Sistemi enačb $Ax = b$

U: (zgornje trikotna) L: (spodnje trikotna)

- enolično rešitev rang A = rang $[A\ b]$
- Norme:

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$ $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

$\|x\|_1 = \sum |x_i|$ $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ $\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$

$\|x\|_\infty = \max |x_i|$ $\|A\|_2 = \max_i \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$

lastne vrednosti od A^TA

- Direktno vstavljanje $Lx = b$ $\mathcal{O}(n^2)$

$x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j\right)$ štev". operacij n^2

- Obratno vstavljanje $Ux = b$ $\mathcal{O}(n^2)$

$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j\right)$ štev". operacij n^2

- LU razcep L ... enke po diagonali

$L(Ux) = b$ $Ux = y$ $Ly = b \Rightarrow y$ direktno vst.

$Ux = y \Rightarrow x$ obratno vst.

LU je možen, če A oz. U nista izrojeni

$\det A \neq 0$, $\det U \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & -2 \\ 1 & 4 & 8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{kvocient}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$-1 - (-1) \cdot 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

U, L

- LU razcep z delnim pivotiranjem

$PA = LU$ $PAx = Pb$ $L(Ux) = Pb = c$

$Ly = c \Rightarrow y$ $y = Ux \Rightarrow x$

V vsakem koraku postaviš abs. največjo vrednost na prvo mesto in si beležiš kako se premikajo vrstice, na koncu npr.

$[3, 4, 2, 1] \Rightarrow P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$

Uporabimo za računanje matričnih enačb

$AX = B \Rightarrow AA^{-1} = I$ in determinant

- Razcep Choleskega $A = LL^T$ L nima enk po diag.

A mora biti simetrična pozitivno definitna (spd)

A je spd če $A = A^T$ in $x^TAx > 0$ $\forall x \neq 0$

$A_{ij} = a_{ij}$ $V = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ v_{21} & v_{22} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$

$v_{11} = \sqrt{a_{11}}$ $v_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2\right)^{1/2}$

$j = k+1, \dots, n$ $v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}}\left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji} v_{ki}\right)$

$$\begin{bmatrix} 4 & & & & \\ -2 & 10 & & -\text{''}- & \\ 4 & 1 & 9 & & \\ -2 & -5 & -2 & 22 & \\ 4 & -5 & 1 & 7 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow V = \begin{bmatrix} 2 & & & & 0 \\ -1 & 3 & & & \\ 2 & 1 & 2 & & \\ -1 & -2 & 1 & 4 & \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\sigma(n^3) = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2+c^2 & bd+ce \\ ad & bd+ce & d^2+e^2+f^2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} a & & \\ b & c & \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Nelinearne enačbe

$f(x) = 0$ ali $F(x) = 0$

- Bisekcija $|b-a| / 2^k < \varepsilon$
- Navadna iteracija $f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = x$

Določimo $g(x)$: $g(x) = x - f(x)$ $g(x) = x - Cf(x)$ $c \neq 0$

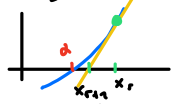
$g(x) = x - h(x) f(x)$ $h(x) \neq 0$

Točka α, $g(\alpha) = \alpha$, je privlačna če $|f'(\alpha)| < 1$, odbojna $|f'(\alpha)| > 1$

Red konvergence je p če $|g^{(k)}(\alpha)| = 0$ $k = 1, \dots, p-1$ in $|g^{(p)}| \neq 0$

- Tangentna (Newtonova) metoda

$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$



Red konv. vsaj 2 če α enojna ničla, linearna če večkratna ničla

- Sekantna metoda

$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$

Odvod aproks. z diferenčnim kvocientom, uporabimo, ko nimamo odvoda.

- Polinomske enačbe $p(x) = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & & 1 \\ 0 & & & & \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$ Iščemo lastne vrednosti

- Sistem nelinearnih enačb $\vec{F}(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{G}(\vec{x})$

Problem najmanjših kvadratov

$\min_x \|Ax - b\|$ $[A][x] = [b]$

- Normalni sistem

Rešitev $A^TAx = A^Tb$ (rešimo z LU, Cholesky)

A^TA ... simet. in poz. def. Občutljivost slaba $\mathcal{K}(A^TA) \doteq \mathcal{K}(A)^2$

- QR razcep $[A] = [Q][R]$ $= [Q][R]$ Razširjeni QR

$A = QR$

Q ... ortonormirani stolpci, R ... zgornje trikotna

Rešitev QR $A^TAx = A^Tb \Rightarrow R^TQ^TQRx = R^TQ^Tb \Rightarrow Rx = Q^Tb \xrightarrow{\text{obratno vstavljanje}} x$

Rešitev raz. QR $\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}^{n}_{m-n} = R$ $Q^Tb = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}^{n}_{m-n}$ $R_1 x = c_1 \Rightarrow x$

