Lorentzova transformacija

- radi bi relativistično transformacijo, ko bi pri $v \approx c$ nadomestila Gallilejevo
- radi bi povezali dogajanje v sistemu $S = \{t, x, y, z\}$ z dogajanjem v $S' = \{t', x', y', z'\}$
- gibanje je vzdolž x sistem poravnana ob $t = t' = 0$
- radi bi linearne transformacije

Poskusimo $x' = \gamma(x - vt)$ kjer $\gamma = \gamma(v) \neq \gamma(x), \gamma(t)$

$x = \gamma(x' + vt')$ biti mora $\lim_{v \to 0} \gamma(v) = 1$

$$x' = \gamma(\gamma(x' + vt') - vt) = \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' - \gamma vt$$

Izrazimo t: $t = \gamma t' + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v} x' = \gamma\left(t' + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 v} x'\right)$

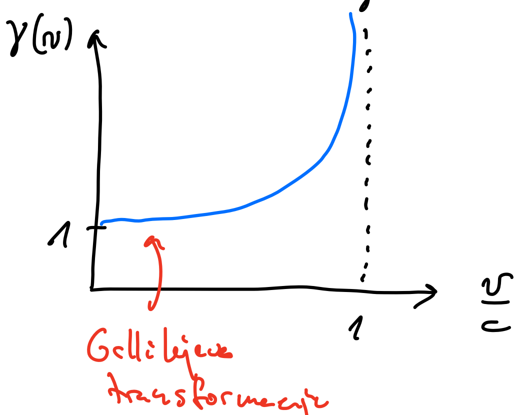
Lor. transf. za čas. koord. preplete čas in krajevno koord. "drugega" sistema

Kako dobimo γ?
- oba opazovalca vidita: $x = ct$, $x' = ct'$
- upoštevamo: $c = konst$

$$c = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma\left(t' + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 v} x'\right)} = \frac{c + v}{1 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} \Rightarrow$$

$$c + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{c^2}{v} = c + v \Rightarrow \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = v/c}$$

Lorentzov relativ. faktor



Lor. transformacija	Obratna transformacija
$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right)$	$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right)$
$x' = \gamma(x - vt)$	$x = \gamma(x' + vt)$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$

Prepričajmo se, da LT delujejo:

Dilatacija časa:

- pojav, ki se v S' zgodi na istem mestu, naj bo to $x'=0$, začetek pojava ob času nič, konec ob t'.

$$A = (t'_a, x'_a) = (0,0) \qquad B = (t'_b, x'_b) = (t', 0)$$

- V koord. sistemu S, ki se giblje s hitrostjo v glede na S', velja

$$x_A = \gamma(\underset{=0}{x'_A} + v\underset{=0}{t'_A}) = 0$$
$$x_B = \gamma(\underset{=0}{x'_B} + v\underset{=t'}{t'_B}) = \gamma v t'$$
$$t_A = \gamma(\underset{=0}{t'_A} + v/c^2\, \underset{=0}{x'_A}) = 0$$
$$t_B = \gamma(\underset{=t'}{t'_B} + v/c^2\, \underset{=0}{x'_B}) = \gamma t'$$

V sistemu S' traja dogodek čas t' v sistemu S pa traja $\Delta t = t_B - t_A = \gamma t'$
oz.
$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Kontrakcija dolžine

- v S izberemo dogodka, ki se zgodi ob istem času, $t_A = t_B = 0$ a pri različnih legah, $x_A = 0$, $x_B = L$
- v S'

$$x'_A = \gamma(x_A - v t_A) = 0$$
$$x'_B = \gamma(\underset{=L}{x_B} - v t_B) = \gamma L$$
$$t'_A = \gamma(t_A - \frac{v}{c^2} x_A) = 0$$
$$t'_B = \gamma(t_B - \frac{v}{c^2} \underset{=L}{x_B}) = -\gamma \frac{v x_B}{c^2}$$
$$L' = x'_B - x'_A = \gamma L$$

! Kaj je šlo narobe $(\gamma > 1)$

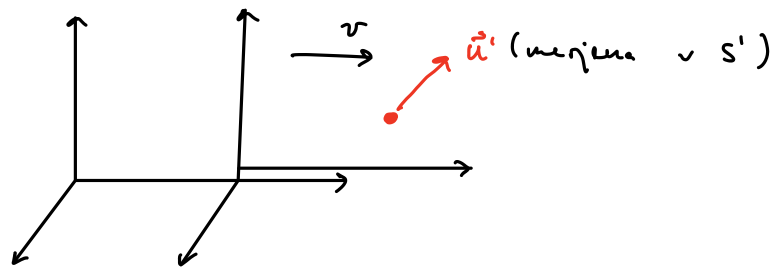
$\Rightarrow$ če hočemo meriti dolžino moramo oba krajišči meriti ob istem času

Torej zahtevamo: $t'_B = \gamma(t_B - \frac{v}{c^2} x_B) \equiv 0 \rightarrow t_B = \frac{v x_B}{c^2} = \frac{Lv}{c^2}$

In to damo v enačbo za koord. x:

$$x'_B = \gamma(x_B - v t_B) = \gamma(L - v\frac{vL}{c^2}) = \gamma L(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{L}{\gamma}$$

Relativistična transformacija hitrosti



$$dx' = \gamma(dx - v\,dt)$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}$$

$$\boxed{u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \qquad u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)} \qquad u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}}$$

Obratna L.T.

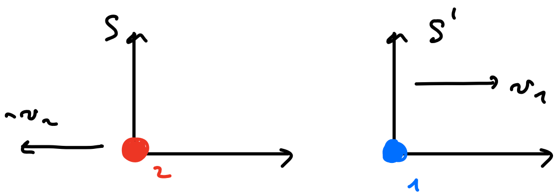
$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right)} \qquad u_z = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right)}$$

Preverimo limite: $\underbrace{\|\vec{u}\|,\ |v| \ll c}_{\gamma \to 1} \implies u_x = \frac{u_x' + v}{1(1+0)}$ ... ✓

$u_x \to c \implies u_x' \to \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c$ ✓ V skladu s postulatom da je c konst. v vseh inerc. sistemih

Nikjer nismo zahtevali, da si bilo gibanje delca v S' enakomerno. (zapisali smo L.T. v diferencialni obliki $\Rightarrow$ dobili smo trenutno hitrost)

Zgled: relativna hitrost dveh delcev



$$u_x(2) = -v_2$$

$$u_x'(2) = \frac{u_x(2) - v_1}{1 - \frac{u_x(2)\, v_1}{c^2}} = -\frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}}$$

za delec v S'(1) se delec 2 oddaljuje z $-(v_2 + v_1)$

Splošno

$$\boxed{\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}}$$

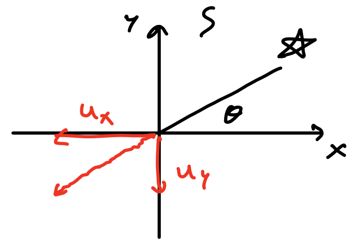
Pazi predznake β_1, β_2

Zgled: relativistični popravek k Bradleyevemu izrazu za zvezdno aberacijo

$S \equiv$ Sonce (ravnina ekliptike)
$S' \equiv$ Zemlja
zvezdo vidimo po kotom θ, merjen v S

$$u_x = -c\cos\theta$$
$$u_y = -c\sin\theta$$
$$c^2 = u_x^2 + u_y^2$$
$$\tan\theta = u_y / u_x$$

v ... hitrost Zemlje



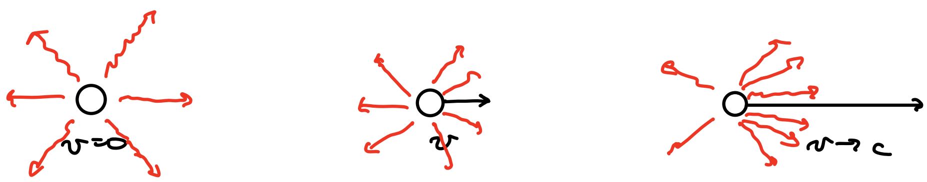
V sistemu S'

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} = \frac{-c\cos\theta - v}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}$$

$$u_y' = \frac{-c\sin\theta}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right)}$$

$$\tan\theta' = \frac{u_y'}{u_x'} = \frac{c\sin\theta\,(1+\beta\cos\theta)}{\gamma(1+\beta\cos\theta)\,(c\cos\theta + v)} = \underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{\text{Relativistični popravek}} \underbrace{\frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{v}{c}}}_{\text{Bradley (1725)}}$$

Kasneje: iz istih razlogov moramo to upoštevati pri sevanju delcev (atomov, el. delcev in tudi makroskopskih teles)



Transformacija pospeškov

$$a_x' = \frac{du_x'}{dt'} \qquad u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$du_x' = \frac{(du_x - dv)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + (u_x - v)\left(\frac{du_x v + u_x dv}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

$$a_x' = \frac{\left(\frac{du_x}{dt} - \cancelto{0}{\frac{dv}{dt}}\right)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) + \frac{u_x - v}{c^2}\left(v\frac{du_x}{dt} + u_x \cancelto{0}{\frac{dv}{dt}}\right)}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}$$

$$a_x' = \frac{a_x\left(1 - \cancel{\frac{u_x v}{c^2}} + \cancel{\frac{u_x v}{c^2}} - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3} \qquad a_y' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}\left(\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)a_y + \frac{v}{c^2}u_y a_x\right)$$

$$a_z' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^3}\left(\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)a_z + \frac{v}{c^2}u_z a_x\right)$$

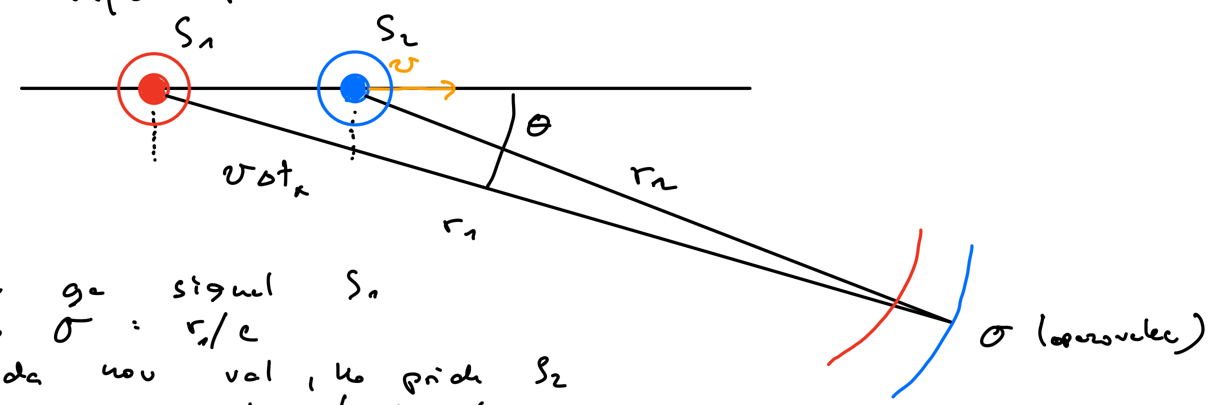
Bistveno sporočilo: če je $\vec{a} = $ konst. v enem sistemu, je nujno $\vec{a}' \neq$ konst v drugem
(v formule za transf. pospeš. so se prikradle hitrosti, ki pa se spreminjajo s časom.)

