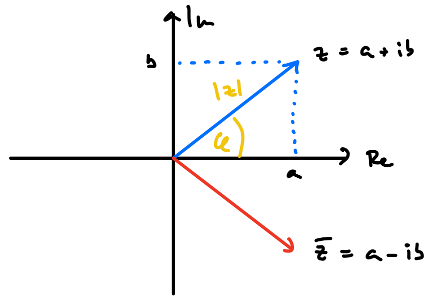
Kompleksna števila so urejeni pari realnih števil pri čemer sta operaciji seštevanja in množenja def. kot:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,\,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\,ad+bc)$$

Množico $\mathbb{R}^2$, opremljeno s $+$ in $\cdot$ imenujemo kompleksna ravnina in jo označimo z $\mathbb{C}$. Število $(0,1)$ imenujemo imaginarna enota in jo označimo z i. Zapis (a,b) zamenjamo z zapisom $a+ib$ oz. $a+bi$. Število oblike $a+0i$ oz. $(a,0)$ lahko izenačimo z realnim številom a, število oblike $0+ib$ oz. $(0,b)$ pa z imaginarnim številom ib.



$z=a+ib \Rightarrow a=\mathrm{Re}\,z$, $b=\mathrm{Im}\,z$

Število $\bar{z}=a-ib$ se imenuje konjugirano št. števila z.

$\mathrm{Re}\,z=a=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ $\quad \mathrm{Im}\,z=b=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$

Absolutno vrednost št. z označimo kot $|z|$ in je def. kot $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$ in velja $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$z=a+ib=|z|\cos\varphi+i|z|\sin\varphi=|z|e^{i\varphi}$$

Zapišemo lahko tudi:

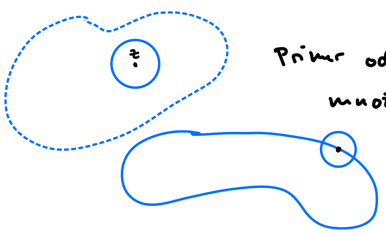
$$|z|=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

kjer je $\varphi\in[0,2\pi)$. Kot φ imenujemo argument kompleks. št.

Topološke lastnosti kompl. ravnine

Odprt krog s središčem v točki z in polmerom r bomo označevali z $D(z,r)=\{w\in\mathbb{C} : |w-z|<r\}$. Krožnico s središčem v z in polmerom r bomo označili z $\partial D(z,r)$, $S(z,r)=\partial D(z,r)=\{w\in\mathbb{C} : |w-z|=r\}$

Množica $V\subseteq\mathbb{C}$ je odprta, če za $\forall z\in V$ obstaja $r>0$, da je $D(z,r)\subset V$



Primer odprte množice

Primer zaprte množice

Da se dokazati, da je V odprta natanko takrat, ko je unija vseh odprtih krogov vsebovanih v V.

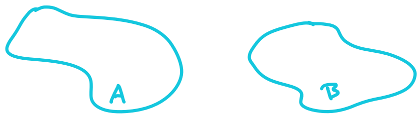
Primer Vsak odprt krog $D(z,r)$ je odprta množica.

Množica F je zaprta, če je komplement odprte množice
F je zaprta $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\setminus F$ odprta in V odprta $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\setminus V$ zaprta

Primer Vsak zaprt krog $\bar{D}(z,r)$ je zaprta množica.

Množica A je okolica točke $z\in\mathbb{C}$, če obstaja taka odprta množica V, da je $z\in V\subseteq A$
Množica A je povezana, če je ne moremo zapisati v obliki $A=(A\cap U)\cup(A\cap V)$, kjer sta U in V disjunktni odprti množici v $\mathbb{C}$, ki sekata A.

Opomba Povezanost si lahko predstavljamo tako, da je množica iz "enega kosa".



Množici nista povezani.

Povzemimo: $V = V \cup \emptyset$ če je V odprta in neprazna, potem $V = (V \cap V) \cup \underbrace{(V \cap \emptyset)}_{\text{prazno}}$

Primer $A = [-1, 0) \cup (0, 1]$

$$A = ((-\infty, 0) \cap A) \cup ((0, \infty) \cap A)$$

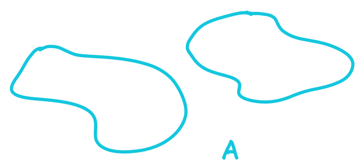
Množica ni povezana.

Neprazne odprte povezane množice se imenuje <u>območje</u>. Funkcija $f: U \to \mathbb{C}$ je zvezna v točki $z \in U$, če za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ da za vse $z' \in U$, za katere velja $|z - z'| < \delta$ sledi $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$. Funkcija f je zvezna na U, če je zvezna v vsaki točki $z \in U$. Izkaže se da je f zvezna $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(V)$ odprta množica v U za vsako odprto množico v $\mathbb{C}$.

Trditev Zvezna slika povezane množice je povezana.

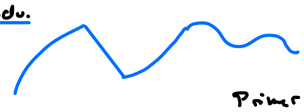
Nas bodo zanimale poti. <u>Pot</u> $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ je zvezna preslikava. Po prejšnji trditvi so tiri poti povezane množice.

Vemo že, da je A povezana, če je iz "enega kosa". Naj bo A iz dveh povezanih kosov. Ta kosa sta maksimalno povezana kosa. Maksimalno povezane podmnožice dane množice se imenujejo <u>komponente za povezanost</u>.



Izrek Vsako množico je mogoče zapisati kot unijo njenih komponent. Če je množica odprta potem so njene komponente odprte množice.

Oglejmo si preslikavo $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$. γ lahko zapišemo v obliki $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, kjer sta $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pri tem je $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$: $\gamma_1(t) = \mathrm{Re}\,\gamma(t)$ in $\gamma_2(t) = \mathrm{Im}\,\gamma(t)$.
Jasno je, da je γ zvezna $\Leftrightarrow$ γ_1, γ_2 zvezni.
Privzemimo, da je γ odvedljiva, če sta odvedljivi preslikavi γ_1 in γ_2. V tem primeru označimo / def. $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$. Včasih pišemo $\dot{\gamma}$ namesto γ'.
γ je <u>zvezno odvedljiva</u>, če sta γ_1 in γ_2 zv. odv. To označimo kot $\gamma \in C^1([a, b])$.
Če lahko $[a, b]$ razdelimo na končno mnogo podintervalov, na katerih je γ zv. odv., v krajiščih pa obstajajo levi in desni odvodi, potem je γ <u>odsekoma zv. odv.</u>

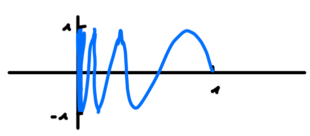


Primer

<u>Pot</u> v komp. ravnini je zv. preslikava $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$. Pravimo, da je $A \subseteq \mathbb{C}$ <u>s potmi povezana</u>, če za poljubni točki z in w iz A obstaja pot med njima:

$$\gamma: [a, b] \to \mathbb{C} \;;\; \gamma(a) = z, \; \gamma(b) = w$$

Primer: funkcija $f: (0, 1] \to \mathbb{R}$ je def. s predpisom $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$.
Funkcija je zvezna. $A = \Gamma(f) \cup \{(0, y) : -1 \le y \le 1\}$
Izkaže se, da je A povezana, ni pa povezana s potmi.



Trditev Za povezanost in povezanost s potmi veljajo naslednje trditve:

(a) odprta množica je povezana $\Leftrightarrow$ je povezana z zv. odv. potmi

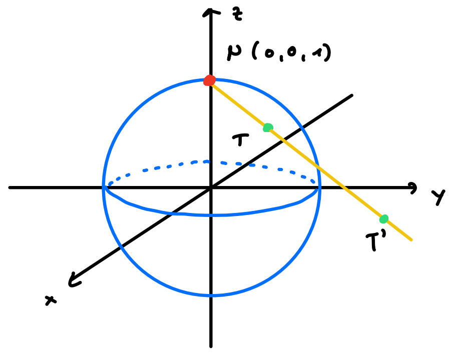
(b) vsaka s potmi povezana množica je povezana

(c) odprta mn. je povezana $\Leftrightarrow$ povezana z (zveznimi) potmi

Kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ lahko dodamo točko, ki je neskončno oddaljena od katerekoli točke $z \in \mathbb{C}$. To točko označimo z ∞. Množico $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ imenujemo razširjena kompl. mn.

Def. Okolica točke ∞ so komplementi kompaktnih množic v $\mathbb{C}$.

Riemannova sfera in stereografska projekcija



- Poltrak iz severnega pola skozi točko T na sferi seka ravnino v točki T'.
- Preslikava $\phi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$, def. s predpisom $\phi(T) = T'$ se imenuje stereografska projekcija.
- Preslikava ϕ je bijekcija in je podana s predpisom

$$\phi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

Če imamo v mislih identifikacijo $(a,b) \sim a+ib$, potem $\phi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$; $\phi = \frac{1}{1-z}(x+iy)$.
Če razširimo ϕ s predpisom $\phi(N) = \infty$, smo dobili preslikavo $\hat{\phi} : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$. Če imamo v mislih okolice, ki smo jih prej def. za $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$, postane $\hat{\phi}$ zvezna z zv. inv., zato lahko na $\hat{\mathbb{C}}$ gledamo kot na S^2. Ker $\hat{\mathbb{C}}$ pravimo tudi Riemannova sfera je to ime utemeljeno z zgornjo diskusijo.

