Posledica: Naj bo $\underbrace{f:[a,b]\times[c,d]}_{P} \longrightarrow \mathbb{R}$

Privzemimo

- f je zvezna na P
- f_t' obstaja in je zvezna na P

Imejmo še funkciji $\alpha,\beta:[c,d]\to[a,b]$

Tedaj je
$$F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,dx$$
odvedljiva na $[c,d]$ in velja

!
$$F'(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt + f(\beta(t),t)\,\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\,\alpha'(t)$$

Komentar: Vemo
$$\frac{d}{dt}\int_a^t \phi(x)\,dx = \phi(t)$$
Temeljni izrek analize

Dokaz: Uporabimo verižno pravilo. Označimo
$$G(s,u,v)=\int_u^v f(x,s)\,dx$$
Tedaj je
$$F = G\circ(id,\alpha,\beta)$$
, zato je po verižnem pravilu
$$F'(t) = \underbrace{G_s'(t,\alpha(t),\beta(t))}_{\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx}\cdot 1 + \underbrace{G_u'(t,\alpha(t),\beta(t))}_{-f(\alpha(t),t)}\,\alpha'(t) + \underbrace{G_v'(t,\alpha(t),\beta(t))}_{f(\beta(t),t)}\,\beta'(t)$$

$\square$

Primer: Def
$$F(t)=\int_0^t \frac{dx}{x^2+t^2} \quad \text{za} \quad t\in(0,\infty)$$
Velja
$$F(t)=\frac{1}{t}\arctan\frac{x}{t}\Big|_0^t = \frac{\pi}{4t}$$

Po posledici uporabimo za
$$f:[0,1]\times\left[\frac{t}{2},\frac{3t}{2}\right]\to\mathbb{R}$$
$$(x,t)\longrightarrow\frac{1}{x^2+t^2}$$
je

$$F'(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right) dx + \frac{1}{t^2+t^2}$$

$$= -\int_0^t \frac{2t}{x^2+t^2}\, dx + \frac{1}{2t^2}$$

Hkrati pa je

$$F'(t) = \left(\frac{\pi}{4t}\right)' = -\frac{\pi}{4t^2}$$

Torej je

$$-\int_0^t \frac{2t}{x^2+t^2}\, dx + \frac{1}{2t^2} = -\frac{\pi}{4t^2}$$

oz.

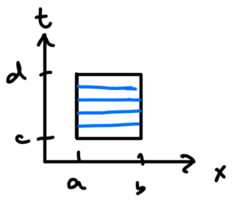
$$\int_0^t \frac{1}{x^2+t^2}\, dx = \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\frac{1}{t^3}$$

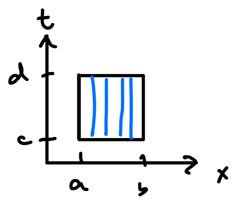
Ekvivalentno $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$

Kako je z integrabilnostjo integrala s parametrom?

Če je $F(t) = \int_a^b f(x,t)\, dx$, nas zanima $\int_c^d F(t)\, dt$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\, dx\right) dt \overset{?}{=} \int_a^b \int_c^d f(x,t)\, dt\, dx$$





Izrek Naj bo $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je

$$\int_a^b \int_c^d f(x,t)\, dt\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,t)\, dx\, dt$$

Dokaz Def. $G(y) = \int_a^b \underbrace{\int_c^y f(s,t)\, dt}_{\varphi(s,y)}\, ds$ in $H(y) = \int_c^y \underbrace{\int_a^b f(s,t)\, ds}_{\varphi(t)}\, dt$

Želimo dokazati da je $G = H$

Vidimo da je $G(c) = H(c)$

Dovolj je videti, da je $G' = H'$

Velja

$$H'(y) = \varphi(y) = \int_a^b f(s,y)\,ds$$

$$G'(y) = \int_a^b \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \int_c^y f(s,t)\,dt}_{f(s,y)}\,ds \qquad \Longrightarrow \quad H'(y) = G'(y)$$

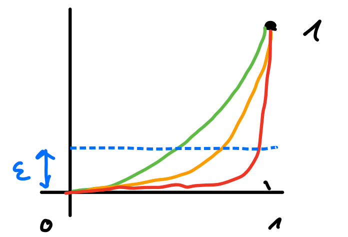
upoštevamo trditev od prej (φ je zvezna)

$\square$

Konvergenca in enakomerna konvergenca

Za $n \to \infty$ je:

- $x^n \to 0$ za $\forall x \in (0,1)$



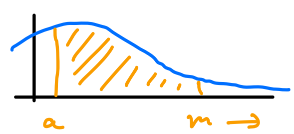
Ni enakomerno konvergentna

Če bi $x^n \to 0$ enakomerno na $(0,1)$, bi za polj. $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, da bi lahko $|x^n - 0| < \varepsilon$ za vsak $x \in (0,1)$

Grafično: graf funk. $x \to x^n$; $x \in (0,1)$ leži znotraj pasu širine ε okoli grafa funkcije $x \to 0$; $x \in (0,1)$

Izlimitirani integrali s parametrom

$$I = \int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{m \to \infty} \int_a^m f(x)\,dx$$



$I - \int_a^m f(x)\,dx$ morajo biti dovolj majhni

Def: Naj bo $f : [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Integrali $\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ so enakomerno konvergentni na $[c,d]$, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m_0 > a$ da je

$$\left| \int_m^\infty f(x,t)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{za } \forall t \in [c,d] \text{ in } \forall m \geq m_0$$

Primer

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\,dt \qquad t \in [c,d] \quad c > 0 \quad (\text{za } t \leq 0 \text{ integral ne konvergira})$$

$$\left| \int_m^\infty e^{-tx}\,dx \right| = \dots = \frac{1}{t} e^{-tm} \leq \frac{1}{c} e^{-cm_0} \quad \text{za } t \geq c,\ m \geq m_0$$

↳ Če $m_0 \to \infty$ gre izraz proti 0

Dokazali smo, da so integrali $F(t)$ enakomerno konv. na $[c, \infty)$.

Trditev Naj bo $f:[a,\infty)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ zvezna. Privzemimo da obstaja integrabilna funkcija $\phi:[a,\infty)\to[0,\infty)$ tako da za $\forall x\ge a$ $t\in[c,d]$ velja

$$|f(x,t)|\le \phi(x)$$

"enakomerna integrabilna majoranta"

Tedaj $F(t)=\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ konvergira enakomerno na $[c,d]$

Dokaz

$$\left|\int_m^\infty f(x,t)\,dx\right|\le\int_m^\infty |f(x,t)|\,dx\le\int_m^\infty \phi(x)\,dx<\varepsilon$$

za $\forall m\ge m_0$, če je m_0 dovolj velik.

Primer Za $\forall t\ge c>0$ imamo oceno $|e^{-tx}|\le\underbrace{e^{-cx}}_{\phi(x)}$

zato je enakomerno int.

Trditev Če je $f:[a,\infty)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ zvezna in je

$F(t)=\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ enakomerno konvergentna na $[c,d]$

tedaj je F zvezna na $[c,d]$.

Dokaz Za $t,t_0\in[c,d]$ ocenimo

$$|F(t)-F(t_0)|=\left|\int_a^\infty f(x,t)-f(x,t_0)\,dx\right|=$$

$$=\left|\int_a^m f(x,t)-f(x,t_0)\,dx+\int_m^\infty f(x,t)\,dx-\int_m^\infty f(x,t_0)\,dx\right|$$

$$\le\underbrace{\int_a^m|f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx}_{<\frac{\varepsilon}{3}}+\underbrace{\left|\int_m^\infty f(x,t)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}+\underbrace{\left|\int_m^\infty f(x,t_0)\,dx\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}$$

Vzamemo $\varepsilon>0$. Ker so $F(t)$ enakomerno konv. $\exists m_0\ge a$ da je

$$\left|\int_m^\infty f(x,u)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{za } \forall m\ge m_0 \text{ in } \forall u\in[c,d]$$

Za tak m sta zadnja dva integrala $<\varepsilon$. Za izbrani (fiksirani) $m\ge m_0$ je $f:[a,m]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ enakomerno zvezna, zato $\exists\,\delta>0$ če je $|t-t_0|<\delta$, je

$|f(x,t)-f(x,t_0)|<\frac{\varepsilon}{3(m-a)}$ zato je tudi prvi int. $<\varepsilon/3$

$\square$

Trditev Naj bo f zvezna na $[a,\infty) \times [c,d]$ in

$$F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dx \quad \text{enakomerno konvergira na } [c,d]$$

Tedaj je F integrabilna na $[c,d]$ in velja

$$* \int_c^d \int_a^\infty f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^\infty \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx$$

Dokaz Vemo da je F zvezna, zato obstaja $\int_c^d F$.

Vemo $\forall b > a$ je $\int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,t)\,dx}_{F_b}\,dt = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx$

$b \to \infty$

Velja $F_b(t) \to F(t)$ enak. konv. na $[c,d]$

Torej ima leva stran v $*$ limito za $b \to \infty$ in sicer $\int_c^d \int_a^\infty f(x,t)\,dx\,dt$ torej jo ima (limito) tudi desna stran, ta limita pa je po def. izlimitiranega int. enaka

$$\int_a^\infty \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx$$

$\square$

Primer def $f(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\,dx$ za $0 < c \le t \le d < \infty$

Vemo f je enak. konv. na $[c,d]$ zato je tam zvezna, torej integrabilna. Velja

$$\int_c^d F(t)\,dt = \int_0^\infty \int_c^d e^{-tx}\,dt\,dx$$

$$F(t) = \frac{1}{t}, \quad \int_c^d F(t)\,dt = \log d - \log c$$

$$\int_c^d e^{-tx}\,dt = \frac{e^{-dx} - e^{-cx}}{-x}$$

Dokazali smo

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-dx}}{x}\,dx = \log\frac{d}{c} \quad \text{za } \forall c,d > 0$$

Izrek Privzemimo, da:
- je $f : [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna
- $\exists\ \partial_t f$ in je zvezna
- za $\forall t \in [c,d]\ \exists$

$$F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\,dx$$

- $G(t) = \int_a^\infty \partial_t f(x,t)$ je enak. konv. na $[c,d]$!

Tedaj je F odvedljiva na $[c,d]$ in $F' = G$

torej
$$\frac{d}{dt}\int_a^\infty f(x,t)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

Dokaz Vemo, da je G zvezn na $[c,d]$, zato je integrabilna

Def. $H:[c,d)\to\mathbb{R}$ s predpisom
$$H(u) = \int_c^u G(t)\,dt$$

Osnovni izrek analize: H je odvedljiv in $H' = G$.
Torej zadošča videti, da je $H \equiv F + d$ za neki $d\in\mathbb{R}$.
Velja:

po naši trditvi

$$H(u) = \int_c^u G(t)\,dt = \int_c^u\int_a^\infty \partial_t f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^\infty \underbrace{\int_c^u \partial_t f(x,t)\,dt}_{f(x,t)\Big|_{t=c}^{t=u}}\,dx$$
$$= \underbrace{\int_a^\infty f(x,u)\,dx}_{F_u} - \underbrace{\int_a^\infty f(x,c)\,dx}_{\text{konst.}}$$

$$\Rightarrow H(u) = F(u) - F(c)$$

$\square$

Primer Vzamemo $b>0$ in def $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ s predpisom
$$F(a) = \int_0^\infty \underbrace{\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}}_{f(x,a)}\,dx$$

Funkcijo lahko zvezno razširimo na $[0,\infty)\times(0,\infty)$
za zvezno funkcijo $\varphi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,
def. z
$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1-e^{-u}}{u} & \text{za } u\neq 0 \\ 1 & \text{za } u = 0\end{cases}$$

velja
$$f(x,a) = b\,\varphi(bx) - a\,\varphi(ax)$$

dalje
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a) = -e^{-ax}$$
$$G(a) = -\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$$ je lokalno enak. konvergenten na $(0,\infty)$

$\Updownarrow$

enak. konv. na vsakem zaprtem podintervalu

Sledi:

F je odvedljiva na $(0,\infty)$ in

$$F'(a) = -\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}$$

Uporabimo, kjerkoli piše log pomeni ln

Sledi

$F(a) = C - \log a$. Ker je $F(b)=0$, je $C = \log b$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$$

Primer

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Ali $\exists \lim\limits_{M\to\infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,dx$?