- Namesto QR, naredimo $[A\ b] = [Q\ q_{n+1}]\begin{bmatrix} R & z \\ 0 & g \end{bmatrix} \Rightarrow$ Rešujemo $Rx = z \Rightarrow x$
- Gram-Schmidtova ortogonalizacija GS
- Modificiran GS (MGS) bolj stabilen od GS
- Givensove rotacije $c = x_i/r$ $s = x_k/r$ $r = \sqrt{x_i^2 + x_k^2}$ $Q_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & c & & s & \\ & & \ddots & & \\ & -s & & c & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

za razširjen QR $Q^TA = Q_{mn} \cdots Q_{31} Q_{21} A = R$

Št operacij $3mn^2 - n^3$ Za izračun Q: $6mn^2 - 3mn^2$

- Householderjevo zrcaljenje

$P = I - \frac{2}{w^Tw} ww^T$ (P ortog, sim., $PP^T = P^2 = I$) $w = \begin{bmatrix} x_1 + \operatorname{sgn}(x_1)\|\vec{x}\|_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ stolpec matrike

Rešitev $P_n P_{n-1} \dots P_1 A = R$ $Q = P_1 \dots P_n$

$P_i = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_i \end{bmatrix}$

Postopek i-korak: a_1, $|a_1|$, w, w^Tw, P_i | $P_i a_1, \dots P_i a_n, P_i b$

$P_1 a_1 = k \hat{e}_1$ $\hat{\omega}$ je vekt. normale ravnine preko katere zrcali P.

- Reševanje predoloč. sist: Norm. mn^2 MGS $2mn^2$ Giv. $3mn^2 - n^3$ House $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$
- Reš. kvadr. sist. LU $\frac{2}{3}n^3$ Givens $2n^3$ House $\frac{4}{3}n^3$

Iskanje lastnih vrednosti

$Ax = \lambda x$

- Potenčna metoda

  Izberemo z_0 normiran $y_{k+1} = A z_k$ $\quad z_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$ $\quad k = 0, 1, \dots$

  z_k konvergira k lastnemu vektorju z $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots$

  Naslednje vrednosti in vektorje dobimo z redukcijami

  Rayleighov koeficient $\quad \rho(x, A) = \lambda = \frac{x^H A x}{x^H x}$

- Hotellingova redukcija za $A = A^T$

  $B = A - \lambda_1 x_1 x_1^T \Rightarrow$ Potenčna metoda za $B \Rightarrow \lambda_2 \; v_2 \dots$

- Householderjeva redukcija za splošno matriko

  Poiščemo Q, da $Q x_1 = k e_1$ (Householderjeva zrcaljenja)

  $B = Q A Q^T \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & C \end{bmatrix}$

- Inverzna iteracija (iskanje najmanjše λ in $\vec{v}$)

  Izvedemo potenčno metodo na A^{-1}: $y_{k+1} = A^{-1} z_k \quad z_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{|y_{k+1}|}$

  $A y_{k+1} = z_k$ (LU razcep le enkrat) $\Rightarrow \lambda, v$

- QR iteracija

  $A_0 = A, \quad A_k = Q_k R_k \rightarrow A_{k+1} = R_k Q_k \rightarrow$ Schurova forma

- Metode za simetrične matrike

  Simetrično mat lahko pretvorimo na tridiag. PAP^T

- Sturmovo zaporedje $\quad T = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_2 \end{matrix}} & \\ & \ddots \end{bmatrix}$ T_2

$f_r(\lambda) = \det(T_r - \lambda I) \quad f_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1} - \lambda) f_r(\lambda) - b_r^2 f_{r-1}(\lambda)$

$f_0(\lambda) = 1 \qquad f_1(\lambda) = a_1 - \lambda$

Zap $\{f_r\}_{r=0}^n$ je zap. polinomov, ničle f_n so lastne vrednosti T. $u(\lambda_0)$ je število ujemanj predznakov v zaporedju števil $f_r(\lambda_0)$, $r = 0, 1, \dots, n$

$f_0(\lambda_0)$	$f_1(\lambda_0)$	$f_2(\lambda_0)$	$f_3(\lambda_0)$	$f_4(\lambda_0)$	$u(\lambda_0)$
+	+	−	+	−	1
+	0	+	+	−	2
−	−	−	+	! 0	2
+	−	0	+	−	1

$u(\lambda_0)$ je enako št. last. vred. ki so večje od λ_0

- Jacobijeva iteracija

  P.9

  Z leve in desne množimo z rotacijo na danih mestih

  $R^T \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{qq} \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$

  $c = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} \quad s = ct \quad t = \frac{\operatorname{sgn}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1+\tau^2}} \qquad \tau = \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2 a_{pq}}$

  $\operatorname{off}(A) = \left(\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}$ Frobeniusova norma brez diagonale.

