

Vrtavka

Miha Pompe

April 2021

1 Teorija

Vrtavka je v našem primeru rotacijsko simetrično telo, ki ima eno glavno os tenzorja vztrajnostnega momenta J_{33} v smeri simetrijske osi, drugi dve glavni osi pa sta pravokotni nanjo. Vztrajnostna momenta okrog teh dveh osi sta enaka ($J_{11} = J_{22}$). Ostale komponente tenzorja so enake 0. Vektor kotne hitrosti $\vec{\omega}$ določa trenutno smer osi vrtenja. Tretjo os določa vektor vrtilne količine, ki ima v lastnem sistemu naslednjo obliko:

$$\Gamma_x = J_{11}\omega_x, \Gamma_y = J_{22}\omega_y, \Gamma_z = J_{33}\omega_z$$

Na vrtavko, ki ni podprta v težišču, deluje zaradi sile težnosti navor: $M = mgl\sin\theta$, kjer je m masa vrtavke, g težnosti pospešek, l razdalja med težiščem in oporno točko osi (l je ročica navora), in θ kot med osjo vrtavke in vertikalo. Ta sistem je težko rešljiv, lahko pa ga poenostavimo s tem, da predpostavimo, da se vrtavka giblje hitro, kar pomeni, da je rotacijska energija mnogo večja od potencialne. Naklonski kot θ se spreminja med θ_0 in θ_1 in v tem približku hitre vrtavke dobimo, da vrtavka niha med skrajnima vrednostima kota θ z nutacijsko kotno hitrostjo ω_N in se obenem giblje okrog osi z (navpičnice v prostoru) s precesijsko kotno hitrostjo ω_{pr} :

$$\omega_N = \frac{J_{33}}{J_{11}}\omega_z, \omega_{pr} = \frac{mgl}{J_{33}\omega_z}$$

Pri tem se vztrajnostne momente izračuna iz naslednjih enačb in Steinerjevega izreka:

$$J_{krogla} = \frac{2}{5}mr^2$$

$$J_{valj,z} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$J_{valj,xaliy} = m(r^2/4 + h^2/12)$$

2 Rezultati

Pri vaji smo merili frekvenco rotacije, precesije in nutacije. Te meritve so zbrane v tabeli 1. Poleg so sta navedena koeficienta $\frac{J_{33}}{J_{11}}$ in $\frac{mgl}{J_{33}}$ ki opisujejo lastnosti vrtavke. Napako teh vrednosti lahko iz napake merjenja frekvence, mase in razdalj ocenimo na 2 %. Vrednosti prvega in drugega koeficienta so med seboj podobne vendar izven reda napake. Le-to nakazuje na odstopanje naših predpostavk od poskusa, kar pomeni da ta aproksimacija ni dovolj natančna za naš sistem. Opazimo tudi odvisnost precesije od naklonskega kota, kar se sklada s teorijo, vendar to povzroči, da postaneta potencialna in kinetična energija primerljivi. Posledično se ta odvisnost pozna tudi v drugem koeficientu. Precesijska frekvenca se prav tako večja z oddaljenostjo težišča od osi vrtenja, kar tudi potrjuje prvotne enačbe.

	w_z [1/s]	w_pr [1/s]		w_nu [1/s]	J_33/J_11	mgl/J_33	
		1. kot	2. kot			1. kot	2. kot
Utež ob krogli	145,1	1,34	1,26			194,0	182,4
	148,2	1,21	1,28			179,0	190,0
	154,5	1,21	1,16			186,6	179,7
	159,0	1,31	1,23			208,1	195,8
	162,3	1,19	1,26			192,4	204,0
	164,4	1,21	1,19			198,6	194,9
	86,9			38,0	0,437		
	104,3			40,9	0,393		
	145,9			67,4	0,462		
Utež oddaljena	112,4	1,85	1,75			207,6	196,1
1.5 cm od krogle	119,4	1,70	1,80			202,7	214,3
	124,7	1,70	1,80			211,8	223,9
	126,8	1,65	1,75			209,7	221,3
	127,8			66,1	0,517		
	153,6			74,2	0,483		
	98,2			50,3	0,512		
Utež oddaljena	115,2	2,17	2,03			249,6	233,5
2.5 cm od krogle	128,2	1,80	1,70			230,1	217,7
	133,0	1,70	1,75			225,8	232,1
	153,4	1,57	1,50			241,0	229,5
	92,2			46,0	0,499		
	103,1			51,9	0,504		
	115,9			59,4	0,512		

Tabela 1: Tabela meritev rotacijske, precesijske in nutacijske frekvence ter preračunanjih koeficientov. Napako meritve kotnih hitrosti lahko ocenimo na 1 %.

Drugi del vaje je primerjava meritev s teoretično pridobljenimi vrednostmi. Tabela 2 prikazuje teoretične izračune. Navedeni so vstrajnostni momenti okoli glavnih osi za vsak del vrtavke posebej. Za vsako postavitev uteži je naveden tudi prispevek odmika od osi vrtenja (Steinerjev izrek). Od tod lahko izračunamo ista koeficienta kot sta navedena v Tabeli 1. Opazimo, da so vse izračunane vrednosti znotraj območja meritev. Napaka izračuna vstrajnostnih momentov izvira iz meritve mase in dimenzij, ter zanaša 0,6%.

					L-R [mm]	0	15	25
					Težišče [mm]	4,50	5,00	5,33
Predmet	Masa [g]	Premier [mm]	Debelina [mm]	J ₃₃ [g cm ²]	J ₁₁ [g cm ²]	mr ² [g cm ²]		
Krogla	512	50,7		1316,09	1316,09	103,72	127,9	145,4
Ploščica	19	58	1	79,90	39,96	114,04	109,5	106,5
Palica	23	6,3	89,8	1,14	155,13	436,20	426,3	419,8
Utež	19	19,3	25,2	8,85	14,48	399,41	390,8	385,1
Vsota	573			1405,97	1525,66	1053,37	1054,4	1056,7
					J ₃₃ /J ₁₁	0,545	0,545	0,544
					mg/J ₃₃	192,6	213,9	232,4

Tabela 2: Dimenzije vrtavke in preračunani vstrajnostni momenti.

Analiza prispevkov vstrajnostnih momentov posameznih delov vrtavke pokaže, da k J_{33} največ prispeva krogla. To tudi pričakujemo, saj je ta najtežja. V drugih dveh smereh pa k momentu predvsem prispeva premik rotacijske osi od težišča. Opazimo, da palica in utež, ki sta najdlje od osi vrtenja prispevata skoraj 40 % celotnega momenta.

3 Diskusija

Z vajo smo potrdili našo teoretično razumevanje problema vrtavke ter opazili, da lahko zelo hitro preidemo na območje, kjer naši preprosti približki prenehajo veljati. Tam se prepoenostavitev pokaže v odstopanju meritev od izračunane vrednosti.