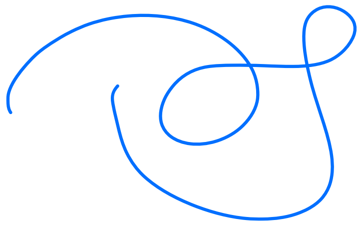
Krivulje v prostoru



Želimo orodje za opis in študij krivulj

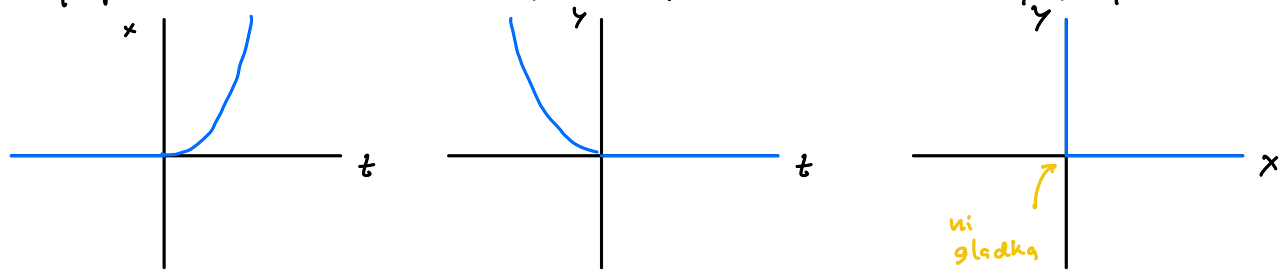
Def <u>Pot</u> v $\mathbb{R}^3$ je zvezna preslikava $\vec r : I \to \mathbb{R}^3$, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ interval (čas). Torej $\vec r = \vec r(t) = (x(t), y(t), z(t))$; $t \in I$. Sliko poti, torej $\vec r(I) \subset \mathbb{R}^3$, imenujemo <u>tir</u>. Pot je <u>gladka</u>, če je $\vec r \in C^1(I)$. <u>Gladka krivulja</u> v $\mathbb{R}^3$ je gladka pot $\vec r = (x, y, z) : I \to \mathbb{R}^3$ za katero velja $\underline{\dot{\vec r}(t) \neq 0}$ za $\forall t \in I$. To bo naš standardni privzetek.

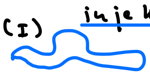
nikoli se ne ustavimo, zmeraj lahko narišem tangento na krivuljo

Primer Def $x, y : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ s predpisom

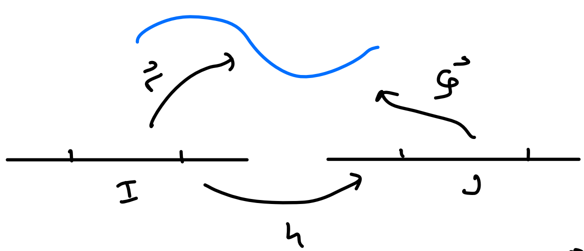
$$x(t) = \begin{cases} t^2 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & ; t \geq 0 \\ t^2 & ; t < 0 \end{cases}$$

Tedaj je $\vec r = (x, y, 0)$ gladka pot, ki pa ni gladka krivulja, saj $\dot{\vec r}(0) = (0,0,0)$



Opomba Večinoma zahtevamo, da Γ nima samopresečišč, razen mogoče v krajiščih. To pomeni da je $\vec r$, ali pa vsaj $\vec r|_{\text{int}(I)}$ <u>injektivna</u>. Takrat torej ne dopuščamo tega: 
eventualno pa dopuščamo .

Večinoma pod pojmom „gladko krivuljo" pojmujemo $\Gamma = \vec r(I)$, med tem ko $\vec r$ rečemo regularna parametrizacija ($\vec r \in C^1(I)$, $\dot{\vec r} \neq 0$ povsod). Vseh regularnih parametrizacij je neskončno mnogo.

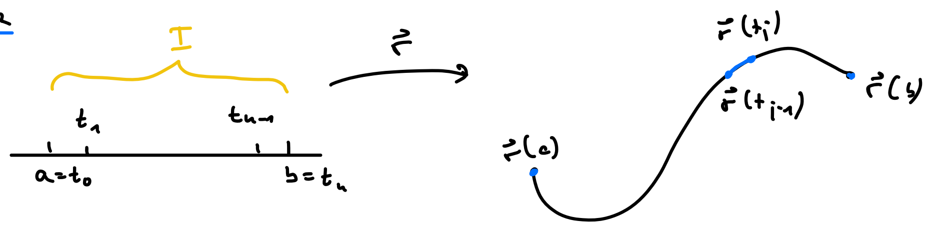


Važno je kako (tudi hitrost) smo prišli do Γ in ne kakšen je Γ sam.

Če sta $\vec r : I \to \Gamma$, $\vec \rho : J \to \Gamma$ bijektivni, $\exists\, h = \vec\rho^{-1} \circ \vec r : I \to J$ (in je spet bijektivna), zato je $\underline{\vec r = \vec \rho \circ h}$.