Relativistični Dopplerjev pojav

V mehanskem sredstvu: $\nu = \nu_0 (1 \pm v/c)$, če se giblje opazovalec glede na izvir
$\nu = \nu_0 / (1 \mp v/c)$, če se giblje izvor glede na op.

Relativistično: važna je samo relativna hitrost med izvorom in detektorjem

Zgled: mirujoč opazovalec



- čas, ki ga signal S_1 rabi do σ: r_1/c
- Izvir odda nov val, ko pride S_2, do σ pride po $t = \Delta t_x + r_2/c$
- čas razlika med sprejemom signalov v σ $= \Delta t_\sigma = \Delta t_x + r_2/c - r_1/c$
- Če je izvir dovolj daleč od opazovalca:

$r_2^2 = r_1^2 + \overline{S_1S_2}^2 - 2r_1\overline{S_1S_2}\cos\theta$ postane $r_2 \approx r_1 - \overline{S_1S_2}\cos\theta$

$r_2 - r_1 \approx -\overline{S_1S_2}\cos\theta$ in

$$\Delta t_\sigma = \Delta t_x - \frac{\overline{S_1S_2}}{c}\cos\theta = \Delta t_x - \frac{v\Delta t_x}{c}\cos\theta = \Delta t_x\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

Kaj se zgodi s frekvencami? Zanima nas zveza med Δt_x in ν_s (frekvenca izvira)

$\frac{1}{\nu_s}$ = čas med valovoma, kot ga "izmeri" sam izvir in to je lastni čas

Δt_x = čas med istima dogodkoma (emisija 1. in 2. vala), merjen v sistemu σ

$$\frac{1}{\nu_s} = \Delta t_x \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\rightarrow \Delta t_\sigma = \Delta t_x \left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\nu_s\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\nu_\sigma}$$

oz. $$\boxed{\nu_\sigma = \nu_s \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}}$$

v .. relativna hitrost

Na kolokviju

Limitna primera:

$\theta = 0^\circ$ $$\nu_\sigma = \nu_s \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

$\theta = 90^\circ$ $$\nu_\sigma = \nu_s \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Transverzalni Dopplerjev pojav (sprememba frekvence, tudi ko se izvir giblje $\perp$ na zveznico med njim in σ)

$\Rightarrow$ neposredna posledica dilatacije časa

Prostor - čas

LT prepišimo malo lepše

$$ct' = \gamma\,(ct - \beta x)$$
$$x' = \gamma\,(x - \beta ct)$$

Produkt ct bi radi videli kot četrto (ali prvo ali ničto) koordinato poleg (x, y, z). Vpeljemo 4-razsežni prostor, točke v tem prostoru so določene s četvericami $\{ct, x, y, z\}$. Uredimo jih v

$$\underline{r} = (ct,\ x,\ y,\ z)^T \qquad \text{(four-vector)}$$

$\underline{r}$ oznaka za četverec (drugod $\mathbf{r}$, r^μ, ...)

alternativni zapis $\underline{r} = (ct, \vec{r})$

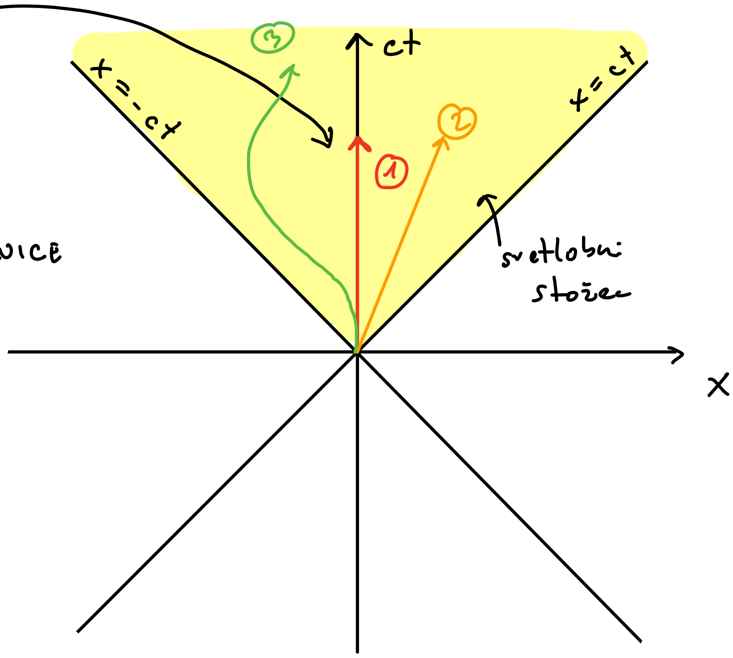
$\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

LT lahko napišemo v vektorski obliki

$$\boxed{\underline{r}' = \underline{\underline{L}}\,\underline{r} \qquad \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Dogodke definiramo tako, da določimo njihovo lego (točko v 3D) in čas, ko se zgodi. Možen način prikaza: na preseku svetlobnega stožca (na papirju gledamo samo ct, x)

tole je en primer gibanja v 4D prostoru (Minkowskega) vzdolž SVETOVNICE



① delec, ki miruje pri $x=0$

② delec se giblje enakomerno

③ delec z bolj zapleteno kinematiko

V kateri koli točki na svetovnici je

$$\text{hitrost delca} = \frac{1}{\text{strmina}}$$

Relativistične invariante

invarianta = količina, ki pri prehodu med koord. sistemomi ne spremeni !

Klasične invariante: čas, masa, velikost razdalje med dvema točkama

V teoriji relativnosti čas in razdalja nista več invarianti

V 3D prostoru razdaljo merimo takole:

$$|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| , \quad |\Delta \vec{r}|^2 = \Delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{r} = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Ali to deluje tudi v 4D

$$(\Delta \underline{r})^2 = (c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \qquad (v\ S)$$

Poglejmo to v sistemu S'

$$c\Delta t' = \gamma (c\Delta t - \beta \Delta x)$$

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t)$$

$$(\Delta r')^2 = (c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$$

$$= \gamma^2 (c\Delta t - \beta \Delta x)^2 + \gamma^2 (\Delta x - \beta c \Delta t)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$= \gamma^2 \Big(\underbrace{(1+\beta^2)}_{\text{hodi narobe}} \big((c\Delta t)^2 + \Delta x^2 \big) - \underbrace{4 v \Delta t \Delta x}_{\text{hodi narobe}} \Big) + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Kaj če bi imel skalarni produkt obliko

$$(\Delta \underline{r})^2 = (\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Potem se račun izide $(\Delta \underline{r}')^2 = (\Delta \underline{r})^2$

$(\Delta s)^2$ → razdalja med dogodkoma in je očitno invariantna na LT

Namesto običajnega skalarnega produkta v Evklidskem prostoru imamo skalarni produkt četvercev v prostoru Minkowskega

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} a_\alpha \eta_{\alpha\beta} b_\beta$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

= metrični tenzor igra ključno vlogo v splošni teoriji relativnosti, kjer tam η postane odvisen od porazdelitve mase.

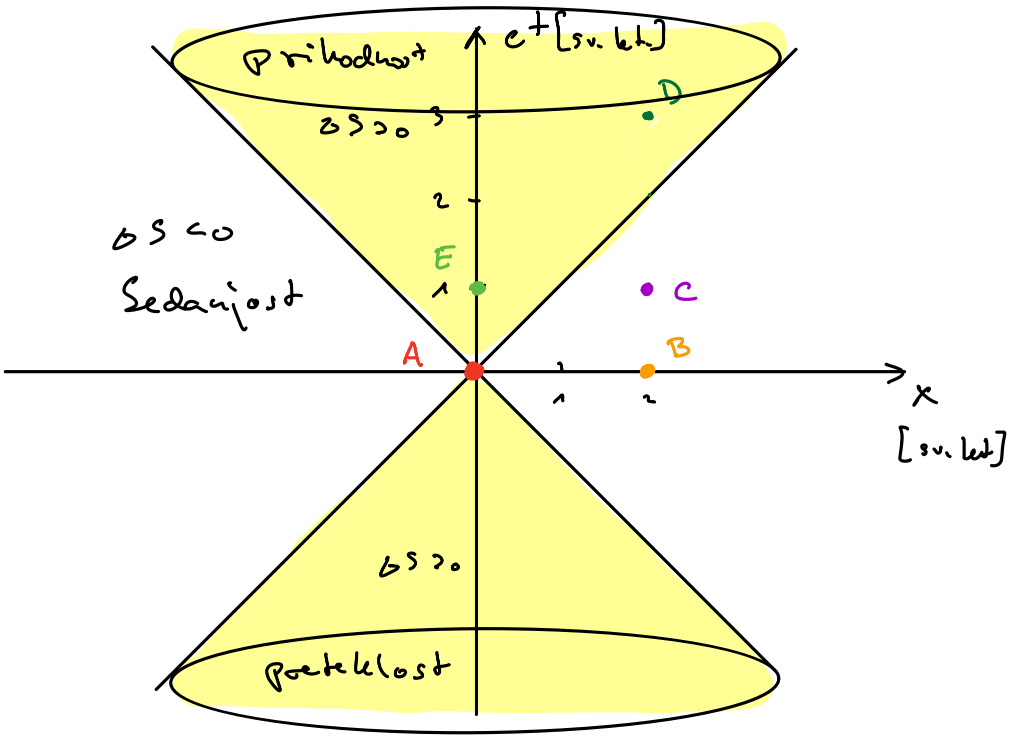
Opozorilo: ponekod je $\underline{r} \cdot \underline{r} = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$

Dogodki in vzročnost

Razdalje med dogodkoma je lahko:

- <u>Krajevnega tipa</u> $(\Delta s)^2 < 0$: v tem primeru $\exists$ inercialni sistem, v katerem se dogodka zgodita na različnih krajih, a ob istem času. To pomeni, da ne more biti v vzročni zvezi.
- <u>Časovnega tipa</u> $(\Delta s)^2 > 0$: v tem primeru $\exists$ inercialni sistem, v katerem se dogodka zgodita na istem mestu toda ob različnih časih. Takšna dogodka sta lahko v vzročni zvezi.
- <u>Svetlobni tip</u> $(\Delta s)^2 = 0$ na robovih svetlobnega stožca

Zgled



Dogodek A : $\underline{r}_A = (0,0)$
ob času 0 na Zemlji

Dogodek B = $\underline{r}_B = (0,2)$
ob istem času, toda npr. na drugem planetu

Dogodek E = $\underline{r}_E = (1,0)$

Razmik med dogodkoma A in B je

$$(\Delta s_{AB})^2 = (ct_B - ct_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = -4 \text{ sv.let.}^2$$

$\Rightarrow$ razmik je krajevnega tipa saj se A in B razlikujeta le po kraju

Razmik med A in E

$$(\Delta S_{AE})^2 = 1 \text{ s.l.}^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ časovnega tipa, dogodka se razlikujeta le po času

Recimo, da je C dogodek pristanek rakete po enem letu na planetu oddaljenem 2 sv. leti.

Razmik med dogodkoma

$$(\Delta S_{AC})^2 = 1^2 - 2^2 = -3 \text{ sv. let}^2$$

Ali sta lahko A in C v vzročni zvezi? Ker je $\Delta S_{AC} < 0$ ne more biti. Iz grafa vidimo da je $v = 2c$.

