Mehanika zveznih teles

Mezoskopski / hidrodinamski volumen

L

dovolj velik, da ne vidimo efektov atomov in dovolj majhen v primerjavi z našim problemom ($L \ll \frac{1}{\nabla}$)

V času moramo opazovati tudi dolge čase, da dobimo časovno povprečenje fluktuacij

Sipke snovi ne moremo obravnavati kot kontinuum

Elastomehanika

- Osnovni pojem: deformacija
- Vektor premika se spreminja s krajem

$\vec u(\vec r)$

$$\nabla\vec u = \begin{bmatrix}\nabla u_x\\ \nabla u_y\\ \nabla u_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_{xx} & u_{xy} & u_{xz}\\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz}\\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz}\end{bmatrix}$$

diskretno

$$\vec u_2 - \vec u_1 \Rightarrow \nabla\vec u \cdot \Delta\vec r = \Delta\vec u$$

$\Delta\vec r$

$\vec u(\vec r)$ $\quad$ $\vec u(\vec r + \Delta\vec r)$

Kako opišemo deformacijo?

V igri sta dva vektorja: $\vec u$ in $\nabla\vec u$ $\Rightarrow$ deformacijski tenzor

Dekompozicija $\nabla\vec u$ (Cauchy-Stokes)

Razstavimo tenzor 2. ranga (matrika, 2 indeksa) na ireducibilne dele.

$$(\nabla\vec u)_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad \text{tenzor}$$

Najprej za splošni tenzor A_{ij}

$$A_{ij} = \frac12\big(\underbrace{A_{ij} + A_{ji}}_{S_{ij}\ \text{simetrični del}}\big) + \frac12\big(\underbrace{A_{ij} - A_{ji}}_{W_{ij}\ \text{antisimetrični del}}\big)$$

↳ je še ireducibilen del, da se ga predstavi z aksialnim vektorjem

Pri inverziji prostora polarni vektor spremeni predznak ($\vec x \to -\vec x$) [npr. $\vec v$], aksialni pa ne ($\vec x \to \vec x$) [npr. $\vec H, \vec B$].

$$W_{ij} = \varepsilon_{ijk} w_k \quad , \quad \text{obratno} \quad w_k = \frac12 \varepsilon_{ijk} W_{ij}$$

$\left(= \frac12 \varepsilon_{ijk} A_{ij}\right)$

simetrični del se odšteje

$\varepsilon_{ijk} S_{ij} = 0$

Saj: $\quad \varepsilon_{ijl} W_{ij} = \underbrace{\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{ijk}}_{2\delta_{kl}} w_k = 2 w_l$

ali $\quad w_k = \frac12 \varepsilon_{ijk} W_{ij} \quad | \ \varepsilon_{lnk}$

$$\varepsilon_{lnk} w_k = \frac12 \underbrace{\varepsilon_{lnk}\varepsilon_{ijk}}_{(\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl})} W_{ij} = \frac12 (W_{ln} - W_{nl}) = W_{ln}$$

Če se indeks ponovi na eni strani pomeni seštevanje

$$\varepsilon_{ijk} w_k = \sum_k \varepsilon_{ijk} w_k$$

Zveze za ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmk} = \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{jn}\delta_{im}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

$$A_{ij} = S_{ij} + W_{ij}$$

$$A_{ij} = \underbrace{\Big(S_{ij} - \underbrace{\tfrac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij}}_{\mathrm{tr}\, S}\Big)}_{\text{brezsledni del (deviatorni)}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij}}_{\text{izotropni del}} + W_{ij}$$

Kako se transformirajo komponente tenzorja?
Odg: kot produkti komponent vektorjev

- vektor $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$ $\qquad$ $\hat{e}_i$ ONB (ortonormirana baza)

  $a_i = \vec{a} \cdot \hat{e}_i$

  Upeljimo transformacijo med bazama (rotacija): $\hat{e}_i = M_{ij} \hat{e}_j'$

$$\vec{a} = a_i \hat{e}_i = \underbrace{a_i M_{ij}}_{a_j'} \hat{e}_j' = a_j' \hat{e}_j' \qquad a_j' = M_{ij} a_i$$

- tenzor $T = T_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$

  $T_{ij} = \hat{e}_i T \hat{e}_j$ $\quad$ tako dobimo komponente

  T v novi bazi: $T = T_{ij} (M_{ik} \hat{e}_k') \otimes (M_{jl} \hat{e}_l')$

$$= \underbrace{T_{ij} M_{ik} M_{jl}}_{T_{kl}'} \hat{e}_k' \otimes \hat{e}_l' = T_{kl}' \hat{e}_k' \otimes \hat{e}_l'$$

$$\boxed{T_{kl}' = T_{ij} M_{ik} M_{jl}}$$

To je isto kot produkt

$$a_k' a_l' = M_{ik} a_i M_{jl} a_j = a_i a_j M_{ik} M_{jl}$$

tenzor se transformira kot produkt dveh vektorjev

Rezultat: transformira se vsak indeks (indeks pomeni vektor)

- antisimetrični del tenzorja

  $W_{ij} = \varepsilon_{ijk} w_k$

  vemo: $W_{kl}' = W_{ij} M_{ik} M_{jl}$

  Kako se transformira $\vec{w}$?

$$w_r' = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{klr} W_{kl}' = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{klr} W_{ij} M_{ik} M_{jl} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{klr} \underbrace{\varepsilon_{ijp}}\, w_p \underbrace{M_{ik} M_{jl}} =$$

vektorski produkt dveh stolpcev matrike M

$\varepsilon_{ijp} M_{ik} M_{jl} = \varepsilon_{kls} M_{ps}$

$$= \tfrac{1}{2} \varepsilon_{klr} \varepsilon_{kls} M_{ps} w_p$$

$$= \tfrac{1}{2}\, 2 \delta_{rs} M_{ps} w_p = M_{pr} w_p$$

$\vec{w}$ se transformira kot vektor

- Izotropni del $\quad T_{ij} = A \delta_{ij}$

$$T_{kl}' = A \delta_{ij} M_{ik} M_{jl} = A M_{ik} M_{il} = A \delta_{kl}$$

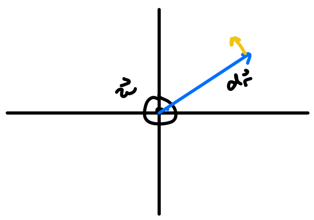
Dekompozicija za tenzor $(\nabla\vec{u})_{ij}$

$$(\nabla\vec{u})_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}_{u_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}_{w_{ij}} = u_{ij} + w_{ij} \qquad w_{ij} = \varepsilon_{ijk}\,\omega_k$$

Kaj pomeni antisimetrični del w_{ij}? Kakšno deformacijsko polje?

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{ij} + w_{ij} \Rightarrow du_j = u_{ij}dx_i + w_{ij}\,dx_i$$

$$w_{ij}\,dx_i = \varepsilon_{ijk}\,\omega_k\,dx_i = \underbrace{\varepsilon_{jki}\,\omega_k\,dx_i}_{\text{vektorski produkt}} = (\vec{\omega}\times d\vec{r})_j$$



$\vec{\omega}$ je infinitezimalni kot zasuka $\delta\vec{\varphi}$

$$\delta\, d\vec{u} = \delta\vec{\varphi} \times d\vec{r}$$

$$\frac{\delta}{\delta t}\, d\vec{u} = \frac{\delta\vec{\varphi}}{\delta t} \times d\vec{r} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{\omega} \times d\vec{r}$$

Zapišimo $\vec{\omega}$ še z $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

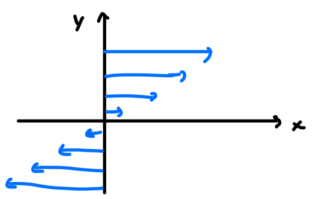
$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad -\varepsilon_{jik}\left(-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{jik}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \overset{i\leftrightarrow j}{=} \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,w_{ij} = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}(\nabla\times\vec{u})_k$$

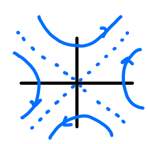
$$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla\times\vec{u}$$

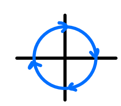
Tipični primer: strižno deformacijsko polje



$u_x(y)$

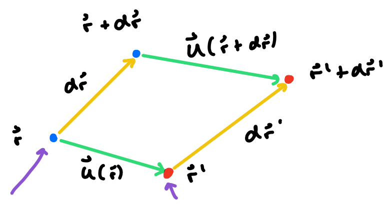
$$\nabla\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{rotacija}}$$





Deformacijski tenzor

Zahteva: ker je energija odvisna le od razdalje med bližnjimi delci, zahtevamo da deformacijski tenzor opiše natanko spremembe razdalj, med bližnjimi delci.



(1) Brez u, le z $\vec r \to \vec r'$

Pred: $$dr^2 = \frac{\partial \vec r}{\partial x_i} dx_i \cdot \frac{\partial \vec r}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial \vec r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec r}{\partial x_j} dx_i dx_j = g_{ij} dx_i dx_j$$

metrični tenzor

Po: $$dr'^2 = \frac{\partial \vec r'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec r'}{\partial x_j} dx_i dx_j = g'_{ij} dx_i dx_j$$

$$d\vec r'^2 - d\vec r^2 = (g'_{ij} - g_{ij}) dx_i dx_j$$

Spremembo razdalj smo opisali s spremembo metričnega tenzorja.

(2) Sedaj pa z $\vec u$ (vektor premika)

$\vec r \to \vec r + \vec u$

$d\vec r \to d\vec r + d\vec u$

Primerjajmo dr^2 in $dr'^2 = (d\vec r + d\vec u)^2$

$$dr'^2 = (d\vec r + d\vec u)^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j\right)^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j\right)\left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k\right)$$
$$= dx_i^2 + \underbrace{2\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j}_{} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k = \dots$$

Želimo, da je ta del simetričen na $i \leftrightarrow j$ torej

$$2\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_i dx_j$$

je že simetričen

$$\dots = dr^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_i dx_j + \overbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}} dx_i dx_j =$$

$$= dr^2 + \underbrace{\left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)}_{2u_{ij}} dx_i dx_j$$

deformacijski tenzor

!

$$\boxed{u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\nabla \vec u\text{, linearni del}} + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{\text{kvadratni del}}\right)}$$

$$\boxed{dr'^2 - dr^2 = 2u_{ij} dx_i dx_j}$$

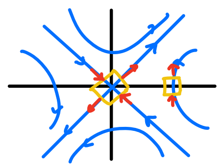
$$dr'^2 - dr^2 = 2u_{ij} dx_i dx_j = (g'_{ij} - g_{ij}) dx_i dx_j$$

$d\vec r = \{dx_i\}$

$\Rightarrow g'_{ij} - g_{ij} = 2u_{ij}$ kot zanimivost

Interpretacija u_{ij}

- Simetrični tenzor ⇒ lahko ga vedno diagonaliziramo v dani točki, ker $u_{ij} = u_{ij}(\vec r)$
- Kaj pomeni, če je diagonalen? Točki razmaknjeni v smeri lastnega vektorja $d\vec r$ se tudi pri transformaciji razmaknete samo v tej smeri.
- V lastnih smereh je deformacija le raztezanje oz. krčenje, brez striga. Vedno lahko najdemo sistem, kjer je deformacija tako preprosta.
- Primer:



- V lastni smeri: $u_{11} = \frac{du_1}{dx_1}$ je relativni raztezek / skrček, enako za u_{22}, u_{33}

Preverimo to trditev preko definicije

$$u_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_1}\frac{\partial u_k}{\partial x_1}$$

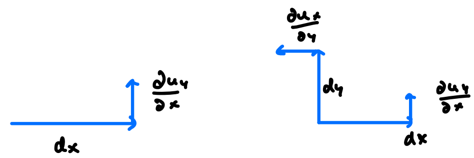
$$dx_1'^2 = dx_1^2 + 2u_{11}\,dx_1^2 = dx_1^2(1+2u_{11}) = dx_1^2\left(1+2\frac{du_1}{dx_1}+\left(\frac{du_1}{dx_1}\right)^2\right) = dx_1^2\left(1+\frac{du_1}{dx_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad dx_1' = dx_1\left(1+\frac{du_1}{dx_1}\right) \quad = \quad \frac{du_1}{dx_1} = \frac{dx_1'-dx_1}{dx_1} = \frac{du_1}{dx_1} \quad ✓$$

- Pomen izvendiagonalnih elementov

Premiki $d\vec u$ so pravokotni na razmik točk $d\vec r$, kar se v prvem redu ne spremeni razdalje med točkama, ampak kot vektorja med njima $d\vec r$.