Dovolj je pokazati, da obstaja

$$L = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad n\in\mathbb{N}$$

D.N. Izračunaj L

Obstoj L: Upoštevamo osciliranje sin

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \underbrace{\frac{\sin x}{x}\,dx}_{?} = \qquad x = u + k\pi$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\,du}_{a_k > 0}$$

Velja: a_k pada proti 0

Torej je alternirajoča vrsta $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergentna in je enaka L. (Leibnizovo pravilo)

Def: $I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\,dx$ za $t \geq 0$

Če je $t>0$, $I(t)$ konvergira abs absolutno

Odvajamo I

Ali je I odvedljiva na $(0,\infty)$

$f(x,t) = \frac{\sin x}{x} e^{-tx} = \varphi(x)\, e^{-tx}$ kjer je

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ; \; x \neq 0 \\ 1 & ; \; x = 0 \end{cases}$$

Torej je f zvezna na $\mathbb{R}^2$

- $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -e^{-tx}\sin x$ je zvezna na $\mathbb{R}^2$

- za $t \geq 0$ integral $I(t)$ obstaja

$$G(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx \quad \text{je}$$

lokalno enak. konv. na $(0,\infty)$ DN

Sedaj lahko uporabimo izrek: sledi

$$I'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$$

per partes 2x

$$= \dots = \frac{e^{-tx}(t\sin x + \cos x)}{(t^2+1)}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = -\frac{1}{t^2+1}$$

$$I'(t) = -\frac{1}{t^2+1}$$

$$I(t) = C - \arctan t \quad \text{za } t>0$$

Ker je $|I(t)| \leq \int_0^\infty 1\cdot e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

je za $t\to\infty$ $0 = C - \pi/2$ oz. $C = \frac{\pi}{2}$

$$I(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t \quad \text{za } t>0$$

Kaj pa za $t=0$?

Domnevamo: $I(0) = \lim_{t\to 0} I(t) = \frac{\pi}{2}$

Oz. želimo pokazati, da je I zvezna v $t=0$.

Po trditvi od prej moramo preveriti, da je $I(t)$ enak. konv. na $[0,\delta]$ za neki $\delta>0$. Dokažemo da $I(t)$ enak. konv. na $[0,\infty)$.

Dovolj je pokazati da za $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ da je $n\in\mathbb{N}$ $n\geq n_0$

je $\left|\int_{n\pi}^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\,dx\right| < \varepsilon$ za $\forall t\geq 0$

Vemo je, da za $\forall t\geq 0$ velja

$$\left|\int_{n\pi}^\infty \quad\right| = \left|\sum_{k=n}^\infty (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin u}{u+k\pi} e^{-t(u+k\pi)}\,du\right|$$

$$\underset{\substack{\text{ker } \Gamma \\ \text{alternirajoča}}}{\leq} \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\sin u}{n+n\pi}}_{\leq \frac{1}{n\pi}} \underbrace{e^{-t(u-n\pi)}}_{\leq 1} \, du = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sklep $I(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$ za $t \geq 0$

V posebnem je
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Eulerjevi funkciji Γ in B

Trditev Funkcija gama. Za $\forall t > 0$ def $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \, dx$!

Integral je lokalno enak. konv. na $(0, \infty)$

$$\int_M^\infty x^{t-1} e^{-x} \, dx \underset{x \geq M > 1}{\leq} \int_M^\infty x^{|t-1|} e^{-x} \, dx \leq \int_M^\infty x^{\gamma} e^{-x} \, dx \underset{\text{za velike } M}{<} \varepsilon$$

$\gamma = \max_{t \in [c,d]} (t-1)$

Sledi da je Γ zvezna na $(0, \infty)$

Ker je $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(x^{t-1} e^{-x}) \, dx = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \log x \, dx$

Spet lokalno enak. konv., zato je $\Gamma \in C^1(0, \infty)$

Induktivno: $\Gamma \in C^\infty(0, \infty)$. Velja

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x} \, dx \underset{\text{per partes}}{=} \underbrace{-x^t e^{-x} \Big|_0^\infty}_{0} + \underbrace{t \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \, dx}_{\Gamma(t)}$$

$\boxed{\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)}$ za $\forall t > 0$

V posebnem je $\Gamma(n+1) = n!$ za $n \in \mathbb{N}$

$\Gamma(1) = 1$

Trditev Beta funkcija. Za $p, q > 0$ def

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad ! \quad *$$

Vidimo $B(p,q) = B(q,p)$

Trditev Za $\forall \alpha, \beta > 0$ je

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1}x \cos^{\beta-1}x\,dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \quad !$$

Dokaz: v * vpeljem $t = \sin^2 x$

Izrek (Fubini-Tonelli) Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ in f zvezna funkcija na D_f. Če je zadošč:

- $f(x,y) \geq 0$ zadošč
- $\int_a^b \int_c^d |f(x,t)|\,dt\,dx < \infty$

tedaj integrala $\int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx$ in $\int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt$ obstajata in sta enaka.

če je izpolnjen le prvi pred pogoj sta lahko oba integrala ∞

Trditev

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\,du \quad !$$

Dokaz V orig. def. vpeljemo $x = \frac{u}{1+u}$

Trditev

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{za } p, q > 0$$

Dokaz

$$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x}\,dx$$

Za polj. $u > 0$ vpeljemo novo spr. y s predpisom $x = (1+u)y$. Dobimo

$$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty (1+u)^{p+q-1} y^{p+q-1} e^{-(1+u)y}(1+u)\,dy$$

Oz.

$$\Gamma(p+q)\frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} = u^{p-1}\int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+u)y}\,dy \quad \Big|\cdot \int_0^\infty du$$

Po trditvi

$$\Gamma(p+q)\,B(p,q) = \int_0^\infty u^{p-1} \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+u)y}\,dy\,du$$

$$\overset{\text{Fubini Tonelli}}{=} \int_0^\infty\int_0^\infty u^{p-1} y^{p-1} y^{q} e^{-y} e^{-uy}\,du\,dy$$

$$\overset{\text{nova spr.}}{=} \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y}\,\Gamma(p)\,dy = \Gamma(p)\,\Gamma(q)$$

Posledica $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

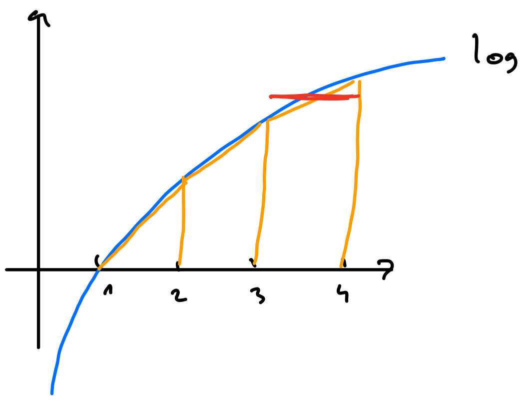
Dokaz Iz $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 (\cos x)^0\,dx = \pi$

sledi $\pi = \dfrac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1)}$, zato $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Trditev

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad \text{za} \quad 0<p<1$$

Izrek Stirlingov izrek



povprečje

$$\int_1^n \log x\,dx \doteq \sum_{j=1}^{n} \frac{\log j + \log (j-1)}{2}$$

$$= \frac{\log 1 + \log 2}{2} + \frac{\log 2 + \log 3}{2} + \dots + \frac{\log(n-1) + \log n}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log k - \frac{\log n}{2}$$

$$= \log \prod_1^n k - \frac{\log n}{2} = \log n! - \frac{\log n}{2}$$

Hkrati je

$$\int_1^n \log x\,dx = (x\log x - x)\Big|_1^n = n\log n - n + 1$$

Torej je $\log n! \doteq n\log n - n + 1 + \frac{\log n}{2}$

oz. $n! \doteq n^n e^{-n} e \sqrt{n}$ $\boxed{e \doteq \sqrt{2\pi}}$

$$x\Gamma(x) = \Gamma(n+1) = n! \doteq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Domnevamo: $\Gamma(x+1) \doteq \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \longrightarrow \Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$

Stirlingov izrek

$$\lim_{x\to 0} \Gamma(x)\sqrt{x}\left(\frac{e}{x}\right)^x = \sqrt{2\pi}$$ Dokaz na spletni učilnici

Komentar interpretacija izjave $\Gamma(x+1) \doteq \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$

Velja, če sta si f in g približno enaki

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \cancel{\Leftarrow} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = 0$$

Dokaz: Skica dokaza Stirlingovega izreka

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}\,ds \underset{\substack{s=u^2\\ ds=2u\,du}}{=} \int_0^\infty u^{2x-2}e^{-u^2}2u\,du$$

$$= 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}\,du$$

$$\frac{\Gamma(x)e^x\sqrt{x}}{x^x} = 2\int_0^\infty e^{x-u^2}\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^{2x-1}du \underset{\substack{u=v+\sqrt{x}\\ v=u-\sqrt{x}}}{=}$$

$$= 2\int_{-\sqrt{x}}^\infty \underbrace{e^{-2v\sqrt{x}}\left(1+\frac{v}{\sqrt{x}}\right)^{2x-1}}_{\varphi_x(v)} e^{-v^2}\,dv \qquad v > -\sqrt{x}$$

Def. še $\varphi_x(v) = 0$ za $v \le -\sqrt{x}$

Tedaj je, za $x > 1/2$ funkcija φ_x zvezna na $\mathbb{R}$

Torej je

$$\frac{\Gamma(x)e^x\sqrt{x}}{x^x} = 2\int_{-\infty}^\infty \underbrace{\varphi_x(v)}_{\substack{x\to\infty\\ \varphi(v)}} e^{-v^2}\,dv$$

Trdimo

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_x(v)e^{-v^2}\,dv = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\varphi_x(v)\,e^{-v^2}\,dv \; *$$

Zadostni pogoji za $*$

① $\exists\ \varphi(v) = \lim_{x\to\infty} \varphi_x(v)$ in konvergenca je enakomerna na $\forall$ omejenem intervalu

② $I_x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(v) e^{-v^2} dv$ konv. enak. za $x \in [1,\infty)$

③ $I = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)\, e^{-v^2} dv$ konvergira

Tedaj je $\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x)\, e^x \sqrt{x}}{x^x} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)\, e^{-v^2} dv$ $**$

Dokažimo, da ① - ③ $\Rightarrow$ $*$

Pišimo $d\mu(v) = e^{-v^2} dv$

$$|I_x - I| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_x - \varphi)\, d\mu \right| = \left| \int_{-\infty}^{-M} + \int_{-M}^{M} + \int_{M}^{\infty} \right|$$

$$\leq \left| \int_{-\infty}^{-M} \varphi_x\, d\mu \right| + \left| \int_{-\infty}^{-M} \varphi\, d\mu \right| + \underbrace{\int_{-M}^{M} |\varphi_x - \varphi|\, d\mu}_{} +$$

$$\underbrace{+ \left| \int_{M}^{\infty} \varphi_x\, d\mu \right| + \left| \int_{M}^{\infty} \varphi\, d\mu \right|}_{}$$