Toda poiščemo inercialni sistem, v katerem sta A in C sočasna.

$$t_A = t_A' = 0 \quad (\text{sinhronizacija ur}) \quad \text{pri} \quad x_A = x_A' = 0$$

$$t_C' = \gamma\left(t_C - \frac{v x_C}{c^2}\right) \overset{?}{=} t_A' = 0$$

$$\Rightarrow \quad c^2 t_C = v x_C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{2}$$

za opazovalca, ki se giblje s $c/2$ se A in B zgodita istočasno

Kaj pa če raketa pristane po treh letih?

Dogodek $\underline{r}_D = (3, 2)$ $\quad \Delta S_{AD}^2 = 5 \text{ sv.let}^2$

Dogodka sta lahko vzročno povezana

Ali obstaja opazovalni sistem, kjer se dogodka zgodita na istem kraju

$$x_D' = \gamma(x_D - v t_D) = x_A' = 0$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{x_D}{t_D} = \frac{2}{3} c$$

to je opazovalec, ki se pelje z raketo.

Sile in kavzalnost

- telo vpliva na drugo telo z neko silo
- spremembe na enem telesu mora biti vzročno povezana s spremembo na drugem.

Če sta vzročno povezani $\Longrightarrow \Delta s^2 > 0$ krajevni tip

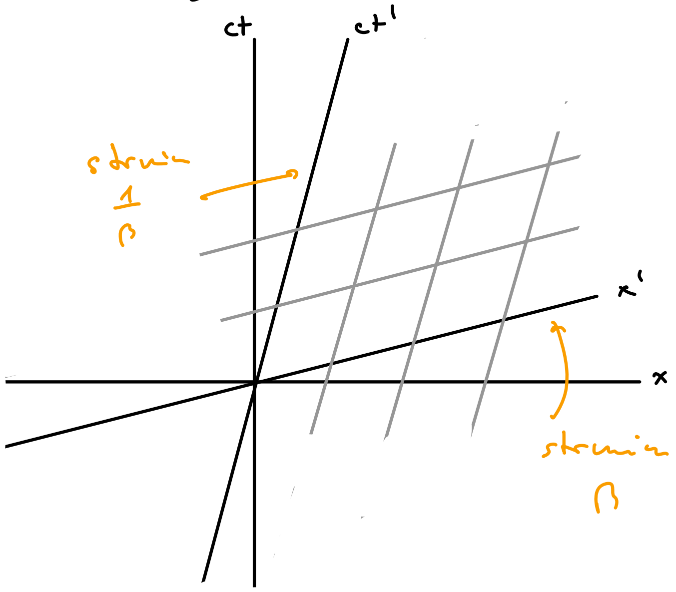
$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \geq 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c$$

Hitrost širjenja motnje ne more biti hitrejša od svetlobe

(sledi iz načela kavzalnosti)

Prikaz Lorentzove transformacije na svetlobnem stožcu



Os ct v sistemu S: množica vseh točk za katere je $x=0$
$\Rightarrow$ os ct' je množica točk, za točke za katere $x'=0 \Rightarrow$

$$x' = \gamma(x - vt) = 0$$

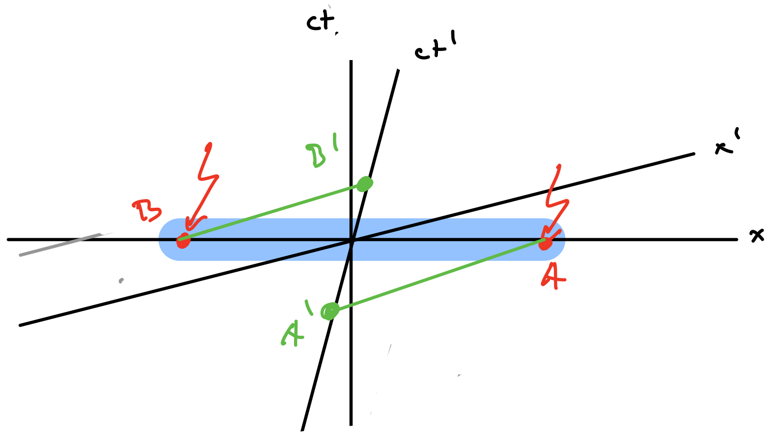
$$x = vt = \beta ct \quad \text{or} \quad ct = \frac{1}{\beta}x$$

Analogno za os x' velja
$ct'=0$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = 0$$

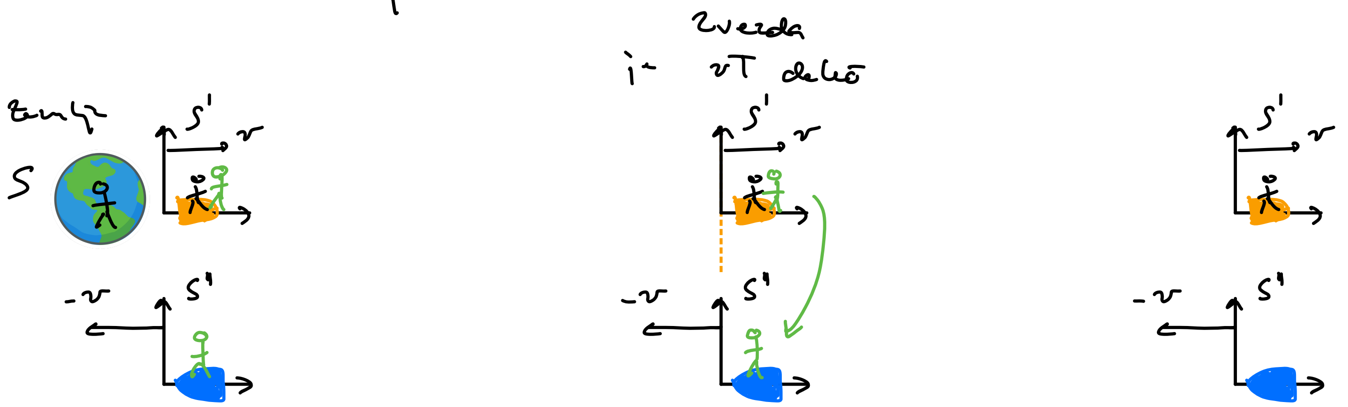
$$t = \frac{v}{c^2}x \Rightarrow ct = \beta x$$

Bliske na peronu



Vlak, ki se pelje mimo perona z $v = c/2$. Bliska v točkah A in B sta sočasna v S. Kaj pa v S'? (če vemo, da A in B nista sočasna

Paradoks dvojčkov

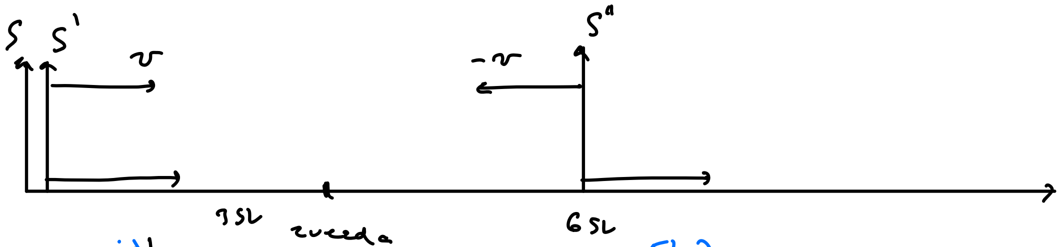


Čas potovanja

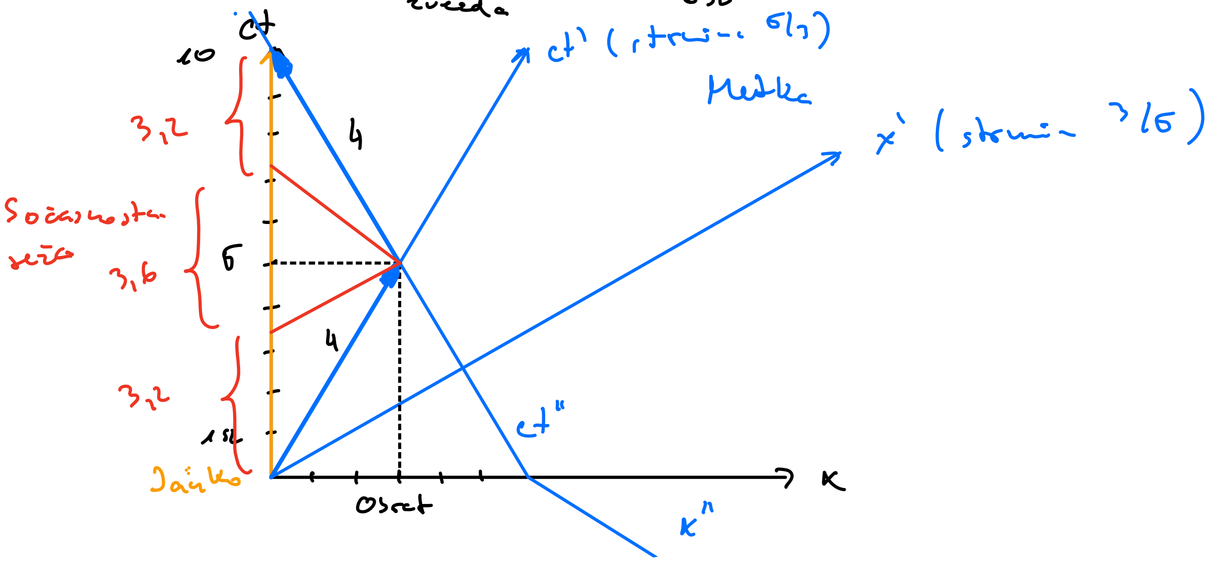
	proti zvezdi	nazaj z zvezde	skupaj
kot se vidi Zemljin dvojček	T	T	$2T$
kot se vidi pilot S'	$\frac{T}{\gamma}$ ← lastni	$2T\gamma - T/\gamma$	$2T\gamma$
kot se vidi pilot S''	$2T\gamma - \frac{T}{\gamma}$	$\frac{T}{\gamma}$	$2T\gamma$

Kaj pa pravi: vprašaj za uro pilota

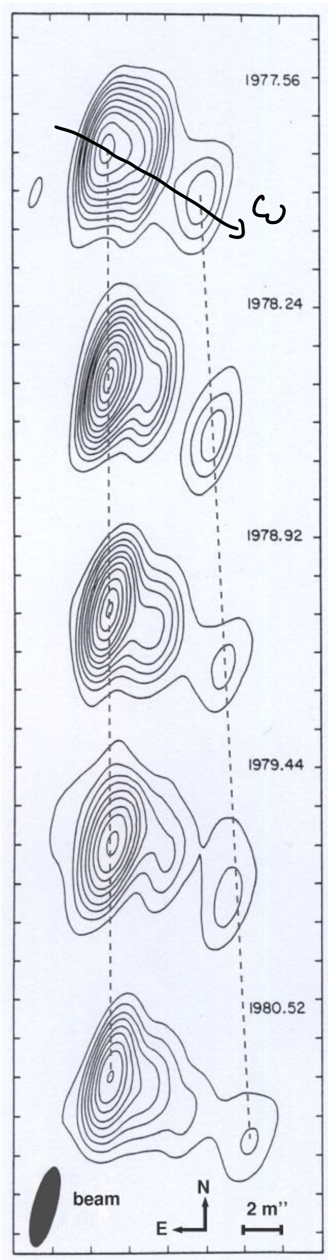
$$T/\gamma \text{ (od } S') + T/\gamma \text{ (od } S'') = \frac{2T}{\gamma}$$