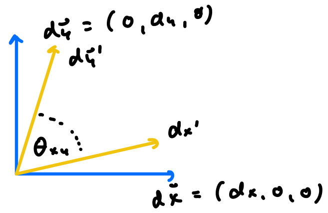
- Kot vektorja se spremeni tudi pri togi rotaciji, ki je u_{ij} ne vsebuje.



Ne vemo ali je rotacija? Rotacija, posledica morata $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ in $\frac{\partial u_y}{\partial x}$.

Če velja $\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial u_y}{\partial x}$ je to rotacija, sicer je deformacija

Torej imamo dve možnosti: ① pogledamo, kako se spremeni kot med pravokotnima vektorjema. Na tega rotacija ne vpliva in lahko delamo kar z $d\vec u = \nabla u\, d\vec r$



$$d\vec x' = d\vec x + \nabla u\, d\vec x = d\vec x + \frac{\partial \vec u}{\partial x}dx = dx\left(1+\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$d\vec y' = d\vec y + \frac{\partial \vec u}{\partial y}dy = dy\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}, 1+\frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)$$

$$d\vec x' \cdot d\vec y' \approx dx\,dy\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = 2u_{xy}\,dx\,dy$$

le do prvega reda

$$\cos\theta_{xy} = \frac{d\vec x'\, d\vec y'}{dx'\, dy'} \approx \frac{d\vec x'\, d\vec y'}{dx\, dy} \approx \frac{2u_{xy}\,dx\,dy}{dx\,dy} = 2u_{xy}$$

v 1. redu

$\Rightarrow \cos\theta_{xy} = 2u_{xy}$ Izvendiagonalni člen je enak kotu po deformaciji med dvema vektorjema, ki sta bila na začetku $\perp$.

② Poglejmo kako se zasuče en vektor pri pravokotnem premiku z odšteto rotacijo.

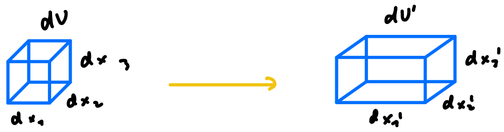
$d\vec{u} = (\nabla \vec{u})_s \, d\vec{r}$, kjer je $(\nabla \vec{u})_s$ linearni del u_{ij}. Torej preprosto:

$d\vec{r} = (dx, 0, 0)$

$$du_y = u_{xy}\, dx \qquad du_z = u_{xz}\, dx \quad \Rightarrow \quad \theta_{xy} \approx \frac{du_y}{dx} = u_{xy}, \qquad \theta_{xz} \approx \frac{du_z}{dx} = u_{xz}$$

- Sprememba prostornine pri deformaciji

① Najlažje je v lastnem sistemu u_{ij}



$$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$dV' = dx_1'\, dx_2'\, dx_3' = (1+u_{11})dx_1 (1+u_{22})dx_2 (1+u_{33})dx_3$$

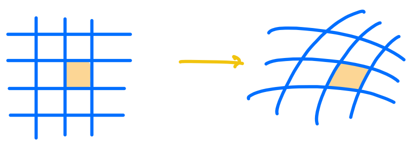
1\. red

$$\approx dV\,(1 + u_{11} + u_{22} + u_{33} + \ldots) = dV\,(1 + u_{kk})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV' - dV}{dV} = u_{kk}}$$

lokalna relativna sprememba volumna — sled tenzorja (ni odvisna od baze)

② Deformacijo $\vec{r} \to \vec{r}'$ si lahko predstavljamo kot transformacijo med koordinatami: $\vec{x} \to \vec{x}'$



Jacobijeva matrika

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}$$

$dV = dx\,dy\,dz$ $\qquad$ $dV' = |\det J|\, dx'\,dy'\,dz'$

$$x_i' = x_i + u_i(x_j)$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \partial u_y/\partial x & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

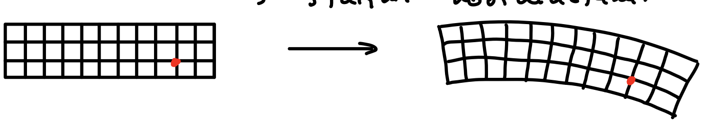
$$\det J \approx \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\left[\left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] \approx$$

$$= 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 1 + u_{kk}$$

$$\det J = \frac{dV'}{dV} = 1 + u_{kk}$$

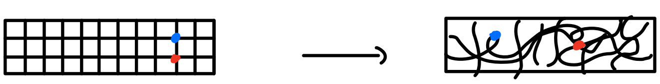
Lagrangeev in Eulerjev deformacijski tenzor

Lagrangeev opis: premik izrazimo v koord. sist. nedeformiranega telesa, s starimi koordinatami.



naravno za elasto mehaniko

Eulerjev opis: premik izrazimo v koord. sist. deformiranega telesa, z novimi koordinatami.



koordinate naj označujejo prostor ⇒ po deformaciji (npr. hitrostno polje)

- Lagrange: kam bo šel delček s koordinato $\vec{x}$ $(\vec{u}(\vec{x}))$
- Euler: gledamo od kod je karkoli prišlo v točko prostora s koord. $\vec{x}'$, $\vec{u}(\vec{x}')$
- Lagrangev deformacijski tenzor smo že izračunali

$$\vec{r}'(\vec{r}) = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

- Izračunajmo še Eulerjevega:

$$\vec{r}(\vec{r}') = \vec{r}' - \vec{u}(\vec{r}')$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}' - d\vec{u}, \quad dx_i = dx_i' - \frac{\partial u_i}{\partial x_j'} dx_j'$$

$$d\vec{r}'^2 - d\vec{r}^2 = d\vec{r}'^2 - (d\vec{r}' - d\vec{u})^2 =$$
$$= dx_i'^2 - \left(dx_i' - \frac{\partial u_i}{\partial x_j'} dx_j'\right)^2 =$$
$$= dx_i'^2 - dx_i'^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j'} dx_i' dx_j' - \frac{\partial u_i}{\partial x_j'}\frac{\partial u_i}{\partial x_k'} dx_j' dx_k'$$
$$= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j'} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i'}\right) dx_i' dx_j' - \frac{\partial u_k}{\partial x_i'}\frac{\partial u_k}{\partial x_j'} = 2\, u_{ij}^E\, dx_i' dx_j'$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{ij}^E = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right]}$$

Mehanska napetost in napetostni tenzor

- Notranje sile: sile okoliških delov na izbrani del. Notranje sile se izničijo, napetosti ostanejo
- Predpostavka: elastične sile so kratkega dosega (kontaktne sile). Zato sile okolice delujejo le na površini delčka.
- Celotna sila okolice na delček (elastična sila) $F_i = \int f_i \, dV$ se more dati zapisat kot integral po površini delčka.
  $f_i(\vec{r})$ mora biti divergenca nečesa, divergenca nekega tenzorja.

$$\boxed{f_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}}$$ σ_{ij} ... napetostni tenzor

$$F_i = \int f_i \, dV = \int \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} \, dV = \boxed{\oint \sigma_{ij} \, dS_j}$$

normala

$\Rightarrow$ σ_{ij} i-ta komponenta površinske gostote sile na j-to komponento ploskve.
$\sigma_{ij} dS_j$ je i-ta komponenta sile na ploskev $d\vec{S}$

Navor in simetričnost σ_{ij}

Izračunajmo navor elastičnih sil na delček:

$$M_i = \int dV \, \varepsilon_{ijk} x_j f_k = \int dV \, \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} \sigma_{kl}$$

Tudi navor se more dati zapisati kot integral po površini.
M_i zapišimo v obliki pripadajočega antisim. tenzorja

$$M_{ij} = \int dV \, (x_i f_j - x_j f_i)$$

Preverimo, da M_{ij} res pripada aksialnemu vektorju $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.
Velja $w_{ij} = \varepsilon_{ijk} w_k$.

$$M_{ij} = \varepsilon_{ijk} M_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} x_l F_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}) x_l F_m = x_i F_j - x_j F_i$$

$$M_{ij} = \int dV\,(x_i f_j - x_j f_i) = \int dV \left(x_i \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \int dV \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik}\right) - \int dV \left(\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}}_{\delta_{ik}} \sigma_{jk} - \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_k}}_{\delta_{jk}} \sigma_{ik}\right) =$$

$$= \oint dS_k \left(x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik}\right) + \int dV \left(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}\right)$$

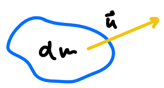
Če naj volumski del izgine, mora biti σ_{ij} simetričen.
Če $\sigma_{ij} - \sigma_{ji} \neq 0$, tak navor pade kot r^3, vztrajnostni moment pa kot r^5, v limiti $r \to 0$ gre kotni pospešek $\to \infty$. $\Rightarrow$ Volumske gostote navora ne sme biti.

Če obstaja zunanja gostota navora (el. polje na dipole) mora obstajati nasprotna volumska gostota elastičnega navora ($\neq$ antisimetrični delež σ_{ij}), ki vedno (tudi v dinamični situaciji) izravna gostoto zunanjega navora. Gostota elastičnega navora ni nič, ampak se mora še vedno zapisati kot površinski integral.

Povzetek: antisim. del σ_{ij} lahko obstaja (ponavadi ne), vendar mora biti divergenca nekega tenzorja tretjega ranga: $\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 2 \frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial x_k}$.
kjer je $\phi_{ijk} = -\phi_{jik}$

Gibalna enačba

Newtonov zakon na enoto prostornine

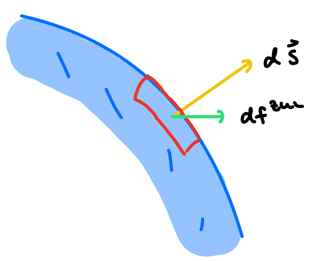


$$dm\,\ddot{\vec u} = d\vec F^{el} + d\vec F^{z} \qquad / dV$$
$$\rho\,\ddot{\vec u} = f_{el} + f_{zun}$$

$$\boxed{\rho\,\ddot u_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i^{zun}}$$

V ravnovesju $\partial_j \sigma_{ij} + f_i = 0$ Cauchyjev pogoj

To je volumski pogoj za ravnovesje. Veljati mora v vseh točkah telesa. Dodatno imamo še robni pogoj - ravnovesje površinskih sil na mejah.



$$\sigma_{ij}(-dS_j) + dF_i^{zun} = 0$$
$$\Rightarrow \sigma_{ij}\, dS_j = dF_i^{zun}$$

Rabimo zvezo med $\overset{\text{napetostni tenzor}}{\sigma_{ij}}$ in $\overset{\text{deformacijski tenzor}}{u_{ij}}$ (Hookov zakon).
Vse moramo izraziti z $\vec u$.
Enačba za $\vec u$

Delo pri deformaciji in elastična energija

- Delo, ki smo ga opravili pri deformaciji je šlo v elastično energijo.
- Deformacijo u_{ij} povzroče $\vec{f}^z$
- Če želimo, da je delo sile $\vec{f}^z$ enako spremembi elastične energije, ne smemo večati kin. en. Torej ravnovesje sil $\vec{f}^{el} + \vec{f}^z = 0$