Obratno, vsaka krivulja $\tilde h : J \to I$ razreda C^1 z $\tilde h' \neq 0$ povsod nam iz $\vec r$ porodi novo regularno parametrizacijo, namreč $\vec \rho = \vec r \circ \tilde h$

Dolžina krivulje



Ker sta si $\vec r(t_{j-1})$ in $\vec r(t_j)$ blizu, dolžino loka na krivulji med njima aproksimiramo z ravno daljico, katere dolžina je $|\vec r(t_j)-\vec r(t_{j-1})|$, kar je po Lagrangejevem izreku približno enako $|\dot{\vec r}(t_j)|(t_j-t_{j-1})$, če vse seštejemo po j, dobimo

$$\sum |\dot{\vec r}(t_j)|(t_j-t_{j-1})$$

Kar je Riem. vsota za $|\dot{\vec r}|:[a,b]\to(0,\infty)$, prirejena delitvi $\{t_0,\dots,t_n\}$

Def Def. Če je $\vec r:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ gladka krivulja, katere tir označimo z Γ, tedaj <u>dolžino Γ</u> definiramo, kot

$$\ell(\Gamma)=\int_a^b|\dot{\vec r}(t)|\,dt$$

Trditev Ta def. je dobra (torej neodv. od izbire parametrizacije).

Dokaz Naj bo $\vec\rho: J\to\Gamma$ neka druga reg. parametrizacija za Γ. Vemo, da lahko pišemo $\vec\rho=\vec r\circ h$ za neko C^1 preslikavo h. Tedaj je

$$\int_\alpha^\beta|\dot{\vec\rho}(\tau)|\,d\tau=\int_\alpha^\beta|\dot{\vec r}(\underbrace{h(\tau)}_{t})||\underbrace{\dot h(\tau)|\,d\tau}_{dt}=\int_a^b|\dot{\vec r}(t)|\,dt$$

$\square$

Def Naravni parameter

„Risanje krivulje s hitrostjo konstantne velikosti 1."

Imamo krivuljo γ, param. z $\vec r=\vec r(t)$, $t\in[a,b]$. Hočemo novo parametrizacijo $\vec\rho=\vec\rho(s)$, $s\in[\alpha,\beta]$, pri kateri bo velikost hitrosti potovanja po γ konstantna 1, torej $|\dot{\vec\rho}|=1$. Privzemimo, da γ nima samopresečišč. Def., za neko param. $\vec\rho$, $S=\vec\rho^{-1}\circ\vec r:[a,b]\to[\alpha,\beta]$; injektivna

Torej je S bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča, Privzemimo, da je $S'>0$ (povsod, strogo narašča). Odvajamo $\vec r=\vec\rho\circ S$ in sledi

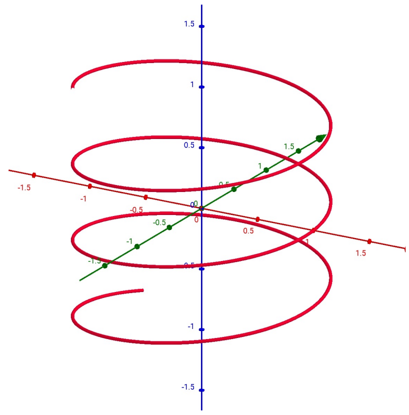
$$|\dot{\vec r}(t)|=|\underbrace{\dot{\vec\rho}(S(t))}_{=1}||\underbrace{\dot S(t)}_{>0}| \quad \text{oz.} \quad \dot S(t)=|\dot{\vec r}(t)|.$$

Zato def (za polj. gladko krivuljo, z ali brez presečišč) naravni parameter s predpisom

$$S(t)=\int_a^t|\dot{\vec r}(\tau)|\,d\tau \quad \text{za } \forall t\in[a,b],$$

Hkrati pa $s=S(t)\in[0,\ell(\gamma)]$. Tedaj za $\vec\rho(s)=\vec r(S^{-1}(s))$ velja $|\dot{\vec\rho}|=1$

Primer Vzemimo $a, b \geq 0$ in def



$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt); \quad t \in \mathbb{R}$$

① $\dot{\vec{r}}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$,

zato je

② $s = S(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(\tau)|\, d\tau = \sqrt{a^2+b^2}\, t$

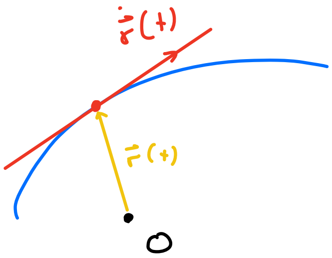
oz ③ $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, kjer je s naravni parameter. Torej je naravni parameter vijačnica Γ podan z

④ $\vec{\varphi}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

Def Vektorju $\frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$ pravimo enotski tangentni vektor na Γ v točki $\vec{r}(t)$. V naravni parametrizaciji je enak vektorju $\vec{\varphi}\,'(s)$, kjer je s določen z enačbo $\vec{r}(t) = \vec{\varphi}(s)$

Primer $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $T = \vec{r}(1) = (1, 1, 1)$ } Tangentni vektor v točki T je $\frac{\dot{\vec{r}}(1)}{|\dot{\vec{r}}(1)|} = \ldots = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$

Def Tangenta na Γ v točki $\vec{r}(t)$ je premica v $\mathbb{R}^3$, ki poteka skozi $\vec{r}(t)$ in je vzporedna $\dot{\vec{r}}(t)$.