$\gamma = \frac{5}{4}$ $\quad \beta = \frac{3}{5}$



Navidezno superluminalno gibanje

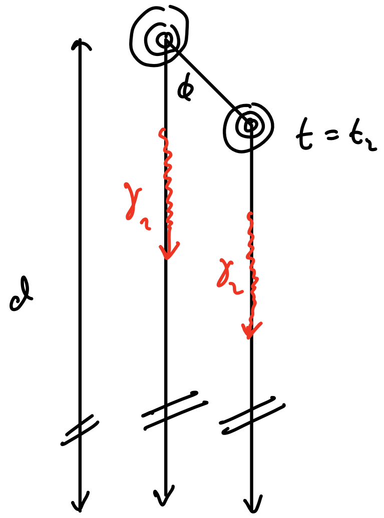


$\omega = 0{,}008''/\text{leto}$

$d = 1{,}4 \cdot 10^{9}$ sv. let

$\Rightarrow v_n = \omega d = 5{,}6\, c$

$\Rightarrow$ Predpostavka, da se te pecke gibljejo $\perp$ glede na našo smer opazovanja, mora biti napačna



Prvi signal pride do nas

po $t_1 = d/c$

drugi pa po

$$t_2 = t_e + (d - v t_e \cos\phi)/c$$

Razlika v časih detekcije

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_e\left(1 - \frac{v}{c}\cos\phi\right)$$

$< t_e$

Navidezna prečna hitrost, kot izmerjena z Zemlje

$$v_n = \frac{v t_e \sin\phi}{\Delta t} = \frac{v \sin\phi}{1 - \frac{v}{c}\sin\phi}$$

za majhne ϕ je to lahko več kot c

Zanima nas v in ne v_n

$$\frac{v}{c} = \frac{v_n/c}{\sin\phi + (v_n/c)\cos\phi} < 1$$

za ϕ, ki zadoščajo $\dfrac{v_n^2/c^2 - 1}{v_n^2/c^2 + 1} < \cos\phi < 1$

In da je najmanjša hitrost izvorov

$$v_{min}/c = \sqrt{\frac{v_n^2/c^2}{1 + v_n^2/c^2}}$$

to se zgodi pri $\cot\phi_{min} = \dfrac{v_n}{c}$

To ustreza Lorentzovemu faktorju

$$\gamma_{min} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{min}^2/c^2}} = \sqrt{1 + v_n^2/c^2} = \frac{1}{\sin\phi_{min}}$$

Ker mora biti $v < c$, mora biti $\phi < 20{,}4^\circ \Rightarrow v_{min}/c = 0{,}984$

Sporočilo: astro objekti lahko pospešujejo snov do $\sim c$

Relativistična gibalna količina in energija

transformacija pospeška

$$a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)^3}$$

v… relativna hitrost
u_x… hitrost delca

$\Rightarrow$ F'/m se mora ustrezno transformirati, sicer $\vec{F} = m\vec{a}$ ne bo delovalo v poljubnem inercialnem sistemu.

Potrebujemo gibalne enačbe, ki se bodo prevedle na Newtonovo obliko pri $v \ll c$

Gibalna količina

Predpostavimo, da ima GK obliko

$$\vec{p} = m_v \vec{v}$$

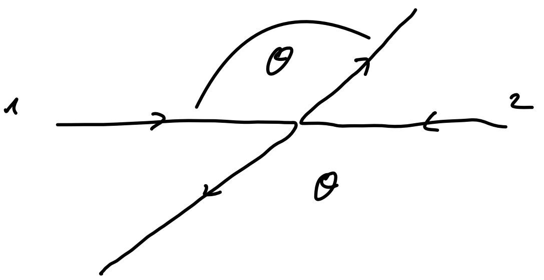
gibalna količina $\vec{G}$

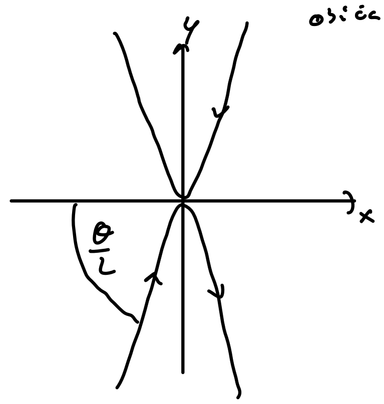
Radi bi pokazali, da je

$$m_v = m_0 \gamma$$

običajna masa

Prožni trk dveh delcev

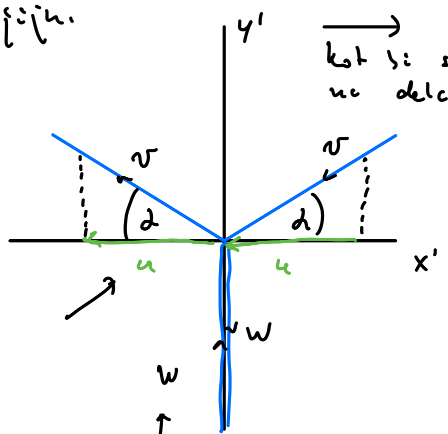


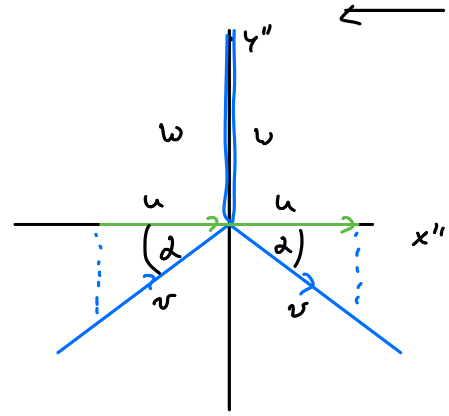


Trk si poglejmo iz sistema, ki se giblje $\longrightarrow$ ali $\longleftarrow$ s hitrostjo, ki je enaka vodoravni komponenti enega od njiju.

$\longrightarrow$ kot bi sedeli na delcu

$\longleftarrow$





vodoravna komponenta delca 2

navpična komponenta delca 1

Transformacije hitrosti

$$u_y = \frac{u_y'}{\gamma_v\left(1+\frac{u_x' v}{c^2}\right)} = \frac{u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u_x' v}{c^2}}$$

Pri nas je $v \to u$
$u_y \to u \tan\alpha$
$u_y' \to w$
$u_x' = 0$

$$u\tan\alpha = \frac{w}{\gamma_u} = w\sqrt{1-u^2/c^2} < w$$

$\vec{p} = \sum_i m\vec{v}_i$ ne more veljati pri $v \to c$

⇒ Sprememba prečne GK "navpično" gibajoče se delce je

$$\Delta p = 2 m_w w$$

⇒ "poševni" delec ima vodoravno hitrost u in navpično $w\sqrt{1-\beta_u^2}$, njegova relativistična masa je m_v.

... njegova sprememba prečne GK je torej

$$\Delta p' = 2 m_v w \sqrt{1-\beta_u^2}$$

Če naj bo celotna prečna GK enaka 0, more biti razmerje $\Delta p / \Delta p' = 1$

$$\frac{\Delta p'}{\Delta p} = \frac{2 m_v w}{2 m_w w}\sqrt{1-\beta_u^2} = 1 \Rightarrow \frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1-\beta_u^2}$$

Vzemimo limitni primer ko je w zelo majhen (zelo mali Δp)

→ v in u praktično enaka in $m_w \to m_0$, $m_v \to m_u$

$$\boxed{m_u = \gamma_u m_0}$$ mirovna masa

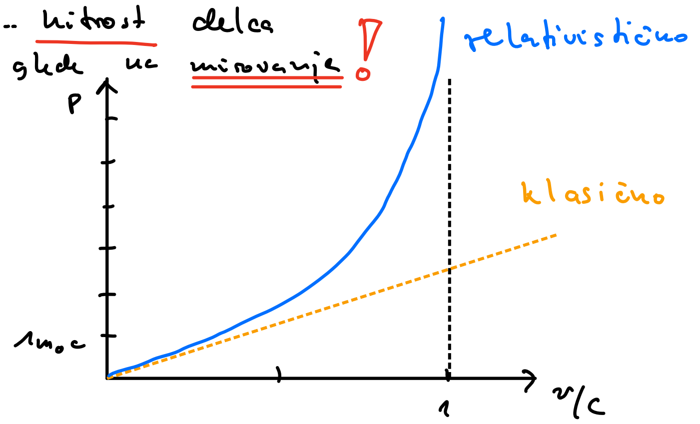
Relativistična masa

u ... hitrost delca glede na mirovanje!

$u \to v$ običajna oznaka

$$\boxed{\vec{p} = \gamma_v m_0 \vec{v}}$$

Relativistična GK



"Trik" z zelo majhno hitrostjo w ni potreben, ker vedno velja

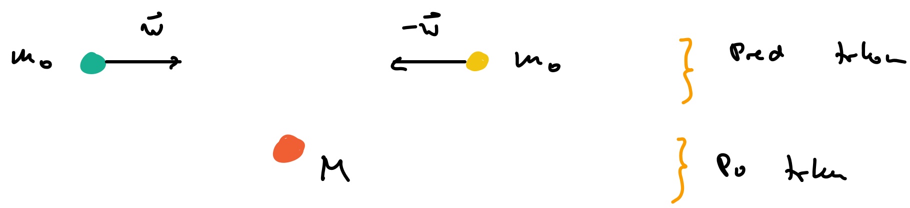
$$u^2 + w^2(1-\beta_u^2) = v^2$$

$$m_w = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_w^2}} \quad , \quad m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_v^2}}$$

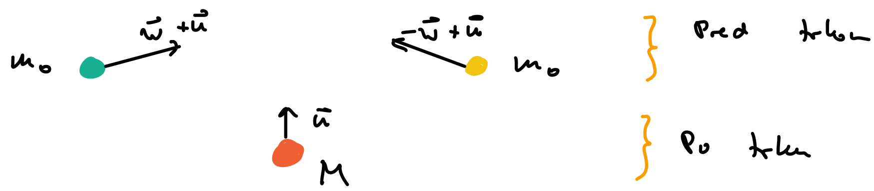
$$\frac{m_w^2}{m_v^2} = \frac{1-\beta_w^2}{1-\beta_v^2} = \frac{1-\beta_u^2-\beta_w^2(1-\beta_u^2)}{1-\beta_w^2} = 1-\beta_u^2$$

Neelastični (neprožni) trk

* centralni trk enakih teles z nasprotnima hitrostma $\pm w$



Zamislimo si droben popravek k tej sliki



Če se ohrani navpična komponenta GK

pred trkom $\quad p = 2m_w u$

ne rabimo $w+u$ ker je u majhen

po trku $\quad p' = M_u u$ $\quad$ ker je u majhen je $M_u = M_0$

$= M_0 u$

$$p = p' \Rightarrow \boxed{M_0 = 2m_w}$$

Da zadostimo zakonu po ohranitvi GK, mora biti masa zlepka večja od vsote delov ki trčita !