Zaradi ②, ③ $\exists\ M > 0$ da vsota $< \varepsilon/2$ za $\forall x \geq 1$

Za fiksni M je po ① integrand $|\varphi_x - \varphi| < \varepsilon/4M$ za $\forall x \geq x_0$ in $\forall v \in [-M, M]$

① Za $v > -\sqrt{x}$ je

$$\log \varphi_x(v) = -2v\sqrt{x} + (2x-1) \log\left(1 + v/\sqrt{x}\right)$$

$$= -2v\sqrt{x} + 2x \left(\frac{v}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right)^3 - \dots \right)$$

$$- \log\left(1 + v/\sqrt{x}\right)$$

$$= -v^2 + 2x \left(\frac{1}{3} \left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{v}{\sqrt{x}}\right)^4 + \dots \right) - \log\left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right)$$

Vidili: za $F(u) = \log(1+u) - u + u^2/2$

in $G(u) = \log(1+u)$ velja

$$\log \varphi_x(v) = -v^2 + 2x\, F(v/\sqrt{x}) - G(v/\sqrt{x})$$
$$= -v^2 + v^2 H(v/\sqrt{x}) - G(v/\sqrt{x})$$

kjer je $H(u) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+u) - u + u^2/2}{u^2} & \text{za } u \in (-1,\infty) - \{0\} \\ 0 & \text{za } u = 0 \end{cases}$

zvezna.

$$\varphi_x(v) = \frac{e^{-v^2 + v^2 H(v/\sqrt{x})}}{1 + v/\sqrt{x}} \quad \text{za } v > -\sqrt{x}$$
$$\xrightarrow{x\to\infty} e^{-v^2} = \varphi(v)$$
$$\varphi_x(v) \longrightarrow \varphi(v) = e^{-v^2}$$

Izkaže se: $\varphi_x \to \varphi$ lokalno enakomerno konvergira ①

③ Očitno konvergenta čez vstavimo notri $\varphi(v)$

② Vemo: $\log \varphi_x(v) = -2v\sqrt{x} + (2x-1)\log(1 + v/\sqrt{x})$

zato je $\dfrac{\partial}{\partial v} \log \varphi_x(v) = \dots = -\dfrac{2v\sqrt{x}+1}{v+\sqrt{x}}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial v} \log \varphi_x(v_x) = 0 \iff v_x = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ker je $\dfrac{\partial^2}{\partial v^2} \log \varphi_x(v) = \dots < 0$ za $x > 1/2$

ima $v \to \log \varphi_x(v)$ v točki $v_x = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

maksimum, torej ima φ_x v v_x tudi maksimum

$$\log \varphi_x(v_x) = 1 + (2x-1)\log\left(1 - \frac{1}{2x}\right)$$

S pomočjo te ocene lahko dokažem, da

za $\forall x \geq 1$ in $v > -\sqrt{x}$ velja

$$0 \leq \varphi_x(v)\, e^{-v^2} \lesssim e^{-v^2} \leq C \cdot \dots$$

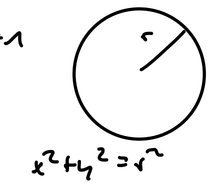
Posledično je (po dreditu) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(v)\, e^{-v^2}\, dv$ enak. konv. za $x \in [1,\infty)$

Preostane še

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)\, e^{-v^2}\, dv = \dots = \sqrt{2\pi}$$

Riemann-Darbouxov integral v $\mathbb{R}^n$

$n=1$



$$pl = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$n=2$

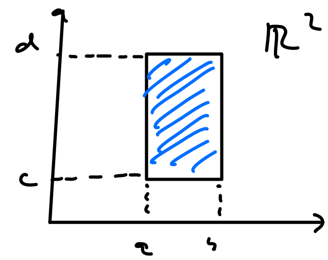
Imejmo: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

graf $\rightsquigarrow$ ploskev in ne več krivulja
lik $\rightsquigarrow$ telo
aproksimiramo s kvadri

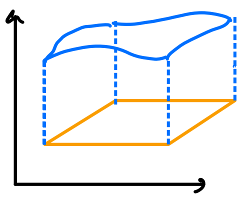
Sistematično

Naj bo $P = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ in

$f: P \to [0,\infty)$ omejena



Radi bi dobili prostornino telesa nad P in pod grafom f.

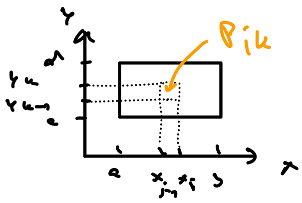


Def: Če izberemo $x_0, x_1, \dots x_n, y_0, y_1, \dots y_m \in \mathbb{R}$ da:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$

tedaj množici $D = \{P_{jk} = [x_{j-1}, x_j]\times[y_{k-1}, y_k]$ $\quad j=1\dots n,\ k=1\dots m$

pravimo <u>delitev</u> pravokotnika P

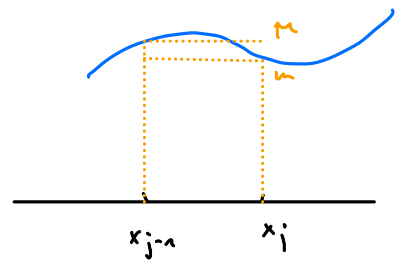


$$|P_{jk}| = (x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$$

Ob dani delitvi D in omejeni funkciji $f: P\to\mathbb{R}$ def.

$$m_{jk} = \inf_{P_{jk}} f \qquad M_{jk} = \sup_{P_{jk}} f$$

Analogija v $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Tvorimo spodnjo (s) in zgornjo (S) Darbouxovo vsoto, pripadajočo funkciji f in delitvi D.

$$s(f,D) = \sum_{j,k} \underbrace{m_{jk} |P_{jk}|}_{\text{volumen največjega kvadra nad } P_{jk} \text{ in pod grafom } f}$$

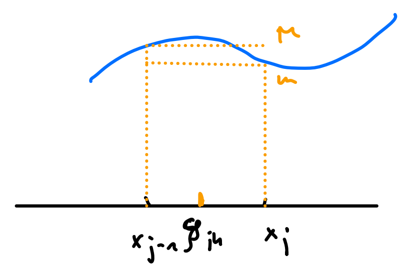
$$S(f,D) = \sum_{j,k} \underbrace{M_{jk} |P_{jk}|}_{\text{volumen najmanjšega kvadra nad } P_{jk} \text{ in nad grafom } f.}$$

Podoben koncept s Riemannovo vsoto.

Vzamemo funkcijo f, D ter za $\forall\, j,k$ izberemo $\xi_{jk} \in P_{jk}$ in namesto $\inf/\sup_{P_{jk}} f$ vzamemo $f(\xi_{jk})$

$\xi = \{\xi_{jk};\ j,k\}$ def.

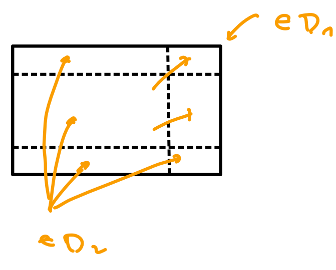
$$R(f,D,\xi) = \sum_{j,k} f(\xi_{jk})\,|P_{jk}|$$



Očitno je

$$s(f,D) \le R(f,D,\xi) \le S(f,D)$$

Def. Naj bosta D_1, D_2 delitvi pravokotnika $P \subset \mathbb{R}^2$. Pravimo, da je D_2 finejša od D_1 (oznaka $D_1 \le D_2$), če je vsak pravokotnik iz D_1 unija pravokotnikov iz D_2.



Trditev Če sta D, D' delitvi za P in je $D \subset D'$, tedaj je

$$s(f,D) \le s(f,D') \le S(f,D') \le S(f,D)$$

Dokaz Če je $A \subset B$, tedaj je $\inf_B f \le \inf_A f$ in

$$\sup_A f \le \sup_B f$$

$\square$

Posledica Za poljubni delitvi D_1, D_2 pravokotnika P je

$$s(f,D_1) \le S(f,D_2)$$

Vsaka spodnja Darbouxova vsota je manjša od vsake zgornje Darbouxove vsote

Dokaz Naj bo D delitev, ki je finejša od D_1 in D_2 hkrati. Sledi

$$s(f,D_1) \le s(f,D) \le S(f,D) \le S(f,D_2)$$

$\square$

Oznake Za omej. funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def

$$s(f) = \sup_D s(f,D)$$
$$S(f) = \inf_D S(f,D)$$

Def. Omejena funkcija $f: P \to \mathbb{R}$ je integrabilna v Darbouxovem smislu, če je $s(f) = S(f)$ in temu številu pravimo (dvojni) integral funkcije f po pravokotniku P. Oznaka

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy, \quad \text{včasih} \quad \iint_P f(x,y)\,dS(x,y)$$

Primeri

$f(x,y) = c$ za $c \in \mathbb{R}$

Tedaj $s(f,D) = \sum_{jk} c\,|P_{jk}| = c \sum_{jk} |P_{jk}| = c\,|P|$

$S(f,D) = \sum_{jk} c\,|P_{jk}| = c \sum_{jk} |P_{jk}| = c\,|P|$

Torej $s(f) = S(f) = \int_P f\,dS = c\,|P|$

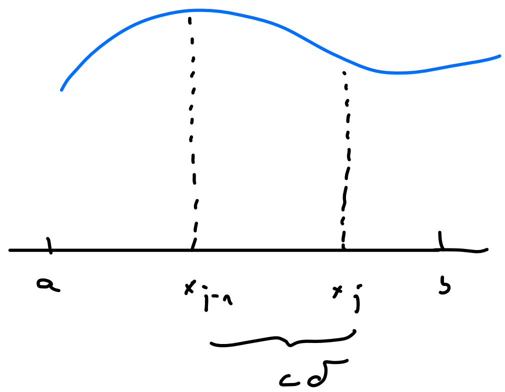
Analogno konstrukcijo lahko izvedemo v $\mathbb{R}^n$ za poljuben $n \in \mathbb{N}$

Def. Naj bo $P \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f : P \to \mathbb{R}$. Pravimo, da je f integrabilna v Riemannovem smislu, število $I \in \mathbb{R}$ pa je njen Riemannov integral, če:

za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ da

za poljubno delitev kvadra P da je diameter $D < \delta$ za $\forall D \in \mathcal{D}$ in poljubno pripadajočo izbiro ξ velja

$$|R(f, \mathcal{D}, \xi) - I| < \varepsilon$$



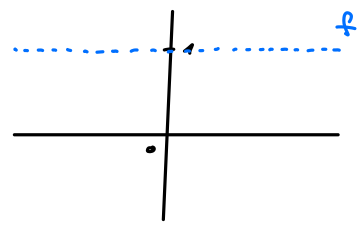
Trditev Omejena f. $f : P \to \mathbb{R}$ je integrabilna v Darbouxovem smislu, natanko takrat, ko je integrabilna v Riemannovem smislu. V tem primeru sta integrala enaka.

