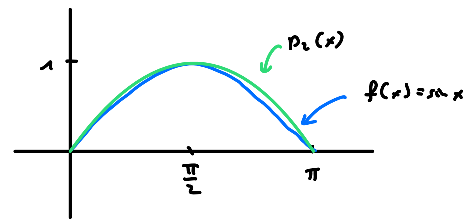
$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x)$$

$$\omega(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

Konvergenca $\lim_{n\to\infty} |f(x) - p_n(x)| = 0$ ni zagotovljena !

Rungejev protiprimer

Primer: $f(x) = \sin x$ $\quad x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{\pi}{2} \quad x_2 = \pi$



Kako lahko ocenimo napako

$|f(x) - p_2(x)| \qquad x \in [0,\pi]$

Lema: $|f(x) - p_2(x)| = \left|\frac{f^{3}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right|$

$$\Rightarrow |f(x) - p_2(x)| \le \max_{0\le\xi\le\pi} \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{6} \max_{0\le x\le\pi} x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi) \le \frac{1}{6}$$

$g(x) = x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)$

$g'(x) = \left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi) + x\left((x-\pi) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) = x^2 - \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{2} + 2x^2 - \frac{3\pi}{2}x = 3x^2 - 3\pi x + \frac{\pi^2}{2}$

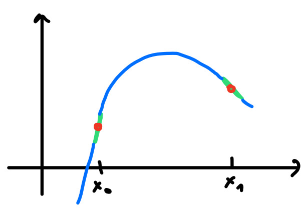
$$\tilde{x}_{1,2} = \frac{3\pi \pm \sqrt{9\pi^2 - 6\pi^2}}{6} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

$|g(\tilde{x}_1)| = |g(\tilde{x}_2)| \doteq 1,49$

$|f(x) - p_2(x)| \le \frac{1}{6} \cdot 1,49 \doteq \frac{1}{4}$

Newtonova oblika

Kaj pa če želimo poleg vrednosti interpolirati tudi odvode?



Def. Deljene diference ?

f na točkah $x_0, \dots, x_k$ je vodilni koeficient polinoma st. $\le k$, ki se z f ujema v $x_0, x_1, \dots x_k$. Označimo ga $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$. Če se točke ponavljajo $x_0 = x_1 = \dots = x_k$ potem definiramo $[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Ideja $x_0, x_0+h \quad h \ll 1$

$$[x_0, x_0+h]f = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} \xrightarrow{h \to 0} f'(x_0)$$

Newtonova oblika interp. polinoma

$$p_n(x) = [x_0]f + (x-x_0)[x_0, x_1]f + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})[x_0, \dots, x_n]f$$

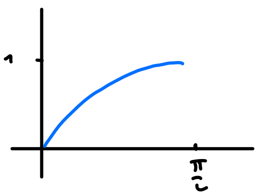
Če se točke ponavljajo, potem pri interpolaciji tudi ustrezne vrednosti višjih odvodov v x_i.

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]f = \begin{cases} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & ; \ x_0 = x_1 = \dots = x_k \\ \dfrac{[x_1, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0} & \end{cases}$$

Opomba $[x_0]f = f(x_0)$

Napaka $f(x) - p_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$

Primer: $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$



x_i	$[\cdot]$	$[\cdot\ \cdot]$	$[\cdot\cdot\cdot]$
0	0		
		1	
0	1		$\dfrac{\frac{2}{\pi} - 1}{\frac{\pi}{2} - 0}$
		$\frac{1-0}{\pi/2 - 0} = \frac{2}{\pi}$	
$\frac{\pi}{2}$	1		

$$p_2(x) = [x_0]f + (x-x_0)[x_0, x_1]f + (x-x_0)(x-x_1)[x_0, x_1, x_2]f$$

$$= 0 + x \cdot 1 + x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\frac{2}{\pi^2}(2-\pi)$$

Doseže max pri $x = \frac{\pi}{3}$
$y = \frac{\pi^3}{54}$

Napaka
$$\max_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} |f(x) - p_2(x)| \le \max \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{6} \max |x^2(x - \tfrac{\pi}{2})| \le \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{54}$$

Numerično računanje odvodov

Primer $f(x) = e^x$ $\quad x_0 = 0$ $\quad$ Iščemo $f'(x_0)$ numerično

Ideja $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ $\quad$ nestabilno

Kako numerično računati odvod?