Holomorfne funkcije

Naj bo $V \subseteq \mathbb{C}$ odprta. Naj bo $f : V \to \mathbb{C}$. Če za $a \in V$ obstaja

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

potem pravimo, da je f holomorfna v a oz. da je f odvedljiva v kompleksnem smislu v točki a. Zgornjo limito, če obstaja, označimo z $f'(a)$.

Če pišemo $z = a+h$ dobimo ekvivalentno def. $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Če $f'(a)$ $\exists$ za $\forall a \in V$ je potem f holomorfna na V.
Če je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna, potem ji pravimo cela.

Primer $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = z^n$; $n \in \mathbb{N}$ je holomorfna.

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{z^n - a^n}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)(z^{n-1} + z^{n-2}a + \dots + a^{n-1})}{(z-a)} = n a^{n-1}$$

Tudi konst. funkcije so holomorfne z ničelnim odvodom.

Primer $f(z) = \bar{z}$; $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Ker je $|f(z) - f(z')| = |\bar{z} - \bar{z}'| = |\overline{z - z'}| = |z - z'|$

Preslikava f ohranja razdaljo $\to$ f je zvezna

Ali je f holomorfna? Ali obstaja limita?

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{a+h} - \bar{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

Poglejmo si smeri $h = x$ in $h = iy$. V prvem primeru je limita enaka 1, v drugem pa -1, torej limita ne obstaja.

Trditev Naj bo V odp. v $\mathbb{C}$ in f, g funkciji na V, ki sta holomorfni v $a \in V$.

(a) Za $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ je λf holomorfna v a in velja $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$

(b) Funkcija $f+g$ je hol. v a in velja $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(c) Funkcija fg je hol. v a in velja $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$

(d) Če $g(a) \neq 0$, potem je $\frac{f}{g}$ hol. v a in velja $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - g'(a)\,f(a)}{g^2(a)}$

Primer Po zgornji trditvi so vsi polinomi holomorfni. Racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$, p, q polinoma, f je holomorfna povsod razen na končni množici ničel polinoma q.

Cauchy-Riemannove enačbe

$A \subseteq \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$, potem za $z \in A$ zapišemo $z = x + iy$

$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z) \leftrightarrow f(z) = \operatorname{Re} f(x+iy) + i \operatorname{Im}(x+iy)$

$\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x,y)$ $\quad \operatorname{Im} f(x+iy) = v(x,y)$

zapis: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Primer $f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 2ix^2y - xy^2 + ix^2y - 2xy^2 - iy^3 = \underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_{u(x,y)} + i\underbrace{(3x^2y - y^3)}_{v(x,y)}$

Izrek Naj bosta $u, v: V \to \mathbb{R}$ realni funkciji na $V \subseteq \mathbb{R}^2$

(a) Če je $f = u + iv$ holomorfna, potem sta u in v parcialno odvedljivi in velja

$\boxed{u_x = v_y \text{ in } v_x = -u_y}$

(b) Če sta u in v dif. in če veljata zgornji enakosti, potem je f holom. in velja

$f' = u_x + i v_x = v_y - i u_y$

Opomba Enačbi $u_x = v_y$ in $v_x = -u_y$ se imenujeta Cauchy-Riemannovi enačbi.

Dokaz

(a) Če je f holomorfna potem obstaja kompleksen odvod:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Izberemo si dve posebni smeri (realna in imaginarna os).

$$f'(z) = \lim_{h \to 0;\, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0;\, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}$$

$f = u + iv$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0; h\in\mathbb{R}} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\, \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right)$$

Ker $f'(z)$ $\exists$, $\exists$ posamezni limiti, kar pomeni, da obstajata u_x in v_x in velja $f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$. Na podoben način dobimo:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0; h\in\mathbb{R}} \left(\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{ih} + i\, \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{ih} \right) = \frac{1}{i} \left(u_y(x,y) + i v_y(x,y) \right) =$$

$$= v_y(x,y) - i u_y(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad u_x + i v_x = v_y - i u_y$$

(b) Izberimo $z = x+iy \in V$ in $h = h_1 + h_2$ tako majhen, da je v V. Dokazati moramo, da $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ $\exists$ in je enaka $u_x(x,y) + i v_x(x,y)$.
Ker sta u, v dif., lahko zapišemo:

$$u(x+h_1, y+h_2) = u(x,y) + u_x(x,y) h_1 + u_y(x,y) h_2 + \sigma_1(h)$$
$$v(x+h_1, y+h_2) = v(x,y) + v_x(x,y) h_1 + v_y(x,y) h_2 + \sigma_2(h)$$

Ker je $\lim_{h\to 0} \frac{\sigma_1(h)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\sigma_2(h)}{|h|} = 0$

$$\Rightarrow f(z+h) - f(z) = u(x+h_1, y+h_2) + i v(x+h_1, y+h_2) - \left(u(x,y) + i v(x,y) \right) =$$
$$= u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) + i \left(v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) \right) =$$
$$= u_x(x,y) h_1 + u_y(x,y) h_2 + \sigma_1(h) + i \left(v_x(x,y) h_1 + v_y(x,y) h_2 + \sigma_2(h) \right) =$$
$$= u_x h_1 - v_x h_2 + \sigma_1 + i (v_x h_1 + u_x h_2 + \sigma_2) =$$
$$= (u_x + i v_x) h_1 + (i u_x - v_x) h_2 + \sigma_1 + i \sigma_2 =$$
$$= (u_x + i v_x)(h_1 + i h_2) + \sigma$$

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - (u_x + i v_x) \right| = \left| \frac{\sigma(h)}{h} \right| = \left| \frac{\sigma_1(h) + i \sigma_2(h)}{h} \right| \to 0$$

$\square$

Primer $f(z) = \bar{z}$ ni holomorfna. Če pišemo $z = x + iy \Rightarrow f(z) = \bar{z} = x - iy$
$\Rightarrow u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y$

Cauchy-Riemannove enačbe $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$

$u_x = 1$, $v_y = -1 \Rightarrow u_x \neq v_y$. Zato f ni holomorfna.

Oglejmo si še alternativni pristop k C-R enačbam.

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \iff x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Ideja: kako povedati C-R enačbe brez računanja u in v?

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \ldots = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x - iu_y + v_y\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x + iu_y - v_y\right)$$

Opazimo $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \iff u_x = v_y$ in $v_x = -u_y$

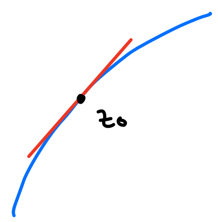
$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 \iff u, v$ rešita C-R enač.

f je holomorfna če $\bar z$ ne nastopa v f.

Opomba Če so parc. odvodi: u_x, v_x, u_y, v_y zv. funk., potem sta po izreku funkciji u, v dif. $\Rightarrow f = u+iv$ holomorfna.

Konformnost holomorfnih funkcij

Naj bo $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ (zvezno) odv. pot, ki gre skozi točko $z_0 \in \mathbb{C}$ zato $\exists\, t_0 \in [0,1]$ da je $z_0 = \gamma(t_0)$.



Tangentni vektor na γ v točki $z_0 = \gamma(t_0)$ je enak $\dot\gamma(t_0)$. Naj bo f holom. funk. na nekem območju, ki vsebuje tir poti γ. Tir od γ pomembi označimo $\gamma^* = [\gamma] = \gamma[0,1]$. Tedaj je $f \circ \gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ tudi (zv.) odv. pot, ki gre skozi točko $f(z_0) = f(\gamma(t_0)) = (f\circ\gamma)(t_0)$.

Trditev Za tangentni vektor na pot $f\circ\gamma$ v točki $f(z_0)$ velja

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t_0) = f'(z_0)\cdot\dot\gamma(t_0)$$

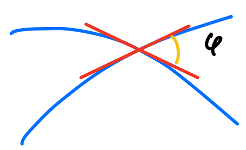
Dokaz Točko $x+iy \in \mathbb{C}$ identificiramo, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Naj bo $f = u+iv$. Za izračun tangentnega vektorja na pot $f\circ\gamma$ v $f(z_0) = f(\gamma(t_0))$ si pomagamo s preslikavo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Tang. vektor na $f\circ\gamma$ v t_0 $\leftrightarrow$ $F \circ \begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}$ v t_0.

$$\frac{d}{dt}\left(F\circ\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot\gamma_1\\ \dot\gamma_2\end{bmatrix} \overset{C-R}{=} \begin{bmatrix}u_x & -v_x\\ v_x & u_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\gamma_1\\ \dot\gamma_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_x\dot\gamma_1 - v_x\dot\gamma_2\\ v_x\dot\gamma_1 + u_x\dot\gamma_2\end{bmatrix}$$

Zato je $(f\circ\gamma)^{\cdot}(t_0) = u_x(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma_1(t_0) - v_x(\gamma(t_0))\,\dot\gamma_2(t_0) + i\,v_x(\gamma(t_0))\,\dot\gamma_1(t_0) + i\,u_x(\gamma(t_0))\cdot\dot\gamma_2(t_0) =$
$= (u_x + iv_x)(\dot\gamma_1 + i\dot\gamma_2) = f'(\gamma(t_0))\,\dot\gamma(t_0) = f'(z_0)\,\dot\gamma(t_0)$

□

Naj bosta dani odv. poti γ_1 in γ_2, ki se sekata v točki $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$.