⇒ Sprememba elast. energije je enaka negativnemu delu elastične sile

- deformirajmo telo za $\delta \vec{a}$ in izračunajmo sprem. en. δW.

$$\delta W = \int dV\, \delta w = -\int dV\, f_i\, \underbrace{\delta u_i}_{\text{premik}} = -\int dV\, \partial_j \sigma_{ij}\, \delta u_i =$$

$$= -\int dV \left[\partial_j (\sigma_{ij}\, \delta u_i) - \sigma_{ij}\, \partial_j \delta u_i \right] =$$

$$= -\oint dS_j\, \sigma_{ij}\, \delta u_i + \int dV\, \sigma_{ij}\, \partial_j \delta u_i =$$

} ker je σ_{ij} simetričen

$$= -\oint dS_j\, \sigma_{ij}\, \delta u_i + \int dV\, \frac{1}{2} (\partial_i \delta u_j + \partial_j \delta u_i) =$$

$$= -\oint dS_j\, \sigma_{ij}\, \delta u_i + \int dV\, \sigma_{ij}\, \delta u_{ij}$$

Za neskončno sredstvo ali na mejah neobremenjeno sredstvo površinski del odpade

$$\delta W = \int dV\, \sigma_{ij}\, \delta u_{ij} \qquad \delta w = \sigma_{ij}\, \delta u_{ij}$$

$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial w}{\partial u_{ij}}\right)_s$ če predpostavimo, da ni izmenjave toplote ($dW = dA$)

Ponavadi je relevantna prosta energija $f = w - Ts$

tako da $df = -\underbrace{s}_{\text{entropija}}\, dT + \sigma_{ij}\, du_{ij}$

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_{ij}}\right)_T$$

Poznati moramo $f(u_{ij})$.

Elastična energija v odv. od u_{ij}

- Do najnižjega netrivialnega reda v u_{ij}, to je drugi del
- Členov prvega reda ne sme biti (stabilno ravnovesje)
- Energija je skalar, torej je lahko odvisna le od skalarjev, ki jih lahko tvorimo iz u_{ij}
- Velja za splošne range. Za u_{ij} sta samo dve možnosti kontrakcije:

$$u_{kk}^2 \qquad u_{ij}^2 = u_{ij} u_{ij}$$ (invarianti na vse rotacije v izotropnem sistemu)

- Torej $\boxed{f(u_{ij}) = f_0 + \frac{1}{2}\lambda u_{kk}^2 + \mu u_{ij}^2}$

λ, μ sta Lamejeva elastična koeficienta

Primer: neizotropni sistem: $\vec{a}$ (npr. polarizacija)

nove invariante: $a_i a_j u_{ij} u_{kk}$, $\frac{1}{2}(a_i a_j u_{ik} u_{jk} + a_i a_j u_{ki} u_{kj})$, $(a_i a_j u_{ij})^2$

- V najsplošnejšem primeru, ko sistem nima več nosece rotacijske simetrije je naš skalar f:

$$f(u_{ij}) = f_0 + \frac{1}{2} K_{ijkl}\, u_{ij}\, u_{kl}$$

splošne elastične konst.

- K_{ijkl} niso povsem poljubni $K_{ijkl} = K_{klij} = K_{jikl} = K_{ijlk}$
- K_{ijkl} izotropne sisteme lahko vsebuje le δ_{ij}

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$$

Hookov zakon

K_{ijkl} mora imeti permutacijsko simetrijo

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u_{ij}} \quad \text{v splošnem} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial u_{ij}} \frac{1}{2} K_{ijkl}\, u_{ij}\, u_{kl} = K_{ijkl}\, u_{kl} = \sigma_{ij}$$

proste en. $\rightarrow$ $f = \frac{1}{2}\lambda u_{kk}^2 + \mu u_{ij}^2 = \frac{1}{2}K \underbrace{u_{kk}^2}_{\text{izotropne deformacije}} + \mu \underbrace{\left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{kk}\delta_{ij}\right)^2}_{\text{brezsledna deformacija}}$

K je stisljivostni modul

μ je strižni modul

$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$

$K>0,\ \mu>0$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij}} \quad \text{Hookov zakon}$$

Hookov zakon s K in μ

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial}{\partial u_{ij}}\left(\frac{1}{2}K u_{kk}^2 + \mu\left(u_{lm} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{lm}\right)^2\right)$$

$$= K u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{lm} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{lm}\right)\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{lm}\right)$$

$$= K u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{9}u_{kk}\, 3\,\delta_{ij}\right)$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = K u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)}$$

Izotropne deformacije $\sigma_{ij} = K u_{kk}\delta_{ij}$ $\quad \sigma_{kk} = 3K u_{kk}$ $\quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

$$\Rightarrow -3p = 3K\frac{\Delta V}{V} \qquad \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K}p \Rightarrow \frac{1}{K} = \chi$$

stisljivost

Strižne deformacije $du_x = \frac{du_x}{dy}dy$ $\quad \sigma_{ij} = 2\mu u_{ij}$ $\quad \sigma_{xy} = 2\mu\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y} = \sigma_{yx}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{F}{S} = \mu\frac{\partial u_x}{\partial y}$

Obratna zveza $u_{ij}(\sigma_{ij})$. Trik, najprej povežemo u_{kk} in σ_{kk}, vzamemo trace

$$\lambda u_{kk} 3 + 2\mu u_{kk} = \sigma_{kk} \Rightarrow u_{kk} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{kk} = \frac{1}{3K}\sigma_{kk}$$

$$\boxed{u_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{9}K\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)$$

Navierova enačba

- To je gibalna enačba in Hookov zakon $\Rightarrow$ gibalne enačbe za $\vec{u}$

$$\rho\ddot{u}_i = \partial_j\sigma_{ij} + f_i^z, \qquad \text{Hooke} \quad \sigma_{ij} = \lambda u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij}$$

$$\rho\ddot{u}_i = \partial_j\left(\lambda u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij}\right) + f_i^z$$

$$= 2\mu\,\partial_j\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\,\partial_i u_{kk} + f_i^z$$

$$= \mu\left(\partial_i\partial_j u_j + \partial_j^2 u_i\right) + \lambda\,\partial_i\partial_k u_k + f_i^z$$

$$= \mu\,\partial_j^2 u_i + (\mu+\lambda)\,\partial_i(\partial_k u_k) + f_i^z$$

$$\boxed{\rho\ddot{\vec{u}} = \mu\nabla^2\vec{u} + \underbrace{(\mu+\lambda)}_{=K+\frac{1}{3}\mu}\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \vec{f}^z}$$

Fundamentalne rešitve statične Navierove enačbe (Greenova funkcija)

$$\nabla^2 \vec{u} + \frac{K+\frac{1}{3}\mu}{\mu} \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = -\frac{\vec{f}^z}{\mu}$$

Greenova funkcija je rešitev v primeru točkaste nehomogenosti.
Zaenkrat velja splošno in za splošno geometrijo.

$$\nabla^2 \vec{u} + \frac{K+1/3\mu}{\mu} \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = -\frac{1}{\mu} \vec{F}^z \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

Če poznamo Greenovo funkcijo, poznamo rešitev za poljubno nehomogenost.
V našem primeru G. F. povezuje $\vec{u}$ in $\vec{f}^z$ in je torej tenzor
$G_{ij}(\vec{r},\vec{r}_0)$, $u_i(\vec{r}) = G_{ij}(\vec{r},\vec{r}_0) F_j^z(\vec{r}_0)$, za poljubno nehomogenost $\vec{f}^z(\vec{r})$

$$u_i(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}_0 \, G_{ij}(\vec{r},\vec{r}_0) f_j^z(\vec{r}_0)$$

Izračunajmo G. F za Navierovo enačbo.
Galerkinov nastavek $\vec{u} = a\nabla^2\vec{g} - b\nabla(\nabla\cdot\vec{g})$ za poljubna a, b

$$\nabla^2\left(a\nabla^2\vec{g} - b\nabla(\nabla\cdot\vec{g})\right) + \frac{K+1/3\mu}{\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\left(a\nabla^2\vec{g} - b\nabla(\nabla\cdot\vec{g})\right)\right) = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

$$a\nabla^2\nabla^2\vec{g} - b\nabla^2\nabla(\nabla\cdot\vec{g}) + \frac{K+1/3\mu}{\mu}\left(a\nabla^2\nabla(\nabla\cdot\vec{g}) - b\nabla^2\nabla(\nabla\cdot\vec{g})\right) = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

$$a\nabla^2\nabla^2\vec{g} + \left(-b + \frac{K+1/3\mu}{\mu}(a-b)\right)\nabla^2\nabla(\nabla\cdot\vec{g}) = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

Izberemo a in b tako da drugi člen odpade

$$-b + \frac{K+1/3\mu}{\mu}(a-b) = 0$$

Naj bo $a=1$ $\Rightarrow$ $b = \dfrac{K+1/3\mu}{K+4/3\mu}$

$$\nabla^2\nabla^2\vec{g} = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

Imamo skalarno enačbo za vsako komponento vektorja $\vec{g}$

$$\nabla^2\nabla^2 u = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \qquad \text{poznamo} \qquad \nabla^2 w = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \Rightarrow w = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\nabla^2 u = w = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

Postavimo izhodišče v $\vec{r} = \vec{r}_0$

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\nabla\cdot\nabla u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r^2}{8\pi} + C$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{8\pi} + \frac{C}{r^2} \qquad C=0 \text{ ker ni singularnosti}$$

$$u = -\frac{r}{8\pi}$$

Splošno $\quad u(\vec{r}) = -\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{8\pi}$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\nabla^2\vec{g} = -\frac{1}{\mu}\vec{F}^\circ\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \qquad \Rightarrow \quad \vec{g}(\vec{r}) = \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{8\pi\mu}\vec{F}^\circ$$

Izračunajmo $\vec{u}$ iz $\vec{g}$

$$\vec{u} = \nabla^2\vec{g} - \frac{K+1/3\,\mu}{K+4/3\,\mu}\nabla(\nabla\cdot\vec{g})$$

$$\nabla^2 g = \frac{1}{\mu}\vec{F}^\circ\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

preverimo $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g_i = \frac{1}{8\pi\mu} F_i^\circ \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2} =$

$$= \frac{F_i^\circ}{8\pi\mu}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)_j}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}} = \frac{F_i^\circ}{8\pi\mu}\left(\frac{3}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}} - \frac{1}{2}(\vec{r}-\vec{r}_0)_j\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_0)_j}{(\vec{r}-\vec{r}_0)^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{F_i^\circ}{8\pi\mu}\left(\frac{3}{\sqrt{\ }} - \frac{1}{\sqrt{\ }}\right) = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{F_i^\circ}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{g})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} g_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{8\pi\mu}F_j^\circ\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)_j}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu}F_j^\circ\delta_{ij}\frac{1}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}} - \frac{1}{8\pi\mu}F_j^\circ(\vec{r}-\vec{r}_0)_j\frac{1}{2}\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_0)_i}{|(\vec{r}-\vec{r}_0)^2|^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu}F_i^\circ\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{1}{8\pi\mu}\left(\vec{F}^\circ\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)\right)\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)_i}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

$$\vec{u}^\circ = \frac{1}{4\pi\mu}\left(\frac{\vec{F}^\circ}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{K+\mu/3}{K+4\mu/3}\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{F}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{(\vec{F}_0\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0))(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu}\frac{1}{K+4\mu/3}\left(\left(K+\frac{4\mu}{3}-\frac{K}{2}-\frac{\mu}{6}\right)\frac{\vec{F}^\circ}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{K+\mu/3}{2}\frac{(\vec{F}_0\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0))(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu}\frac{1}{K+4\mu/3}\left(\left(\frac{K}{2}+\frac{7}{6}\mu\right)\frac{\vec{F}^\circ}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{K+\mu/3}{2}\frac{(\vec{F}_0\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0))(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right)$$