Energija

* W_k v klasični fiziki

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\,dv \to$$

$$\int_{v}^{v'} mv\,dv = \int_{x}^{x'} F\,dx \Rightarrow \Delta E_k = \frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = A$$

* Relativistična izpeljava (pravilnost zaradi $m = m(v)$)

$$F = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 \vec{v})}{dt}$$

V 1.D

$$F = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v) = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}(\gamma m_0 v) \to F\,dx = m_0 v\, d(\gamma v)$$

$$d(\gamma v) = v\,d\gamma + \gamma\,dv = v\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{v\,dv}{c^2} + \gamma\,dv$$

$$= \frac{v^2}{c^2}\gamma^3\,dv + \gamma\,dv$$

$$\boxed{\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2} = 1}$$

$$= \big(\underbrace{\beta^2 + \tfrac{1}{\gamma^2}}_{1}\big)\gamma^3\,dv = \gamma^3\,dv$$

Integriramo

$$m_0\int_0^v \gamma^3 v\,dv =$$

nova spremenljivka $u^2 = \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$

$u\,du = -\frac{1}{c^2}dv\,v$

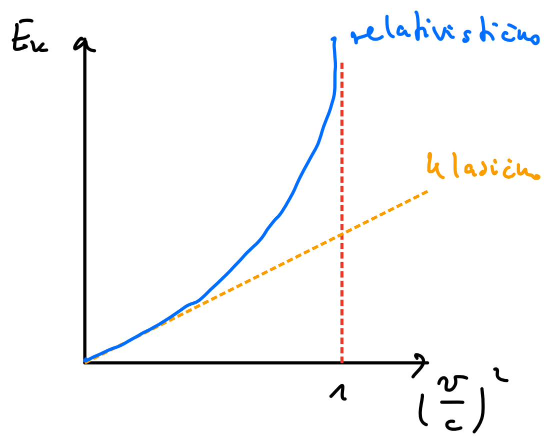
$$= -m_0c^2\int u^{-3}\,u\,du$$

$$= m_0c^2\frac{1}{u}\Big|_0^v$$

$$= m_0c^2\gamma\Big|_0^v = m_0c^2\gamma - m_0c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_k = m_0c^2(\gamma - 1)}$$

Relativistična kinetična energija



Energija delca v mirovanju

$E_0 = m_0 c^2$ ... mirovna energija (rest energy)

Energija delca v gibanju

$E = \gamma m_0 c^2$ ... celotna energija (total energy)

$$\boxed{\begin{aligned} E &= E_0 + E_k = \gamma m_0 c^2 \\ E_0 &= m_0 c^2 \\ E_k &= m_0 c^2 (\gamma - 1) \end{aligned}}$$

Mirovno maso bomo pisali kot m in ne m_0

Primeri

$m_0(e^{\pm}) = 0{,}51 \frac{MeV}{c^2}$ $\quad m_0(p) = 938{,}3 \frac{MeV}{c^2}$

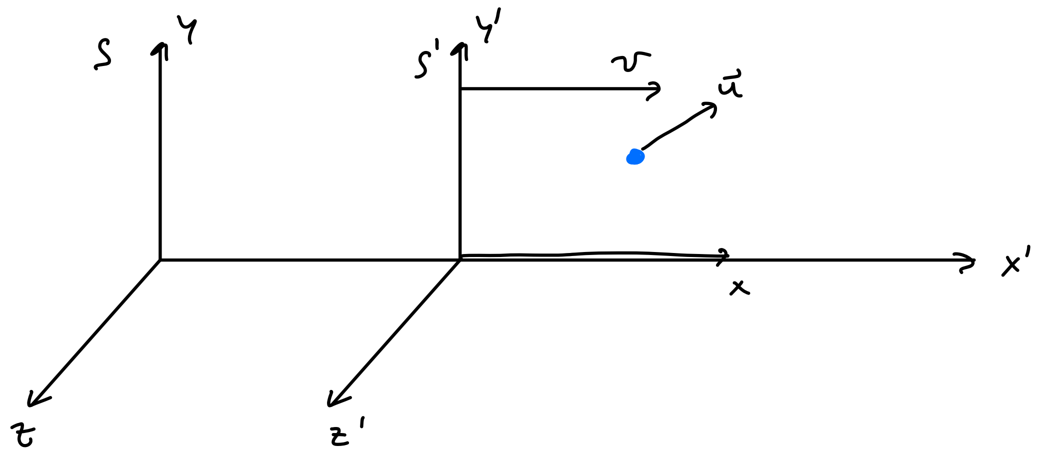
$m_0(\mu^{\pm}) = 106 \frac{MeV}{c^2}$ $\quad m_0(n) = 939{,}6 \frac{MeV}{c^2}$

Preverimo, ali dobimo nerelativistični izraz pri $v \to 0$

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots - 1 \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\checkmark} \left(1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2} + \ldots \right) \qquad \frac{v}{c} \ll 1$$

Relativistična transformacija GK in E



$m_0 \to m$

V sistemu S:

$$E = \gamma_u m c^2$$

$$p_x = \gamma_u m u_x \qquad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad u = |\vec{u}|$$

$$p_y = \gamma_u m u_y$$

$$p_z = \gamma_u m u_z$$

V sistemu S':

$$E' = \gamma_u' m c^2$$

$$p_x' = \gamma_u' m u_x' \qquad \gamma_u' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$$

$$p_y' = \gamma_u' m u_y'$$

$$p_z' = \gamma_u' m u_z'$$

$$\gamma_u' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

L.T. hitrosti

$$= \left(1 - \frac{(u_x - v)^2}{c^2\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2} - \frac{u_y\left(1-v^2/c^2\right)}{c^2\left(1-\frac{u_y v}{c^2}\right)^2} - \frac{u_z\left(1-v^2/c^2\right)}{c^2\left(1-\frac{u_z v}{c^2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{c^2\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2 - (u_x - v)^2 - u_y^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - u_z^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{c^2 - 2u_x v + u_x^2\frac{v^2}{c^2} - u_x^2 + 2u_x v - v^2 - u_y^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - u_z^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{c^2 - v^2 - u^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \right)^{-1/2} = \gamma_v \frac{1 - \frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u_x v}{c^2}}} = \gamma_v \gamma_u \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

To uporabimo v enačbi za E'

$$E' = \gamma_u' m c^2 = \gamma_v \left(\underbrace{\frac{m c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}_{E} - \underbrace{\frac{m c^2 u_x \, v/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}_{v p_x} \right)$$

$$\boxed{E' = \gamma_v \left(E - v p_x \right)}$$

Po podobnem računu dobimo

$$p_x' = \gamma_u' m u_x' = \frac{m u_x'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \gamma_v \left(\underbrace{\frac{m u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}_{p_x} - \underbrace{\frac{m v}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}_{v E/c^2} \right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_x' &= \gamma_v \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right) \\ p_y' &= p_y \\ p_z' &= p_z \end{aligned}}$$

$$\boxed{c_p' = L \, c_p}$$

Obratna transformacija

brez $' \to$ z $'$ $\qquad v \to -v$

Ali lahko p in E organiziramo v četverec?

Spomnimo se: lastni čas τ, koordinatni čas t

$$dt = \gamma \, d\tau$$

Komponente "običajne" hitrosti $\vec{v} = d\vec{s}/dt$, ne tvorijo vektorja (za potrebe LT), ker dt ni skalar pri L.T.

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 (dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 (d\tau)^2$$

τ je skalar

$$ds = c \, d\tau \quad \text{oz} \quad d\tau = \frac{1}{c} ds$$

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{c}\, ds =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{c} \sqrt{\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma(t)}$$

Zveza med lastnim in koord. časom.

$\Rightarrow$ Torej tudi

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \longleftarrow$$ ni četverec, ker dt ni skalar in ni so invariantni če $(\Delta S)^2$

Pač pa je četverec takšno

$$\underline{v} = \frac{d\underline{s}}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{dt}\right) = \gamma \frac{d\underline{s}}{dt} = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$$

$$= \gamma(c, \vec{v})$$

ta se tudi transformira z L.T. — četverec hitrosti

Če to pomnožimo s količino, ki je invariantna na LT, spet dobimo četverec. npr. z maso

$$\underline{p} = m\underline{v} = (m\gamma c, m\gamma\vec{v}) = \boxed{(E/c, \vec{p}) = \underline{p}}$$

mišljena mirovna masa — $E = \gamma mc^2$ — Četverec GK

To se sedaj transformira, kot vsak drug četverec

$$\underline{p}' = \underline{\underline{L}}\,\underline{p}$$

Relativistična zveza med E in GK

$\underline{p} = (E/c, \vec{p})$ ker je četverec, ima invarianto

$\underline{p}\cdot\underline{p}$ = invarianta $\Leftrightarrow$ enak rezultat v katerem koli inerc. sis.

① S — v_{delca} — $E = \gamma mc^2$, $p = \gamma m\vec{v}$

② $S'_{-v_{sis}}$ — $v_{del} = 0$ — $E_0 = mc^2$ (samo mirovna energija), $p = 0$

$$\underline{p} = (E/c, \vec{p})$$
$$\underline{p}' = (E_0/c, 0)$$

$$\underline{p}\cdot\underline{p} = \underline{p}'\cdot\underline{p}'$$
$$(E/c)^2 - \vec{p}^{\,2} = (E_0/c)^2 - 0^2$$
$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} \qquad E = E_{kin} + E_0$$

Brezmasni delci

$m \to 0 \Rightarrow E = pc$ se gibljejo s sv. hitrostjo

Enačba gibanja (rel. Newtonov zakon)

- videli smo, da $F = m(dv/dt)$ ne more biti pravilna rel. enačba, dopušča $v > c$
- pravilne oblike je sila

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

- najposodteje obravnavamo EM (Lorentzovo) silo: $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ + Maxwellove enačbe. E.d. polja

$$e(E + \vec{v}\times\vec{B}) = m\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} \qquad \gamma = \gamma(v)\,!$$

- tako zapisana sila ni del četverca, ker je na desni odvod po koordinatnem času. Opisujemo sile F se ne transformira z LT. Lahko pa uvedemo četverec, ki mu pravimo sila Minkowskega, tako da odvajamo $\underline{p}$ po lastnem času

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = \gamma\frac{d\underline{p}}{dt} =$$
$$= \Big(\gamma \underbrace{\frac{d}{dt}\Big(\frac{E}{c}\Big)}_{dE/dt = P},\ \gamma \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{F}\Big)$$

$$\boxed{\underline{F} = \Big(\gamma\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c},\ \gamma\vec{F}\Big)} \quad \text{velja za splošen } F$$

Klasična limita $\underline{F} = (0, \vec{F})$.