Enačba: $(x, y, z) = \vec{r}(t) + \lambda\dot{\vec{r}}(t)$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Def Normalna ravnina na krivuljo Γ v točki $\vec{r}(t)$ je ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje $\vec{r}(t)$ in je pravokotna na $\dot{\vec{r}}(t)$ (oz. na tangento na Γ v točki $\vec{r}(t)$).

skalarni produkt

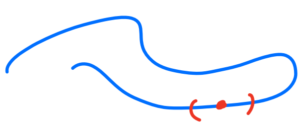
Enačba: $\langle (x, y, z) - \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)\rangle = 0$

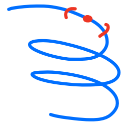
Primer Vijačnica $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $T = \vec{r}(0) = (a, 0, 0)$.
Velja $\dot{\vec{r}}(0) = (-a\sin t, a\cos t, b)\big|_{t=0} = (0, a, b)$, zato je

- tangenta v T podana z
  $(x, y, z) = (a, 0, 0) + \lambda(0, a, b) = (a, \lambda a, \lambda b)$; $\lambda \in \mathbb{R}$
- normalna ravnina v T podana z
  $\langle (x, y, z) - (a, 0, 0), (0, a, b)\rangle = 0$
  $ya + zb = 0$

Pritisnjena ravnina

„To je ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki se v dani točki krivulji najbolje prilega." (motivacija)



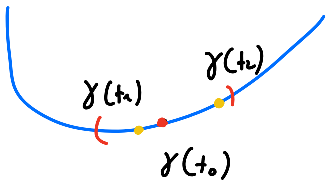


Iščemo ravnino, ki se lokalno najbolje prilega krivulji v okolici dane točke.

Izrek Naj bo γ (ponavadi $\vec{r}$) C^2 (dvakrat zvezno odvedljiva) parametrizacija neke krivulje v $\mathbb{R}^3$. Za dani $t_0 \in \mathbb{R}^3$ privzemimo, da je

$v_0 = (\gamma' \times \gamma'')(t_0) \neq 0.$

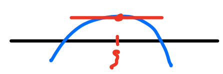
Tedaj $\exists \delta > 0$ da za polj. $t_1, t_2 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ da t_0, t_1, t_2 so medsebojno različni, so točke $\gamma(t_0)$, $\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ nekolinearne.



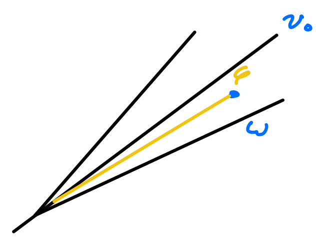
$\Gamma = \{\gamma(t)\}$

Če je krivulja ravna (premica) potem lahko nanesemo neskončno ravnin nanjo.

Dokaz Denimo, da $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)$ niso nekolinearne. Torej ležijo na premici $\ell = \ell(t_1, t_2)$. Vzemimo $w \in \ell^{\perp} - \{0\}$ (ravnina, ort. komp.) Recimo $t_0 < t_1 < t_2$ (alternative je $t_1 < t_0 < t_2$). Ker $\gamma(t_j) - \gamma(t_0)$ leži na premici ℓ, je
$\langle \gamma(t_1) - \gamma(t_0), w \rangle = \langle \gamma(t_2) - \gamma(t_0), w \rangle = 0$
Če def $f(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), w \rangle$, je $f(t_0) = f(t_1) = f(t_2) = 0$
Sedaj Rollov izrek pove, da $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ da $t_0 < \xi_1 < t_1 < \xi_2 < t_2$ in $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ oz.



$$\langle \gamma'(\xi_1), w \rangle = \langle \gamma'(\xi_2), w \rangle = 0$$



Spet po Rollovem izreku sledi $\langle \gamma''(\xi_3), w \rangle = 0$

Ideja zaključka dokaza: če sta t_1, t_2 blizu t_0, sta zaradi pogoja da je γ iz C^2, sta $\gamma'(\xi_j)$ blizu $\gamma'(t_0)$ in $\gamma''(\xi_j)$ blizu $\gamma''(t_0)$
$\Rightarrow$ w skoraj prav. na $\gamma'(t_0)$, $\gamma''(t_0)$
$\Rightarrow$ w skoraj vzporeden na $\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)$
$\Rightarrow$ w leži v ozkem stožcu okoli osi v_0
Ker je bil $w \in \ell^{\perp} - \{0\}$ poljuben, cela množica $\ell^{\perp}$ leži v tem stožcu. Toda če je ℓ premica, je $\ell^{\perp}$ ravnina, ki pa ne more biti vsebovana v stožcu. $\longrightarrow$ protislovje

Izpeljava: vzemimo $\varepsilon > 0$. Velja

$$v_0 \times w = [\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)] \times w = \langle \gamma'(t_0) - \gamma'(\xi_1) \rangle \gamma''(t_0) - \langle \gamma''(t_0) - \gamma''(\xi_3), w \rangle \gamma'(t_0)$$

Po Cauchy-Schwartzu

$$|v_0 \times w| = (\overbrace{|\gamma'(t_0) - \gamma'(\xi_1)|}^{\alpha} \cdot |\gamma''(t_0)| + \overbrace{|\gamma''(t_0) - \gamma''(\xi_3)|}^{\beta} \cdot |\gamma'(t_0)|)|w|$$