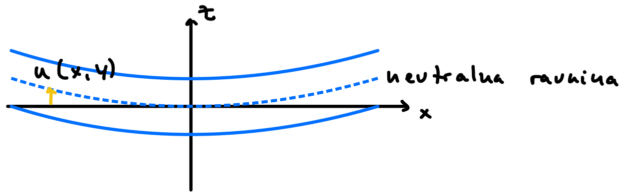
$$= \frac{1}{8\pi\mu}\frac{K+\mu/3}{K+4\mu/3}\left(\frac{K+\frac{7}{3}\mu}{K+\mu/3}\frac{\vec{F}^\circ}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{(\vec{F}_0\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0))(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right)$$

$$u_i^\circ(\vec{r}) = G_{ij}(\vec{r},\vec{r}_0)\,F_j^\circ$$

$$\Rightarrow \quad G_{ij}(\vec{r},\vec{r}_0) = \frac{1}{8\pi\mu}\frac{3K+\mu}{3K+4\mu}\left(\frac{3K+7\mu}{3K+\mu}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\delta_{ij} + \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)_i(\vec{r}-\vec{r}_0)_j}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right)$$

Upogib tankih ravnih plošč

- Tanka: debelina majhna v primerjavi z ostalimi dimenzijami.
- Ravna: upogib v prvem približku ne povzroči raztezanja v ravnini plošče. Če je plošča v ravnovesju ukrivljena, se pri upogibu v splošnem raztegne, in to je glavni efekt
- Majhen upogib: premiki pri upogibu majhni glede na debelino.
- V principu je vse opisano z Navierovo enačbo (ustrezne limite za tanko ploščo) vendar se standardno na novo izpelje iz upogibne energije, ki se jo najprej zapiše v približku 2D plošče.



Nevtralna ravnina: ni raztezkov/skrčkov, pri $z=0$, na sredini plošče

$u(x,y)$ ... premik nevtralne ravnine v xy ravnini v z ravnini

Premike v x in y smeri zanemarimo $u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0$

- Iz predpostavk o napetostih dobimo komponente u_{ij} v celotni plošči (3D plošči).
- Notranje napetosti (raztezanje/krčenje vzdolž plošče) so dosti večje od površinskih obremenitev $\Rightarrow$ površinske obremenitve zanemarimo $\Rightarrow \sigma_{ij} n_j = 0$ $\quad \hat{n} = \hat{e}_z$

  Na površini: $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. Ker je plošča tanka, je to majhno povsod (ne le na površini) proti ostalim σ_{ij}.
- Hooke: $\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{kk}\delta_{ij}\right)$

$$\sigma_{xz} = 0 = \frac{E}{1+\sigma} u_{xz} \qquad \sigma_{yz} = 0 = \frac{E}{1+\sigma} u_{yz} \qquad \sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left((1-2\sigma)u_{zz} + \sigma u_{kk}\right)$$

$$= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left((1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx}+u_{yy})\right) = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y} \qquad \Rightarrow u_z \approx u(x,y)$$

$$\Rightarrow u_x = -\frac{\partial u_z}{\partial x} z + C \qquad u_y = -\frac{\partial u_z}{\partial y} z$$

$C = 0$ ker je premik v izhodišču 0.

Lahko določimo u_{ij}:

$$u_{xx} = -z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u_{yy} = -z\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad u_{xy} = -z\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$u_{xz} = u_{yz} = 0 \qquad u_{zz} = \frac{\sigma}{\sigma-1}(u_{xx}+u_{yy}) = \frac{\sigma}{1-\sigma} z\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

- Energija: $f = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ij}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{kk}^2\right)$ volumska gostota (proste) energije

$$f = \frac{E}{(1+\sigma)} z^2 \left(\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right)$$

- Prosta energija, integral po z smeri $\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{12} h^3$

$$F = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \int dxdy \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + (1-\sigma)\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right)$$

- Ravnovesje: $F(u)$ mora biti minimalen $\Rightarrow$ variacija $\delta F = 0$ (variacija po funkciji in njenih odvodih).
- Če deluje še zunanja sila v z smeri, $P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial S}(x,y)$, mora biti minimalna $F + F_p$, kjer je F_p potencialna energija zunanje sile, $F_p = -\int P \cdot u \, dx\,dy$

$$\delta(F + F_p) = 0 = \delta F - \int dx\,dy\, P\,\delta u$$

- Variacija prvega dela F, $\delta \frac{1}{2}\int dS\, (\nabla^2 u)^2$

$$\delta \frac{1}{2}\int dS\, (\nabla^2 u)^2 = \int dS\, \nabla^2 u\, \nabla^2 \delta u = \int dS\, \nabla^2 u\, \nabla\cdot\nabla\delta u =$$

$$= \int dS\, \nabla\cdot(\nabla^2 u\, \nabla \delta u) - \int dS\, (\nabla\cdot\nabla^2 u)\cdot\nabla\delta u = \dots$$

prepišemo na rob

Teorija: variacija vektorske funkcije $f(u_i, \partial_j u_i)$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial u_i}\delta u_i + \frac{\partial f}{\partial \partial_j u_i}\delta(\partial_j u_i)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_i}\delta u_i + \partial_j\left(\frac{\partial f}{\partial \partial_j u_i}\delta u_i\right) - \left(\partial_j \frac{\partial f}{\partial \partial_j u_i}\right)\delta u_i$$

$$F = \int dV f$$

$$\delta F = \int dV \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u_i} - \partial_j \frac{\partial f}{\partial \partial_j u_i}\right)}_{\text{E-L enačba}} \delta u_i + \oint dS_j \frac{\partial f}{\partial \partial_j u_i}\delta u_i$$

Ponavadi: $\delta F = 0$

$$\dots = \oint dl\, (\overset{\text{normala na rob}}{\hat{n}}\cdot\nabla\delta u)\,\nabla^2 u - \int dS\, \nabla\cdot((\nabla\nabla^2 u)\delta u) + \int dS\, (\nabla^2\nabla^2 u)\delta u =$$

$$= \oint dl\, \frac{\partial \delta u}{\partial n}\nabla^2 u - \oint dl\, (\hat{n}\cdot\nabla\nabla^2 u)\delta u + \int dS\, (\nabla^2\nabla^2 u)\delta u =$$

$$= \oint dl \left(\frac{\partial \delta u}{\partial n}\nabla^2 u - \frac{\partial \nabla^2 u}{\partial n}\delta u\right) + \int dS\, (\nabla^2\nabla^2 u)\delta u = \delta F$$

- Torej, pomembno:
  - Zahteva, da je ničeln površinski del variacije vodi do 2D ravnovesne enačbe za $u(x,y)$.
  - Zahteva, da je ničeln robni del variacije pa do robnih pogojev
- Površinski del variacije

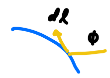
$$\delta F - \int dS\, P\delta u = \int dS\, (D\nabla^2\nabla^2 u - P)\delta u = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D\nabla^2\nabla^2 u(x,y) - P(x,y) = 0} \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

Zlahka dopolnimo do dinamične enačbe

$$-\rho_s \ddot{x} = D\nabla^2\nabla^2 u - P$$

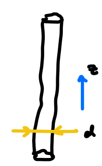
- Pomen robnega dela variacije. Ta je oblike $\delta F = \oint d\ell\, [A]\, \delta u + \oint d\ell\, [D]\, \delta \frac{\partial u}{\partial n}$.
  Če je na robu δu poljuben (rob ni vpet) $\Rightarrow$ mora biti $[A] = 0$
  Če je na robu $\delta \frac{\partial u}{\partial n}$ poljuben (raven rob) $\Rightarrow$ $[D] = 0$.
  $[A]$ je očitno dolžinska gostota zun. sile na rob ploščice
  $[D]$ je očitno dolžinska gostota zun. navora na rob ploščice
  Če je na robu $\delta u = 0$ $\Rightarrow$ $[A]$ v splošnem ni nič, sila podlage,
  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ $\Rightarrow$ $[D]$ navor vpetja
- Primera dovolj preprostih r.p.
  - neurtljivo vpete ploščice: $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ na robu
  - na rob prislonjena ploščica: $u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \frac{d\phi}{d\ell} = 0$ na robu
    $d\phi/d\ell$ odvod smeri kota roba v smeri roba



Tanke palice

- Najprej obravnavamo lokalne razmere pri torziji in upogibu: celotno deformacijsko polje v palici v odvisnosti od torzijskega kota $\tau = \frac{d\phi}{d\ell}$ in krivinskega radija upogiba R.
- Od tod dobimo dolžinsko gostoto deformacijske energije, palica postane 1D krivulja, odvisnost je le še od dolžinskega parametra ℓ.
- Nato zapišemo enačbo za obliko obremenjene palice v odvisnosti od ℓ.
- Premiki so lahko poljubno veliki, saj je palica dolga ("elastični filament")
- Nazadnje uredimo še limito za majhen upogib ravne palice (glede na dolžino palice, smer palice $\approx$ konst.)

Torzija



- Tanka palica, ravna, s poljubnim presekom
- šibka torzija: τ majhen, v smislu $\tau d \ll 1$, d ... debelina palice
- Presek palice pri $z = 0$ naj ne bo zasukan, $\Phi(z=0) = 0$
  Poiščimo $\vec{u}$ v okolici $z = 0$, nato u_{ij}
- V prvem približku se preseki sučejo okrog z osi: $\delta \vec{r} = \delta \vec{\phi} \times \vec{r}$ $\quad \vec{\phi} = \hat{e}_z \phi$
  V okolici $z = 0$, $\delta\phi = \tau z$:
  $$u_x = -\tau z y \qquad u_y = \tau z x$$

- Premiki so tudi v z smeri: $u_z = \tau \psi(x,y)$, $\psi(x,y)$ je torzijska funkcija
- Zapišimo u_{ij}:
  $$u_{xx} = u_{yy} = u_{zz} = u_{xy} = 0 \qquad \Rightarrow \quad u_{kk} = 0$$
  $$u_{xz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \qquad u_{yz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)$$
- Zapišimo σ_{ij}:
  $$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$$
  $$\sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)$$
  $$\sigma_{yz} = \mu\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right)$$

- Ravnovesni pogoj $\partial_j \sigma_{ij} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0$
  $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$ avtomatsko že velja.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0}$$

- Ugodno je vpeljati $\chi(x,y)$ (zadoščale so enostavnejši r.p.)

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial y} \qquad \sigma_{yz} = -2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = y + 2\frac{\partial \chi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -x - 2\frac{\partial \chi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 1 + 2\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = -1 - 2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

$$0 = 2 + 2\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -1}$$

- Robni pogoji: napetosti na plašči palice zanemarljive proti ostalim notranjim napetostim $\Rightarrow \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y = 0$, $n_z = 0$

Izraženo s χ: $\frac{\partial \chi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \chi}{\partial x} n_y = 0$

- Normalo na rob izrazimo z vektorjem $d\vec{l} = (dx, dy)$ vzdolž roba

$$\hat{n} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{n} = \frac{(dy, -dx)}{dl}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial x} dy = d\chi = 0 \qquad \chi \text{ je na robu konst.}$$

- Če imamo le en rob, lahko $\chi = 0$ na robu.