Kot med tang. vektorjema $\dot\gamma_1(t_1)$ in $\dot\gamma_2(t_2)$ imenujemo kot med kriv. v presečišču. Če zapišemo $\dot\gamma_1(t_1) = |\dot\gamma_1(t_1)|\,e^{i\alpha_1}$ in $\dot\gamma_2(t_2) = |\dot\gamma_2(t_2)|\,e^{i\alpha_2}$, potem je to kot $\alpha_1 - \alpha_2$.

Preslikava $f: U_1 \to U_2$ je konformna če ohranja kot med krivuljami.

Izrek Če je $f: U_1 \to U_2$ holomorfna in je $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in U_1$, potem je f konformna.

Dokaz Naj bosta γ in δ odv. poti z vrednostmi v U_1, ki se sekata v točki $z_0 = \gamma(t_0) = \delta(s_0)$ za neka parametra t_0, s_0.

Izračunajmo tangentna vektorja na krivulji $f\circ\gamma$ in $f\circ\delta$ v točki t_0 in s_0.

$$(f\circ\gamma)'(t_0) = f'(z_0)\,\dot\gamma(t_0) \qquad \text{in} \qquad (f\circ\delta)'(s_0) = f'(z_0)\,\dot\delta(s_0)$$

Zapišimo $f'(z_0) = |f'(z_0)|\,e^{i\varphi}$, $\dot\gamma(t_0) = |\dot\gamma(t_0)|\,e^{i\alpha}$, $\dot\delta(s_0) = |\dot\delta(s_0)|\,e^{i\beta}$

$$\Rightarrow \quad (f\circ\gamma)'(t_0) = |f'(z_0)|\,|\dot\gamma(t_0)|\,e^{i(\varphi+\alpha)} \qquad (f\circ\delta)'(s_0) = |f'(z_0)|\,|\dot\delta(s_0)|\,e^{i(\varphi+\beta)}$$

Ker je $f'(z_0)\neq 0$ je kot v presečišču enak $(\varphi+\alpha)-(\varphi+\beta) = \alpha-\beta$

$\square$

Potenčne vrste

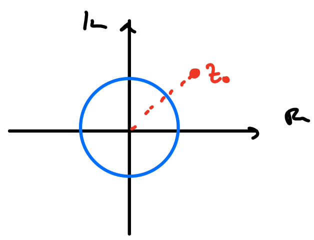
Potenčna vrsta je formalno podana kot

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Kdaj potenčna vrsta konvergira? Zagotovo ta vrsta konvergira za $z=0$. Če vrsta konv. v z, potem njeno vsoto označimo z $f(z)$. Naj bo D konv. območje vrste.

$$D = \left\{ z\in\mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konv.} \right\}$$

Za $z\in D$ označimo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$



Izkaže se, da vrsta konvergira na vsakem zaprtem krogu $\bar D(0,r)$, kjer je $r<|z_0|$

Konv. območje potenčne vrste samo določili / izrazili kot območje D, ki zadošča $D(0,R)\subseteq D\subseteq \bar D(0,R)$. Število R se imenuje konv. radij. To velja le če $R>0$.
Izkaže se, da velja

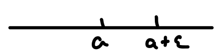
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \text{Cauchy-Hadamarjeva formula}$$

Število $\limsup_{n\to\infty} b_n$, kjer je b_n realno zaporedje, je največje stekališče zap. b_n.

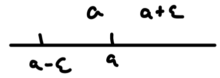
- Če je b_n omejeno, potem je množica stekališč $\mathcal{E}$ zap. b_n neprazna in zato $\exists$ $\sup\mathcal{E}$. Da se videti, da je $\sup\mathcal{E}$ tudi stekališče.
- Če je b_n navzgor neomejeno, potem je $\limsup_{n\to\infty} b_n = \infty$.
- Če je zap. navzgor omejeno in $\mathcal{E}\neq\emptyset$, potem je $\sup\mathcal{E} = \limsup_{n\to\infty} b_n$.
- Če je zap. navzgor omejeno in $\mathcal{E}=\emptyset$, potem je $\limsup_{n\to\infty} b_n = -\infty$

Trditev Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zap. realnih števil. Tedaj je $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$ natanko takrat, ko veljata:

1. $\forall\varepsilon>0$ je $a_n > a+\varepsilon$ le za končno mnogo indeksov.
2. $\forall\varepsilon>0$ je $a_n > a-\varepsilon$ za neskončno mnogo indeksov.

1 

vsako stekališče b zadošča $b\le a+\varepsilon \to b\le a$

2 

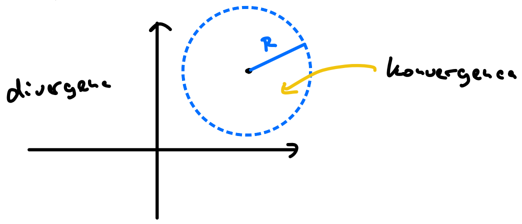
obstaja stekališče $b_\varepsilon \ge a-\varepsilon$. Od tod bi sledilo, da je a stekališče in celo največje.

Izrek Dana je potenčna vrsta $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$

① Potenčna vrsta konvergira absolutno na $D(\alpha, R)$ in enakomerno na vsakem zaprtem krogu znotraj odprtega kroga $D(\alpha, R)$.

② Potenčna vrsta div. zunaj zaprtega kroga $\bar{D}(\alpha, R)$.

Dokaz je enak kot v primeru potenčnih vrst funkcij realne spremenljivke.



O konvergenci na robni krožnici izrek ne pove ničesar, zato robne točke moramo preveriti posebej.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \longrightarrow g(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots$$

Ali velja $f'(z) = g(z)$ oz. ali smemo vrsto f odvajati členoma?

Izrek Naj bo $R>0$ konv. polmer potenčne vrste $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Potem je f holomorfna funkcija na $D(0,R)$. Za njen kompleksni odvod velja

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

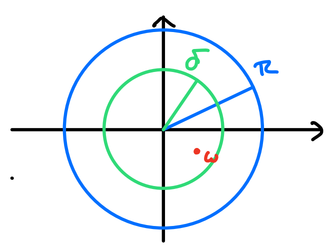
Opomba Kolikšen je konv. polmer $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$? Uporabimo Cauchy-Hadamardovo formulo.

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_f}$$

Vrsti f in g imata enak radij.

Dokaz Dokazati moramo: $w \in D(0,R)$ potem $f'(w)$ obstaja in $f'(w)=g(w)$.

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = g(w)$$



$|w| < \delta < R$. Izberemo si z, da je $|z| < \delta < R$.

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - n w^{n-1}\right)$$

Ker je
$$\frac{z^n-w^n}{z-w} - n w^{n-1} = (z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + z w^{n-2} + w^{n-1}) - n w^{n-1} =$$
$$= (z-w)(z^{n-2} + 2 z^{n-3} w + \dots + (n-2) z w^{n-3} + (n-1) w^{n-2})$$

in ker velja
$$\left|\frac{z^n-w^n}{z-w} - n w^{n-1}\right| = |z-w|\,|z^{n-2} + \dots + (n-1)w^{n-2}| \leq$$
$$\leq |z-w| \left(|z|^{n-2} + 2|z|^{n-3}|w| + \dots + (n-2)|z||w|^{n-3} + (n-1)|w|^{n-2}\right)$$
$$\leq |z-w|\,\delta^{n-2}(1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)) = |z-w|\,\delta^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}$$

je
$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| \leq \frac{1}{2}|z-w| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \delta^{n-2} n(n-1)$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|a_n|\delta^{n-2}$ konv. Vrsta f konv. na $D(0,R) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ konv. na $D(0,R) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$ konv. na $D(0,R)$.

Po izreku konv. absolutno $\Rightarrow M = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|a_n| \delta^{n-2} < \infty$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) \right| \leq \frac{1}{2} M |z-w|$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = g(w)$$

□

Posledica Naj $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ konv. na krogu $D(\alpha, R)$. Potem je f neskončno mnogokrat odvedljiva v kompleksnem smislu na $D(\alpha, R)$ in velja

$$a_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \quad \text{za} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Primer Eksponentno funkcijo def. kot vsoto vrste

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Za katere $z \in \mathbb{C}$ obstaja e^z?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \to \frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0 \text{, ker je } \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty \text{ (naraščajoče zaporedje)}$$

$\Rightarrow R = \infty \Rightarrow e^z \ \exists$ za $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ eksp. funkcija je cela.