Zdaj lahko zapišem Newtonov zakon

$$\boxed{\underline{F} = m \frac{d\underline{v}}{d\tau}}$$

To je očitno lorentzovo invariantno

Sila Minkowskega podrosmje

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\underline{p}}{dt} = \gamma \left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = mc \frac{d\gamma}{dt} = m c \gamma^3 \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}$$

$E = \gamma m c^2$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \left(-\cancel{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{\cancel{2}v}{c^2}\right)\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} = \gamma^3 \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}) = m\left(\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3 \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}\vec{v}$$

$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

Torej

$$\underline{F} = \gamma\left(mc\gamma^3 \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2},\ m\gamma\vec{a} + m\gamma^3\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{c^2}\vec{v}\right)$$

... če $\underline{F}$ delim z m dobim četverec pospeška

$$\boxed{\underline{a} = \frac{d^2\underline{r}}{d\tau^2} = \gamma\left(\gamma^3\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c},\ \gamma\vec{a} + \gamma^3\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{c^2}\vec{v}\right)}$$

S tem lahko zapišemo

$$\underline{F} = m\,\underline{a}$$

Gibanje delca v konstantnem električnem polju

os $x \parallel \vec{E}$

$$m\, d(\gamma v) = F\,dt = e\mathcal{E}\,dt$$

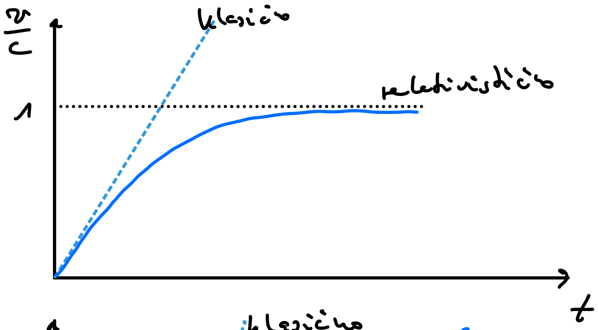
začetni pogoj $v(t=0) = 0$ (delec sprva miruje

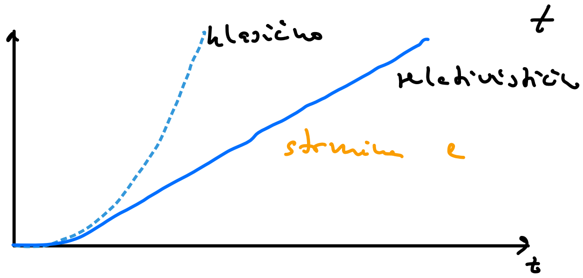
$$\gamma v = \frac{e\mathcal{E}}{m}t = c\alpha t \qquad \alpha = \frac{e\mathcal{E}}{mc}$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta}} = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}$$

V klasični limiti

$$\beta(t) = \alpha t$$





Položaj delca

$$x(t) = \int_0^t v\,dt = c\int_0^t \beta\,dt$$

$$= c\int_0^t \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}\,dt =$$

$$\ldots = \frac{mc^2}{e\mathcal{E}}\left(\sqrt{1+\alpha^2 t^2} - 1\right)$$

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{e\mathcal{E}}{m}\right)}_{a\ \text{(klasični)}} t^2$$

$$\gamma = \sqrt{1+\alpha^2 t^2}$$

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\gamma} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}} = \frac{1}{\alpha}\sinh^{-1}(\alpha t)$$

Za dolge čase je koordinatni čas (t) eksponentno daljši od (τ)

$$t = \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha\tau)$$

Krajevno spremenljivo električno polje

Opravimo delo (na delcu) $A = e\int \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{s} = eU$ $\quad (U = \Delta U)$

$$eU = \underset{\text{potem}}{mc^2(\gamma - 1)} - \underset{\text{prej}}{0} \quad \text{samo sprememba kin. energije}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{eU + mc^2}{mc^2} \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{m^2c^4}{(eU+mc^2)^2} \Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{eU(eU+2mc^2)}{(eU+mc^2)^2}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2eU}{mc^2}}\ ; & eU \ll mc^2 \\ 1\ ; & eU \gg mc^2 \end{cases}$$

Konstantno magnetno polje

Sila v mag. polju $\vec{F} = e\vec{v}\times\vec{B}$, je $\perp$ na hitrost delca, zato se $|v|$ ne spremeni, in posledično tudi ne $\gamma = \gamma(v) = \gamma(|v|^2)$:

$$m\frac{d}{dt}(\gamma v) = m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = m\gamma\vec{a} = e\vec{v}\times\vec{B} \qquad \text{kroženje}$$

Radialni pospešek delca je $\omega^2 r = \omega v = \frac{v^2}{r} = a_c$

$$m\gamma\omega v = evB \Rightarrow \omega_c = \frac{eB}{\gamma m} \qquad \text{Ciklotronska frekvenca}$$

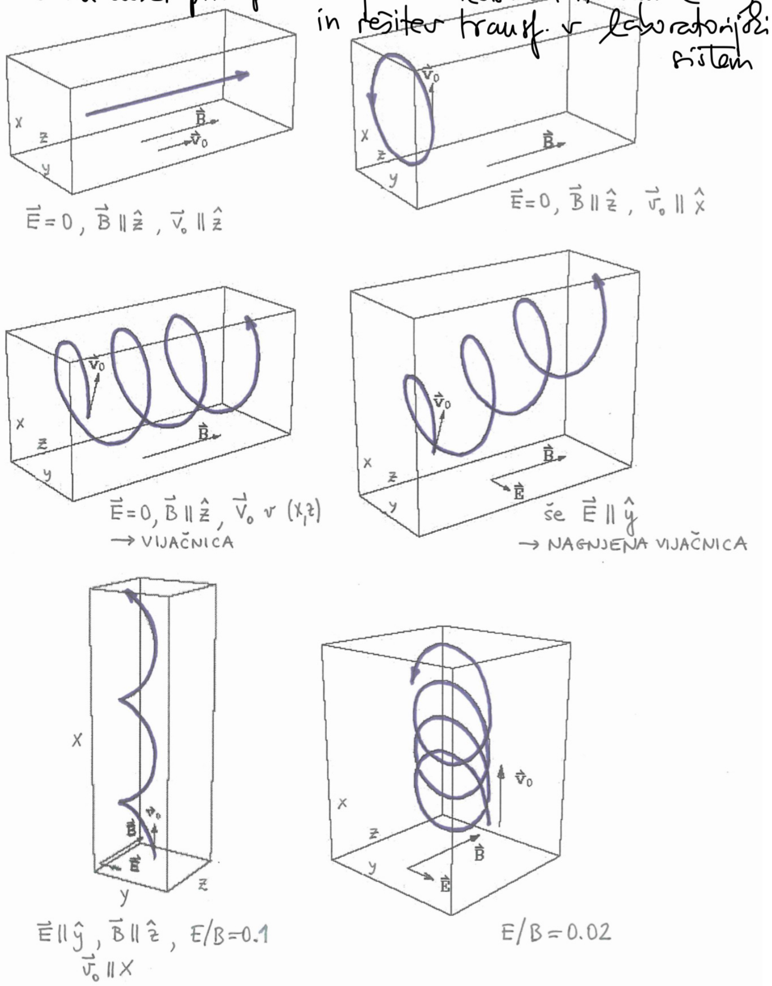
$v \perp B$

$$m\gamma\frac{v^2}{r} = evB \Rightarrow r = \frac{m\gamma v}{eB} = \frac{p}{eB}$$

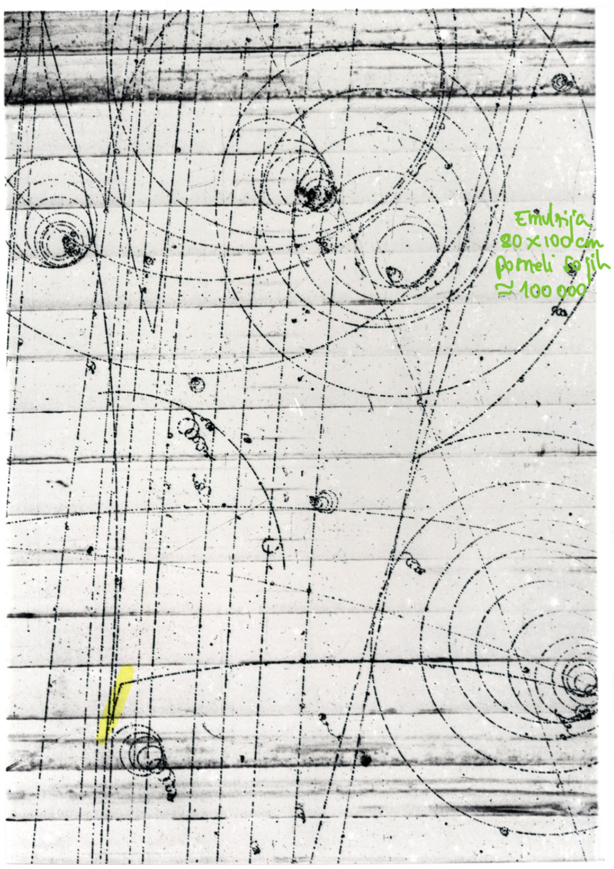
polmer krožnice po kateri kroži delec v konst. mag. polju.

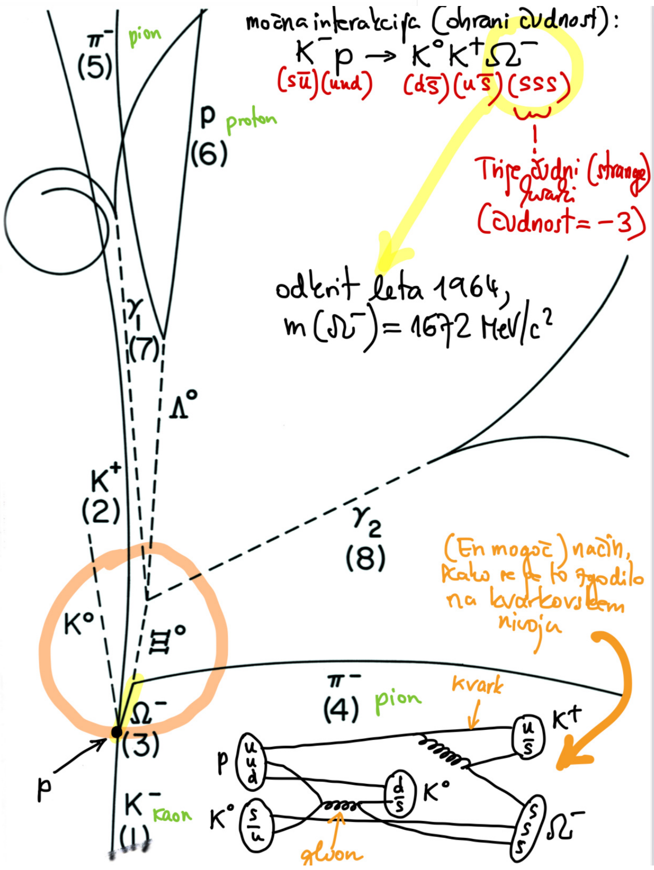
več pri vajah, ... pri splošnih konfiguracijah $\vec{E}, \vec{B}$

* relativistično: sistem enačb, če je tudi $\vec{v}_0$ poljuben
* včasih dober pristop: rešujemo v lastnem sistemu (τ) in rešitev transf. v laboratorijski sistem



Biblija: Batygin, Toptygin (zbirka)...