- Energija: $f = \frac{1}{2}\sigma_{ij} u_{ij}$, namreč $df = \sigma_{ij}(u_{ij})\, du_{ij}$

$$\sigma_{ij}(u_{ij}) \text{ lin. funkcija} \Rightarrow f = \int_0^{u_{ij}} \sigma_{ij}(u_{ij})\, du_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij} u_{ij}$$

$$f = \frac{1}{2}\sigma_{ij} u_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{xz}u_{xz} + \sigma_{zx}u_{zx} + \sigma_{yz}u_{yz} + \sigma_{zy}u_{zy}) =$$

$$= \sigma_{xz}u_{xz} + \sigma_{yz}u_{yz} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) = 2\mu\tau^2\left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2\right)$$

$$= 2\mu\tau^2(\nabla\chi)^2$$

$$\Rightarrow F = \int dz\, dS\, f = \int dz\, dS\, 2\mu\tau^2(\nabla\chi)^2 = \frac{1}{2} C \int \tau^2 dz$$

$$\boxed{C = 4\mu \int (\nabla\chi)^2 dS}$$ torzijski modul palice

Predelajmo C: $(\nabla\chi)^2 = \nabla\cdot(\chi\nabla\chi) - \chi\nabla^2\chi$

Torej $(\nabla\chi)^2 = \nabla\cdot(\chi\nabla\chi) - \chi\underbrace{\nabla^2\chi}_{-1} = \nabla\cdot(\chi\nabla\chi) + \chi$

$$\Rightarrow C = 4\mu\left(\int dS\, \nabla(\chi\nabla\chi) + \int dS\, \chi\right) =$$

$$= 4\mu\left(\oint dl\, \hat{n}\nabla\chi + \int \chi\, dS\right) = 4\mu\int \chi\, dS$$

χ = konst na robu

Še ilustracija za $\tau = \text{konst.} = \frac{\phi}{l} \Rightarrow F = \frac{1}{2}C\int \tau^2 dz = \frac{C\phi^2}{2l}$

$M = \frac{dF}{d\phi} = \frac{c}{\ell}\phi = D\phi$, $D = \frac{c}{\ell}$ navor

Za $\tau = \frac{d\phi}{dz}$

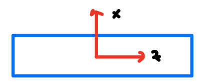
$$F = \frac{1}{2}c\int \tau^2 dz = \frac{1}{2}c\int \left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 dz$$

Variiramo $\delta F = c\int dz \frac{d\phi}{dz}\,\delta\frac{d\phi}{dz} = c\int dz \frac{d}{dz}\left(\frac{d\phi}{dz}\delta\phi\right) - c\int dz\left(\frac{d}{dz}\frac{d\phi}{dz}\right)\delta\phi =$

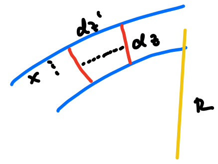
$$= c\frac{d\phi}{dz}\delta\phi\Big|_1^2 - c\int dz\underbrace{\frac{d^2\phi}{dz^2}}_{=0}\delta\phi = c\tau\,\delta\phi\Big|_{z_2} - c\tau\,\delta\phi\Big|_{z_1}$$

Upogib

- Obstaja nevtralna ploskev v kateri ni vzdolžnega razt. / skrčka, na eni strani raztezek na drugi skrček
- Obravnavamo upogib majhnega dela palice, ki je šibko upognjen, premik majhen glede na debelino.
- Dobiti želimo 3D lokalno def. polje
- Izhodišče v nevtralni ravnini koščka, os z v smeri palice, upogib v xz ravnini



- Zunanje sile na plašč so spet zanemarljive proti notranjim in ker je tanka, so zanemarljive tudi znotraj ⇒ neničelna samo σ_{zz}.
- Določimo ta raztezek



$$dz' = \frac{R+x}{R}dz$$

$$\frac{dz'-dz}{dz} = \frac{x}{R} = u_{zz} \Rightarrow \sigma_{zz} = E u_{zz} = E\frac{x}{R}$$

- Določimo lego nevtralne ploskve
  Naj bo celotna sila na presek (mora biti) nič.

$\int \sigma_{zz}\, dS = 0 \Rightarrow \int dS\, x = 0 \Rightarrow$ nevtralna ploskev gre skozi središče preseka

- Določimo celotno def. polje: $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$

Torej $u_{zz} = \frac{x}{R}$ $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma\frac{x}{R}$

$$2u_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \qquad u_{xy} = 0 \qquad u_{zy} = 0 \ldots$$

Integriramo $u_x = -\frac{1}{2R}\left(z^2 + \sigma(x^2 - y^2)\right)$, $u_y = -\frac{\sigma}{R}xy$, $u_z = \frac{1}{R}xz$

Integracijske konstante so postavljene na nič, tako da se izhodišče ne premakne

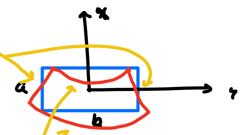
Poglejmo, kako to izgleda
- presek $z = konst = z_0 \longrightarrow z_0 + u_z = z_0\left(1 + \frac{x}{R}\right)$
  ⇒ ostane raven (linearno v x) a ravno nagnjen

Oblika preseka (premik v xy ravnini)

- $y = \pm \frac{b}{2} \rightarrow y = \pm \frac{b}{2} + u_y = \pm \frac{b}{2}\left(1 - \frac{\sigma x}{R}\right)$

$\Rightarrow$ Nič več vzporedni, še vedno ravni

- $x = \pm \frac{a}{2} \rightarrow x = \pm \frac{a}{2} + u_x = \pm \frac{a}{2} - \frac{1}{2R}\left(z_0^2 + \sigma\left(\frac{x^2}{4} - y^2\right)\right)$



$\Rightarrow$ Posledično odvisnost od y

Energija: $f = \frac{1}{2}\sigma_{ij} u_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{zz} u_{zz} = \frac{1}{2} E \frac{x^2}{R^2}$

$\frac{F}{\ell} = \frac{1}{2}\frac{E}{R^2}\int x^2 \, dS$ $\qquad \int x^2 dS = I_y$ $\qquad$ 2. moment, podoben 2. vztrajnostnemu k da ni mase.

$= \frac{1}{2}\frac{E I_y}{R^2}$

Navor na presek
okrog y osi $\quad M_y = \pm\int \sigma_{zz}\, x \, dS = \frac{E}{R}\int x^2 dS = \frac{E I_y}{R}$

$M_x = \pm\int dS\, \sigma_{xz}\, y = \frac{E}{R}\int xy\, dS = \frac{E}{R} I_{xy}$

Vidimo:
- če upogib ni okrog lastne osi I potem navor potreben zanj ni v isti smeri kot upogiba
- oz. obratno: palica se ne upogne v smeri navora

Splošna def. momenta
$$I_{ij} = \int dS\,(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$$

- Sedaj poznamo energijo torzije na dolžinsko enoto in energijo upogiba na dolžinsko enoto.
- Lahko predelamo na 1D elastični filament, ki ga v celoti opišemo s tangento $\vec{t}(\ell)$ (enotska tangenta) in $\tau(\ell)$ (torzijski kot).
- V primeru ko $I_1 \neq I_2$ je pri upogibu komplikacija, pomembno je, v kateri smeri gleda na lastni sistem I kaže vektor ukrivljenosti $d\vec{t}/d\ell$.

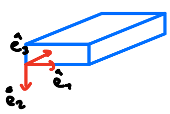
Energija elastičnega filamenta

- Deformacija filamenta je podana z $\frac{d\vec{t}}{d\ell}(\ell)$ in $\tau(\ell)$, upogib in torzija.
- Definirajmo trirob (triada) $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
- Energijo izrazimo z $\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\Phi}}{d\ell}$

$d\vec{\Phi}$ je infinitez. rotacija sosednjih trirobov

$\vec{\Omega}$ je "hitrost" sukanja triroba

Energija bo kvadratna v $\vec{\Omega}$.



$\hat{e}_3 = \vec{t}$ v smeri palice

$\hat{e}_1, \hat{e}_2$ v last. smereh

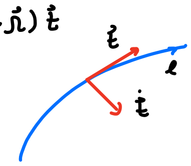
- Jasno je, da je $\Omega_3 = \tau$ (torzija)
- Upogib, $\frac{d\vec{t}}{d\ell}$ je vektor ukrivljenosti, definira smer glavne normale njegove velikost je $\left|\frac{d\vec{t}}{d\ell}\right| = \frac{1}{R}$. To je "hitrost" obračanja tangente, zapišimo jo z $\vec{\Omega}$.

$$\frac{d\vec{t}}{d\ell} = \vec{\Omega}\times\vec{t} \qquad \text{standardna rotacija vektorja}$$

Izraziti želimo $\vec{\Omega}$, vektorsko množimo s $\vec{t}$

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) = (\vec a\cdot\vec c)\,\vec b - (\vec a\cdot\vec b)\,\vec c$$

$$\vec t \times \frac{d\vec t}{dl} = \vec t \times (\vec\Omega \times \vec t) = t^2\vec\Omega - (\vec t\cdot\vec\Omega)\,\vec t = \vec\Omega - (\vec t\cdot\vec\Omega)\,\vec t$$



$$\vec\Omega = \underbrace{\vec t \times \frac{d\vec t}{dl}}_{\text{smer binormale}} + \underbrace{(\vec t\cdot\vec\Omega)}\,\vec t$$

vzdolžna komponenta, torzija $\tau\vec t$

⊗ binormala

kotna hitrost upogiba

- Energija je kvadratna v komponentah $\vec\Omega$, torej se izraži s členi $\Omega_i\Omega_j$. Členov $\Omega_1\Omega_3$ in $\Omega_2\Omega_3$ ne more biti, če je filament homogen v vzdolžni smeri (invarianten na $\hat e_3 \to -\hat e_3$), saj pri $\hat e_3 \to -\hat e_3$ spremenita predznak.
  - Za $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ imamo le torzijo, njeno en. poznamo

$$\frac{F}{l} = \frac12 c\tau^2 = \frac12 c\,\Omega_3^2$$

  - Za upogib okrog y osi smo imeli

$$\frac{F}{l} = \frac12 \frac{E I_y}{R^2} = \frac12 E I_y \Omega_2^2$$

  - Za upogib okrog splošne osi v ravnini $(\hat e_1, \hat e_2)$:

$$\frac{F}{l} = \frac12 E\,(I_{11}\Omega_1^2 + 2 I_{12}\Omega_1\Omega_2 + I_{22}\Omega_2^2)$$

Ker sta $\hat e_1, \hat e_2$ v lastnih smereh je $I_{12} = 0$

$$\frac{F}{l} = \frac12 E\,(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2)$$

- Torej energija elastičnega filamenta $F = \int dl\left(\frac12 E I_1\Omega_1^2 + \frac12 E I_2\Omega_2^2 + \frac12 c\,\Omega_3^2\right)$
- Navor na presek filamenta $F = \int dl\, f(\Omega_i)$

$$\delta F = \int dl\, \frac{\partial f}{\partial\, d\phi_i/dl}\,\delta\frac{d\phi_i}{dl} = \int dl\left(\frac{d}{dl}\left(\frac{\partial f}{\partial\, d\phi_i/dl}\,\delta\phi_i\right) - \left(\frac{d}{dl}\frac{\partial f}{\partial\, d\phi_i/dl}\right)\delta\phi_i\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial\, d\phi_i/dl}}_{M_i}\,\delta\phi_i\Big| - \int dl\left(\frac{d}{dl}\frac{\partial f}{\partial\, d\phi_i/dl}\right)\delta\phi_i$$

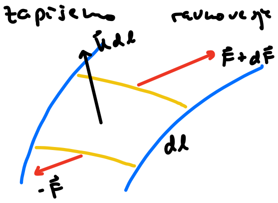
navor

$M_i = \dfrac{\partial f}{\partial\Omega_i}$ navor na poljuben presek

Komponente navora na presek filamenta so torej $M_i = \dfrac{\partial f}{\partial\Omega_i}$

$$M_1 = E I_1\Omega_1 \qquad M_2 = E I_2\Omega_2 \qquad M_3 = C\Omega_3 = c\tau$$

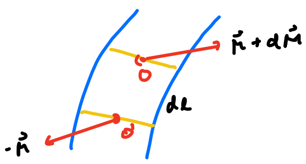
- Navor na presek in kinematika $\left(\frac{d\vec t}{dl}, \tau\right)$ sta direktno povezana. Elastomehanika nam je povedala kako točno sta povezana, I_i, c.
- Sedaj lahko zapišemo ravnovesje sil in navorov na koščkih dl. (Kirchhoffova teorija filamenta)
- Ravnovesje sil



$\vec F$ je sila na prečni presek, to je $F_i = \int dS_j\,\sigma_{ij}$. $\vec K dl$ je morebitna zunanja sila na koščkih

$$\vec F + d\vec F - \vec F + \vec u\, dl = 0$$
$$\frac{d\vec F}{dl} + \vec u = 0$$

- Ravnovesje navorov



$\vec M$ je upogibni in torzijski navor na presek. Torej navor okrog središča preseka (točki O, O'). Navor teh dvojic sil ($\int dS\, \sigma_{ij} = 0$) je sicer neodvisen od izhodišča. Je pa navor množitev neto sile na presek ($\vec F$) glede na središče preseka O'. Tudi navor $\vec u\, dl$ je drugega reda.