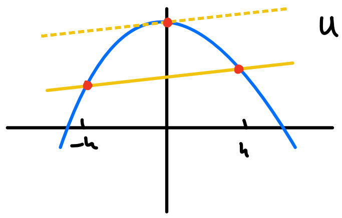
Izberemo točk $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots (x_k, f_k)$ in uredimo lin. kombinacijo

$$f'(x_j) \doteq \sum_{i=0}^{k} \alpha_i\, f(x_i)$$

① Vzamemo interpol. polinom st $\leq k$ in ga odvajamo pri $x = x_j$

② Koeficiente α_i določimo tako, da so formule točne za polinome do čim višje stopnje.

Primer: $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$ $\qquad f'(0) = ?$



Uporabimo točko 2

$$f'(0) \doteq \alpha_0 f(-h) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(h)$$

① $f(x) = 1$: $\quad 0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$

② $f(x) = x$: $\quad 1 = \alpha_0(-h) + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 h$

③ $f(x) = x^2$: $\quad 0 = \alpha_0 h^2 + \alpha_1 \cdot 0^2 + \alpha_2 h^2$

$\Downarrow$ rešimo sistem

$\alpha_0 = -\frac{1}{2h} \qquad \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2h}$

$$f'(0) \approx \frac{1}{2h}\left(f(h) - f(-h)\right)$$

Numerično reševanje navadnih dif. en.

Rešujemo : $\underbrace{y'(x) = f(x, y(x)) \qquad y(a) = y_a}_{\text{začetni problem}}$

$$y' = f(x, y) \qquad y(a) = y_a$$

Eksistenca rešitve:

Če je f zvezna na prvo spremenljivko in vsaj Lip. zvezna na drugo potem (vsaj lokalno) obstaja analitična rešitev zgornjega problema.

Numerična rešitev

Izberemo neko delilnih točk

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_N = b$

$h_i = x_{i+1} - x_i$ (po navadi $h_i = h$)

Iščemo $y_i \approx y(x_i)$

Metode so lahko eksplicitne (približek y_i računamo direktno po formuli) ali implicitne (y_i dobimo kot rešitev nelinearne enačbe (oz. sistema)).

Obe tipe metod delimo na enočlenske (enokoračne) ali veččlenske (večkoračne)

Natančnost:

Lokalna napaka je razlika

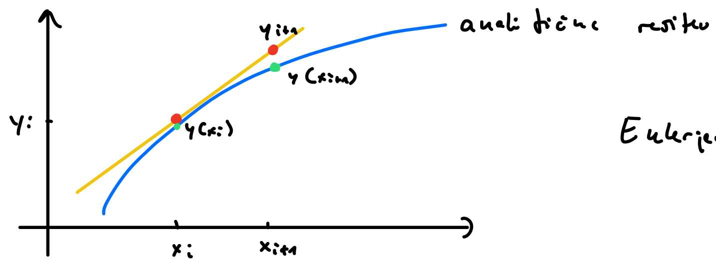
$$y_{i+1} - z(x_{i+1}) \quad \text{kjer je } z \text{ rešitev } \quad z' = f(x, z) \; ; \; z(x_i) = y(x_i)$$

Lokalna napaka je reda $p \in \mathbb{N}$, če je

$$y_{i+1} - y(x_{i+1}) = Ch^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

Enočlenske eksplicitne metode

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \qquad i = 0, 1, \dots$$



Eulerjeva metoda

$$f(x_i, y_i) \doteq y'(x_i) = f(x_i, y_i(x_i))$$

Boljše (bolj natančne) so metode Runge-Kutta

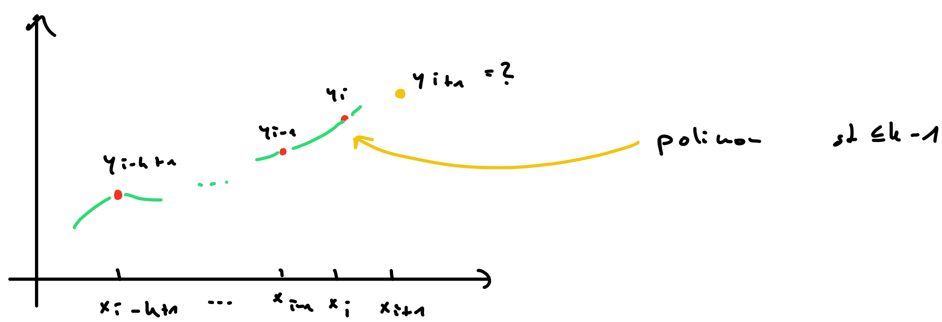
$$k_1 = h\, f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = h\, f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_3}{2}\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Eksplicitne veččlenske metode