Transformacija el. in mag. polja

Razmeroma lahko opravilo, če imamo silo Minkowskega in LT. V primeru EM sila smo ime četverce

$$\mathcal{F} = \left(\gamma \frac{\vec F \cdot \vec v}{c}, \gamma \vec F\right) \qquad \vec F = e\left(\vec{\mathcal{E}} + \vec v \times \vec B\right)$$

vezan na hitrost delca

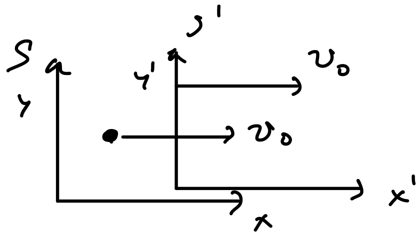
Sila $\mathcal{F}$ transformira po LT, zato je transformacija iz sistema S v S':

(1) $$\mathcal{F}_x = \gamma F_x = \gamma_0\left(\mathcal{F}_x' + \beta_0 \mathcal{F}_0'\right) = \gamma_0\left(\gamma' F_x' + \beta_0 \gamma' \frac{\vec F \cdot \vec v}{c}\right)$$

vsebujeta info o LT (S → S')

$$\mathcal{F}_y = \gamma F_y = \gamma' F_y'$$

$$\mathcal{F}_z = \gamma F_z = \gamma' F_z'$$



Ob takšni sliki $\gamma = \gamma_0$, $\gamma' = 1$ $(v' = 0)$

⇓

v S' nanj deluje le elek. polje

Pišemo prispevek k (1)

$$\gamma_0 F_x = \gamma_0\Big(e\mathcal{E}_x + e(\underbrace{\vec v \times B}_{v_y B_z - v_z B_y = 0})_x\Big) = \gamma_0\left(e\mathcal{E}_x' + e(\overset{0}{\vec v'} \times \vec B')_x + \beta_0 \frac{\vec F' \cdot \overset{0}{\vec v'}}{c}\right)$$

ker LT vzdolž x ne more narediti neničelne hitrosti iz $\vec v' = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x'$$

Za komponento y moramo upoštevati tudi mag. del sile:

$$\gamma_0 F_y = \gamma_0\Big(e\mathcal{E}_y + e(\underbrace{\vec v \times \vec B}_{-\underset{v_0}{v_x} B_z + \underset{0}{v_z} B_x = -v_0 B_z})_y\Big) = 1 \cdot \left(e\mathcal{E}_y' + e(\overset{0}{\vec v'} \times \vec B')_y\right)$$

Torej $\gamma_0(\mathcal{E}_y - v_0 B_z) = \mathcal{E}_y'$ (2)

in analogno $\gamma_0(\mathcal{E}_z + v_0 B_y) = \mathcal{E}_z'$

Obratni transformaciji ste
$$\mathcal{E}_y = \gamma_0(\mathcal{E}_y' + v_0 B_z')$$
$$\mathcal{E}_z = \gamma_0(\mathcal{E}_z' - v_0 B_y')$$ (3)

Damo (2) v (3):

$$\mathcal{E}_y = \gamma_0\left(\gamma_0(\mathcal{E}_y - v_0 B_z) + v_0 B_z'\right) = \gamma_0^2 \mathcal{E}_y - v_0 \gamma_0^2 B_z + \gamma_0 v_0 B_z'$$

$$B_z' = \gamma_0 B_z - \mathcal{E}_y \frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0 v_0} = \gamma_0\left(B_z - \frac{v_0}{c^2}\mathcal{E}_y\right)$$

Analogno je $B_y' = \gamma_0\left(B_y + \frac{v_0}{c^2}\mathcal{E}_z\right)$

Manjka še transformacija $B_x \leftrightarrow B_x$

Denimo, da imamo v S samo mag. polje vzdolž x. Po zgornjih izrazih je lahko v S' od nič različno le polje B_x'. Naj ima delec v S hitrost $\vec{v} = (v_0, 0, v)$
$\Rightarrow$ v S' hitrost $\vec{v} = (0, 0, v')$

Sila ima potem samo komponento y, in po LT velja

$$\gamma F_y = \gamma \left(e (\vec{v} \times \vec{B})_y\right) = \gamma e v B_x$$
$$= \gamma' F_y' = \quad \dots \quad = \gamma e v' B_x'$$
$$\Rightarrow \underbrace{\gamma' v'}B_x' = \underbrace{\gamma v} B_x$$

tole sta komponenti četverca hitrosti

ker $\gamma' v' = \gamma v$, je tudi $B_x' = B_x$

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_x' = E_x & B_x' = B_x \\ E_y' = \gamma_0 (E_y - v_0 B_z) & B_y' = \gamma_0 (B_y + \frac{v_0}{c^2} E_z) \\ E_z' = \gamma_0 (E_z + v_0 B_y) & B_z' = \gamma_0 (B_z - \frac{v_0}{c^2} E_y) \end{array}}$$

Obratna LT
$\cdot' \leftrightarrow \cdot$
$v \leftrightarrow -v$

Očitno se komponente $\vec{E}$ in $\vec{B}$ ne transformirajo kot komponente.

Obe polji lahko združimo v EM tenzor, ki ga lahko predstavimo z antisimetrično matriko

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ta $\underline{\underline{F}}$ se transformira takole $\underline{\underline{F}}' = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{F}}$ (ni matrično množenje)

Natančneje $F_{\mu\nu}' = L_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}$

Sistemi delcev

Skupni četverec = vsota četvercev posameznih delcev

$$\underline{P} = \sum_i \underline{p}_i = \left(\sum_i \frac{E_i}{c}, \sum_i \vec{p}_i\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Če na sistem ne deluje nobena zunanja sila, se mora ohraniti tak četverec

$$\underline{P}_{zač} = \underline{P}_{kon} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} E_{zač} = E_{kon} \\ \vec{p}_{zač} = \vec{p}_{kon} \end{array}$$

Težiščni sistem:

relativistično ne moremo zahtevati, da bi bil $\underline{P} = 0$ (ves četverec), ker $LT(\underline{0}) = \underline{0}$

$\Rightarrow$ še vedno zahtevamo samo $\vec{p} = \sum \vec{p}_i^{\,*} = 0$.

Za nadaljnje zglede samo vzdolž x

$$\sum p_{ix}^{*} = 0$$

oznaka za težiščni sistem

i-ti delec

Izračunamo lahko hitrost težiščnega sistema, v^*

$$\sum_i p_{ix}^* = \gamma^* \left(\sum_i p_{ix} - \beta^* \sum_i \frac{E_i}{c} \right) \quad ?$$

$$\gamma^* = 1/\sqrt{1-\beta^{*2}} \qquad \beta^* = \frac{v^*}{c}$$

$$\beta^* = \frac{\sum_i p_{ix} c}{\sum_i E_i} = \frac{v^*}{c} \quad \text{hitrost tež. sistema}$$

Ali pri $v \ll c$ sledi nerelativistični izraz?

$$\beta^* = \frac{\sum_i \gamma_i m_i v_i c}{\sum_i m_i c^2 \gamma_i} = \sum_i \frac{m_i v_i}{m_i c} \Longrightarrow v^* = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}$$

Zdaj pa zelo uporabna reč: kvadrat katerega koli četverca je invarianta!

$$\underbrace{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i c\right)^2}_{\text{izvrednotimo npr. v lab. sis.}} = \underbrace{\left(\sum_i E_i^*\right)^2 - \vec{0}}_{\text{v težiščnem sistemu}}$$

po def. težišča

Sploh ni nujno, da je imamo pred procesom in po procesu opravka z enakim naborom delcev!

$$\left(\sum_i E_i^*\right)^2 = (Mc^2)^2$$

Skupna masa sistema, ki ni samo vsota mas posameznih delcev!

Npr. tipični primer

$$\underbrace{\left(\sum_i E_i\right)^2_{zač} - \left(\sum_i \vec{p}_i c\right)^2_{zač}}_{LAB} = \underbrace{\left(\sum_j E_j^*\right)^2}_{TEŽ}$$

Prožni trk

Predpostavka: identična delca, mase m

(2) miruje, (1) trči vanj s hitrostjo v

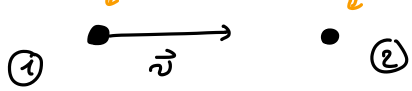
Namesto "zač." in "kon" $\rightarrow$ x in x'

$$\left.\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_1' + E_2' \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \end{aligned}\right\} \quad \underline{P} = \underline{P}'$$

Nalogo rešimo v tež. sistemu, nato preslikamo v lab. sistem.

$$\beta^* = \frac{\gamma m v c + 0}{\gamma m c^2 + mc^2} = \frac{\beta\gamma}{1+\gamma} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

le mirovna en.



Lab. sis. pred trkom

in $\gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_*^2}}$

Tež. sis. pred trkom

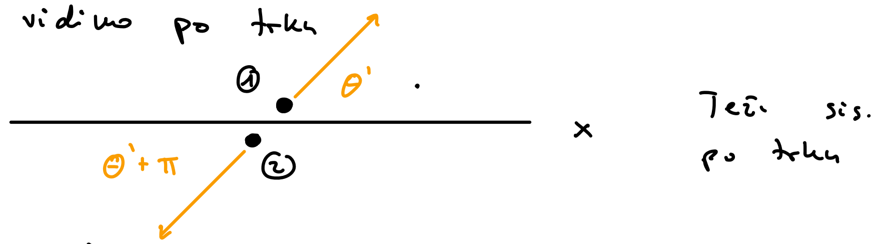
$$\gamma^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

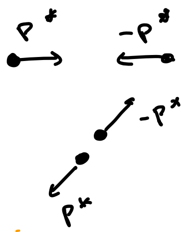
$$p_2^* = \gamma^* \left(p_2 - \beta^* \frac{E_2}{c} \right) = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\, mc = -mc \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$$

$p_2 = 0$, $E_2 = mc^2$

$p_2^* = -p_1^*$

Kaj vidimo po trku





$$E_1^* = E_2^* = E_1'^* = E_2'^* = \gamma^*(\overset{mc^2}{\overset{\parallel}{E_2}} - \beta^* \overset{0}{\overset{\parallel}{p_2}} c)$$

$$= \gamma^* mc^2 = mc^2\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

TEŽ, po trku

$$p_{1x}^{*'} = p_1^* \cos\theta^*$$

1. delec, x komponenta

$$p_{2x}^{*'} = -p_{1x}^{*'} = -p_1^* \cos\theta^*$$

seveda, ker $|p_1^*| = |p_2^*|$

$$p_{1y}^{*'} = p_1^* \sin\theta^*$$

$$p_{2y}^{*'} = -p_{1y}^{*'} = -p_1^* \sin\theta^*$$

Transformacija v lab. sistemu:

$$p'_{1x} = \gamma^*\left(p_{1x}^{*'} + \beta^* \frac{E_1^{*'}}{c}\right) =$$

$$= mc\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\cos\theta^* + \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\frac{\gamma+1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{mc}{2}\sqrt{\gamma^2-1}\,(1+\cos\theta^*)$$

v od delca

$$p'_{2x} = \frac{mc}{2}\sqrt{\gamma^2-1}\,(1-\cos\theta^*)$$

$$p'_{1y} = p_1^* \sin\theta^* = mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\sin\theta^*$$

prečno ni LT

$$p'_{2y} = -p_1^* \sin\theta^* = -mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\sin\theta^*$$

Če je trk centralen ($\theta^* = \pi$), je $p'_2 = p_1$, $p'_1 = p_2 = 0$, kot v klasičnem primeru si samo izmenjata E in Gk. Kota, pod katerima delca odletita v lab. sistemu:

$$\tan\theta_1 = \frac{p'_{1y}}{p'_{1x}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\,\frac{\sin\theta^*}{1+\cos\theta^*} \qquad \tan\theta_2 = \frac{p'_{2y}}{p'_{2x}} = -\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\,\frac{\sin\theta^*}{1-\cos\theta^*}$$

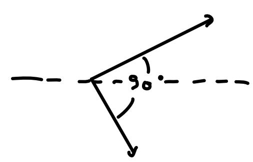
Velja $\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -\frac{2}{\gamma+1}$

Kot med delcema pa je podan s

$$\tan(\theta_1-\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = 2\,\frac{\sqrt{2(\gamma+1)}}{\gamma-1}\,\frac{1}{\sin\theta^*}$$

Če je hitrost vpadnega delca majhna ($\gamma \to 1$), $\tan(\theta_1-\theta_2)$ zelo velik $\Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