Npr okrog O'
$$\vec M + d\vec M - \vec M + d\vec l \times (\vec F + d\vec F) = 0$$
$$d\vec M + d\vec l \times \vec F = 0 \qquad / dl$$
$$\frac{d\vec M}{dl} + \vec t \times \vec F = 0$$

- Enačbe so pregledne, če je $I_1 = I_2 = I$ (pravilno v kotnih)
$\Rightarrow (M_1, M_2) = EI(\Omega_1, \Omega_2)$, $(\Omega_1, \Omega_2, 0) = \vec t \times \dot{\vec t}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec M = C\tau \vec t + EI\, \vec t \times \dot{\vec t} \\ &\frac{d\vec M}{dl} + \vec t \times \vec F = 0 \\ &\frac{d\vec F}{dl} + \vec u = 0 \end{aligned}}$$

- V tem primeru upogib ne povzroča torzije. Obratno obstoji torzijska nestabilnost.

$$\frac{d}{dl}(\vec M \cdot \vec t) = \frac{d\vec M}{dl}\cdot \vec t + \vec M \frac{d\vec t}{dl} = \underbrace{-(\vec t \times \vec F)\cdot \vec t}_{=0} + (C\tau \vec t + EI\, \vec t \times \dot{\vec t})\cdot \dot{\vec t} =$$
$$= C\tau\, \vec t \cdot \dot{\vec t} + EI\, \underbrace{(\vec t \times \dot{\vec t})\cdot \dot{\vec t}}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{d\tau}{dl} = 0 \Rightarrow \tau = \text{konst.}$$

Če na začetku filamenta ni torzijskega navora, je tam $\tau = 0$ in je torej $\tau = 0$ povsod.

- Za $I_1 = I_2 = I$ lahko imamo torej tudi samo upogib, za poljuben upogib.
V tem primeru lahko pišemo
$$\vec M = EI\, \vec t \times \dot{\vec t} \qquad \frac{d\vec M}{dl} + \vec t \times \vec F = 0$$
$$\Rightarrow EI\, \vec t \times \ddot{\vec t} + \vec t \times \vec F = 0$$

Majhen upogib

- Smer (tangenta) palice se le malo spremeni. Od tod sledi tudi, da so premiki majhni glede na dolžino, vendar je to le potrebni pogoj.
- Izhajamo iz $\frac{d\vec F}{dl} + \vec u = 0$ in $\frac{d\vec M}{dl} + \vec t \times \vec F = 0$
$$\hookrightarrow \frac{d^2\vec M}{dl^2} + \vec t \times \frac{d\vec F}{dl} + \frac{d\vec t}{dl} \times \vec F = 0$$
- $\vec t = \hat e_z$
$$\Rightarrow \frac{d}{dl} \approx \frac{d}{dz} \qquad dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dx}{dz})^2+(\frac{dy}{dz})^2}} = 1 + \sigma(\dots)$$

$\Rightarrow$ $dz = dl$ v 1. redu prečnih odmikov x, y

- Zapišimo tangento : $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{d\vec{r}}{dz}\frac{dz}{dl} = \frac{d\vec{r}}{dz} = \left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, 1\right) = (\dot{x}, \dot{y}, 1)$
- Kinematika : • $\vec{t} \times \dot{\vec{t}} = \left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, 1\right) \times \left(\frac{d^2x}{dz^2}, \frac{d^2y}{dz^2}, 0\right)$

$$= \left(-\frac{d^2y}{dz^2}, \frac{d^2x}{dz^2}, \underbrace{\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}}_{2.\text{ reda } \approx 0}\right) \doteq (-\ddot{y}, \ddot{x}, 0)$$

$\Rightarrow \Omega_1 = -\ddot{y} \quad \Omega_2 = \ddot{x}$

- Navor • $\vec{M} = E(-I_1\ddot{y}, I_2\ddot{x}, 0)$ $\qquad x, y$ morata biti v lastnih smereh

- $\frac{d\vec{M}}{dl} + \vec{t}\times\vec{F} = 0 \qquad \vec{t}\times\vec{F} = (\dot{x}, \dot{y}, 1)\times(F_x, F_y, F_z) = (\dot{y}F_z - F_y, F_x - \dot{x}F_z, \underbrace{\dot{x}F_y - \dot{y}F_x}_{2.\text{ red v odmikih} = 0})$

• $EI_2\dddot{x} + F_x - \dot{x}F_z = 0$

$EI_1\dddot{y} + F_y - \dot{y}F_z = 0$

ponovno odvajamo

• $EI_2 x^{(4)} - \ddot{x}F_z - \dot{x}\dot{F}_z - k_x = 0 \qquad \frac{d\vec{F}}{dl} + \vec{k} = 0 \Rightarrow \dot{F}_x = -k_x$

$EI_1 y^{(4)} - \ddot{y}F_z - \dot{y}\dot{F}_z - k_y = 0$

Elastično valovanje

- V izotropnem, neomejenem sredstvu
- Dinamična Navierova enačba je praktično že valovna enačba

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla\nabla\cdot\vec{u}\right) \qquad E, \sigma \text{ tokrat adiabatna namesto izotermnih}$$

Upoštevamo identiteto $\nabla\nabla\cdot\vec{u} = \nabla^2 u + \nabla\times\nabla\times\vec{u}$, znebimo se ∇^2, ker bomo rešitev sestavili iz brezizvirnega in brezvrtinčnega dela

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(-\nabla\times\nabla\times\vec{u} + \frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)}\nabla\nabla\cdot\vec{u}\right)$$

Nastavek ravnega vala $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$. Po Helmholtzovem izreku lahko $\vec{u}$ razdelimo na $\vec{u} = \vec{u}_T + \vec{u}_L$, $\nabla\cdot\vec{u}_T = 0$, $\nabla\times\vec{u}_L = 0$

$$\vec{u}_T = \vec{u}_{T0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_T t)} \qquad \nabla\cdot\vec{u}_T = i\vec{k}\cdot\vec{u}_{T0} = 0 \qquad \vec{k}\perp\vec{u}_{T0}$$
$$\vec{u}_L = \vec{u}_{L0}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_L t)} \qquad \nabla\times\vec{u}_L = i\vec{k}\times\vec{u}_{L0} \qquad \vec{k}\parallel\vec{u}_{L0}$$

$\vec{u}_T$ je $\perp\vec{k}$, transverzalni val, $\vec{u}_L$ je $\parallel\vec{k}$, longitudinalni val.

$$\rho(\ddot{\vec{u}}_T + \ddot{\vec{u}}_L) = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\nabla^2 u_T + \frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)}\nabla^2 u_L\right)$$

$$\rho(-\omega_T^2\vec{u}_T - \omega_L^2\vec{u}_L) = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(-k^2\vec{u}_T - \frac{2(1-\sigma)}{(1-2\sigma)}k^2\vec{u}_L\right)$$

Pri danem $\vec{k}$ sta $\vec{u}_T\perp\vec{u}_L$, tako da lahko v vsakem primeru, zato lahko zapišemo ločeni enačbi.

$$-\rho\omega_T^2\vec{u}_T = -\frac{E}{2(1+\sigma)}k^2\vec{u}_T \Rightarrow \omega_T^2 = \overbrace{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}^{c_T^2}k^2$$

$$-\rho\,\omega_L^2\,\vec{u}_L = -\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,k^2\,\vec{u}_L \quad\Rightarrow\quad \omega_L^2 = \underbrace{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}_{c_L^2}\,k^2$$

Razmerje hitrosti

$$\left(\frac{c_T}{c_L}\right)^2 = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\,, \qquad 0 \le \left(\frac{c_T}{c_L}\right)^2 \le \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad c_L > c_T$$

Alternativno $\quad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}\,, \quad c_L^2 = \frac{K + 4/3\,\mu}{\rho}$

Zaradi preglednosti zapišimo še valovni enačbi obeh valovanj

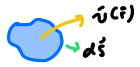
$$\ddot{\vec{u}}_T - c_T^2\,\nabla^2\vec{u}_T = 0$$
$$\ddot{\vec{u}}_L - c_L^2\,\nabla^2\vec{u}_L = 0$$

Navierova en. in Hookov zakon s c_T in c_L namesto E, σ.

$$\ddot{\vec{u}} = -c_T^2\,\nabla\times\nabla\times\vec{u} + c_L^2\,\nabla\,\nabla\cdot\vec{u}$$
$$\sigma_{ij} = 2\rho\,c_T^2\,u_{ij} + \rho\,(c_L^2 - 2c_T^2)\,u_{kk}\,\delta_{ij}$$

Hidrodinamika

- Spremenljivke so polja, s katerimi opišemo tekoči kontinuum.
  $\vec v(\vec r,t)$ in 2 termodinamični količini, npr. $p(\vec r,t)$, $\rho(\vec r,t)$
- kontinuitetna enačba za maso



$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\overbrace{\oint \rho\vec v\cdot d\vec S}^{\text{pretok}} = -\int dV\, \nabla(\rho\vec v)$$

$$\int dV\Big(\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\cdot\vec v)}_{=0}\Big)=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec v)=0 \qquad \text{velja povsod}$$

Primer: kont. en. za gib. kol. $\frac{\partial \vec g}{\partial t} + \nabla\cdot\Pi = 0$ Π_{ij} je tenzor gostote toka gib. kol.