Ker sta γ', γ'' zvezni v t_0, $\exists\, \delta > 0$ da za (polj.) $\xi_1, \xi_3 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ je $\alpha < \varepsilon$ in $\beta < \varepsilon$. Pogoja na ξ_1, ξ_3 sta gotovo izpol., če $t_1, t_2 \in J$.
Dokazali smo: $\exists\, \delta > 0$ da

$$\frac{|v_0 \times w|}{|w|} \le (|\gamma'(t_0)| + |\gamma''(t_0)|)\varepsilon \quad \text{za } \forall\, t_1, t_2 \in (t_0, t_0 + \delta) \text{ za } \forall\, w \in \ell(t_1, t_2)^{\perp} - \{0\}$$

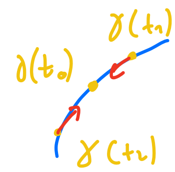
Toda $|v_0| \sin\varphi$, kjer je φ kot med v_0 in v. Sledi

$$\sin\varphi \le \frac{|\gamma'(t_0)|+|\gamma''(t_0)|}{|\gamma'(t_0)\times\gamma''(t_0)|}\,\varepsilon$$

to pa nam pomeni, da je kot med v_0 in poljubnim vektorjem iz $\ell(t_1,t_2)^\perp$ najmanj majhen, če sta t_1, t_2 blizu t_0. Torej $\ell(t_1,t_2)^\perp$ naj leži v (ozkem neskončnem) stožcu (z osjo v_0), kar pa ni mogoče, če naj bi bila ℓ premica. Torej za t_1, t_2 blizu t_0 (razl.) točke $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)$ nikoli niso kolinearne.

$\square$

Ideja: ravnine $\pi(t_1,t_2)$ skozi $\gamma(t_{0,1,2})$ limitirajo ($t_1,t_2\to t_0$) proti ravnini skozi $\gamma(t_0)$ in z normalo v_0. Rejensko s tem mislimo, da enotske normale $n(t_1,t_2)$ na $\pi(t_1,t_2)$ konvergirajo proti v_0



Def. Ravnini skozi $T_0=\gamma(t_0)$ in z normalo $v_0=\dot\gamma(t_0)\times\ddot\gamma(t_0)$ pravimo pritisnjena ravnina za krivuljo γ v točki T_0.

Izrek Če je $\pi=\pi(t_0)$ pritisnjena ravnina za γ v točki $\gamma(t_0)$, tedaj velja

$$d(\gamma(t_0+h),\pi)=o(h^2)\quad ;\ h\to 0$$

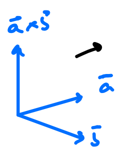
razdalja med T in S

$$F(h)=o(h^2)\ ;\ h\to 0 \iff \lim_{h\to 0}\frac{F(h)}{h^2}=0$$

Torej je stik med $\gamma(t_0)$ in $\pi(t_0)$ drugega reda

(dobro prileganje)

Dokaz Vemo, da je razdalja v $\mathbb{R}^3$ med točko $\vec R$ in ravnino skozi točko $\vec r_0$ in z normalo $\vec n$ je enaka $\dfrac{|\langle \vec R-\vec r_0,\vec n\rangle|}{|\vec n|}$.



$\vec a\times\vec b\perp\vec a \Rightarrow \langle\vec a\times\vec b,\vec a\rangle=0$

Sledi $d(\gamma(t_0+h),\pi)=\dfrac{|\langle\gamma(t_0-h)-\gamma(t_0),v_0\rangle|}{|v_0|}$ $\qquad v_0=\dot\gamma(t_0)\times\ddot\gamma(t_0)$

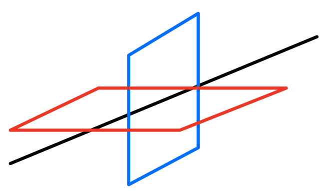
Taylorjev izrek
$$=\left|\left\langle\gamma(t_0)+h\gamma'(t_0)+\frac{h^2}{2}\gamma''(t_0)+o(h^2)-\gamma(t_0),\frac{v_0}{|v_0|}\right\rangle\right|$$
$$=\left|\left\langle o(h^2),\frac{v_0}{|v_0|}\right\rangle\right|$$

Cauchy-Schwartz $\le o(h^2)$

$\square$

Opomba Pritisnjena ravnina je enolično definirana, če $v_0\neq 0$. Za to ni dovolj, da krivulja ni premica.