Definirajmo še

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = i \sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

To so edine holomorfne razširitve funkcij e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.
Te funkcije so vse cele.

Poglejmo si lastnosti teh funkcij

$$e^z e^w = e^{z+w} \quad \text{za vse } z, w \in \mathbb{C}$$

$$e^z \cdot e^w = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{z^j w^k}{j!\,k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \frac{1}{(n-j)!} z^j w^{n-j} = \dots$$

Ker vrsti e^z in e^w konv. absolutno po izreku je lahko množimo absolutno, da seštevamo mešane člene v poljubnem vrstnem redu.

$$\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} z^j w^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}$$

Opazimo $e^z e^w = e^w e^z$, in $w = -z \to e^z e^{-z} = e^0 = 1$ zato
$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ in $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = |e^x||e^{iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^x$$

$$\Rightarrow |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Rešimo enačbo $e^z = 1$. Pišimo $z = x + iy \Rightarrow e^{x+iy} = 1$

$$e^x e^{iy} = 1 = e^0 \cdot e^{i0} = 1 e^{i0} \qquad x = 1 \qquad y = 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Posledica $e^z = e^w \iff z - w = 2k\pi i$ za $k \in \mathbb{Z}$

Dokaz $e^z = e^w \iff e^{z-w} = 1 \iff z - w = 2k\pi i$

Integracija kompleksnih funkcij

Naj bosta $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji. Potem def. integral funkcije $f = u + iv$ kot

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t) + i v(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt$$

Če sta u, v integrabilni potem je f integrabilna. Velja naslednje
$f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrabilni in $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dt = \alpha \int_a^b f\,dt + \beta \int_a^b g\,dt \qquad \text{(Linearnost integrala)}$$

Ker je vsaka realna zvezna funkcija na $[a,b]$ integrabilna, je vsaka komp. zv. funk. na $[a,b]$ tudi integrabilna.

Izkaže se, da bi lahko integral kompl. funk. na povsem ekvivalenten način def. kot limito Riemannovih vsot oblike

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \ ; \ \xi \in [t_{j-1}, t_j]$$

ko gre širina najdaljšega intervala delitve $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ proti 0.

Trditev Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrabilna. Tedaj velja

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \int_a^b | f(t)\,dt |$$

Dokaz Skica: Naj bo $\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$ neka Riemannova vsota, ki pripada delitvi $a_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$.

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \right| \le \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)| \, |t_j - t_{j-1}|$$

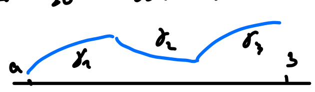
lim $\downarrow$

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \int_a^b | f(t)\,dt | \qquad \square$$

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ in naj bo $\gamma : [a,b] \to D$ zvezno odv. Torej $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, kjer sta γ_1, γ_2 zv. odv. Če $f : D \to \mathbb{C}$ zvezna potem def.

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt} \qquad \text{Krivuljni integral}$$

To def. lahko razširimo tudi na poti γ, ki so odsekoma odv. Integriramo po odsekih.



Primer: Naj bo $f:\bar D(a,r)\to\mathbb{C}$ zv. funkcija in naj bo γ poz. orient. krožnica $\partial D(a,r) = S(a,r)$. Koliko je $\int_\gamma f(z)dz$?

Najprej določimo parametrizacijo γ. $\gamma(t)=a+re^{it}$ $t\in[0,2\pi)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = \dots$$

$\gamma = a+re^{it} = a + r\cos t + ir\sin t$ $\qquad \dot\gamma = -r\sin t + ir\cos t = ir(\cos t + i\sin t) = ire^{it}$

$$\dots = \int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\, ire^{it}\, dt = \dots$$

Če imamo pot $\gamma=\gamma_1+i\gamma_2 \to \dot\gamma = \dot\gamma_1 + i\dot\gamma_2$. Ločni element dolžine zv. poti je enak $ds = \sqrt{\dot\gamma_1(t)^2+\dot\gamma_2^2(t)}\,dt = |\dot\gamma(t)|\,dt$ zato je dolžina poti enaka

$$l=\int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt$$

Zadnja formula velja tudi za odsekoma zvezne poti.

Od sedaj naprej za nas pot pomeni odsekoma odv. zvezne pot.

Trditev: Velja $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,ds$

Dokaz: $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\dot\gamma(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))|\,ds = \int_\gamma |f(z)|\,ds$

Ta trditev je zelo uporabna, ko delamo ocene. Če je f zvezna funkcija na $\gamma \stackrel{\wedge}{=} [\gamma]$, tedaj $|f|$ doseže maks. na M oz. $|f(z)|\le M$ $\forall z\in\gamma^*$. Zato iz trditve dobimo

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,ds \le M\int_\gamma ds = M\,l(\gamma)$$

pri čemer je $l(\gamma)$ dolžina kriv. γ.

Trditev: Če je $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ naraščajoča zv. odv. bijekcija, potem je

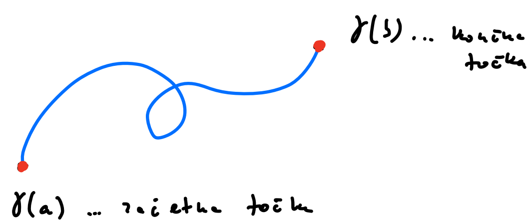
$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

zapišimo drugače

$$\int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\,(\gamma\circ\varphi)'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$$

če vpeljemo $s=\varphi(t)$ dobimo enakost.

Naj bo $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ pot



Če je $\gamma(a)=\gamma(b)$ potem je krivulja sklenjena.

Če je $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ pot, potem lahko def. tudi nasprotno pot. Označimo jo z γ^-

Če je $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ pot in $\gamma(t)$ param., potem je $\gamma^-(t) = \gamma(b+a-t)$ param. poti γ^-

Če imamo poti γ_1, γ_2 pri čemer je končna točka poti γ_1 enaka začetni točki γ_2 potem lahko γ_1 in γ_2 v skupni točki staknemo, dobimo $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

Preden zapišemo parametrizacijo za γ, utemeljimo zakaj lahko vse poti gledamo na $[0,1]$

Preslikava $t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$ je naraščajoča na $[a,b]$, ki slika $a\mapsto 0$ in $b \mapsto 1$
Če sta $\gamma_1:[0,1]\to\mathbb{C}$, $\gamma_2:[0,1]\to\mathbb{C}$ def.

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & ; \ 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & ; \ \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

Stiki poti nam dostikrat dajo zanke oz. sklenjene poti.

Trditev Za integr. po nasprotni poti velja $\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$

Dokaz $\int_{\gamma^-} f\,dz = \int_a^b f(\gamma^-(t))\,(\gamma^-)'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(b+a-t))\,\dot\gamma(b+a-t)\,(-1)\,dt =$

$= -\int_a^b f(\gamma(s))\,\dot\gamma(s)\,ds$

Trditev Za $\forall$ holom. funkcijo $f:D\to\mathbb{C}$ in vsako pot $\gamma:[a,b]\to D$ velja

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Opomba Iz def. holomorfnosti ne sledi direktno, da je f' zvezna. Zato v zgornji trditvi načeloma moramo privzeti, da je f' zvezna. Trditev bomo dokazali pod dodatno predpostavko zveznosti. Dejstvo, da je f' zv. bomo privzeli brez dokaza.

Dokaz Po predpostavki je f' zv.

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Če je γ sklenjena je $\int_\gamma f'(z)\,dz = 0$

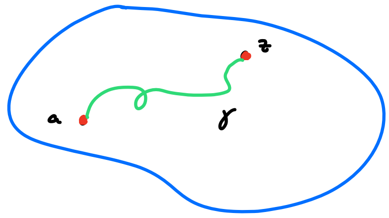
Izrek Naj bo $f:D\to\mathbb{C}$ taka zv. funkcija na D, da je $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ za vsako sklenjeno pot γ v D. Potem obstaja taka holomorfna funkc. F na D, da je $F = f'$.

Opomba Za $\forall n \in \mathbb{N}_0$ je funk. $f_n(z) = z^n$ je zv. na $\mathbb{C}$. Ker je $\left(\frac{1}{n+1} z^{n+1}\right)' = z^n$ lahko uporabimo zgornjo opombo, da dokažemo, da je

$$\int_\gamma z^n\,dz = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

in $\forall$ odsek. zv. sklenjeno pot.

Dokaz Najprej moramo poiskati predpis za F. Ker je D odp. in pov., je povezana s kosoma zv. odv. potmi. Izberemo $a \in D$ (fiksen). Za $z \in D$ def.



$$F(z) = \int_\gamma f(w)\,dw \quad \text{, kjer je } \gamma \text{ kot zgornji pot med } a \text{ in } z.$$

Ali je $\int_{\gamma_1} f(w)\,dw = \int_{\gamma_2} f(w)\,dw$? Da

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$

Po predpostavki $\int_\gamma f(w)\,dw = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2^-} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = 0$

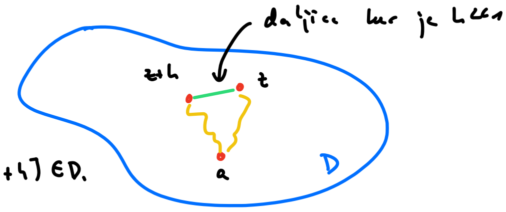
To dokaže, da je F dobro def.