Napej $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot\vec v + \rho\nabla\vec v = 0$ za ρ = konst $\Rightarrow$ $\nabla\vec v=0$

Eulerjeva enačba (Newtonov zakon za idealno tekočino)

- Idealna tekočina: ni izgube mehanske energije (disipacije), viskoznost in toplotna prevodnost morata biti zanemarljivi
- V splošnem: idealna tekočina je v termodinamskem ravnovesju, ne zgolj v lokalnem termodin. ravnovesju (velja enačba stanja), v tem more biti tudi neidealna, ampak morajo biti zanemarljivi tudi vsi transportni pojavi (npr. transport gib. kol. zaradi viskoznosti, toplote zaradi toplotne prevodnosti)
- Ravnovesje: spremembe morajo biti adiabatne, to je substancialni odvod entropije je nič.
- Newtonov zakon na enoto prostornine: $\rho\overset{\text{substancialni odvod}}{\frac{d\vec v}{dt}} = \nabla\cdot\sigma + \vec f_z$

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho\frac{d\vec v}{dt} = -\nabla p + \vec f_z}$$

Razpišimo totalni odvod $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec v\cdot\nabla$

$$\Rightarrow \quad \rho\Big(\frac{\partial\vec v}{\partial t} + (\vec v\cdot\nabla)\vec v\Big) = -\nabla p + \vec f_z$$

- Če gibanje ni le adiabatno $\left(\frac{ds}{dt}=0\right)$, ampak celo izentropno (s = konst. = $\frac{dS}{dm}$ spec. entropija), lahko $\frac{\nabla p}{\rho}$ izrazimo z gradientom specifične entalpije $h = \frac{dH}{dm}$

$$dH = TdS + Vdp \quad /dm \Rightarrow dh = T\underset{0}{\underset{\shortparallel}{ds}} + \frac{dp}{\rho} \Rightarrow dh = \frac{dp}{\rho} \Rightarrow \nabla h = \frac{\nabla p}{\rho}$$

V tem primeru se Eulerjeva enačba polepša

$$\frac{\partial\vec v}{\partial t} + (\vec v\cdot\nabla)\vec v = -\nabla h + \vec f^z$$

V h vključimo vse potenciale, npr. gravitacijski (gz), električni, ...

$$\frac{\partial\vec v}{\partial t} + (\vec v\cdot\nabla)\vec v = -\nabla h \qquad \text{uporabimo identiteto} \quad \frac{1}{2}\nabla v^2 = \vec v\times(\nabla\times\vec v) + (\vec v\cdot\nabla)\vec v$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right)}$$ delujemo z $\nabla \times$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{v} = \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}))}$$ nastopa le hitrostno polje

- Pomemben izsledek: če je $\nabla \times \vec{v} = 0$, bo tako tudi ostalo. Brezvrtinčno polje bo ostalo brezvrtinčno.

$\Rightarrow$ brezvrtinčni tok $(\nabla \times \vec{v} = 0) \Rightarrow \vec{v} = \nabla \phi$ potencialni tok

V nestisljivem primeru $\nabla \cdot \vec{v} = 0 = \nabla^2 \phi$ je potencialni tok odvisen le še od robnih pogojev, in zato je nestacionaren tok le, če se te spreminjajo s časom

Helmholtzova enačba za vrtinčnost

Identiteta: $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{a} (\nabla \vec{b}) - \vec{b} (\nabla \cdot \vec{a})$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{v} = \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}))$$ $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ vrtinčnost

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega})$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} + \vec{v} \overbrace{(\nabla \vec{\omega})}^{=0} - \vec{\omega} \, \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{v})$$ v nestisljivem primeru $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$\boxed{\frac{d \vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}}$$

Bernoullijeve enačbe

prvi integral Eulerjeve enačbe (ohranitev energije)

- V se sledi iz enačbe $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right)$, $h = h_0 + gz + \ldots$
- Če je tok brezvrtinčen, $\nabla \times \vec{v} = 0$, $\vec{v} = \nabla \phi$

$$\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \Rightarrow \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + h \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + h = f(t)}$$ ni odvisen od kraja

- Če je tok stacionaren in brezvrtinčen $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2} v^2 + h = \text{konst}}$

- Če je tok stacionaren in v splošnem vrtinčen tok

$$\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 + h = \text{konst.}$$ vzdolž tokovnice

$$(\nabla \times \vec{v}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} v^2 + h = \text{konst.}$$ vzdolž vrtinčnice

Kelvinov teorem - Ohranitev cirkulacije

- Cirkulacija ni vrtinčnost. Cirkulacija (ostekanje) vektorskega polja, v tem primeru hitrostnega.

$$\Gamma = \oint d\vec{l} \cdot \vec{v}$$

- Teorem velja za izotropni tok idealne tekočine in pravi, da je totalni odvod cirkulacije 0, torej da je Γ zmeraj celi s tokom

$\frac{d}{dt}\oint d\vec{l}\cdot\vec{v} =$ odvajati moramo $\vec{v}$ kot tudi krivuljo ($d\vec{l} = \delta\vec{r}$)

$$= \frac{d}{dt}\oint \delta\vec{r}\cdot\vec{v} = \oint \delta\vec{r}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \oint \frac{d\,\delta\vec{r}}{dt}\cdot\vec{v} =$$

$$= \oint \delta\vec{r}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \oint \delta\vec{v}\cdot\vec{v} = \oint \delta\vec{r}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\oint \delta\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)}_{=0}$$ po zaklj. zanki

Torej imamo $\frac{d}{dt}\oint \delta\vec{r}\cdot\vec{v} = \oint \delta\vec{r}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$ vstavimo Eulerjevo enačbo za izentropni tok $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla h$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\oint \delta\vec{r}\cdot\vec{v} = -\oint \delta\vec{r}\cdot\nabla h \overset{\text{Stokes}}{=} -\int d\vec{S}\cdot\nabla\times(\nabla h) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\oint \delta\vec{r}\cdot\vec{v} = 0,$$ $\oint \delta\vec{r}\cdot\vec{v}$ se seli s tokom

- Na primer: za infinitezimalno zanko $\oint d\vec{l}\cdot\vec{v} = \int d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{v}) = \delta\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{v}) = \text{konst.}$, ne pomeni, da je $\nabla\times\vec{v} = \text{konst.}$, ker se lahko spremeni tudi $\delta\vec{S}$

Obtekanje s potencialnim tokom

- Potencialni tok, $\nabla^2\phi = 0$, $\vec{v} = \nabla\phi$, $\nabla\cdot\vec{v} = 0$
- Razlog: zahteva $\nabla\times\vec{v} = 0$ je le potrebni pogoj za obstoj potenciala ϕ in omogoča lokalno izražavo $\vec{v} = \nabla\phi$. V enostavno povezanem obm. je to tudi zadostni pogoj. Vendar ovira v toku naredi območje po def. neenostavno povezano (za 2D). Splošni zadosten pogoj za obstoj pot. ϕ, je, da je cirkulacija po vsaki sklenjeni krivulji 0, to je jasno:

$$\oint d\vec{r}\cdot\vec{v} = 0, \quad \text{torej} \quad \oint d\vec{r}\cdot\nabla\phi = 0 = \phi_{\text{konec}} - \phi_{\text{začetek}}$$

- Pogoju, da cirkulacije ni, v realnem ne moremo kar tako zadostiti
- Stvar je analogna magnetnemu polju okrog vodnika s tokom:
  $\vec{v} \leftrightarrow \vec{H}$, $\nabla\times\vec{v} \leftrightarrow \nabla\times\vec{H} = \vec{j}$
- Premikamo objekt, koordinatni sistem je pripet na objekt, gledamo rešitko v tekočini v danem trenutku
- Rešitev Laplaceove enačbe, $\phi = \overset{\text{monopol}}{-\frac{a}{4\pi r}} + \overset{\text{dipol}}{\vec{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{4\pi r}\right)} + \ldots$, saj če je $\nabla^2\phi_0 = 0$, potem je tudi $\nabla^2\nabla\phi_0 = \nabla\nabla^2\phi_0 = 0$, torej $\vec{A}\cdot\nabla\,\nabla^2\phi_0 = 0$, za $\forall\vec{A}$, ali pa $\nabla^2\partial_i\partial_j\phi_0 = \partial_i\partial_j\nabla^2\phi_0 = 0$, torej $A_{ij}\partial_i\partial_j\nabla^2\phi_0 = 0$
- Monopol ne pride v poštev, ker predstavlja izvir

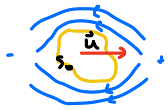
$$\oint d\vec{S}\cdot\nabla\phi = 4\pi r^2\frac{a}{4\pi r^2} = a$$

- Dipol in višji: dipol je intuitiven 
- Vzemimo le dipolni člen

$$\phi = \frac{1}{4\pi}\vec{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{A}\cdot\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{v} = \nabla\phi = \frac{1}{4\pi}(\vec{A}\cdot\nabla)\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi}(\vec{A}\cdot\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3} =$$

$$= -\frac{\vec{A}}{4\pi r^3} + \frac{1}{4\pi}\vec{r}\left(\vec{A}\cdot 3\frac{\vec{e}_r}{r^4}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{3(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{A}}{4\pi r^3}$$

- Kinetična en. W_k tekočine 

$W_k = \frac{1}{2}\int \rho v^2\, dV$ po tekočini, izven telesa, do sfere z radijem R, nato $R\to\infty$

$$\int dV\, v^2 = \int dV\, u^2 + \int dV\, (\vec v+\vec u)\cdot(\vec v-\vec u)$$

$\vec v + \vec u = \nabla(\phi + \vec u\cdot\vec r)$, nato

$$\nabla\cdot\big((\phi+\vec u\cdot\vec r)(\vec v-\vec u)\big) = \nabla(\phi+\vec u\cdot\vec r)\cdot(\vec v-\vec u) + (\phi+\vec u\cdot\vec r)\,\nabla\cdot(\overset{0 \text{ predpostavka}}{\vec v} - \underset{u=\text{konst}}{\vec u})$$

$$\Rightarrow \int dV\, v^2 = \int dV\, u^2 + \int dV\,(\vec v+\vec u)\cdot(\vec v-\vec u) = u^2(V-V_0) + \int dV\, \nabla\cdot\big((\phi+\vec u\cdot\vec r)(\vec v-\vec u)\big)$$

$$= u^2(V-V_0) + \oint_{S_0,S} d\vec S\,(\vec v-\vec u)(\phi+\vec u\cdot\vec r)$$

na S_0 mora $d\vec S(\vec u-\vec v)=0$
$u_\perp = v_\perp$

$$= u^2(V-V_0) + \int_S \overset{dS\,\hat e_r \text{ po sferi}}{d\vec S}\cdot\left(\frac{3(\vec A\cdot\hat e_r)\hat e_r - \vec A}{4\pi r^3} - \vec u\right)\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\vec A\cdot\hat e_r}{r^2} + r\,\vec u\cdot\hat e_r\right)$$

$$= u^2(V-V_0) + \int_S dS\left(\frac{3\vec A\cdot\hat e_r - \vec A\cdot\hat e_r}{4\pi r^3} - \vec u\cdot\hat e_r\right)\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\vec A\cdot\hat e_r}{r^2} + r\,\vec u\cdot\hat e_r\right)$$

$$= u^2(V-V_0) + \int_S dS\left(\underbrace{\frac{2\vec A\cdot\hat e_r}{4\pi r^3}\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{\vec A\cdot\hat e_r}{r^2}}_{\frac{1}{r^5}\ \to 0} + \frac{2\vec A\cdot\hat e_r}{4\pi r^3}\, r\,\vec u\cdot\hat e_r + \vec u\cdot\hat e_r\,\frac{1}{4\pi}\frac{\vec A\cdot\hat e_r}{r^2} - r(\vec u\cdot\hat e_r)^2\right)$$

$dS = d\Omega\, r^2$

$$= u^2(V-V_0) + \int_S d\Omega\left(\frac{3}{4\pi}(\vec A\cdot\hat e_r)(\vec u\cdot\hat e_r) - r^3(\vec u\cdot\hat e_r)^2\right) = \ldots$$

Velja: $\int d\Omega\,(\vec a\cdot\hat e_r)(\vec b\cdot\hat e_r) = 4\pi\,\overline{(\vec a\cdot\hat e_r)(\vec b\cdot\hat e_r)} = 4\pi\, a_i b_j\, \overline{e_r^i e_r^j} = 4\pi a_i b_j \frac{1}{3}\delta_{ij} = \frac{4\pi}{3}\vec a\cdot\vec b$

Namreč $\overline{e_r^i e_r^j} = 0$ $\quad i\neq j$ $\quad$ vse smeri enake

$e_r^2 = 1 = e_{rx}^2+e_{ry}^2+e_{rz}^2 = \overline{e_{rx}^2}+\overline{e_{ry}^2}+\overline{e_{rz}^2} = 3\cdot\frac{1}{3} = 1$

$$\ldots = u^2(V-V_0) + \frac{3}{4\pi}\frac{4\pi}{3}\vec A\cdot\vec u - \frac{4\pi}{3}R^3u^2$$