  $\operatorname{off}(A')^2 = \operatorname{off}(A)^2 - 2 a_{pq}^2$

  Ponavljamo dokler $\operatorname{off}(A) < \varepsilon$

  Variante: klasična: unič. abs. največji izvendiag. element

  cikličnа: vedno v istem redu izven diag. elemente

  pragovna: enak vrstni red, le elemente večje od neke vrednosti

Robni problemi

$y'' = f(x, y, y') \quad y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta$

- Linearni robni problem $\quad -y'' + p y' + q y = r$

  Rešimo sistem za $y'(a) = \delta_1 \quad y'(a) = \delta_2$

  $\Rightarrow y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$

  Zahtevamo $y(b) = \beta \Rightarrow \lambda = \frac{\beta - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)}$

- Strelska metoda (za nelinearne en.)

  $F(k) = y(b, k) - \beta$ $\quad$ iščemo ničlo F

  s sekantno metodo, $k = y'(a)$

Polinomska interpolacija

- Klasična oblika $\quad$ sistem n enačb $\quad V \begin{bmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} x_0^n & \dots & x_0 \\ \vdots & & \\ x_n^n & \dots & x_n \end{bmatrix}$

  sistem ima eno rešitev če $\det A \neq 0$, časovna zaht. $O(n^3)$

- Legendrova oblika $\quad O(n^2)$ konvergenca ni zagotovljena

  $l_{n,i}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \qquad p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \, l_{n,i}(x)$

  $f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

- Newtonova oblika $\quad$ (interpoliramo tudi odvode)

  Deljena diferenca $[x_0, \dots, x_n] f$ je vodilni koef an interpol pol st. n, ki se ujema s f, v $x_0, \dots, x_n$

  $p_n(x) = [x_0] f + (x - x_0)[x_0, x_1] f + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] f + \dots$

  $[x_0, \dots, x_n] f = \begin{cases} \frac{1}{x_n - x_0} \left([x_1, \dots, x_n] f - [x_0, \dots, x_{n-1}] f \right) \\ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad x_0 = x_1 = \dots = x_n \end{cases}$

  $p(0) = 1 \quad p'(0) = 2 \quad p''(0) = 3 \quad p(1) = -1 \quad p'(1) = 3 \quad p(2) = 4$

x_i	$[\cdot]f$	$[\cdot,\cdot]f$	$[\cdot,\cdot,\cdot]f$	$[\cdot\cdot\cdot\cdot]f$	$[\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot]f$	$[\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot]f$
0	1	2	$\frac{3}{2!}$	$-\frac{11}{2}$	$\frac{29}{2}$	$-\frac{79}{8}$
0	1	2	-4	9	$-\frac{21}{4}$	
0	1	-2	5	$-\frac{3}{2}$		
1	-1	3	2			
1	-1	5				
2	4					

$p(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^3(x-1) - \frac{79}{8}x^3(x-1)^2$

- Numerično odvajanje

  • Poznamo $(x_0, f_0) \dots (x_n, f_n) \qquad f'(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$

  Npr. $x_0 = -h$, $f(-h)$, $x_1 = 0$, $f(0)$, $x_2 = h$, $f(h)$

  $f_0(x) = 1 \quad f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2 \qquad$ Iščemo $f'(0)$

  $f_i'(0)$

  $f_0(x) = 1 \quad 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

  $f_1(x) = x \quad 1 = -h \alpha_1 + 0 \alpha_2 + h \alpha_3$

  $f_2(x) = x^2 \quad 0 = h^2 \alpha_1 + 0 \alpha_2 + h^2 \alpha_3 \quad \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

  • Uporabimo poli. interpolacijo in odvajamo polinom

Diferencialne enačbe

- Začetni problem $\quad y' = f(x, y) \qquad y(a) = y_a$
- Metode je lahko eksplicitne / implicitne in enokoračne / večkoračne
- Eulerjeva metoda (enokoračna eksplicitna metoda 1. reda)

  $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

- Večkoračna metoda - uporabimo inter. polinom

  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx \Rightarrow y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)\,dx$

  koliko korakov nazaj gledamo

- Implicitna metoda (enočlenska) $\qquad$ Navadna iteracija

  $y_{i+1} = y_i + h \Phi(x_i, y_i, y_{i+1}, f) \Leftrightarrow y_{i+1} = g(y_{i+1})$

- Trapezna metoda $\quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$
- Sistem dif. en. 1. reda

  $Y = (y_1, \dots, y_d)^T \quad F = (f_1, \dots, f_d)^T \qquad Y' = F(x, Y)$

- Eulerjeva metoda $\quad Y_{n+1} = Y_n + h F(x_n, Y_n) \qquad Y_0 = Y_a$
- Dif. en. višjih redov

  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad$ Pogoji: $y(a) = y_a$, $y'(a) = y_a'$, …

  Nove spremen. $\quad y_1 = y, \; y_2 = y', \; \dots \; y_n = y^{(n-1)}$

  $y_1' = y_2$

  $y_2' = y_3$

  $\vdots$

  $y_{n-1}' = y_n$

  $y_n' = f$