Npr. za $\gamma(t)=(t^3,t^4,t^5)$ in $t_0=0$ velja $\ddot\gamma(0)=0$, zato je $v_0=\dot\gamma(0)\times\ddot\gamma(0)=0$, toda γ ne določa premice



Torej je enačba pritisnjene ravnine na krivuljo v točki $\vec r(t_0)$ podana z mešanim produktom

$$\big((x,y,z)-\vec r(t_0),\ \dot{\vec r}(t_0),\ \ddot{\vec r}(t_0)\big)=0,$$

če

$$(\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r})(t_0)\neq 0$$

$(\vec a,\vec b,\vec c)=\langle\vec a,\vec b\times\vec c\rangle=\langle\vec a\times\vec b,\vec c\rangle$

Primer

$\vec r(t) = (x(t), y(t), 0)$ ravninska krivulja, leži v xy ravnini

$\dot{\vec r} = (\dot x, \dot y, 0) \Rightarrow \dot{\vec r} \times \ddot{\vec r} = (0, 0, \dot x \ddot y - \ddot x \dot y) \perp \{z = 0\}$

$\ddot{\vec r} = (\ddot x, \ddot y, 0)$

Primer

Vijačnica

$$\vec r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$
$$\dot{\vec r}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec r} \times \ddot{\vec r} = a(-b\sin t, -b\cos t, a)$$
$$\ddot{\vec r}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

V točki: $t = 0$

$$(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r})(0) = a(0, -b, a)$$

zač. točka, normala

$\Rightarrow$ pritisnjena ravnina je podana z $\langle (x, y, z) - (a, 0, 0), (0, -b, a) \rangle = 0$

oz. $by - az = 0$

Def

Če je $\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r} \neq 0$, vektorju $\dfrac{\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}}{|\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}|}$ pravimo vektor binormale (oznaka $\vec B$). Če je $\vec T = \dot{\vec r} / |\dot{\vec r}|$ (enotski) tangentni vektor, tedaj vektorju $\vec N = \vec B \times \vec T$ pravimo vektor glavne normale. Ravnini v dani točki, ki je pravokotna na ta vektor pravimo rektifikacijska ravnina. Dobimo:

$$\vec T = \frac{\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|} \qquad \vec N = \frac{(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r}}{|(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r}|} \qquad \vec B = \frac{\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}}{|\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}|}$$

Trojici $(\vec T, \vec N, \vec B)$ pravimo spremljajoči (Frenet-Serret) trieder. Vsi trije vektorji so enotski in medsebojno pravokotni.

Primer

$a, b > 0 \qquad \vec r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \quad t \in \mathbb{R}$

$t_0 = 0 \qquad \vec r(0) = (a, 0, 0)$

$\dot{\vec r}(0) = (0, a, b) \qquad (\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r})(0) = a(0, -b, a)$

$\ddot{\vec r}(0) = (-a, 0, 0) \qquad ((\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r})(0) = a(a^2 + b^2, 0, 0)$

$$\Rightarrow \vec T = \frac{(0, a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \vec N = (-1, 0, 0) \qquad \vec B = \frac{(0, -b, a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Trditev

Naj bo $\vec r = \vec r(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, regularna C^2 parametrizacija za krivuljo Γ in

$$s = f(t) = \int_\alpha^t |\dot{\vec r}(\tau)| \, d\tau$$

pridruženi naravni parameter. Označimo z

$$\vec R(s) = \vec r(f^{-1}(s)) \qquad (1)$$

naravno parametrizacijo za Γ. Tedaj velja:

(i) Če je $F(s) = G(t)$ $(= G(f^{-1}(s)))$, potem je

$$F'(s) = \frac{G'(t)}{|\dot{\vec r}(t)|}$$

(ii) $\vec R'(s) = \dfrac{\dot{\vec r}(t)}{|\dot{\vec r}(t)|}$

(iii) $\vec R'' \perp \vec R'$, še več: $\vec R''(s) = \dfrac{(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^4} = \dfrac{|\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}|}{|\dot{\vec r}|^3} \cdot \dfrac{(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r}}{|(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r}|}$

Količini $\varkappa = \dfrac{|\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}|}{|\dot{\vec r}|^3}$

pravimo fleksijska ukrivljenost krivulje Γ v točki $\vec r$.

Tedaj je $\vec R''(s) = \varkappa \vec N$

Dokaz

(i) Iz $G(t) = F(f(t))$ sledi $G'(t) = F'(f(t)) \cdot f'(t) = F'(s)\,|\dot{\vec r}(t)|$

(ii) točka sledi direktno iz (i) če jo uporabimo na (1)

(iii) Velja

$$\vec R''(s) = \frac{d}{ds}\vec R'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\vec r}(t)}{|\dot{\vec r}(t)|}\right) \overset{(i)}{=} \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|}\right)(t)}{|\dot{\vec r}(t)|} =$$

$$= \frac{\left(\ddot{\vec r}\,|\dot{\vec r}| - \dot{\vec r}\,|\dot{\vec r}|^{\cdot}\right)/|\dot{\vec r}|^2}{|\dot{\vec r}|}$$

Ker za $\vec v = \dot{\vec r}$ velja $|\dot{\vec r}| = (\langle \vec v, \vec v\rangle)^{1/2}$, je

$$|\dot{\vec r}|^{\cdot} = \frac{1}{2}\langle \vec v, \vec v\rangle^{-\frac{1}{2}}\left(\langle \dot{\vec v}, \vec v\rangle + \langle \vec v, \dot{\vec v}\rangle\right) = \frac{\langle \dot{\vec v}, \vec v\rangle}{|\vec v|} = \frac{\langle \ddot{\vec r}, \dot{\vec r}\rangle}{|\dot{\vec r}|}$$

Sledi

$$\vec R''(s) = \frac{|\dot{\vec r}|\,\ddot{\vec r} - \frac{\langle \dot{\vec r}, \ddot{\vec r}\rangle}{|\dot{\vec r}|}\dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^3} = \frac{|\dot{\vec r}|^2\,\ddot{\vec r} - \langle \dot{\vec r}, \ddot{\vec r}\rangle \dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^4} = \frac{(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r}}{|\dot{\vec r}|^4}$$