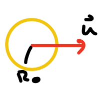
$$= u^2(V-V_0) + \vec A\cdot\vec u - V u^2 = \vec A\cdot\vec u - V_0 u^2$$

$\Rightarrow \boxed{W_k = \frac{1}{2}\rho\,(\vec A\cdot\vec u - V_0 u^2)}$ $\quad V_0$ volumen ovire

$\vec A$ je lin. odvisen od $\vec u$, sledi

$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m_{ij}\, u_i u_j}$, kjer je m_{ij} konst. sim. tenzor inducirane mase

- Tako dodatno maso telesa občutimo pri pospeševanju v tekočini.
Za kroglo kjer $\vec F \parallel \vec u$, izkaže se, da je $m_{ij} = \frac{1}{2}\rho V\cdot\frac{1}{2}\delta_{ij}$



$$v_r = u_r\Big|_{r=R_0}$$

$$\Rightarrow \frac{3(\vec A\cdot\hat e_r)\hat e_r - \vec A}{4\pi r^3}\cdot\hat e_r = \vec u\cdot\hat e_r \quad \text{za vsak } \hat e_r$$

$$\frac{1}{2\pi R_0^3}\vec A\cdot\hat e_r = \vec u\cdot\hat e_r \Rightarrow \vec A = 2\pi R_0^3\,\vec u \Rightarrow W_k = \frac{1}{2}\rho\,(2\pi R_0^3 - V_0)\,u^2 = \frac{1}{2}\frac{m_0}{2}u^2$$

- Gibalna količina tekočine

Telo pospešujemo, pri tem na tekočino deluje sila $\vec{F}$. Gib. kol. tekočine:

$$d\vec{P} = \vec{F}\, dt \quad /\cdot \vec{u}$$

$$\vec{u}\cdot d\vec{P} = \vec{F}\cdot\vec{u}\, dt = dA = dW_k \,, \quad W_k = \tfrac{1}{2} m_{ij} u_i u_j$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}\cdot d\vec{P} = m_{ij}\, u_i\, du_j$$

Ta enačba sicer določi le $d\vec{P}$ v smeri $\vec{u}$, vendar velja za vsak $\vec{u}$, ki je poljuben in m_{ij} je konstanta (ni odv. od $\vec{u}$) ter $\vec{P}(\vec{u}=0)=0$.

$$\Rightarrow \quad dP_i = m_{ij}\, du_j \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_i = m_{ij} u_j}$$

in sila na tekočino $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, sila na telo $-\vec{F}$

Viskozne tekočine

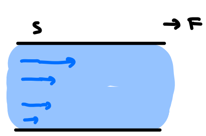
- Newtonov zakon na enoto prostornine: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla\cdot\sigma + \vec{f}^z$,
  v idealni tekočini $\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}$, σ vedno obstaja
- K napetostnemu tenzorju dodajmo viskozni napetostni tenzor σ^v
  Kako bi ga dobili?
  - viskozne sile nastopajo, kadar imamo gradient hitrosti. V homogenem toku je torej ni. σ_{ij} se izraža s tenzorjem $\partial_j v_i$. V linearnem približku ker linearna zveza. $\partial_j v_i = \partial_j \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \partial_j u_i$.
  - V primeru toge rotacije tudi ni viskoznih napetosti
    $\Rightarrow \sigma_{ij}^v$ se torej izraža s simetričnim tenzorjem

$$\boxed{v_{ij} = \tfrac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)}$$

- V izotropnem sredstvu ni nobene druge količine, ki bi lahko nastopala v tej zvezi med σ_{ij}^v in v_{ij}, torej

$$\boxed{\sigma_{ij}^v = 2\eta\left(v_{ij} - \tfrac{1}{3} v_{kk}\delta_{ij}\right) + \zeta\, v_{kk}\,\delta_{ij}}$$

(dinamična) viskoznost — dilatacijska / volumska / druga viskoznost, odpade kadar $\nabla\cdot\vec{v} = 0$

- 

$$\frac{F}{S} = \sigma_{xy} = 2\eta\, \tfrac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

- Vstavimo v gibalno enačbo, torej rabimo $\nabla\cdot\sigma^v$, η, ζ konstanti

$$\partial_j \sigma_{ij}^v = \eta\, \partial_j(\partial_j v_i + \partial_i v_j) - \tfrac{2}{3}\eta\, \partial_j \partial_k v_k \delta_{ij} + \zeta\, \partial_j \partial_k v_k \delta_{ij} =$$

$$= \eta\, \partial_j^2 v_i + \eta\, \partial_i \partial_j v_j - \tfrac{2}{3}\eta\, \partial_i \partial_j v_j + \zeta\, \partial_i \partial_j v_j =$$

$$= \eta\, \partial_j^2 v_i + \left(\zeta - \tfrac{2}{3}\eta\right) \partial_i \partial_j v_j$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\sigma^{v} = \eta\nabla^2\vec{v} + \left(\zeta + \tfrac{1}{3}\eta\right)\nabla\nabla\cdot\vec{v}$$

Navier-Stokesova enačba

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \eta\nabla^2\vec{v} + \left(\zeta + \tfrac{1}{3}\eta\right)\nabla\nabla\cdot\vec{v} + \vec{f}^{z}}$$

Nestisljive limite, aktualne skoraj vedno

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \underbrace{\frac{\eta}{\rho}}_{\nu\ \dots\ \text{kinematična viskoznost}}\nabla^2\vec{v}$$

Napetostni tenzor

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta v_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j\right)$$

Če je $\rho = \text{konst}$, se lahko znebimo tlaka kot v Eulerjevi enačbi za izentropni tok (ki je lahko bil stisljiv)

$$\nabla\times \quad \text{in} \quad \frac{1}{2}v^2 = \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{v} = \nabla\times\left(\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\right) + \nu\nabla^2\nabla\times\vec{v}$$

Če razpišemo je $\nabla\times(\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}))$ z identiteto $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a})$, $\nabla\times\vec{v} = \vec{\omega}$

$\Rightarrow$ N.S. enačba za vrtinčnost v viskozni tekočini:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} + \underbrace{\nu\nabla^2\vec{\omega}}_{\text{difuzija vrtinčnosti}}$$

Še vedno nestisljive limita: $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \eta\nabla^2\vec{v}$

Če poznamo hitrostno polje, dobimo tlačno preko divergence

$$\left(\nabla\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{v} = 0, \quad \eta\nabla\cdot\nabla^2\vec{v} = \eta\nabla^2\nabla\cdot\vec{v} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 p = -\rho\,\partial_i\left(v_j\partial_j v_i\right) = -\rho\left((\partial_j v_i)(\partial_i v_j) + \overbrace{v_j\partial_i\partial_j v_i}^{=0}\right) = -\rho\,(\partial_i v_j)(\partial_j v_i)$$

Komentar: ∇p se vzpostavi takšen, da v vsakem trenutku velja $\nabla\cdot\vec{v} = 0$.
$\Rightarrow$ $\nabla\cdot\vec{v} = 0$ je (skalarna) enačba za tlačno polje. Nerodno, da ne vsebuje tlaka.

Če upoštevamo stiskanje, je stvar fizično preprosto:

$$\nabla\cdot\vec{v} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla(\rho\vec{v}) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\chi}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Viskozna disipacija

- Pretvarjanje mehanske energije v notranjo. Splošneje: mehanske energija v resnici pomeni celotno prosto entalpijo.
- Ta se manjša s časom zaradi naraščanja entropije. Entropija narašča samo v TD neravnovesju in se približujemo ravnovesju. Ravnovesju se približujemo s transportnim pojavom - difuzija gibalne količine zaradi viskoznosti.

Neravnovesje $\nabla \vec{v}$ Ravnovesje

- Delo viskoznih sil: neravnovesno delo, ki ga znamo izračunati (zelo blizu ravnovesja)
- Primer: Hitrejši je opravil večje pozitivno delo ($\sim \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1$), počasnejši pa manjše negativno delo ($\sim -\vec{F}_1 \vec{v}_2$)
  - $\Rightarrow$ skupno ohranjeno delo je pozitivno
  - $\Rightarrow$ skupna kin. energija je manjša
  - $\Rightarrow$ sistem se segreje
- Nadomestna reverzibilna sprememba za izračun spr. entropije sistema 1 in 2: Sistema spravimo na končno hitrost, nato pa reverzibilno pogrejemo $\Rightarrow$ skupna entropija se zveča.
- Delo zaradi viskoznih sil ($\delta A = T\delta S$):

$$\delta A = \int dV\, f_i\, \delta u_i = -\int dV\, f_i^v\, \delta u_i = -\int dV\, (\partial_j \sigma_{ij}^v)\, \delta u_i$$

$\vec{f}$ viskozna sila delčka, $\vec{f}^v = \nabla \sigma^v = -\vec{f}$ viskozna sila na delček. To smo že izračunali je sicer neg. delo elastične sile.

$$\Rightarrow \delta A = -\oint dS_j\, \sigma_{ij}^v\, \delta u_i + \int dV\, \sigma_{ij}^v\, \delta u_{ij}$$

$$P = \frac{dA}{dt} = -\oint dS_j\, \sigma_{ij}^v\, v_i + \int dV\, \sigma_{ij}^v\, v_{ij} \quad , \text{ v volumnu torej } \quad P = \int dV\, \sigma_{ij}^v\, v_{ij}$$

N. S. enačba: značilna skala in brezdim. oblika

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

- Značilni čas, v katerem se zaradi viskoznosti vzpostavi stac. hitrostno polje (viskoznostni relaksacijski čas) ocenimo iz enačbe:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \approx \eta \nabla^2 v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{\tau_v} \doteq \frac{\eta}{\ell^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_v = \frac{\rho \ell^2}{\eta}$$

značilna strižna dolžina hitrostnega polja

- Brezdimenzijsko

Naj bo enota za čas na primer: $\tau_0 = \frac{\ell}{v_0}$, kjer je v_0 neka značilna hitrost $\Rightarrow t = \tilde{t}\tau_0$, za dolžino: $\ell \Rightarrow r = \tilde{r}\ell \Rightarrow v = \tilde{v} v_0$, $\nabla \to \frac{1}{\ell}\tilde{\nabla}$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{v_0}{\tau_0}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{v_0^2}{\ell}(\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\vec{v}}\right) = -\frac{1}{\ell}\tilde{\nabla} p + \eta \frac{v_0}{\ell^2}\frac{\tau_0}{\rho v_0}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}} \cdot \frac{1}{\rho v_0^2}\tilde{\nabla} p + \frac{\eta}{\ell \rho v_0}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}}$$

$$= -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{\rho v_0 \ell}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}} \qquad p = \tilde{p}\,\rho v_0^2 \qquad \frac{\rho v_0 \ell}{\eta} = Re \text{ Reynoldsovo število}$$

Še enkrat v brezdim. obliki (brez ~)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v} \qquad Re = \frac{|(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}|}{|\nabla^2\vec{v}|}$$

Časovni pa je takšen, kot ga določa enačba:

- če $Re \gg 1$ je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ v splošnem reda $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$
- če $Re \ll 1$ je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ v splošnem reda $\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v}$

- Torej značilni dinamični čas $t \sim Re$ (v brezdim.)

  V fizikalnih enotah $t \sim Re \cdot \tau_0 = \frac{\rho v_0 l}{\eta} \frac{l}{v_0} = \frac{\rho l^2}{\eta} = \tau_\nu$ ✓

- Če sistemu vsiljujemo dinamiko od zunaj, recimo z značilno frekvenco $\omega \equiv \frac{1}{\tau}$ pa je velikost

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \frac{v}{\tau / \tau_0} = v_0 \frac{\tau_0}{\tau} \quad ; \quad \frac{\tau_0}{\tau} = \frac{l}{\tau v_0} = St$$

St ... Strouhalovo število

$$St \sim \frac{\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|}{\left| (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right|}$$