Pri izračunu y_{i+1} upoštevamo poleg y_i še približke $y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$ (k-členska metoda)

Na začetku za konstrukcijo $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ uporabimo neko eksplicitno enočlensko metodo primerljivega reda natančnosti, kot veččlenska



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx$$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{k-1}(x)\,dx$$

aproksimiramo z interpolacijskim polinomom

$$p_{k-1}(x_j) = f(x_j, y_j) \qquad j = i, i-1, \dots, i-k+1$$

Primer : $k=2$

$p_1(x_i) = f_i \qquad h = x_i - x_{i-1} \qquad$ če pišemo $\quad f(x_i, y_i) = f_i$

$p_1(x_{i-1}) = f_{i-1}$

deljene diference

$$p_1(x) = f_{i-1} + (x - x_{i-1})\,[x_{i-1}, x_i]\,f(\cdot, y(\cdot))$$

$$= f_{i-1} + (x - x_{i-1}) \frac{f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})}{\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{h}}$$

$$p_1(x) = f_{i-1} + (x - x_{i-1}) \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

Metoda

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}(x - x_{i-1})\,dx$$

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \frac{(x - x_{i-1})^2}{2}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= y_i + hf_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}\left(\frac{4h^2}{2} - \frac{h^2}{2}\right)$$

$$= y_i + hf_{i-1} + (f_i - f_{i-1})\frac{3}{2}h$$

$$= y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

Adams-Bashforthove metode

Implicitne metode (enočlenske)

Splošna oblika : $\quad y_{i+1} = \phi(h, x_i, y_i, y_{i+1}, f)$

Pomeradi : $\quad y_{i+1} = y_i + h\phi_1(x_i, y_i, y_{i+1}, f)$

Rešitev moramo enačbo $\quad z = \underbrace{y_i + h\,\phi(x_i, y_i, z, f)}_{g(z)}$

Rešimo z navadno iteracijo $\quad z^{(j+1)} = g(z^{(j)})\ ; \quad j = 0, 1, \dots$

$z^{(0)} = y_i \quad$ (ali pa kak y_{i+1} z eksplicitno metodo)

$$|g'(z)| = h\,\Big|\underbrace{\frac{\partial \phi_1}{\partial z}(x_i, y_i, z, f)}_{\le M}\Big| < 1 \qquad \text{da konvergira}$$

$$h \le \frac{1}{M}$$

Primer: trapezna metoda

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

Reševanje sistemov dif. en. 1. reda

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_d)$$
$$y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_d)$$
$$\vdots$$
$$y_d' = f_d(x, y_1, \dots, y_d)$$

Začetni pogoji: $y_1(a) = y_{1a}$ ... $y_d(a) = y_{da}$

Zapis v vektorski obliki

$$Y = (y_1, \dots, y_d)^T \qquad F = (f_1, \dots, f_d)^T$$

$$Y' = F(x, Y) \quad , \quad Y(a) = Y_a$$

Eulerjeva metoda:

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(x_n, Y_n); \qquad Y_0 = Y_a$$

Primer

$$y_1' = y_2$$
$$y_2 = -y_1$$
$$y_1(0) = 0 \qquad y_2(0) = 1 \qquad x \in [0, 2\pi]$$

Analitični rešitve $y_1(x) = \sin x$ $\quad y_2(x) = \cos x$

Začetni problemi višjega reda

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$$
$$y(a) = y_a \qquad y'(a) = y_a' \quad \dots \quad y^{(k-1)}(a) = y_a^{k-1}$$