Vemo $(\vec a \times \vec b) \times \vec c = \langle \vec a, \vec c\rangle \vec b - \langle \vec b, \vec c\rangle \vec a$

Ker je $\vec a \times \vec b \perp \vec a$, je $|(\vec a \times \vec b) \times \vec a| = |\vec a \times \vec b|\,|\vec a| \sin\frac{\pi}{2}$, zato

$$\vec R''(s) = \frac{|(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r}|}{|\dot{\vec r}|^4} \cdot \frac{(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r}}{|(\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) \times \dot{\vec r}|} = \varkappa \vec N$$

$\square$

Izrek Naj bodo $\gamma, t_0, v_0, \sigma, t_1, t_2$ kot v prejšnjem izreku. Tedaj

(i) $\exists$ natanko ena krožnica $K(t_0, t_1, t_2) \subset \mathbb{R}^3$, ki vsebuje $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)$.

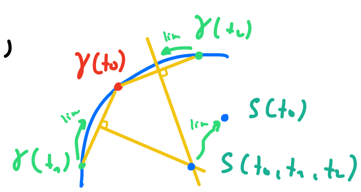
(ii) Če označimo s $S(t_0, t_1, t_2)$ središče te krožnice, tedaj $\exists$

$$S(t_0) = \lim_{t_1, t_2 \to t_0} S(t_0, t_1, t_2)$$

(iii) Točka $S(t_0) \in \mathbb{R}^3$ leži v pritisnjeni ravnini za Γ v točki $\gamma(t_0)$ in sicer na oddaljenosti $\rho = \frac{1}{\varkappa}$ od točke $\gamma(t_0)$.

Def Krožnici iz izreka pravimo pritisnjena krožnica za krivuljo Γ v točki $\gamma(t_0)$

Dokaz (i)



(ii), (iii) skica

Def $g: (t_0-\delta, t_0+\delta) \to [0,\infty)$ s predpisom $g(t) = |\gamma(t) - S(t_0, t_1, t_2)|^2$; $g(t_{0,1,2}) = 0$

Po Rollovem izreku $\exists\ \xi_1, \xi_2 \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$ da

$$g'(\xi_{1,2}) = 0$$

$\exists\ \xi_3$ da $\ddot{g}(\xi_3) = 0$?

V limiti dobimo, kjer je $S = \lim S(t_0, t_1, t_2)$

$$\langle \gamma'(t_0), \gamma(t_0) - S \rangle = 0$$

$$\langle \gamma''(t_0), \gamma(t_0) - S \rangle = -|\gamma'(t_0)|^2$$

Točka S bo, če $\exists$, ležala v pritisnjeni ravnini, ki ima normalo $\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)$, velja je 3. enačba:

$$\langle (\gamma' \times \gamma'')(t_0), \gamma(t_0) - S \rangle = 0$$

Ta sistem ima enolično rešitev

$$S(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\varkappa(t_0)} \frac{(\gamma' \times \gamma'') \times \gamma'}{|(\gamma' \times \gamma'') \times \gamma'|}(t_0)$$

oz. $S = \gamma + \dfrac{\vec{N}}{\varkappa}$ V posebnem sledi, da je polmer ρ pritisnjene krožnice enak $\dfrac{1}{\varkappa}$.

Primer Krožnica v xy ravnini

$$\left.\begin{array}{ll} x(t) = R\cos t & \vec{r} = (x, y, z) \\ y(t) = R\sin t & |\dot{\vec{r}}| = R \\ z(t) = 0 & |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = \ldots = R^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \varkappa = 1/R \\ \underline{\rho = R} \end{array}$$

Vemo:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

$$\Rightarrow \vec{B}' = \underbrace{\vec{T}' \times \vec{N}}_{0} + \vec{T} \times \vec{N}' \quad \text{(odvodi po naravnem parametru)}$$

0, saj $\vec{T}' = \varkappa \vec{N}$

$$\Rightarrow \vec{B}' \perp \vec{T}$$

Ker je $|\vec{B}| = 1$ je $0 = (|\vec{B}|^2)' = (\langle \vec{B}, \vec{B} \rangle)' = 2\langle B', B' \rangle$, je $B' \perp B$.

Ker je trojica $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ kompletni ortonormiran sistem v $\mathbb{R}^3$, sledi $\vec{B}' \parallel \vec{N}$, zato lahko pišemo

$$\vec{B}' = -\omega \vec{N},$$

kjer je ω <u>torzijska ukrivljenost</u> krivulje v dani točki.

Primer Vijačnica $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

Vemo, da se v nar. parametrizaciji enačba glasi

$$\vec{\rho}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\vec{T} = \vec{\rho}'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ b\right)$$

$$\vec{T}' = \vec{\rho}''(s) = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{\varkappa}\underbrace{\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right)}_{\vec{N}} \qquad \vec{T}' = \vec{\rho}'' = \underbrace{\varkappa}_{\geq 0} \vec{N}^{\text{enotski}}$$

Dalje

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\right)$$

$$\vec{B}' = -\underbrace{\frac{b}{a^2+b^2}}_{\omega} \vec{N}$$

Opazimo: če $b=0$ (krožnica, ravninska krivulja) $\Rightarrow \omega=0$. To je splošnejši pojav:

Trditev Regularna C^2 krivulja je ravninska $\Leftrightarrow \omega=0$.