$F'(z) = f(z)$ za $\forall z \in D$

$\left| \frac{1}{h} \left(F(z+h) - F(z) \right) \right| < \varepsilon$ če je $|h|$ dovolj majhen.

Naj bo $F(z) = \int_\gamma f(w)\,dw = \int_a^z f(w)\,dw$ (to pomeni: integral od a do z po katerikoli poti)

$$\left| \frac{1}{h} \left(\int_a^{z+h} f(w)\,dw - \int_a^z f(w)\,dw \right) - f(z) \right| = \dots$$



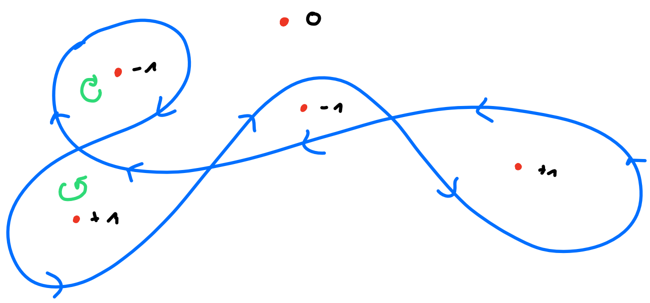
Naj bo h tako majhen, da je daljica $[z, z+h] \in D$.
Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem $\exists\, \delta > 0$ da $|f(z+h) - f(z)| < \varepsilon$ za $\forall |h| < \delta$. BŠS (brez škode za splošnost) je δ takšen, da $[z, z+h] \subseteq D$ če je $|h| < \delta$.

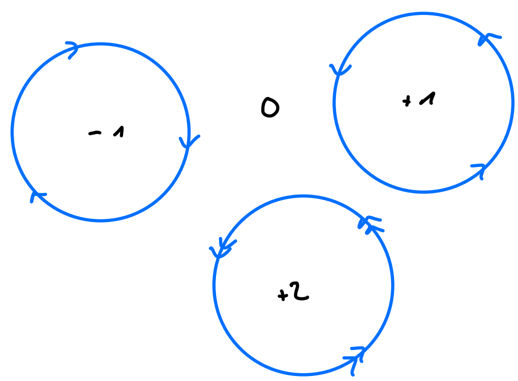
$$\dots = \left| \frac{1}{h} \left(\int_a^{z+h} f(w)\,dw - \int_a^z f(w)\,dw \right) - \frac{f(z)}{h} \int_{[z,z+h]} dw \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\,dw \right| \le \frac{1}{|h|}\, \varepsilon\, \ell([z,z+h]) = \frac{1}{|h|}\, \varepsilon\, |h| = \varepsilon$$

Po definiciji limite je $F'(z) = f(z)$. $\square$

Ovojno število ali indeks krivulje





Naj bo $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ sklenjena pot in naj bo $z\notin\gamma^* = [\gamma] = \gamma[a,b]$.
Ovojno število ali indeks poti γ glede na z definiramo kot

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$$

kjer je $\zeta\mapsto\frac{1}{\zeta-z}$ holom. na $\mathbb{C}\setminus\{z\}$, je zvezna in zato zgornji integral obstaja.

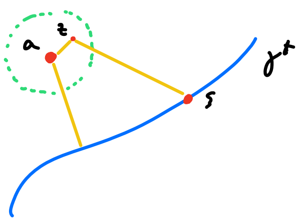
Lema Naj bo $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ pot in naj bo $f:\gamma^*\to\mathbb{C}$ zvezna. Tedaj je $F:\mathbb{C}\setminus\gamma^*\to\mathbb{C}$, ki je podana s predpisom

$$F(z)=\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

holomorfna. Funk. F na vsakem odp. krogu $D(a,r)\subseteq\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ lahko razvijemo v potenčno vrsto

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad \text{kjer je} \quad a_n = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Dokaz $z\in D=\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Ker je $\zeta\mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ je zvezna na γ^*, je F dobro definirana preslikava. Izberimo $a\in D$.



Naj bo $r>0$ tak, da je $D(a,r)\subseteq\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

Razvijemo f na $D(a,r)$ v potenčno vrsto.

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| \le \frac{|z-a|}{r} = q < 1 \quad \text{za } \forall \zeta\in\gamma^*$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n = \frac{1}{\zeta-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta-z}$$

Ker je $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$

in ker velja

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f(\zeta)|\frac{|z-a|^n}{|\zeta-a|^{n+1}} \le \frac{M}{|\zeta-a|}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|^n \le \frac{M}{d(a,\gamma^*)}\sum_{n=0}^{\infty}q^n,$$

funk. vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ konv. enak. na γ^*

Zgoraj je $M=\max_{\zeta\in\gamma^*}|f(\zeta)|$ in $d(a,\gamma^*)$ je razdalja od a do γ^*.

Zato po izreku uporabimo $\sum\int f_n = \int\sum f_n$, da dobimo

$$F(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\,(z-a)^n$$

$\square$

Izrek Naj bo $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ sklenjena pot in naj bo $D=\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Tedaj je $z\mapsto\operatorname{ind}_\gamma(z)$ zvezna funkcija, katere vrednosti so cela števila. Funkcija indeks je konstantna na vsaki komponenti za povezanost mn. D, ko zunanji komp. pa je ničelna.

Dokaz $\mathrm{ind}_\gamma(z) = \int \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ za $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* = D$. Po prejšnji lemi je ind_γ zv. funk.

Def.
$$F(t) = (\gamma(t) - z)\, e^{-\int_a^t \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z} du}$$

Da se hitro preveriti, da je $F'(t) = 0$ $\forall t \in [a,b]$, zato je F konstantna.
$\Rightarrow$ $F(a) = F(b)$

$$F(a) = (\gamma(a) - z)\, e^{-\int_a^a} = \gamma(a) - z = \gamma(b) - z = F(b)$$

Ker je $\gamma(a) = \gamma(b)$ in $z \notin \gamma^*$. Zato je
$$e^{-\int_a^b \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z} du} = 1$$

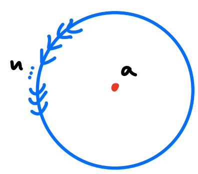
Zato je $-\int_a^b \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z} du = 2\pi n i$ za nek $n \in \mathbb{Z}$.

Zato je $-\mathrm{ind}_\gamma(z) = n$ za nek $n \in \mathbb{Z}$. Zato je $\mathrm{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.
Ker je ind_γ zv. funk., ki doseže le celoštevilske vrednosti, je konstantna na vseh povezanih komponentah v $D = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
$\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$ $\forall z$ iz neomej. komponente $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
Za gotovo je ind_γ konstanten na neomej. komp.. Če je z iz neom. potem je
$$|\mathrm{ind}_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)-z} dt \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{|\dot\gamma(t)|}{|\gamma(t)-z|} dt$$
$$\le \frac{M}{2\pi} \int_a^b \frac{dt}{d(z,\gamma^*)} = \frac{M\,(b-a)}{2\pi\, d(z,\gamma^*)} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$$

Zgoraj smo upoštevali, da je $|\dot\gamma(t)| < M$ $\forall t \in [a,b]$, γ^* kompaktna, $|\gamma(t) - z| \ge d(z, \gamma^*)$. Ker je $\mathrm{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ in velja $|\mathrm{ind}_\gamma(z)| \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$ je $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$ za z iz neom. pov. komp. od $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

□

Primer Izračunajmo indeks glede na n-krat navito pozitivno orientirano krožnico γ.