Primer $P : [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$

$A : (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap P$

$f = \chi_A$ karakteristična funkcija množice A

$$\chi_A = \begin{cases} 1 ; & x \in A \\ 0 ; & x \notin A \end{cases}$$



Tedaj velja

$$\left.\begin{array}{l} s(f, \mathcal{D}) = 0 \\ S(f, \mathcal{D}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f = \chi_A \text{ na } [0,1] \times [0,1]$$

ni integrabilna

Trditev Delovna definicija integrabilnosti

Naj bo $f : P \to \mathbb{R}$ omejena. Tedaj je f integrabilna na P natanko takrat $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ delitev $\mathcal{D}$ iz P da:
$(\Leftrightarrow)$ $$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$$

Dokaz ($\Rightarrow$) Privzamemo $S(f) = s(f) = I(f) = I$, kjer je

$$S(f) = \inf_D S(f, D)$$

$$s(f) = \sup_D s(f, D)$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj po) $\exists$ delitvi D in D' za P da

$$S(f) > S(f, D) - \varepsilon$$

$$s(f) < s(f, D) + \varepsilon$$

Naj bo D_0 finejša od D, D' hkrati. Tedaj je

$$S(f, D_0) - s(f, D_0) \leq S(f, D) - s(f, D') <$$
$$< (I + \varepsilon) - (I - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

($\Leftarrow$)

Iz def $S(f)$, $s(f)$ sledi

$$S(f) - s(f) \leq S(f, D) - s(f, D) \quad \text{za } \forall D$$

Iz pogoja na desni dobimo, da $\exists D$ da

$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Sledi $S(f) - s(f) < \varepsilon$

Hkrati je $S(f) - s(f) \geq$ Sledi $S(f) - s(f) = 0$

Izrek. Vsaka zvezna funkcija $P \to \mathbb{R}$ je integrabilna. $P \in \mathbb{R}^n$

Dokaz za $\mathbb{R}^2$, za $\mathbb{R}^n$ je analogen

Naj bo $P = [a, b] \times [c, d]$ in $f : P \to \mathbb{R}$ zvezna

Vzamemo $\varepsilon > 0$. Uporabimo pojem trditev.
Ker je P zaprt in omejen (= kompakten) je f
enakomerno zvezna na P. Torej $\exists \delta > 0$ da za $\xi_1, \xi_2 \in P$
z $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$ je $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \varepsilon$. Naj bo

$D = \{ P_i \in \mathbb{R}^n \text{ kvader}, i \}$ taka delitev za P, da je

diameter $P_i < \delta$. Sledi $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \varepsilon$ za
$\forall \xi_1, \xi_2 \in P_i$ in $\forall i$

Sedaj je $S(f, D) - s(f, D) = \sum_i \underbrace{\left(\max_{P_i} f - \min_{P_i} f \right)}_{< \varepsilon} |P_i| < \varepsilon |P|$

$\square$

Izrek Lastnosti integrala

1. Če sta f, g integrabilni na P, sta tudi $f+g$ in cf; $c \in \mathbb{R}$ integrabilni in
$$\int_P (f+g) = \int_P f + \int_P g \quad \text{in} \quad \int_P cf = c\int_P f$$
Drugače rečeno, množica integrabilnih funk. na P je vektorski prostor, in
$$f \longmapsto \int_P f \quad \text{je linearni funkcional na njem.}$$

2. Če sta f, g integrabilni na P in je $f \leq g$, tedaj je
$$\int_P f \leq \int_P g$$

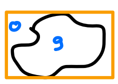
3. Če je f integrabilna na P, je tudi $|f|$ integrabilna na P in velja
$$\left| \int_P f \right| \leq \int_P |f|$$

Dokaz DN

Oznaka $I(P) = \{ f : P \to \mathbb{R} ;\ f \text{ integrabilna} \}$

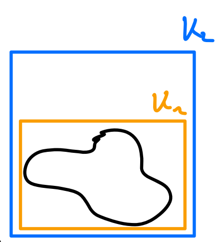
Integracija po poljubni množici

f :  $\to \mathbb{R}$

g :  $\to \mathbb{R}$

Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena podmnožica in $f : A \to \mathbb{R}$ omejena funkcija.
Ker je A omejena $\exists$ kvader $K \subset \mathbb{R}^n$ da $A \subset K$.
Funkcijo f trivialno razširimo na K, def.
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) ; & x \in A \\ 0 ; & x \in K - A \end{cases}$$

Tedaj def
$$\int_A f = \int_K \tilde{f} \quad \text{če integral na desni obstaja}$$



Preverimo: def je dobra, torej neodvisna od izbire K.

Primer $A = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0,1] \times [0,1])$
$f = 1$

Če bi bila f integrabilna na A bi imeli

$$\iint_A 1 \, dx\, dy = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \chi_A \, dx\, dy$$

za slednjega smo že pokazali, da ne obstaja

Def Omejena množica $A \subset \mathbb{R}^n$ ima n razsežno prostornino, če je konstantna funkcija 1 integrabilna na A. Tedaj def

$$V(A) = \int_A 1 \, dx = \int_K \chi_A(x) \, dx$$ za poljuben kvader $K \subset \mathbb{R}^n$ da $A \subset K$

Kriterij Kdaj ima A prostornino? Iščemo preprost kriterij.

Integrabilnost χ_A: vzamemo kvader $K \subset \mathbb{R}^n$ da $A \subset K$ za delitev $D = \{P_j ; j = 1 \dots n\}$ je

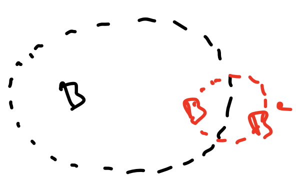
$$M_j - m_j = \max_{P_j} \chi_A - \min_{P_j} \chi_A = \begin{cases} 1-1 \; ; & P_j \subset A \\ 0-0 \; ; & P_j \subset A^c \\ 1-0 \; ; & P_j \text{ seka } A \text{ in } A^c \end{cases}$$

Torej

$$S(\chi_A, D) - s(\chi_A, D) = \sum_j (M_j - m_j)|P_j| =$$

$$= \sum_{\substack{P_j \text{ seka} \\ A \text{ in } A^c}} |P_j|$$

Spomnimo se: če je $B \subset \mathbb{R}^n$, kdaj je njen rob ∂B def. kot



$$\partial B = \{x \in \mathbb{R}^n ; \forall \text{ okolica točk } x \text{ seka } B \text{ in } B^c\}$$

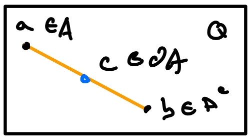
...

Lema Naj bo $Q \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $A \subset \mathbb{R}^n$ poljubna množica. Če Q seka A in A^c, tedaj Q seka ∂A

Dokaz Če je $a \in A \cap Q$ in $b \in A^c \cap Q$, tedaj zaradi konveksnosti Q daljica

$$[a,b] = \{\underbrace{(1-t)a + tb}_{\gamma(t)} ; t \in [0,1]\}$$

cela leži v Q.

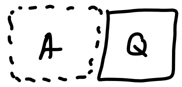


Za $$t_0 = \inf \{ t \in (0,1];\ \gamma(t) \in A^c \}$$

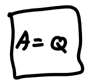
poleg tega velja še $\gamma(t_0) \in \partial A$. Torej $c = \gamma(t_0) \in Q \cap \partial A$

Opomba: obrat ne velja

Q seka ∂A in ne seka A



Q seka ∂A in ne seka A^c



$\square$

• • •

Posledica je $$S(\chi_A, D) - s(\chi_A, D) \le \sum_{P_j \text{ seka } \partial A} |P_j| = S(\chi_{\partial A}, D)$$

Sledi: če je $V(\partial A) = 0$, tedaj ima A prostornino

Velja tudi obrat

Trditev Omejena množica $A \subset \mathbb{R}^n$ ima n-dimenzionalno prostornino $(\Longleftrightarrow)$ ∂A ima prostornino $V(\partial A) = 0$

rob A ja

Vemo $V(B) = 0 \iff s(\chi_B) = S(\chi_B) = 0$

Ker je $\chi_B \ge 0$ je vedno res $0 \le s(\chi_B) \le S(\chi_B)$, zato

$$V(B) = 0 \iff S(\chi_B) = 0$$

Ker je $S(\chi_B) = \inf_D S(\chi_B, D)$, sledi:

$V(B) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists$ delitev D nekega kvadra $K \supset B$ da

$$S(\chi_B, D) < \varepsilon$$

S tem smo dokazali, za polj. (omej.) množico $B \subset \mathbb{R}^n$

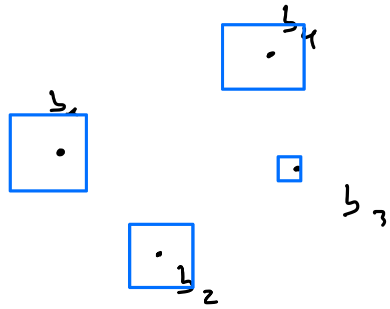
Trditev $V(B)=0 \iff$ za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ hkrati $K_1 \dots K_m \subset \mathbb{R}^n$ da

- $B \subset \bigcup_{j=1}^{m} K_j$
- $\sum_{j=1}^{m} |K_j| < \varepsilon$

Primeri

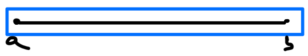
① $A = \{b_1 \dots b_n\} \subset \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \quad V(A) = 0$



② $A = [a,b] \subset \mathbb{R}^n$; $n \geq 2$

$V(A) = 0$



Trditev Končna unija množic s prostornino 0 ima spet prostornino 0.

Dokaz Naj bodo $B_1 \dots B_m \subset \mathbb{R}^n$ množice s prostornino 0. Tedaj vsak B_j lahko pokrijemo s končno kvadri skupnega volumna $< \varepsilon/m$. Unija vseh teh kvadrov je pokritje za $B_1 \cup \dots \cup B_m$ volumna $< \varepsilon$. $\square$

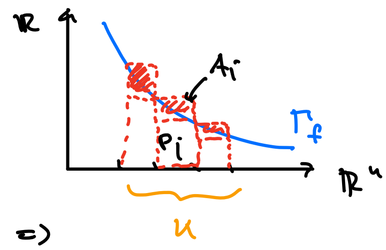
Trditev Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ (npr. kvader) in $f: K \to \mathbb{R}$ integrabilna. Tedaj ima njen graf Γ_f prostornino 0 v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dokaz Vemo $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} ; x \in K\}$

Vzamemo polj. $\varepsilon > 0$. Ker je f integrabilna $\exists$ delitev $D = \{P_i\}$ za K da $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.

Def

$$A_i = P_i \times [m_i, M_i]$$



Tedaj je $\Gamma_f \subset \bigcup A_i$

res; $x \in K \Rightarrow x \in P_j$ za neki $j \Rightarrow$

$$m_j \leq f(x) \leq M_j$$

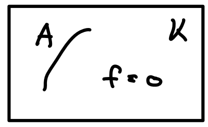
$$\Rightarrow (x, f(x)) \in P_j \times [m_j, M_j] = A_j$$

Hkrati je

$$\sum_i |A_i| = \sum_i |P_i| (M_i - m_i) = S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$$

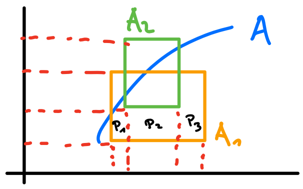
Po trditvi od prej je $V_{n+1}(\Gamma_f) = 0$ $\square$

Trditev Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader, $A \subset K$ množica z volumnom 0 in $f: K \to \mathbb{R}$ omejena in enaka 0 zunaj A. Tedaj $\int_K f(x)\,dx$ obstaja in je enak 0.



Dokaz $M = \sup_K |f| = \sup_A |f|$. Vzamemo $\varepsilon > 0$. Tedaj $\exists$ kvadri $A_1, \dots, A_m$ da $A \subset \bigcup A_i$ in $\sum_i |A_i| < \varepsilon$.

Kvadri $\{A_i\}$ porodijo delitev $D = \{P_k\}$ za K da vsak od A_i je unija kvadrov iz D



Tedaj je

$$S(f,D) = \sum_k \sup_{P_k} f \cdot |P_k| =$$

$$= \sum_{k: P_k \text{ seka } A} \sup f \, |P_k| \leq \sup_A f \sum_{k: P_k \cap A \neq \emptyset} |P_k| \leq$$

$$\leq \sup_A f \sum |A_i| < \sup_A f \; \varepsilon$$

Torej $S(f,D) \leq M\varepsilon$. Podobno $s(f,D) < -M\varepsilon$, zato

$0 \leq S(f,D) - s(f,D) \leq 2M\varepsilon$. Sledi $S(f) = s(f) = 0$

$\square$

Posledica Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f: K \to \mathbb{R}$ omejena in integrabilna na K. Če za $A \subset K$ velja $V(A) = 0$ in če za $\tilde{f}: K \to \mathbb{R}$ velja $f = \tilde{f}$ na $K - A$, tedaj je $\tilde{f}$ spet integrabilna in je $\int_K \tilde{f} = \int_K f$.