Dokaz $(\Rightarrow)$ Privzemimo da je Γ ravninska krivulja v $\mathbb{R}^2\times\{0\}$. Torej je dana z enačbo

$$\vec{r}(t)=(x(t),\,y(t),\,0).$$
$$\dot{\vec{r}}(t)=(\dot{x}(t),\,\dot{y}(t),\,0)$$
$$\ddot{\vec{r}}(t)=(\ddot{x}(t),\,\ddot{y}(t),\,0)$$
$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=(0,\,0,\,\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})$$
$$\varkappa=\frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$
$$\vec{B}=\frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}=\left(0,0,\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}\right)$$
$$\vec{N}=\frac{(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}}{|(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}|}=(*,\,*,\,0)$$

$$(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}=(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})(-\dot{y},\,\dot{x},\,0)$$

$\vec{B}'=(0,\,0,\,*)$, zato je $\vec{B}'=-\omega\vec{N}$ mogoče le ko je $\omega=0$.

$(\Leftarrow)$ $\omega=0$, je $\vec{B}'=0$, zato je $\vec{B}=\text{konst}$, zato je pritisnjena ravnina v vseh točkah ista. To pa pomeni, da je krivulja ravninska. $\square$

Torej je ω merilo (lokalne) tridimenzionalnosti krivulje. Fleksijska ukrivljenost pa nam pove koliko se krivulja razlikuje od premice.

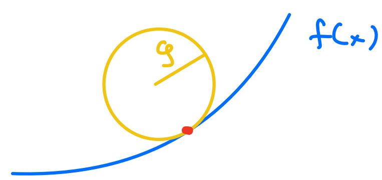
Spomnimo se: za $\Gamma=\{\vec{r}(t)=(x,y,0)(t)\,;\ t\in I\}\subset\mathbb{R}^2$ velja

$$\varkappa=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

Primer Graf funkcije ene spremenljivke $\Gamma=\{(x,f(x)),\ x\in D_f\}\subset\mathbb{R}$ to je krivulja.
Parameter je kar x. Dobimo

$\dot{x}=1$
$\dot{y}=f'(x)$

$$\varkappa=\frac{|f''(x)|}{(1+f'(x))^{3/2}}=\frac{1}{\rho}$$

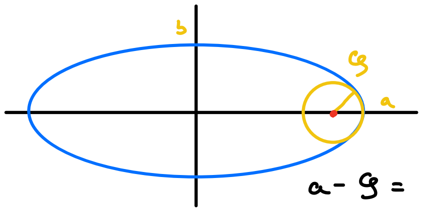


Primer Elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $a,b>0$ sta fiksna

Parametrizacija $x=a\cos t$ $\quad t\in[0,2\pi)$ (lahko tudi $\mathbb{R}$)
$y=b\sin t$
$z=0$

Sledi:
$$\varkappa\overset{\text{DN}}{=}\dots=\frac{ab}{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{3/2}}$$

Pri $t=0$ $\quad\varkappa=\frac{a}{b^2}\Rightarrow\rho=\frac{b^2}{a}$
$t=\frac{\pi}{2}$ $\quad\varkappa=\frac{b}{a^2}\Rightarrow\rho=\frac{a^2}{b}$



$$a-\rho = a-\frac{b^2}{a}$$

Pritisnjena krožnica na dano elipso v točki $(a,0)$ oz. $\vec r(0)$ se glasi

$$\left(x-\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\right)^2+(y-0)^2=\left(\frac{b^2}{a}\right)^2$$

oz.

$$\left((x-a)+\frac{b^2}{a}\right)^2+y^2=\left(\frac{b^2}{a}\right)^2$$

Trditev Velja: $\varkappa = 0 \iff$ krivulja je premica

Trditev Naj bo Γ regularna C^2 krivulja v $\mathbb{R}^3$. V naravni parametrizaciji $\vec\rho$ zanjo imamo

$$\vec T = \vec\rho\,'$$

$$\vec N = \frac{\vec\rho\,''}{|\vec\rho\,''|}$$

$$\vec B = \frac{\vec\rho\,'\times\vec\rho\,''}{|\vec\rho\,''|}$$

Dokaz Ker za naravno param. velja $|\vec\rho\,'|=1$, sledi

$$\langle \vec\rho\,', \vec\rho\,''\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\overbrace{\langle \vec\rho\,', \vec\rho\,'\rangle}^{1} = 0$$

Sledi $$|\vec\rho\,'\times\vec\rho\,''| = \overset{=1}{|\vec\rho\,'|}\,|\vec\rho\,''| = |\vec\rho\,''|$$

Formuli za $\vec T$, $\vec B$ sledita iz definicij, za $\vec N$ pa je

$$\vec N = \vec B\times\vec T = \frac{(\vec\rho\,'\times\vec\rho\,'')\times\vec\rho\,'}{|\vec\rho\,''|} = \frac{\overset{=1}{\langle\vec\rho\,',\vec\rho\,'\rangle}\,\vec\rho\,'' - \overset{=0}{\langle\vec\rho\,'',\vec\rho\,'\rangle}\,\vec\rho\,'}{|\vec\rho\,''|} = \frac{\vec\rho\,''}{|\vec\rho\,''|}$$