$D(a,r)$ Ker je ind_γ konst. na komp. za pot, je $\forall z \in D(a,r)$
$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \mathrm{ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi n} \frac{i r e^{it}}{r e^{it}} dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi n} dt = n$$

$\gamma(t) = a + r e^{it}$; $t \in [0, 2\pi n]$
$\dot\gamma(t) = i r e^{it}$

Posledica Če je γ pozitivno orientirana krož. s polmerom r in središčem a, potem za $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ velja
$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1; & |z-a| < r \\ 0; & |z-a| > r \end{cases}$$

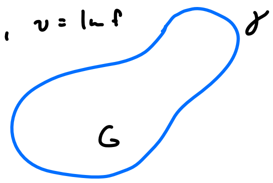
Opomba Če je $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, kjer je γ_1 zanka, ki točko z obkroži v poz. smeri, γ_2 pa v neg. smeri, potem je $\mathrm{ind}_\gamma z = 0 = \mathrm{ind}_{\gamma_1} z + \mathrm{ind}_{\gamma_2} z = 1 - 1$

Cauchyjeva formula in Cauchyjev izrek

Izrek Cauchyjev izrek: Naj bo γ tako <u>sklenjena</u> pot v neprazni odprti mn. D, da je $\mathrm{ind}_\gamma(w)=0$ za $\forall\, w \in \mathbb{C}\setminus D$. Tedaj za vsako holomorfno funk. f na D, velja:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Dokaz Zopet predstavimo dokaz, ko je f' zv. funkcija. $f = u + iv$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)(d_x + i d_y) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy = \ldots$$

Greenova formula $\displaystyle\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

$$\ldots = -\int_G \Big(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}_{0}\Big)\,dx\,dy + i\int_G \Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}_{0}\Big)\,dx\,dy = 0$$

ker je f hol., $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$ (Cauchy-Riemannove enačbe). $\square$

Primer $D = \mathbb{C}\setminus\{(0,0)\}$, γ je krožnica s središčem v izhodišču in polmerom r. Orientacija je pozitivna.

$$z = re^{it} \qquad \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}\,dt}{re^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

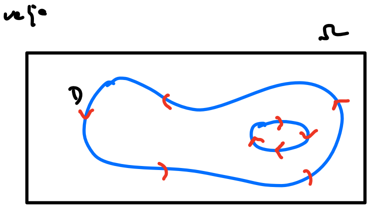
Funkcija $z \mapsto \frac{1}{z}$ je holom. na $\mathbb{C}\setminus\{0\} = D$. Preverimo pogoj o indeksu v Cauchyjevem izreku. 0 je edina točka v $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathrm{ind}_\gamma(0) = 1 \Rightarrow$ zato to ni protiprimer k Cauchyjevem izreku.

Primer D in γ kot v prejšnjem primeru. Koliko je $\int_\gamma \frac{dz}{z^n}$ za $n \neq 1$. Uporabimo trditev, ki pravi, da je integral zvezne funkcije, ki ima primitivno funkcijo po sklenjeni poti enak 0.

$$\left(\frac{z^{-n+1}}{-n+1}\right)' = z^{-n}$$ je odvod hol. funkcije, zato je int. enak 0.

Izrek Cauchyjev izrek za območja

Naj bo Ω območje in $f:\Omega \to \mathbb{C}$ holomorf. fun. Naj bo D omejeno območje s kosoma gladkim robom in naj bo $D \cup \partial D \subseteq \Omega$. Tedaj velja



$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$$

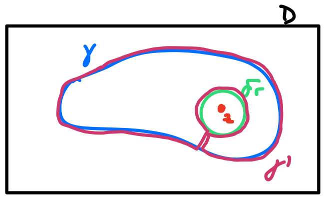
Ta izrek sledi iz splošnega Cauchyjevega izreka (rob je orientiran pozitivno).

Izrek Cauchyjeva formula

Naj bo γ taka sklenjena pot v neprazni odp. mn. D, da je $\mathrm{ind}_\gamma(w) = 0$ za $\forall\, w \in \mathbb{C}\setminus D$. Tedaj za vsako hol. funkcijo $f: D \to \mathbb{C}$ in $\forall\, z \in D\setminus \gamma^*$ velja

$$f(z)\,\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

Dokaz Predpostavimo, da je f' zvezna. Izberemo $z \in D$ in def



$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

g je def na $D \setminus \{z\}$. Def $\gamma' = \gamma \cup \delta_r^-$, kjer je δ_r^- neg. orient. krožnica s središčem v a in polmerom r, da je $D(z,r) \subseteq D \setminus \gamma^*$.

Po Cauchyjevem izreku

$$0 = \int_{\gamma'} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_{\gamma'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\delta_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + f(z) \int_{\delta_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - f(z)\, 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z) - \int_{\delta_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Ta enakost velja za $\forall r$, da je $D(z,r) \subseteq D \setminus \gamma^*$. Dokažimo, da je

$$\lim_{r \to 0} \int_{\delta_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \overset{?}{=} 0$$

Zapišimo

$$\left| \int_{\delta_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \overset{\text{parametrizirano}}{=} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it}) - f(z)}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| f(z + re^{it}) - f(z) \right| dt \leq \dots$$

Ker je f zvezna v z, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ da r $|f(z + re^{it}) - f(z)| < \delta$

$$\dots \leq \int_0^{2\pi} \varepsilon\, dt = 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{r \to 0} 0$$

$\square$

Posledica Cauchyjeva formula za območja
Naj bo Ω obm. in $f : \Omega \to \mathbb{C}$ hol. Naj bo D tako omejeno območje z odsekoma gladkim robom, da je $D \cup \partial D \subseteq \Omega$. Tedaj za vsak $z \in D$ velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $z \in D$ velja

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

Če je D krog $D(a,r)$ in če v zgornji Cauchyjevi formuli za obm. vstavimo $z = a$, dobimo

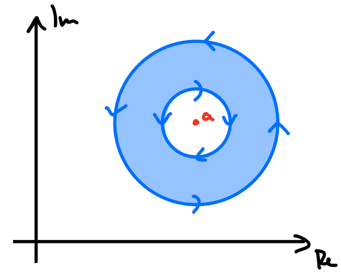
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

Opomba f je zaradi pogoja $D \cup \partial D \subseteq \Omega$ hol. na neki okolici kroga $\overline{D}(a,r)$

Izrek Cauchyjeva formula za kolobar
Naj bo f holom. na okolici zaprtega kolobarja $\overline{A}(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} ; r \leq |z-a| \leq R\}$
Tedaj za $\forall z \in A(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} ; r < |z-a| < R\}$ velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

kjer simbola $|\zeta - a| = r$ in $|\zeta - a| = R$ predstavljata poz. orient. krožn. s središčem v a in polmerom R, r



Posledica Naj bo f holom. funkcija na odp. mn. D. Tedaj se da f razviti v potenčno vrsto $f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$ na vsakem krogu $D(a,r) \subseteq D$.
Pri tem velja
$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta$$

f je neskončnokrat odvedljiva funkcija.

Dokaz Del trditve o razvoju v potenčno vrsto sledi iz leme, ki je def. pred indeksom in Cauchyjevo formulo. Iz tiste leme tudi sledijo formule za koeficiente.
Ker je možno f razviti v potenčno vrsto znotraj krogov vsebovanih v D, je vsak od teh krogov neskončnokrat odv. funkcija. □

Opomba Če je $f: D(a,r) \to \mathbb{C}$ holom., potem se jo da na celem krogu $D(a,r)$ razviti v potenčno vrsto.

Posledica Cauchyjeve ocene
Naj bo $f: D(a,r) \to \mathbb{C}$ holom. in naj velja $|f(z)| \le M$ $\forall z \in D(a,r)$. Tedaj za $\forall n \in \mathbb{N}_0$ velja
$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!\, M}{r^n}$$

Dokaz Naj bo $0 < \rho < r$.
$$|f^{(n)}(a)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\rho e^{it})}{(\rho e^{it})^{n+1}}\, i\rho e^{it}\, dt\right| \le$$
$$\le \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(a+\rho e^{it})|}{\rho^n}\, dt \le \frac{n!\, M}{2\pi \rho^n}\int_0^{2\pi} dt = \frac{n!\, M}{\rho^n} \xrightarrow{\rho \to r} \frac{n!\, M}{r^n}$$

Izrek Liouvilleov izrek
Cela omejena holomorfna funkcija je konstantna.

Dokaz Ker je f cela in omejena, je $|f(z)| \le M$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Izberimo $a \in \mathbb{C}$ in $r > 0$.
Poglejmo Cauchyjevo oceno za f' in $D(a,r)$. Dobimo
$$|f'(a)| \le \frac{M}{r} \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

zato je $f' = 0$ na $\mathbb{C}$

Izrek Osnovni izrek algebre
Vsak nekonstanten polinom ima v $\mathbb{C}$ vsaj eno ničlo

Dokaz: Naj bo $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0$ nek polinom, ki nima ničel nad $\mathbb{C}$. Dokažimo, da je konstanten.

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_n z^n + \dots + a_0} = \frac{1}{z^n + \dots + a_1 z + a_0}$$

Lahko privzamemo $a_n = 1$. Dokazali bomo, da je f omejena na komplementu nekega kroga. Ker je zvezna je omej. na zaprtih krogih $\Rightarrow$ f je po Liouvillovem izreku $\Rightarrow$ $p = \frac{1}{f}$ je konst.

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)$$

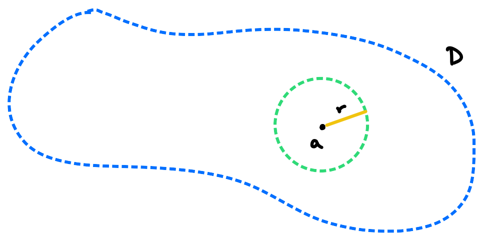
Uporabimo obratno trikotniško neenakost $\Rightarrow$

$$|p(z)| \geq \underbrace{|z|^n}_{\to \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_1|}{|z^{n-1}|} + \frac{|a_0|}{|z^n|}\right)}_{\to 1}$$

neko število

Zato $\exists$ tak $r > 0$ da za $|z| > r$ velja $|p(z)| \geq \frac{1}{2}$. Zato je $|f(z)| \leq 2$ za $|z| > r$. Iz komentarja prej sledi da je f omejena in ker je cela, je konst.