(Ne glede na def. $\tilde{f}$ na A)
(Bistvo: integracija po množici s prostornino 0 se ne pozna)

Dokaz Glej $f - \tilde{f}$ in uporabi prejšnjo trditev

Def. Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ poljubna množica (ne nujno omejena). Pravimo, da ima A (n-dimenzionalno) mero 0, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ števno družino kvadrov $\{A_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ tako da:

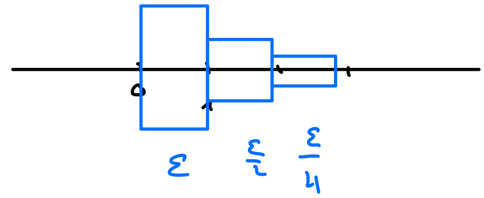
- $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$
- $\sum_{j=1}^{\infty} |A_j| < \varepsilon$

Opomba: Če ima A prostornino 0 ima tudi mero 0

Oznaka $m(A) = 0$

Primeri

① Premica v $\mathbb{R}^2$ ima mero 0



$$\sum |A_j| = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon$$

② $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ nima prostornine v $\mathbb{R}$, velja $m(A)=0$

Zaradi števnosti lahko pišemo $A = \{q_1, q_2, \dots\}$

Tedaj je $\{I_j ; j \in \mathbb{N}\}$, kjer je I_j interval okoli q_j dolžine $\varepsilon/2^j$, pokritje za A skupne dolžine ε.
Podobno $m(\mathbb{Q}) = 0$ v $\mathbb{R}$.

Trditev Števna unija množic z mero 0 ima spet mero 0.

Dokaz D.N.

Izrek (Lebesgue) Naj bo $f: K \to \mathbb{R}$ omejena. Tedaj je f integrabilna $\Leftrightarrow$ množica nezveznosti f ima mero 0

(Brez dokaza)

Def Pravimo, da lastnost $\mathcal{L}$ velja skoraj povsod na množici $X \subset \mathbb{R}^n$, če velja povsod razen morda na množici z mero 0.
Torej če je
$$m(\{x \in X ; \mathcal{L} \text{ ne velja v točki } x\}) = 0$$
Oznaka
s.p. $x \in X$

Posledica Lebesguevega izreka

Če je $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena, tedaj

$V(A) = \int \chi_A$ obstaja $\Leftrightarrow$ χ_A je zvezna skoraj povsod na $\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow m(\partial A) = 0$

rob je množica nezveznosti v χ_A

Spomnimo se: M metrični prostor in $K \subset M$ je kompaktna, če za $\forall$ njeno odprto pokritje $\exists$ končno podpokritje.

Vemo: $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktna $\Leftrightarrow$ je zaprta in omejena

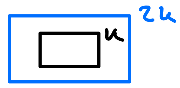
Še vemo: $V(A) = 0 \Rightarrow m(A) = 0$
Za kompaktne množice velja tudi obrat

Trditev Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ kompaktna. Tedaj $V(A)=0 \iff m(A)=0$

Dokaz $(\Rightarrow)$ ✓

$(\Leftarrow)$ Oznake: če je $U \subset \mathbb{R}^n$ kvader, bomo z $2U$ označili **odprt** kvader z istim središčem, toda 2x radij.

v tem dokazu



Vzamemo $\varepsilon > 0$. Ker je $m(A)=0$, $\exists$ zap. kvadrov $\{A_1, A_2, \dots\}$ da

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{in} \quad \sum_{i}^{\infty} |A_j| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$\Rightarrow \{2A_j \,;\, j \in \mathbb{N}\}$ so spet pokritje za A

A je kompaktna

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ da $\{2A_j \,;\, j=1,\dots,N\}$ pokriva A.

Velja

$$\sum_{i}^{N} V(2A_j) = \sum_{j=1}^{N} 2^n V(A_j) \leq 2^n \sum_{j=1}^{\infty} V(A_j) < \varepsilon$$

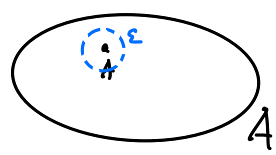
Ker je bil $\varepsilon > 0$ poljuben, smo dobili, da je $V(A)=0$

$\square$

Odprte in zaprte množice v $\mathbb{R}^n$ — ponovitev

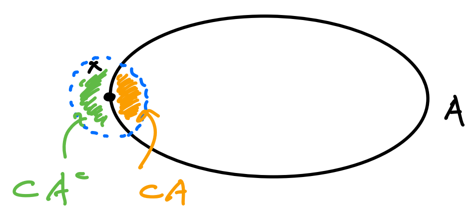
Def Pravimo, da je $A \subset \mathbb{R}^n$ **odprta**, če za $\forall x \in A$ $\exists \varepsilon > 0$ da $K(a,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |x-a| < \varepsilon\} \subset A$

Množica $B \subset \mathbb{R}^n$ je **zaprta**, če je $B^c = \mathbb{R}^n / B$ odprta (ne velja za vsak ε)



Rob množice $A \subset \mathbb{R}^n$ označimo z ∂A in def takole

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \text{za } \forall \varepsilon > 0 \text{ krogla } K(x,\varepsilon) \text{ seka tudi } A \text{ in } A^c\}$$



Komentar Prej smo navedli, da

$$V(A) \text{ obstaja } \Leftrightarrow V(\partial A) = 0$$

Zatem smo navedli, da

$$V(A) \text{ obstaja } \Leftrightarrow m(\partial A) = 0$$

Rezultata nista v neskladju. Ker je množica A omejena je tudi ∂A omejen, hkrati pa je ∂A vedno zaprt. Sledi, da je ∂A kompakten, zato po zadnji trditvi velja:

$$V(\partial A) = 0 \Leftrightarrow m(\partial A) = 0$$

Oznaka Za omejeno množico $A \subset \mathbb{R}^n$ pišemo

$$I(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \text{ omejena; } f \text{ integrabilna (na } A) \}$$

Izrek (lastnosti integrabilnih funkcij)

Naj bo A omejena, f, g sta omejeni.

① Če sta $f, g \in I(A)$ je tudi $f + g \in I(A)$ in velja

$$\int_A f + g = \int_A f + \int_A g$$

za $\forall c \in \mathbb{R}$ je tudi $cf \in I(A)$ in $\int_A cf = c \int_A f$

② Če za $f, g \in I(A)$ velja $f(x) \leq g(x)$ za $\forall x \in A$, tedaj

$$\int_A f \leq \int_A g$$

③ Če je $f \in I(A)$, je tudi $|f| \in I(A)$ in velja

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

④ Če je $f \in I(A)$ in ima A prostornino je

$$\int_A |f| \leq V(A) \sup_A |f|$$

...

Def Če $V(A)$ obstaja in je > 0, tedaj za $f \in I(A)$ označimo

$$\langle f \rangle_A = \frac{1}{V(A)} \int_A f(x) dx$$ ← v temu integral kjer $x = (x_1, \dots, x_n)$

To je povprečna vrednost funkcije f po množici A

...

(5) Privzemimo naslednje
- $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ sta omejeni množici
- $V(A_1 \cap A_2) = 0$
- $f : A_1 \cup A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ omejena
- $f \in I(A_1) \cap I(A_2)$

Tedaj je $f \in I(A_1 \cup A_2)$ in
$$\int_{A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$$

Dokaz Ker je $\chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} - \chi_{A_1 \cap A_2}$, je
$$\int_{A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f - \underbrace{\int_{A_1 \cap A_2} f}_{=0}$$ po predpostavki

$\square$

Trditev Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f : K \to \underline{[0, \infty)}$. Tedaj velja
$$\int_K f(x)\,dx = 0 \iff f = 0 \text{ skoraj povsod na } K.$$

Dokaz (skica) Def. $K_n = \{x \in K \,;\, f(x) \geq 1/n\}$ Tedaj je
$$\frac{1}{n} V(K_n) = \int_{K_n} \frac{1}{n}\,dx \leq \int_{K_n} f(x)\,dx \overset{f \geq 0}{\leq} \int_K f(x)\,dx = 0$$

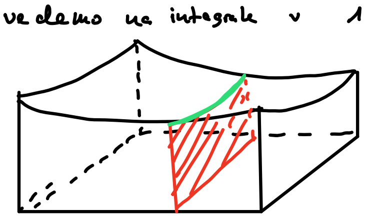
Sledi da $V(K_n) = 0$, zato je $m(K_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Torej je
$$m\Big(\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n}_{= \{x \in K \,;\, f(x) \neq 0\}}\Big) = 0 \implies m(\{f \neq 0\}) = 0$$

$\square$

Fubinijev (oz. Fubini-Tonellijev) izrek

Kako dejansko izračunamo integrale v $\mathbb{R}^n$?
V $\mathbb{R}$ poznamo:
- per partes, nova neznanka $\Rightarrow$ kombinacije več funkcij
- integrali elementarnih funkcij ($x^n, a^x, \log, \sin, \cos$, rac. funk., koreni, etc.)

Ideja: izračun integrala prevedemo na integrale v 1 spremenljivki
Geometrijsko ozadje:



volumen telesa v $\mathbb{R}^3$ je vsota/integral ploščin dvodim. presekov

Teoretična podlaga je izrek iz naslova

Izrek (Fubini-Tonelli) Naj bo $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ integrabilna. Privzemimo, da je za $\forall x\in[a,b]$ funkcija $f(x,\cdot):[c,d]\to\mathbb{R}$, def. kot $y\to f(x,y)$, integrabilna na $[a,b]$. Tedaj je

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

↑ dvojni integral ↑ dvakratni integral

Posledica Če sta pri oznakah kot v izreku, integrabilni f ter za $\forall y\in[c,d]$ še $f(\cdot,y)$, tedaj je

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

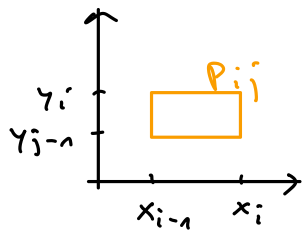
Posledica Če je $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ zvezna, tedaj je

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

↑ to želimo dokazati

Dokaz Fubinijevega izreka. Def. $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ s predpisom $g(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ ($\exists$, saj je $f(x,\cdot)$ po privzetku integ. za $\forall x$). Označimo $I=[a,b]$ ter $J=[c,d]$. Želimo videti

$$\iint\limits_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy = \int_I g(x)\,dx \qquad (3)$$



Izberimo delitvi: $D_1=\{I_i=[x_{i-1},x_i];\ i=1,\dots,m\}$ za I ter
$D_2=\{J_j=[y_{j-1},y_j];\ j=1,\dots,n\}$ za J

Tedaj je $D=D_1\times D_2=\{P_{ij}=I_i\times J_j;\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$ delitev za $I\times J$.
Označimo še $m_{ij}(f)=\inf\limits_{P_{ij}} f$ in $M_{ij}(f)=\sup\limits_{P_{ij}} f$.