$\square$

Trditev Naj bo $\vec r = \vec r(t)$ regularna C^3 parametrizacija krivulje Γ, za katero velja $\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}\neq 0$. Tedaj je torzijska ukrivljenost podana z

$$\omega = \frac{(\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r})}{|\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}|^2}$$ ← mešani produkt

V posebnem, če je $\vec\rho = \vec\rho(s)$ naravna parametrizacija za Γ, tedaj je

$$\omega = \frac{(\vec\rho\,', \vec\rho\,'', \vec\rho\,''')}{|\vec\rho\,''|^2}$$

Dokaz Naj prej obravnavamo primer z naravno parametrizacijo. Iz $\vec\rho\,'' = \varkappa\vec N$ sledi $\varkappa = |\vec T\,'| = |\vec\rho\,''|$. Posledično $\vec B = \vec T\times\vec N = \vec\rho\,'\times\frac{\vec\rho\,''}{\varkappa}$ oz. $\vec\rho\,'\times\vec\rho\,'' = \varkappa\vec B$. Odvajamo po s in dobimo

$$\overset{=0}{\vec\rho\,''\times\vec\rho\,''} + \vec\rho\,'\times\vec\rho\,''' = \varkappa'\vec B + \varkappa\vec B' \Rightarrow \vec\rho\,'\times\vec\rho\,''' = \varkappa'\vec B + \varkappa\vec B' \quad /\cdot\ \vec\rho\,'' = \varkappa\vec N$$

$$\langle\vec\rho\,'\times\vec\rho\,''', \vec\rho\,''\rangle = \varkappa'\varkappa\overset{=0}{\langle\vec B, \vec N\rangle} + \varkappa\overset{=-\omega\varkappa}{\langle -\omega\vec N, \varkappa\vec N\rangle}$$

$$\langle\vec\rho\,'\times\vec\rho\,'', \vec\rho\,'''\rangle = \omega\varkappa^2 = \omega|\vec\rho\,''|^2$$

$\square$

S tem smo dokazali trditev za naravno parametrizacijo, z njim si pomagamo pri dokazu za splošni primer.

Izrek (Frenet-Serretove formule) V naravni parametrizaciji imamo:

$$\begin{bmatrix}\vec T'\\ \vec N'\\ \vec B'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \varkappa & 0\\ -\varkappa & 0 & \omega\\ 0 & -\omega & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec T\\ \vec N\\ \vec B\end{bmatrix}$$

Dokaz

$\vec T' = \varkappa \vec N$ ✓

$\vec B' = -\omega \vec N$ ✓

Potrebno je dokazati zvezo $\vec N' = -\varkappa\vec T + \omega \vec B$

$\langle \vec N, \vec N\rangle = 1$ odvajamo $\vec N' \perp \vec N$

$\Rightarrow \vec N' = \langle \vec N', \vec T\rangle \vec T + \langle \vec N', \vec B\rangle \vec B$

$\langle \vec N, \vec T\rangle = 0 \quad \frac{d}{ds}$

$0 = \langle \vec N', \vec T\rangle + \langle \vec N, \underbrace{\vec T'}_{\varkappa \vec N}\rangle \Rightarrow \langle \vec N', \vec T\rangle = -\varkappa$

$\langle \vec N, \vec B\rangle = 0 \quad \frac{d}{ds}$

$0 = \langle \vec N', \vec B\rangle + \langle \vec N, \underbrace{\vec B'}_{-\omega \vec N}\rangle \Rightarrow \langle \vec N', \vec B\rangle = \omega$

$\square$

Formule

Frenet-Serretove formule

	Ime	Pravokotna na	Formula	Naravna param.
$\vec T$	tang. vektor	normalna ravnina	$\frac{\dot{\vec r}}{\lvert\dot{\vec r}\rvert}$	$\vec\varsigma\,'$
$\vec N$	glavna normala	rektifikacijska ravnina	$\frac{(\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r})\times\dot{\vec r}}{\lvert(\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r})\times\dot{\vec r}\rvert}$	$\frac{\vec\varsigma\,''}{\lvert\vec\varsigma\,''\rvert}$
$\vec B$	binormala	pritisnjena ravnina	$\frac{\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}}{\lvert\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}\rvert}$	$\frac{\vec\varsigma\,'\times\vec\varsigma\,''}{\lvert\vec\varsigma\,'\times\vec\varsigma\,''\rvert}$

Ukrivljenosti

	Ime	Formula	Naravna param.
$\varkappa$	fleksijska ukrivljenost	$\frac{\lvert\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}\rvert}{\lvert\dot{\vec r}\rvert^3}$	$\lvert\vec\varsigma\,''\rvert$
ω	torzijska ukrivljenost	$\frac{(\dot{\vec r},\ddot{\vec r},\dddot{\vec r})}{\lvert\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}\rvert^2}$	$\frac{(\vec\varsigma\,',\vec\varsigma\,'',\vec\varsigma\,''')}{\lvert\vec\varsigma\,''\rvert^2}$