Ničle holomorfnih funkcij



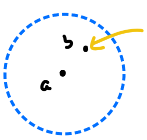
$f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna, $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta.
Naj bo $D(a,r) \subseteq D$. Tedaj lahko f na $D(a,r)$ razvijemo v potenčno vrsto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

Število a je ničla za f $\Leftrightarrow$ $f(a) = 0$ $\Leftrightarrow$ $a_0 = 0$. Če je $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, potem je $f = 0$ na $D(a,r)$. Predpostavimo, da obstaja $m \in \mathbb{N}$, da je $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ in $a_m \neq 0$. Potem je

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m (z-a)^m + a_{m+1} (z-a)^{m+1} + \dots = \\ &= (z-a)^m \left(a_m + a_{m+1}(z-a) + a_{m+2}(z-a)^2 + \dots\right) \\ &= (z-a)^m \, g(z) \end{aligned}$$

Ker je $g(a) = a_m \neq 0$, a ni ničla za g. Zato je a m-kratna ničla za f.
Ker je $g(a) \neq 0$ zaradi zveznosti funk. g, na neki okolici za a, g nima ničle.



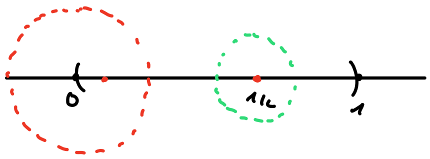
Če je $f(b) = 0$ za nek $b \in D(a,r)$ potem je $g(b) = 0$ $\Rightarrow$ protislovje. Zato v tem primeru obstaja okolica za a na kateri je a edina ničla za f. Pravimo, da je a <u>izolirana ničla</u> za f.

Def. funkcijo $h : D \to \mathbb{C}$ s predpisom $h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m} & : z \in D \setminus \{a\} \\ a_m & : z = a \end{cases}$

Funkcija h je holomorfna na $D \setminus \{a\}$, ker je tam holomorfna $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^m}$. Ker se g in h ujemata na $D(a,r)$, je h tudi holomorfna na $D(a,r)$. Zato je h holom. na D in velja

$$f(z) = (z-a)^m h(z) \quad \forall z \in D$$

Točka a je <u>stekališče</u> množice A, če je v vsaki okolici točke a kakšna od a različna točka množice A. Množica A je množica s stekališčem, če vsebuje vsaj kakšno svoje stekališče.



$A=(0,1)$ Točka 0 je stekališče množice A, ki ni vsebovano v A. Za točko 1 velja podobno. Točka 1/2 je je stekališče množice A. Zato je A mn. s stekališčem. Podobno je realna os mn. s stekališčem v $\mathbb{C}$.

Izrek Naj bo D območje v $\mathbb{C}$ in $f: D\to\mathbb{C}$ holom. funk. Naj bo

$$Z(f)=\{a\in D;\ f(a)=0\}$$

množica ničel funkcije f. Tedaj je $f\equiv 0$ na D ali pa $Z(f)$ nima stekališča v D.
V drugem primeru za vsak $a\in Z(f)$ $\exists$ natanko določeno naravno št. $m(a)$ in hol. g na D, da je $g(a)\neq 0$ in $f(z)=(z-a)^{m(a)}g(z)$.

Dokaz Naj bo A množica stekališč $Z(f)$. Če je $A=\emptyset$ potem so ničle izolirane in po zgornji diskusiji je vsaka ničla stopnje $m(a)$ in zato iskana funkcija g obstaja.

Recimo, da $A\neq\emptyset$. Zaradi zveznosti funk. f na $A\subseteq Z(f)$. Dokazali bomo, da je A hkrati odprta in zaprta podmnožica v D. Ker je A neprazna, D pa povezana, bo sledilo $A=D$. Zato so $\forall a\in D$ ničle za f oz. $f\equiv 0$ na D.

A je zaprta, ker je stekališče zaporedja stekališč tudi stekališče.
A je odprta. Naj bo $a\in A$. Iščemo $r>0$, da bo $D(a,r)\subseteq A$. Potem bo po def. odprtosti A odprta množica. Ker je $a\in D$ in D odprta, $\exists\ r>0$, da je $D(a,r)\subseteq D$. Naj bo $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ razvoj funk. f v poten. vrsto na $D(a,r)$. Če f ni enaka 0 na $D(a,r)$, potem lahko zapišemo $f(z)=(z-a)^m g(z)$ za neki $m\in\mathbb{N}$ in neko holom. funk. g, ki nima ničel in zato ne more biti stekališče ničel. To protislovje pokaže, da je $f(z)=0\ \forall z\in D(a,r)$. Ker so točke kroga stekal. za krog, je $D(a,r)\subseteq A$. Zato je A odprta. Ker je neprazna in zaprta je $A=D$ in $f\equiv 0$ na D.

Posledica Naj bosta $f,g: D\to\mathbb{C}$ hol. na območju D. Če je $f|_A=g|_A$ ujemata na množici A s stekališčem, potem je $f=g$ na D.

Dokaz $h=f-g=0$ na A. Po prejšnjem izreku je $h\equiv 0$ na D oz. $f=g$ na D.

Opomba $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=e^x$
$g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ Taylorjev razvoj za f okoli izhodišča $\Rightarrow f(x)=g(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$
Zato je g hol. razširitev funkcije f na $\mathbb{C}$. Če je h še ena holom. razširitev f na $\mathbb{C}$, potem je $h|_{\mathbb{R}}=f=g|_{\mathbb{R}}\to g\equiv h$ na $\mathbb{C}$, ker je $\mathbb{R}$ množica s stekališčem.

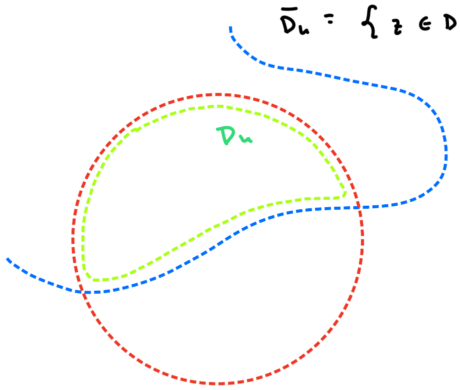
Posledica Naj bo f holom. f. na območju D in naj bo $K \subseteq D$ kompaktna množica (zaprta in omejena). Če je f neničelna potem ima f na K lahko le končno mnogo ničel, na D pa kvečjemu števno neskončno mnogo.

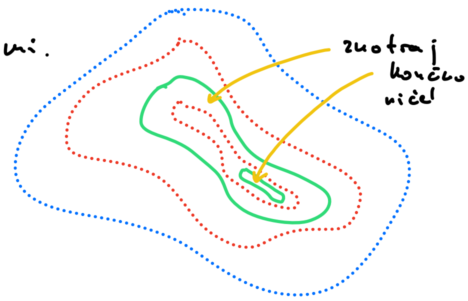
Dokaz Množica $K \cap Z(f)$ je množica ničel za f iz K. Če je ta množica neskončna potem ima f neskončno ničel na K, ki je množica s stekališčem. Po izreku je $f \equiv 0$, kar je protislovje.

V splošnem bomo D "izčrpali" s kompaktnimi množicami.

Def. $D_n = \{ z \in D ;\ |z| < n \text{ in } d(z, \partial D) > \frac{1}{n} \}$.

$\bar{D}_n = \{ z \in D ;\ |z| \leq n \text{ in } d(z, \partial D) \geq \frac{1}{n} \}$





Velja $D_1 \subseteq \bar{D}_1 \subset D_2 \subseteq \bar{D}_2 \ldots$

in $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n$

$\Rightarrow$ Ničle od f so ravno ničle od $f|_{\bar{D}_n}$ za $\forall n$ ker je $\bar{D}_n$ kompaktna ima f na $\bar{D}_n$ največ končno mnogo ničel $\Rightarrow$ $Z(f)$ je največ števno neskončno.

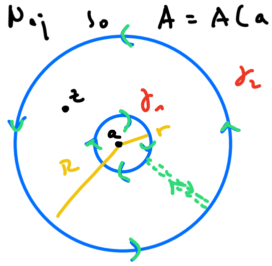
Razvoj v Laurentovo vrsto in tipi singularnosti

Motivacija Če je $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ holomorfna, potem jo razvijemo v pot. vrsto na $D(a,r)$

Glavni gradniki tvorijo funkcije $\longrightarrow (z-a)^n$

Osnovni primer f., ki ni hol. povsod na krogu je $\frac{1}{(z-a)^n}$

Naj bo $A = A(a,r,R)$ kolobar in naj bo f hol. funkcija, def. na neki okolici zaprtega kolobarja $\bar{A}$



$$\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_1$$

Po Cauchyjevi formuli za kolobar za $z \in A(a,r,R)$ velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

Izrek Razvoj v Laurentovo vrsto

Vsako hol. funk. def. na okolici zaprtega kolobarja $\bar{A}(a,r,R) = \{ z \in \mathbb{C} ;\ r \leq |z-a| \leq R \}$ lahko za $\forall\, w \in A(a,r,R)$ razvijemo v Laurentovo vrsto

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

kjer je $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ za $n \geq 0$ in $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ za $\forall\, n < 0$.