Velja $$s(f,D)=\sum_{i,j} m_{ij}(f)\underbrace{|P_{ij}|}_{|I_i||J_j|} = \sum_i\sum_j m_{ij}(f)|J_j||I_i| \qquad (1)$$

Izberimo $i\in\{1,\dots,m\}$ ter $x\in I_i$. Sedaj je

$$m_{ij}(f)=\inf_{\xi\in I_i,\ y\in J_j} f(\xi,y)\le \inf_{x\in I_i\ y\in J_j} f(x,y) = m_j(f(x,\cdot))$$

Sledi, za izbrana i in x

$$\sum_j m_{ij}(f)|J_j|\le \sum_j m_j(f(x,\cdot))|J_j| = s(f(x,\cdot),D_2)\le \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Povzetek $\sum_j m_{ij}(f)|J_j|\le g(x)$ za $\forall i\in\{1,\dots,m\}$ in $x\in I_i$

Torej je tudi $\sum_j m_{ij}(f)|J_j|\le \min\limits_{x\in I_i} g(x)$ za $\forall i\in\{1,\dots,m\}$ in zato, zaradi (1),
velja še $s(f,D)\le s(g,D_1)$.

(2) $s(f,D)\le s(g,D_1)\le S(g,D_1)\le S(f,D)$ za poljubno delitev $D=D_1\times D_2$ pravokotnika $I\times J$

Izberemo $\varepsilon>0$. Ker je f integrabilna, po trditvi od prej $\exists$ takšna delitev D, da je $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$. Torej po (2), za njeno "projekcijo na 1. komponento" D_1 velja $S(g,D_1)-s(g,D_1)<\varepsilon$. Po isti trditvi je tudi g integrabilna in iz (2) sledi še (3).

□

Primer $P = [-1,1]\times[-2,2] \subset \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}$$

$$I = \iint_P \left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right) dx\,dy = ?$$

Ker je f zvezna, je po zadnji posledici:

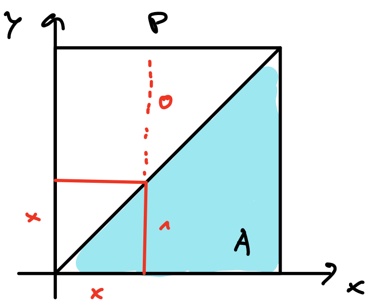
$$I = \int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{1} 1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-2}^{2} 2-\frac{y}{2}\,dy = 8$$

Izračun v drugačnem vrstnem redu

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)dy\,dx = 4\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{3}\right)dx = 8$$

Primer $P = [0,1]\times[0,1]$



$A = P \cap \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ y \le x\}$

$g(x,y) = x$

$$I = \iint_A g = \iint_A x\,dx\,dy$$

Velja $$I = \iint_P \underbrace{x\,\chi_A(x,y)}_{f(x,y)}\,dx\,dy$$

Funkcija f je integrabilna na P, ker ima množica njenih nezveznosti (diagonala) mero 0 v $\mathbb{R}^2$. Prav tako so $f(x,\cdot)$ in $f(\cdot,x)$ integrabilne na $[0,1]$ ker imajo množico njihovih nezveznosti ($\{x\}$ oz $\{y\}$) mero 0 v $\mathbb{R}$. Torej po Fubinijevem izreku

$$I = \int_0^1\int_0^1 x\,\chi_A(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 x \underbrace{\int_0^1 \chi_A(x,y)\,dy}_{x}\,dx = \frac{1}{3}$$

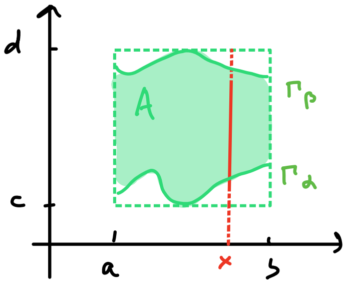
oziroma

$$I = \int_0^1\int_0^1 x\,\chi_A(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_y^1 x\,dx\,dy = \dots = \frac{1}{3}$$

Trditev Naj bo

- $I = [a,b]$
- $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji da: $\alpha \leq \beta$ na I
- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x \in I \, ; \, y \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$
- $f : A \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija

Tedaj je
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



Dokaz Ker sta α, β zvezni, sta na $[a,b]$ omejeni, zato $\exists$ pravokotnik $P = [a,b] \times [c,d]$ da $A \subset P$.

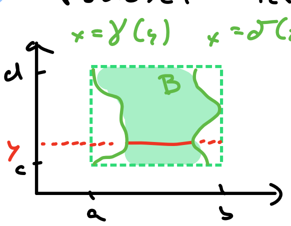
Funkcijo f trivialno razširimo na P: def $\tilde{f} : P \to \mathbb{R}$ s predpisom
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ; (x,y) \in A \\ 0 & ; (x,y) \notin A \end{cases}$$

Točke nezveznosti so vsebovane v $\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$. Po trditvi od prej vemo, da imata $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ prostornino 0 v $\mathbb{R}^2$, zato jo ima tudi $\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$. Posledično je $\tilde{f}$ zvezna skoraj povsod na P, zato je integrabilna na P. Podobno je za $\forall x \in [a,b]$ kjer $y \longmapsto \tilde{f}(x,y)$ odsekoma zvezna na $[c,d]$, zato je integrabilna. Sedaj s pomočjo Fubinijevega izreka ugotovitve združimo v

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_P \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy\,dx =$$
$$= \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

$\square$

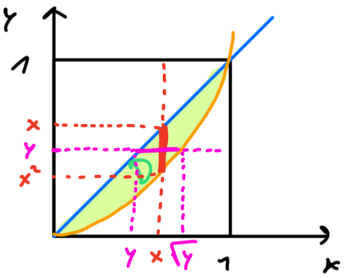
Opombe Podoben izrek velja za obraten vrstni red



$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Primer D = območje v $\mathbb{R}^2$, omej. z $y=x$ in $y=x^2$. $f(x,y)=x+y$. Izračunaj integral

$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$



Po zadnji trditvi je naš integral

$$I=\int_0^1\int_{x^2}^{x}(x+y)\,dy\,dx=\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^2}^{y=x}dx$$

$$=\int_0^1\left(\left(x^2+\frac{x^2}{2}\right)-\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)\right)dx=\ldots=\frac{3}{20}$$

Obratni vrstni red

$$I=\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}}(x+y)\,dx\,dy=\ldots=\frac{3}{20}$$

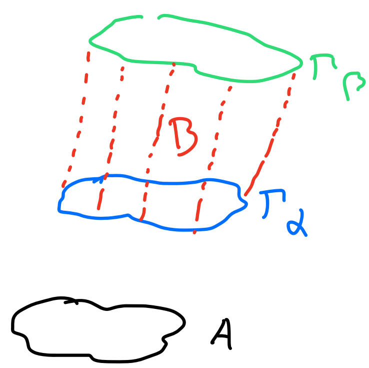
Izrek Posplošitev na višje dimenzije
Naj bosta $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}^m$ kvadra in $f: A\times B\to\mathbb{R}$ integrabilna. Za vsak $x\in A$ naj bo $f(x,\cdot): y\longmapsto f(x,y)$ integrabilna na B. Tedaj je

$$\iint_{A\times B}f(x,y)\,dx\,dy=\int_A\int_B f(x,y)\,dy\,dx$$

Posledica Naj bo $F: K=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]\longrightarrow\mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_{[a,b]\times[c,d]}\left(\int_e^f f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy=\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Trditev Privzemimo, da:
- $A\subset\mathbb{R}^2$ ima ploščino
- $\alpha,\beta: A\to\mathbb{R}$ sta zvezni funkciji in $\alpha<\beta$ na A
- $B=\{(x,y,z)\in A\times\mathbb{R};\ \alpha(x,y)\le z\le\beta(x,y)\}$
- $f: B\to\mathbb{R}$ je zvezna



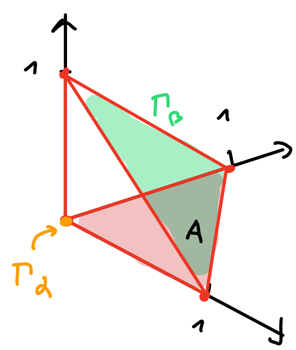
Tedaj je

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV=\iint_A\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)}f(x,y,z)\,dz\,dS(x,y)$$

Primeri

① $$\iiint_{[0,1]\times[-1,1]\times[0,1]}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_{-1}^1\int_0^1(x+y+z)\,dz\,dy\,dx=\ldots=2$$

② T: tetraeder z oglišči $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$



Območje T omejimo z α in β
$\alpha(x,y)=0$
$\beta(x,y)=1-x-y$

Γ_β leži v ravnini skozi zadnje tri točke, to pa je $x+y+z=1$ oz., kot graf $z=1-x-y=\beta(x,y)$

A je projekcija T na (x,y) ravnino

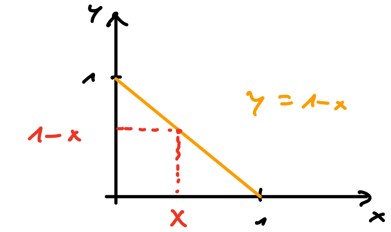
Sledi

$$\iiint_T(x+y+z)^2\,dV=\iint_A\int_0^{1-x-y}(x+y+z)^2\,dz\,dS(x,y)=$$

Območje A moremo omejiti

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+y+z)^2 \, dz \, dy \, dx = \dots = \frac{1}{10}$$

↑ ker gre y od 0 do $1-x$



③ Naj bo $T \subset \mathbb{R}^3$ telo, omejeno z

$x = 0$

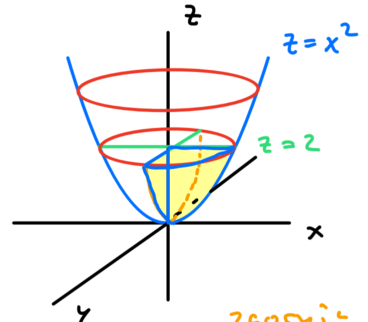
$y = 0$

$z = 2$

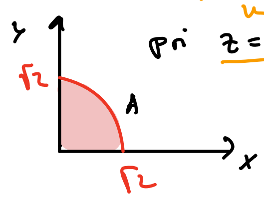
$z = x^2 + y^2$

in naj za $(x,y,z) \in T$ velja $x, y \geq 0$. Zanima nas

$$\iiint_T x \, dV =$$



zgornja meja pri $z = 2$



Torej je T telo med

$A = \{(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \, ; \, x^2+y^2 \leq 2\}$

in med grafoma funkcij $z = x^2+y^2 = d(x,y)$

$z = 2 \qquad = \rho(x,y)$

Torej je
$$I = \iint_A \int_{x^2+y^2}^{2} x \, dz \, dS(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x \, dz \, dy \, dx = \dots = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

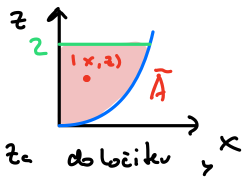
$x^2 + y^2 = 2$

$y = \sqrt{2-x^2}$

ker je

Alternativni vrstni red integracije

Če T projeciramo na xz ravnino, dobimo



$$I = \iint_{\tilde{A}} \int_0^{\sqrt{z-x^2}} x \, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} \int_0^{\sqrt{z-x^2}} x \, dy \, dz \, dx = \dots = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

Za določiko y meje se vprašam kje vstopi pravokotna premica na ravnino $\tilde{A}$.

Vstopna točka

$y = 0$

Izstopna točka

$y = \sqrt{z - x^2}$

Trojne ali dvojne integrale lahko zapisujemo tudi drugače:

$$\iint_{I\,J} f(x,y) \, dx \, dy = \int dy \int f(x,y) \, dx$$

Uvedba nove spremenljivke

Izrek Poznamo izrek:

$I \subset \mathbb{R}$ interval

$\varphi : [a,b] \to I$ zvezno odvedljiva

$f : I \to \mathbb{R}$ zvezna

Tedaj je

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, du = \int_a^b f(\varphi(x)) \, \varphi'(x) \, dx$$

Analogija za integrale v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$?