Pri velikih γ pa se $\theta_2 - \theta_1$ zmanjšuje: pri visoko relativističnih trkih se delci sipajo v majhne kote



Neprožni trk

- identični delca, masa m
- ② miruje, ① prileti vanj s hitrostjo v_1
- delca se po trku sprimeta

Lab: $E_1 + E_2 = E$ skupna masa $E_1 = \gamma_1 m c^2$ $E_2 = mc^2$

$$mc^2(\gamma_1 + 1) = \gamma M c^2$$

$$p_1 + p_2 = p$$

$$\gamma_1 m v_1 + 0 = \gamma M v$$

Zelo elegantno to rešimo preko invariant

$$\underline{p_1} = (E_1/c, \vec{p}_1) \qquad \underline{p_2} = (E_2/c, \vec{0})$$

$\underline{p} = \underline{p_1} + \underline{p_2} =$ ... v Lab pred trkom

$\underline{p}'^* = (Mc^2/c, \vec{0})$ ... v tež. sis. po trku

Lahko izenačimo invarianti ne pa kar direktno ($\underline{p} \neq \underline{p}'^*$)

$$\underline{p} \cdot \underline{p} = \underline{p}'^* \cdot \underline{p}'^*$$

$$\underbrace{(\gamma_1 mc^2 + mc^2)^2 - (\gamma_1 m v_1)^2 c^2}_{\text{v lab pred trkom}} = \underbrace{(Mc^2)^2 - \vec{0}^2}_{\text{v tež. sis. po trku}}$$

$$\gamma_1^2 m^2 c^4 + 2\gamma_1 m^2 c^4 + m^2 c^4 - \gamma_1^2 m^2 \underbrace{v_1^2}_{\beta_1^2 c^2} c^2 = M^2 c^4$$

$$2(\gamma_1 + 1) m^2 c^4 = M^2 c^4$$

$$\underline{M = \sqrt{2(\gamma_1 + 1)}\, m} \geq 2m$$

Del kin. energije se je pretvoril v maso sprimka, del pa ostane za kin. en.

Razpoložljiva energija

- "sprijemanje" delcev v eksp. fiziki je zelo redka reč ... običajno mislimo na trke velikih delcev
- koliko energije je na voljo:

$$m_r = \underbrace{M - 2m}_{} = 2m\left(\sqrt{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} - 1\right)$$

če po trku vsi delci v tež. sis. mirujejo

Energija $E_r = m_r c^2$ pravimo razpoložljiva energija

- Vsa začetna kin. en. $T = mc^2(\gamma_1 - 1)$, je večja od E_r, ker mora iti del T za kin. en. težišča, sicer ne ohranimo GK.

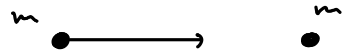
$$T = mc^2(\gamma_1 - 1) \rightarrow \gamma_1 = \frac{T}{mc^2} + 1 \rightarrow \boxed{E_r = 2mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{T}{2mc^2}} - 1\right)}$$

projektil

velja v primeru fiksne tarče, en delec pri miru.

Limite

- $T \ll 2mc^2 \Rightarrow E_r \simeq T/2$
- $T \gg 2mc^2 \Rightarrow E_r = \sqrt{2mc^2T} \propto \sqrt{T}$ (fiksna tarča)



V trkalnikih:

tu je Lab = težišče
tu je na voljo $E_r = 2T \propto T$

Primer $e^- + e^- \to e^- + e^- + e^- + e^+$

Kolikšna je min kin. en. e^-, ki trči v mirujoč e^-, da se lahko dobita nova delca e^- in e^+ ⇒ raz položljiva en. vsaj $2m_ec^2$

$$E_r = 2m_ec^2 = 2m_ec^2\left(\sqrt{1+\frac{T}{m_ec^2}}-1\right) \Rightarrow T = 6\,m_ec^2$$

Primer $\gamma + (\text{delec z } M) \to (\text{delec z } M) + 2\,(\text{delec z } m)$

npr. $\gamma + p \to p + \pi^0 + \pi^0$

Kolikšna je min en. fotona (M pri miru)
|= energija praga

$$\underbrace{(E_\gamma + Mc^2)^2 - (p_\gamma c)^2}_{p\cdot p} = \underbrace{(Mc^2 + 2mc^2)^2}_{p'\cdot p'}$$

$p\cdot p$ na začetku pred trkom v LAB

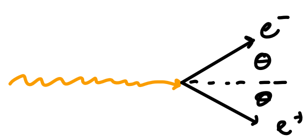
$p'\cdot p'$ po reakciji v TEŽ, ko smo pri pragu $v=0$

$$\cancel{E_\gamma^2} + 2E_\gamma Mc^2 + \cancel{M^2c^4} - \cancel{p_\gamma^2c^2} = \cancel{M^2c^4} + 4mMc^4 + 4m^2c^4$$

Za brezmasne delce $p_\gamma^2c^2 = E_\gamma^2$

$$E_\gamma^{prag} = 2mc^2\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

Primer $\gamma \to e^+ + e^-$



X ne gre

ohr E $E_\gamma = 2E$

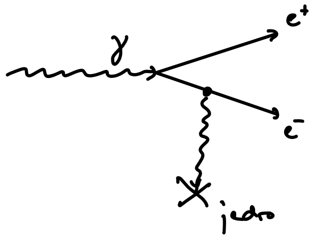
ohr p $\underbrace{p_{\gamma x}}_{E_\gamma/c} = 2p\cos\theta$

$E = pc\cos\theta$

$\sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} > pc\cos\theta$

vedno, tudi pri $\theta = 0$

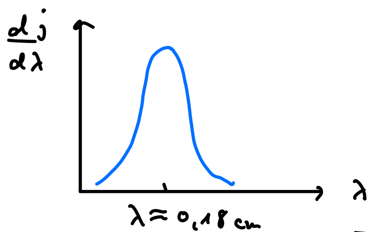
V resnici mora višek GK odnesti še neki drugi delec (običajno jedro)



Alternativni razmislek: če bi foton spontano razpadel v vakuumu, bi lahko našli inercialni sistem, v katerem bi bili GK e^- in e^+ nasprotno enaki $\Rightarrow$ γ bi moral mirovati, to pa ne gre.

Primer Produkcija parov e^+e^- ob sipanju kozmičnih žarkov na CMB (cosmic micro wave background = sevanje črnega telesa pri 3K).

p ⟶ tudi $> 10^{20}$ GeV ⟵ tipično 10^{-4} eV γ (CMB)



$E_\gamma = h\nu \doteq 6{,}6 \cdot 10^{-4}\,eV$

LAB pred trkom $\quad p c = (E, \vec{p} c) = (E, pc, 0, 0)$

$\quad p_\gamma c = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma c) = (E_\gamma, -p_\gamma c, 0, 0)$

TEŽ po trku $\quad ((m_p + 2m_e)c^2, 0, 0, 0)$

Invarianta $\quad (E + E_\gamma)^2 - (p - p_\gamma)^2 c^2 = (m_p + 2m_e)^2 c^4$

$(p+p_\gamma)(p+p_\gamma)c^2$ LAB pred trkom $\qquad$ TEŽ po trku

majhno

$$\underbrace{E^2 + 2EE_\gamma + \cancel{E_\gamma^2} - p^2c^2}_{\cancel{m_p^2c^4}} + 2pp_\gamma c^2 - \cancel{p_\gamma^2 c^2} = \cancel{m_p^2c^4} + 4m_pm_ec^4 + \cancel{4m_e^2c^4}$$

če predpostavimo $E, pc \gg m_pc^2$

$E \approx pc$

$$4EE_\gamma = 4m_pm_ec^4$$

$$E = \frac{m_pc^2\, m_ec^2}{E_\gamma} \approx 10^{18}\,eV$$

od te energije dalje tvorba parov e^+e^- učinkovito visokoenergijske protone.

Razpad delcev

del mase začetnega delca gre za tvorbo novih delcev + njihove kinetične energije

Razpad v mirovanju

$\pi^- \longrightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$

$m_\pi c^2 = 139{,}6\,\mathrm{MeV}$
$m_\mu c^2 = 105{,}7\,\mathrm{MeV}$
$m_{\bar{\nu}_\mu} c^2 \doteq 0$

E: $m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu$

p: $0 = p_\mu + p_\nu = p_\mu + \frac{E_\nu}{c}$

$$(m_\pi c^2 - E_\mu)^2 = E_\nu^2$$
$$E_\nu^2 = p_\mu^2 c^2 = E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4$$
$$m_\pi^2 c^4 - 2 m_\pi c^2 E_\mu + E_\mu^2 = E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4$$
$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 c^4 + m_\mu^2 c^4}{2 m_\pi c^2}$$

$$E_\nu = m_\pi c^2 - E_\mu = 29{,}8\,\mathrm{MeV}$$

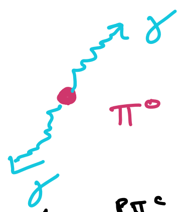
$$T_\mu = E_\mu - m_\mu c^2 = 4{,}1\,\mathrm{MeV}$$
toliko dobi μ

Razpad v letu

$\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$

$m_\pi c^2 = 135\,\mathrm{MeV}$
$E_\pi = 6\,\mathrm{GeV}$

V težiščnem sistemu: tu π^0 miruje, fotona odletita v nasprotnih smereh pod kotoma θ^* in $\theta^* + \pi$. Po zakonu o ohranitvi energije (v tež. sistemu) vsak odnese $m_\pi c^2/2$.



$$p_{1x}^* = m_\pi c/2 \cos\theta^* = -p_{2x}^*$$
$$p_{1y}^* = m_\pi c/2 \sin\theta^* = -p_{2y}^*$$

Transformacija v LAB: potrebujemo $\beta^* = \frac{p_\pi c}{E_\pi}$ γ

$$\gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^{*2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{pc}{E}\right)^2}} = \frac{E}{\sqrt{E^2 - p^2c^2}} = \frac{E}{mc^2} = \gamma$$

$$p_{1x} = \gamma\left(p_{1x}^* + \beta \frac{m_\pi c^2}{2c}\right) = \frac{m_\pi c}{2}\left(\gamma \cos\theta^* + \sqrt{\gamma^2-1}\right)$$

$$p_{2x} = \gamma\left(p_{2x}^* + \beta \frac{m_\pi c}{2}\right) = \frac{m_\pi c}{2}\left(-\gamma \cos\theta^* + \sqrt{\gamma^2-1}\right)$$

$$p_{1y} = -p_{2y} = \frac{m_\pi c}{2} \sin\theta^*$$ (LT nima učinka v prečni smeri)

$$\tan\theta_1 = \frac{p_{1y}}{p_{1x}} = \frac{\sin\theta^*}{\gamma\cos\theta^* + \sqrt{\gamma^2-1}}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{p_{2y}}{p_{2x}} = \frac{\sin\theta^*}{\gamma\cos\theta^* - \sqrt{\gamma^2-1}}$$

Kot med γ_1 in γ_2 v LAB

$$\tan\theta_{12} = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

za $\gamma \gg 1$ (zelo hiter π^0) dobimo preprostejši izraz

$$\tan\theta_{12} = \frac{2}{\gamma \sin\theta^*}$$

kaj se je zgodilo v tež.

lastnost π^0 ki razpade

če fotona v TEŽ. sistemu odletita skoraj naprej ($\theta^* \approx 0$) oz. nazaj ($\theta^* \approx 180°$), je kot med njima majhen, če $\gamma \gg 1$.