Uvedemo nove spremenljivke

$$y_1 = y \qquad y_2 = y' \quad \dots \quad y_k = y^{(k-1)}$$

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$\vdots$$
$$y_{k-1}' = y_k$$
$$y_k = f$$

$$y_1(a) = y_a \qquad y_2(a) = y_a' \quad \dots \quad y_k(a) = y_a^{(k-1)}$$

Primer $\quad y'' = -y \qquad y(0) = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad y'(0) = 1$

$$y_1 = y \qquad y_2 = y'$$

$$y_1' = y_2 \qquad y_2' = -y_1$$

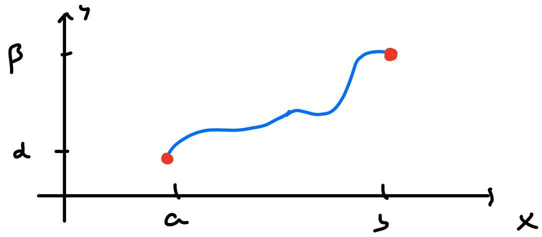
Primer $\quad y'' = xy \quad y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_0'$

$$y_1 = y \qquad y_2 = y' = y_1'$$

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = x y_1$$

Robni problemi drugega reda

$$y'' = f(x, y, y') \qquad y(a) = \alpha \qquad y(b) = \beta$$



- Prevedemo na sistem 1. reda

$y_1 = y \qquad y_2 = y'$

$\Rightarrow$

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = f(x, y_1, y_2)$$
$$y_1(a) = \alpha \qquad y_1(b) = \beta$$

Linearni robni problem drugega reda

$$-y'' + p y' + q y = r \qquad (*)$$

kjer so p, q, r funkcije x (neodv. spr.)

Če sta $y^{(1)}$ in $y^{(2)}$ rešitvi $(*)$ je tudi $y = \lambda y^{(1)} + (1-\lambda) y^{(2)}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, rešitev

Res:

$$-y'' + py' + qy = -(\lambda y^{(1)} + (1-\lambda) y^{(2)})'' + p(\lambda y^{(1)} + (1-\lambda) y^{(2)})' + q(\lambda y^{(1)} + (1-\lambda) y^{(2)})$$
$$= -\lambda y^{(1)''} + \lambda p y^{(1)'} + \lambda q y^{(1)}$$
$$-(1-\lambda) y^{(2)''} + (1-\lambda) p y^{(2)'} + (1-\lambda) q y^{(2)} = \lambda r + r - \lambda r = r$$

Kako lahko zadostimo $y(b) = \beta$

$$\lambda = \frac{\beta - y^{(2)}(b)}{y^{(1)}b - y^{(2)}b}$$

Ideja metode

Rešimo začetni problem

$$-y'' + py' + qy = r \qquad y(a) = \alpha$$
$$y'(a) = \delta_i \qquad \text{za } i = 1,2 \qquad \delta_1 \neq \delta_2$$

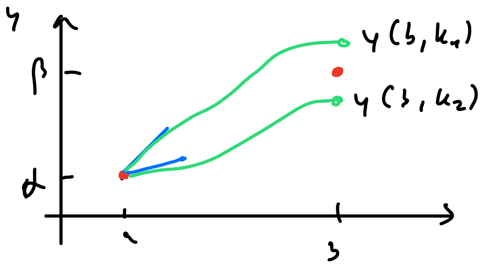
- Dobimo rešitve $y^{(1)}$ in $y^{(2)}$
- Določimo λ $\quad \lambda = \dfrac{\beta - y^{(2)}(b)}{y^{(1)}b - y^{(2)}b}$
- Konstruiramo rešitev

$$y = \lambda y^{(1)} + (1-\lambda) y^{(2)}$$

Primer $y''+y=0$ $y(0)=0$ $y(\frac{\pi}{2})=1$ Analitična rešitev $y=\sin x$

Strelske metode

Kaj če je dif. en. tanj funk f, nelinearna? Npr $y''=\sin(xy)+\cos(y')$



$y(a)=\alpha$ ✓

$y'(a)=$?

Ideja:

- izberemo $y'(a)=k_1$
  $\Rightarrow$ dobimo rešitev $y(x,k_1)$
- izberemo $y'(a)=k_2$
  $\Rightarrow$ dobimo rešitev $y(x,k_2)$

$$F(k)=y(b,k)-\beta$$

Iščemo ničlo F

- bisekcija: DA, če je $F(k_1)\cdot F(k_2)<0$
- navadna iteracija $F(k)=0$
  $\Rightarrow k=g(k)$??
- Newton: $F'(k)=$??
- Sekantna metoda ✓

$$k_{r+2}=k_{r+1}-\frac{F(k_{r+1})(k_{r+1}-k_r)}{F(k_{r+1})-F(k_r)}$$