Def. Naj bo $U^{odp} \subset \mathbb{R}^n$ in, za $j = 1, \dots, m$, $\varphi_j : U \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljive na vse spremenljivke. Tedaj <u>Jacobijevo matriko</u> za $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ def. kot

$J\varphi$ = matrika odvodov vseh komponent φ po vseh spremenljivkah

$$J\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

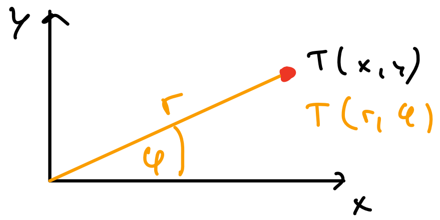
Običajno bo v naših primerih $n = m$

Primeri

- $n=1$ $\quad J\varphi = [\varphi']$
- $n=2$ $\quad \varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

$$J\varphi = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$$

- Polarne koordinate v $\mathbb{R}^2$



Koordinate so šifra / koda / algoritem za opis točk v $\mathbb{R}^2$.

Polarni koordinati podamo z
$x = r \cos \varphi$
$y = r \sin \varphi$

$$\left.\begin{aligned} x &= x(r,\varphi) \\ y &= y(r,\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (0,\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Tvorimo $\phi = (x, y)$, torej $\phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

Sledi

$$J\phi = \begin{bmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\det J\phi = r.$

Izrek Naj bo

- $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena odprta množica s prostornino
- $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ injektivna razreda C^1 (vektorska funkcija)
- $\det J\varphi(x) \neq 0$ za $\forall x \in A$ in $\det J\varphi$ omejena na A
- $\varphi(A)$ je odprta v $\mathbb{R}^n$ s prostornino
- $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ je integrabilna

Tedaj je tudi $x \longmapsto f(\varphi(x)) \, |\det J\varphi(x)|$ integrabilna na A in velja

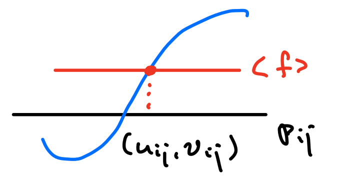
$$\int_{\varphi(A)} f(x)\,dx = \int_A f(\varphi(t)) \, |\det J\varphi(t)| \, dt$$

x, t sta vektorja

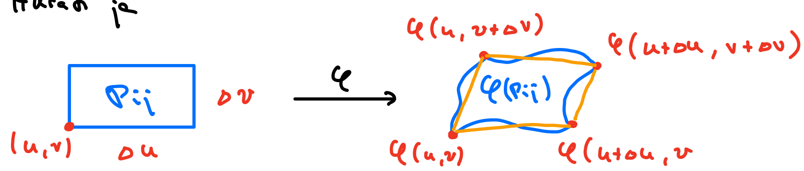
Dokaz skica. Obravnavamo primer, ko je $n=2$ in A je pravokotnik.
Naj bo $\{P_{ij}\}$ neka delitev za A. Velja

$$\iint_{\varphi(A)} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{ij} \iint_{\varphi(P_{ij})} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{ij} \underbrace{\langle f \rangle_{\varphi(P_{ij})}}_{\text{povprečje } f \text{ na } P_{ij}} \underbrace{|\varphi(P_{ij})|}_{\text{mera množice}} \quad (1)$$

Imamo
(i) $\langle f \rangle_{\varphi(P_{ij})} = f(\varphi(u_{ij}, v_{ij}))$ za neke $(u_{ij}, v_{ij}) \in P_{ij}$ (2)



(ii) Hkrati je



Ideja: $|\varphi(P_{ij})|$ aproks. s ploščino paralelograma

Vemo: pl. paralelograma $|\vec{a} \times \vec{b}|$

Torej

$$|\varphi(P_{ij})| \approx |\underbrace{(\varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u,v))}_{\doteq \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\Delta u} \times \underbrace{(\varphi(u,v+\Delta v) - \varphi(u,v))}_{\doteq \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\Delta v}| \quad \leftarrow \text{Lagrangev izrek}$$

$$\doteq |\varphi_u \times \varphi_v| \Delta u \Delta v = \qquad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$$

$$= \left\| \begin{matrix} \varphi_{1u} & \varphi_{1v} \\ \varphi_{2u} & \varphi_{2v} \end{matrix} \right\| \Delta u \Delta v = |\det J\varphi| \Delta u \Delta v$$

Torej

$$|\varphi(P_{ij})| \doteq |\det J\varphi(u_{ij}, v_{ij})| \Delta u_{ij} \Delta v_{ij}$$

zato je

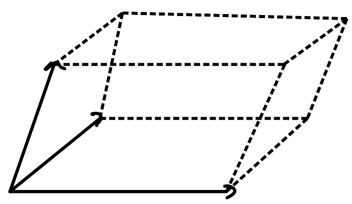
$$\iint_{\varphi(A)} f(x,y)\,dx\,dy \doteq \sum_{ij} f(\varphi(u_{ij}, v_{ij})) \, |\det J\varphi(u_{ij}, v_{ij})| \Delta u_{ij} \Delta v_{ij},$$

na desni strani je ravno Riemannova vsota za integral

$$\iint_A f(\varphi(x,y)) \, |\det J\varphi(x,y)| \, dx\,dy$$

□

Primer Naj bo P: paralelepiped na $v_1 = (1,1,1)$
$v_2 = (2,3,1)$
$v_3 = (0,1,1)$



Če so e_1, e_2, e_3 stand. bazni vektorji v $\mathbb{R}^3$, je
$Te_i = v_i$ za

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Torej je P slika enotske kocke $K = [0,1]^3$ pri delovanju T.

$$V(P) = \iiint_P 1 = \iiint_{T(K)} 1 \, dx\,dy\,dz = \iiint_K 1 \cdot |\det JT|$$

Pri tem vzamemo T kot

$$T(x,y,z) = T(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xTe_1 + yTe_2 + zTe_3 = xv_1 + yv_2 + zv_3$$

Sledi:

$$JT \overset{\text{lahko se poračuna}}{=} [v_1, v_2, v_3] = T$$

zato je $|\det JT| = |\det T| = \ldots = 2$

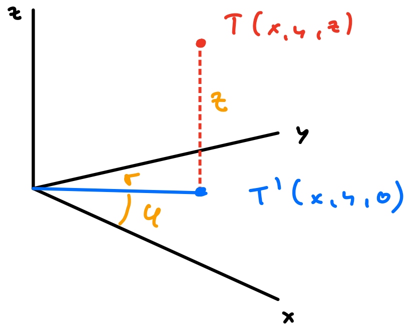
$$V(P) = 2 \underbrace{V(K)}_{1} = 2$$

Opomba Spotoma smo videli, da za vsako lin. preslikavo $\Lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ velja $J\Lambda = \Lambda$

Primer Cilindrične koordinate v $\mathbb{R}^3$

tenzorski produkt

V grobem (polarne koord. v $\mathbb{R}^2$) $\otimes$ (kartez. v $\mathbb{R}$)



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

$|\det J(x,y,z)| = \ldots = r$ DN

sfera

Imejmo $0 < \rho \leq R$. Naj bo Ω območje v $\mathbb{R}^3$, omejeno s ploskvama $x^2+y^2+z^2=R^2$ in $x^2+y^2=\rho^2$. Iščemo volumen $V(\Omega)$. Vidimo:

plašč valja

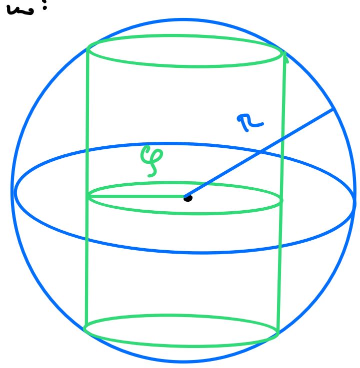
$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\, dx\, dy\, dz$$

Ω leži znotraj krogle in valja.

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\, dz\, dr\, d\varphi =$$

Ker v opisu Ω nastopata x, y le v obliki x^2+y^2 je Ω invariantna glede na zasuke okrog z osi.

$|\det J\varphi|$ za prehod na cil. koordinate



$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$
$$r^2 + z^2 = R^2$$
$$z^2 = R^2 - r^2$$
$$z = \pm\sqrt{R^2-r^2}$$

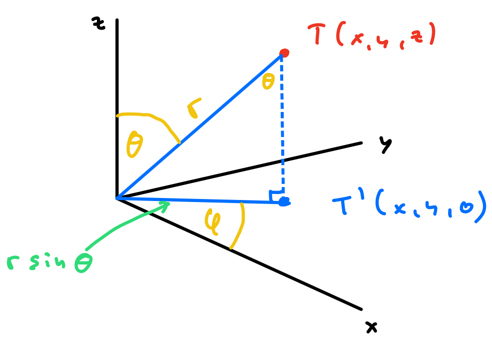
$$= 2\pi \int_0^{\rho} r \cdot 2\sqrt{R^2-r^2}\, dr = \int_0^{\rho} \sqrt{R^2-r^2}\, \underbrace{2r\,dr}_{-d(R^2-r^2)} = -2\pi \int_{R^2}^{R^2-\rho^2} \sqrt{t}\, dt = 2\pi \frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_{R^2-\rho^2}^{R^2}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(R^3 - (R^2-\rho^2)^{3/2}\right) = \frac{4\pi}{3}R^3\left(1 - \left(1 - \left(\rho/R\right)^2\right)^{3/2}\right)$$

Opomba: za $\rho = R$ dobimo $\frac{4\pi R^3}{3} = V$ (volumen krogle)

Primer Sferične koordinate v $\mathbb{R}^3$

Za opis uporabimo (r, φ, θ), kjer $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$



$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

za $\Phi = \Phi(r, \varphi, \theta) = (x, y, z)$
$= (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$

$$J\Phi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad r \quad & \quad \varphi \quad & \quad \theta \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{bmatrix} \end{array}$$

Sledi $\det J\Phi = \ldots = -r^2\sin\theta$, zato je

$$|\det J\Phi| = r^2\sin\theta$$

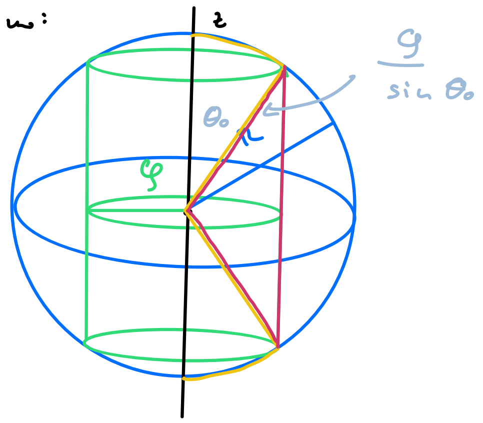
Po izreku o zamenjavi je npr.

$$\iiint_{K(0,R)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\cdot \overbrace{r^2\sin\theta}^{\det J\phi}\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Standardni koordinatni sistemi:

- $\mathbb{R}^n$: kar kart. koord.
- $\mathbb{R}^2$: polarne
- $\mathbb{R}^3$: cilindrične, sferične

Imejmo $0 < \rho \le R$. Naj bo Ω območje v $\mathbb{R}^3$, omejeno s ploskvama $\underbrace{x^2+y^2+z^2=R^2}_{\text{sfera}}$ in $x^2+y^2=\rho^2$. Iščemo volumen $V(\Omega)$. Vidimo:



Izračunajmo s sferičnimi koordinatami

$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\underbrace{\int_0^{\theta_0}} + \underbrace{\int_{\pi-\theta_0}^{\pi}} \right) d\theta \int_0^{R} r^2\sin\theta\,dr + \underbrace{\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}} d\theta \int_0^{\rho/\sin\theta_0} r^2\sin\theta\,dr \right)$$

Meje smo določili: skoda na to, ali nivojnica $\{\theta = \text{konst}\}$ zapusti Ω na robu sfere ali na robu valja.

Poglejmo valj

$x^2+y^2 = \rho^2$

$r^2\sin^2\theta = \rho^2$

$r\sin\theta = \rho$ ker $\theta\in[0,\pi]$

$R\sin\theta_0 = \rho$ $\qquad \theta_0 = \arcsin\frac{\rho}{R}$

Drugačen vrstni red integracije

$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^{\rho} dr \int_0^{\pi} r^2\sin\theta\,d\theta + \int_{\rho}^{R} dr \left(\int_0^{\arcsin\frac{\rho}{r}} + \int_{\pi-\arcsin\rho/r}^{\pi} \right) r^2\sin\theta\,d\theta \right)$$

V vseh treh primerih je rezultat (vrednost) integrala enak.

$\int_\alpha^\beta d\theta \int_0^R r^2\sin\theta\,dr$ je alternativni zapis za

$\int_\alpha^\beta \int_0^R r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$

Def: Naj ima telo $T\in\mathbb{R}^3$ gostoto $\rho = \rho(x,y,z)$. Če je $\rho = \text{konst.}$, pravimo, da je telo homogeno. Masa telesa T je def. kot

$$m(T) = \int_T \rho = \iiint_T \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Težišče telesa T je točka $(x_T, y_T, z_T)\in\mathbb{R}^3$, kjer je

$$x_T = \frac{1}{m(T)}\int_T x\rho = \frac{1}{m(T)}\iiint_T x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$y_T = \frac{1}{m(T)}\int_T y\rho \qquad z_T = \frac{1}{m(T)}\int_T z\rho \qquad \Rightarrow \vec{x} = (x,y,z) \qquad \vec{x}_T = \frac{1}{m(T)}\int_T \vec{x}\rho$$

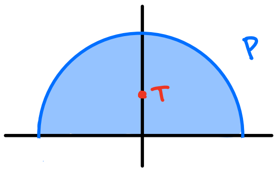
Vztrajnostni moment telesa $T \in \mathbb{R}^3$ pri vrtenju okoli osi $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ je enak

$$J_\gamma = \int_T d(\vec{x}, \gamma)^2 \rho(\vec{x})\, d\vec{x}$$

kjer je $d(\vec{x}, \gamma)$ oddaljenost točke $\vec{x} = (x,y,z)$ od osi γ.
V posebnem je npr.

$$J_{z\,os} = \iiint_T (x^2+y^2)\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

Primer Iščemo težišče homogene polkrožne plošče P v $\mathbb{R}^2$

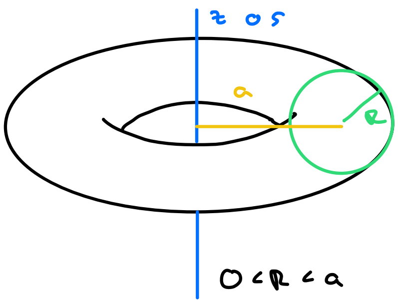


Velja:

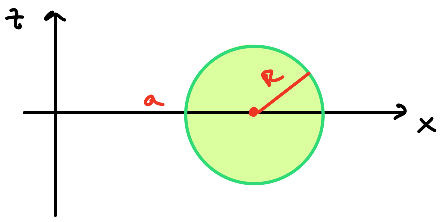
- $m_P = \frac{\pi R^2}{2} \rho$
- $x_T = 0$ simetričnost in homogenost
- $y_T = \frac{1}{m(P)} \iint_P y \rho\, dx\,dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R r \sin\varphi \; r\,dr\,d\varphi$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{4R}{3\pi} \doteq 0{,}4R$$

Primer Vztrajnostni moment homogenega torusa v $\mathbb{R}^3$ pri vrtenju okoli z osi.



Opis torusa
Krog $K((a,0), R)$ v xz ravnini in ga zasukamo okoli z osi za kot med 0 in 2π.



$$f(r,\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + r\cos\theta \\ 0 \\ r\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+r\cos\theta)\cos\varphi \\ (a+r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$$

Od tod dobimo idejo za alternativne koordinate v $\mathbb{R}^3$

$x = (a + r\cos\theta)\cos\varphi$

$y = (a + r\cos\theta)\sin\varphi$ $\qquad |\det J| = |a + r\cos\theta|\, r$ $\quad$ DN

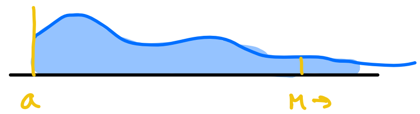
$z = r\sin\theta$

$$J_{z\,os}(\text{torus}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R (a + r\cos\theta)^2 |a + r\cos\theta|\, r\,dr\,d\theta\,d\varphi \overset{DN}{=} \ldots = \frac{\pi^2 R^2 a}{2}(3R^2 + 4a^2)$$

Posplošeni Riemann–Darbouxov integral

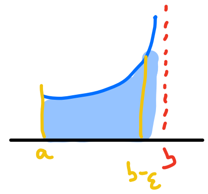
Doslej smo obravnavali omejen int. na omejenih množicah. Ali lahko te predpostavke odmislimo / odstranimo?

V $\mathbb{R}$ $(n=1)$



- Neomejeno int. območje

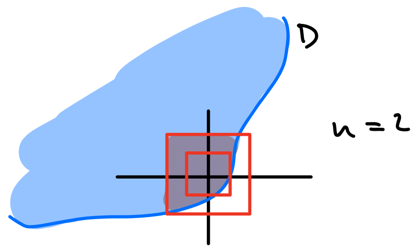
Def. $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$ če lim $\exists$ (izlimitirani integral)



- Neomejena funkcija

Def. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, če lim $\exists$

Te ideje prenesemo v $\mathbb{R}^n$



① Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ neomejena množica

Def. $D_j = D \cap [-j, j]^n$; $j \in \mathbb{N}$

↑ kocke v $\mathbb{R}^n$

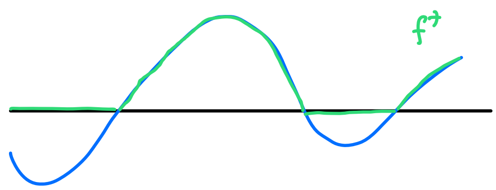
Bistvo
- $D_j \subset \mathbb{R}^n$ je omejena
- $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j = D$
- $D_1 \subset D_2 \subset \dots$

Naj bo $f \geq 0$. Privzemimo, da $\exists$ $I_j = \int_{D_j} f(x)dx$. Tedaj zaradi $D_j \subset D_{j+1}$ in $f \geq 0$ velja $I_1 \leq I_2 \leq \dots$:

$$I_{j+1} - I_j = \int_{D_{j+1}} f - \int_{D_j} f = \underbrace{\int_{D_{j+1}-D_j} f}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{D_j} f}_{\geq 0} \geq 0$$

$D_j \cup (D_{j+1} - D_j) = D_{j+1}$

Def. $I = \lim_{j\to\infty} I_j = \sup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ ter označimo $I = \int_D f(x)\,dx$

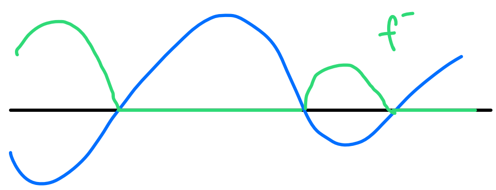


Če je $f: D \to \mathbb{R}$ (torej ni nujno $f \geq 0$), ozn.

$f^+ = \max\{f, 0\}$

$f^- = \min\{-f, 0\}$

Tedaj $f = f^+ - f^-$ $\quad |f| = f^+ + f^-$



Def $\int_D f = \int_D f^+ - \int_D f^-$

če sta oba int. na desni končna sicer bi lahko imeli $\infty - \infty$.

Tedaj velja

$$\int_D |f| = \int_D f^+ + \int_D f^- < \infty$$

zato rečemo, da je f absolutno integrabilna

Včasih družino funkcij f označimo z $\mathcal{L}^1(D)$ in pišemo $\|f\|_1 = \int_D |f|$

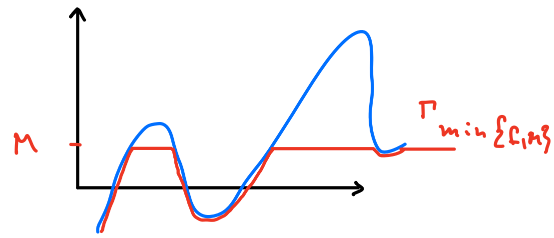
- $f: D \to [0,\infty)$ omejena

$$\int_D f = \lim_{a\to\infty} \int_{D\cap[-a,a]^n} f \quad \text{, če vsi izrazi na desni obstajajo}$$

- $f: D \to [0,\infty)$ neomejena

$$\int_D f = \lim_{M\to\infty} \underbrace{\int_D \min\{f,M\}}_{\text{definirali v prejšnjem koraku}} \quad \text{, če vsi izrazi obstajajo (lim in integrabilnost)}$$

$$\min\{f,M\} : x \longmapsto \begin{cases} f(x) \ ; & f(x) \le M \\ M \ ; & f(x) \ge M \end{cases}$$



- $f: D \to \mathbb{R}$ poljubna (ne nujno pozitivna ali omejena)

$$f_+ = \max\{f,0\} \qquad f_- = \min\{-f,0\}$$

Tedaj sta $f_\pm : D \to [0,\infty)$ in $f = f_+ - f_-$ $\quad |f| = f_+ + f_-$

Če $\exists \underbrace{\int_D |f|}_{\text{def. v prejšnjem koraku}} < \infty$, tedaj [sledi, da $\int_D f_\pm < \infty$ in] def

$$\int_D f = \int_D f_+ - \int_D f_-$$

Primer Za katere realne eksponente $s \in \mathbb{R}$ konvergira (obstaja in je končen) integral

$$I_n(s) = \int_{B^n(0,1)} \frac{dx}{|x|^s}$$ kjer je $B^n(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \le 1\}$ enotska krogla v $\mathbb{R}^n$.

Spomnimo se za $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ je $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$n=1$

$$I_1(s) = 2\int_0^1 x^{-s}\,dx = 2\,\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{1-s}\Big(1 - \underbrace{\lim_{x\to 0} x^{1-s}}_{\substack{0\ ;\ 1-s>0 \\ +\infty\ ;\ 1-s<0}}\Big)$$

če je $s \neq 1$

$s=1$

$$I_1(1) = 2\int_0^1 \frac{dx}{x} = 2\ln x\Big|_0^1 = 2(0 - \lim_{x\to 0}\ln x) = \infty$$

Videli smo:

$I_1(s) = \frac{2}{1-s}$ za $s < 1$

za $s \ge 1$ int. divergira

$n=2$

$$I_2(s) = \iint_{B^2(0,1)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{s/2}} \overset{\text{pol. koord.}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{r^s}\, r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^1 \frac{dr}{r^{s-1}} = 2\pi\, I_1(s-1)$$

$$= \frac{4\pi}{2-s} \quad \text{, če } s < 2$$

$n = 3$

$$I_3(s) = \iiint\limits_{B^3(0,1)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{s/2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sferične} \\ \text{koord.}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{r^s}\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 \frac{1}{r^{s-2}}\, dr = 2\pi \cdot 2\, I_1(s-2) = \frac{8\pi}{3-s} \quad \text{če } s<3$$

Slutimo :

$$I_n(s) = \frac{C(n)}{n-s}, \quad \text{če je } s<n$$

Odgovor je torej odvisen od n