Prva vrsta konvergira za $\forall\, w$ znotraj $D(a,R)$, druga vrsta konvergira za $\forall\, w$ zunaj $\bar{D}(a,r)$. Vrsti predstavljata holomorfni funkciji na območjih konvergence.

Opomba Prvo vrsto imenujemo regularni del, drugo pa glavni del razvoja v Laurentovo vrsto.

Dokaz: Naj bo $z \in \bar{A}(a,r,R)$. Potem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a + a - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a + a - z}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)}\,d\zeta = \dots$$

Ker je $z \in A(a,r,R)$ in $|\zeta - a| = R$, je $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{R} < 1$. Zato velja

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$ in to enakomerno konv. na γ_2. Podobno je

$$\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n$$ in to enakomerno konv. na γ_1.

$$\dots = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,d\zeta =$$

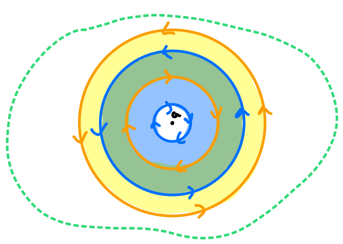
$$\overset{\text{enak. konv.}}{=} \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \underbrace{\int_{\gamma_2} f(\zeta)\frac{1}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta}_{c_n \text{ za } n \geq 0} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^{-n-1}\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,d\zeta = \dots$$

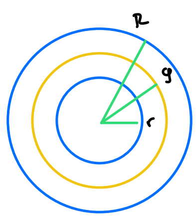
Iz prvega razvoja je prepoznamo ustrezni c_n za $n \geq 0$, v drugem razvoju pa zamenjamo $-n-1 = n$.

$$\dots = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_{\gamma_2} f(\zeta)\frac{1}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-1}^{-\infty}(z-a)^n\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta$$

$\square$

Opomba: Razvoj v Laurentovo vrsto je neodvisen od izbire krožnic





$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$ naj bo razvoj na kolobarju $A(a,r,R)$. Hitro se vidi, da glavni del vrste konv. absolutno in enakomerno na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \geq \rho\}$. Za vsak $\rho > r$. Podobno regularni del vrste konv. absolutno in enakomerno na $\{z \in \mathbb{C};\ |z-a| \leq \rho\}$ $\forall \rho < R$

Če je f holom. na odp. mn. U povsod razen v eni točki $a \in U$, potem je a izolirana singularna točka za f. Tedaj lahko f razvijemo v Laurentovo vrsto na katerem koli kolobarju $A(a,r,R)$ za $\forall r > 0$. Na ta način dobimo razvoj v Laurentovo vrsto okoli točke a na $D(a,R)\setminus\{a\}$. Včasih označimo $D'(a,r) = D(a,r)\setminus\{a\}$. Imenujemo jo punktiran krog oz. disk. Naj bo

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

Laurentov razvoj. f je hol. na $D'(a,r)$. Točka a je izolirana singularnost. Pravimo, da je točka a

ⓐ odpravljiva singularnost, če so $c_{-1} = c_{-2} = \dots = 0$ oz $c_{-n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ni polov

V tem primeru lahko def. $f(a) = c_0$, tedaj se f ujema s potenčno vrsto na $D(a,r)$. Zato je f hol. na $D(a,r)$.

(b) pol, če obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $c_{-n} \neq 0$ in $c_{-k} = 0$ $\forall k > n$ — Končno mnogo polov

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Pravimo, da je a pol reda n.

(c) bistvena singularnost, če je $c_{-n} \neq 0$ za neskončno mnogo $n \in \mathbb{N}$ — Neskončno polov

Primer (a) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$ je hol. na $\mathbb{C}$. Zato je trivialno tudi hol. na $D'(a,r)$. Zato je odpravljive sing.

(b) $\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \dots$
0 je pol reda 4.

(c) $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$ 0 je bistvena singularnost za $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$

Trditev Če je hol. funk. omejena v okolici izolirane sing. točke a, potem je a odpravljiva sing.

Dokaz $c_{-n} \overset{?}{=} 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}} \, d\xi \overset{?}{=} 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|c_{-n}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}} \, d\xi \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\xi)|}{|(\xi-a)^{-n+1}|} \, ds \le \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{M}{r^{-n+1}} \, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} r^{n-1} M \, 2\pi r = M r^n \xrightarrow{r \to 0} 0$$

Izrek Casorati - Weierstrassov izrek

Naj bo a bistvena sing. za hol. funk. f. Tedaj za $\forall w \in \mathbb{C}$ ter poljubni števili $\varepsilon, \delta > 0$ $\exists$ tak $z \in D'(a,\delta)$, da $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Dokaz Predpostavimo, da obstaja tak $w \in \mathbb{C}$ in $\varepsilon, \delta > 0$, da je f hol. na $D'(a,\delta)$ in da velja, da je $|f(z) - w| \ge \varepsilon$ $\forall z \in D'(a,\delta)$. Def $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$. Tedaj je g hol. na $D'(a,\delta)$. Ker je $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-w|} \le \frac{1}{\varepsilon}$, je g omejena na $D'(a,\delta)$. Zato je a za g odpravljiva singularnost. Zato lahko zapišemo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{za } z \in D(a,\delta).$$

Zato lahko zapišem $g(z) = (z-a)^m h(z)$ za nek $m \in \mathbb{N}_0$ in h hol. na $D(a,\delta)$, ki nima ničel na $D(a,\delta)$. Izrazimo f:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w = \frac{1}{(z-a)^m h(z)} + w$$

Ker je h holomorfna na $D(a,\delta)$ in tu nima ničel, je $\frac{1}{h}$ hol. na $D(a,\delta)$.
Naj bo $\frac{1}{h} = \sum_{n=0} b_n (z-a)^n$ razvoj v pot. vr. za $\frac{1}{h}$ na $D(a,\delta)$. Tedaj je

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + w = \frac{1}{(z-a)^m} \left(b_0 + b_1 (z-a) + b_2 (z-a)^2 + \dots \right) + w$$

Zato je a končen pol reda m za f kar je protislovje.

Naj bo $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Točka ∞ je odpravljiva sing. za f, če je 0 odpravljiva sing. za $z \mapsto \hat{f}(z) = f(\frac{1}{z})$. Podobno bi def. pojem pola in bistvene sing. za ∞.

Naj bo $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{f}(z) = f(\frac{1}{z})$

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$$

$$f(z) = \hat{f}(\tfrac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{c_n}{z^n}$$

$$= \left(c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots\right) + \left(c_{-1} z + c_{-2} z^2 + \dots\right)$$

∞ je odpravljiva sing. za f $\Leftrightarrow$ 0 odpravljiva sing. za $\hat{f}$ $\Leftrightarrow$ $c_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

Podobno analiziraj pojem pola in bistvene sing.

Logaritem in potence

Kako def. logaritem kompleksnega števila? Naj bo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Število w je logaritem števila z, če je $e^w = z$. Rešimo enačbo $e^w = z$ $\quad w = x + iy \quad z = re^{i\varphi}$

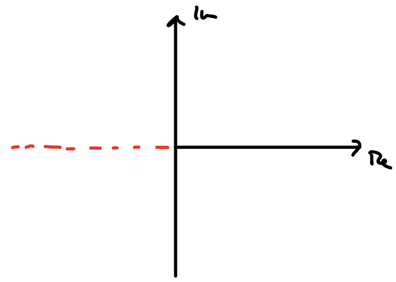
$$e^{x+iy} = z = re^{i\varphi} \Rightarrow e^x = r, \quad y = \varphi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

kot $z = \varphi$

$$w = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i$$

Ponavadi izberemo osnovno vejo logaritma. Torej $k=0$

$$\underline{w = \ln|z| + i\arg(z)}$$



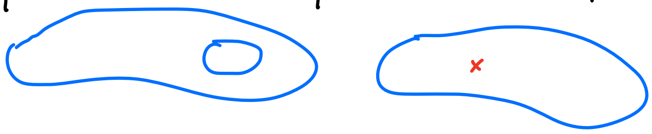
Negativen del realne osi izrežemo iz kompleksne ravnine. Logaritem def. na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. To naredimo zato ker so v okolici toč. int. $(-\infty, 0]$ točke z arg. blizu π in $-\pi$.

Holom. funk. g je logaritem funk. f, če je $e^{g(z)} = f(z)$ za $\forall z \in D_f$

Izrek Naj bo D tako območje v $\mathbb{C}$, da je $\operatorname{ind}_\gamma(\alpha) = 0$ za $\forall$ sklenjeno pot γ in $\forall$ točko $\alpha \in \mathbb{C} \setminus D$. Potem za vsako hol. funk. $f: D \to \mathbb{C}$, ki nima ničel na D, obstaja holomorfni logaritem g funkcije f.

Če je h še en logaritem za f, potem je $h-g = 2\pi n i$ za nek $n \in \mathbb{Z}$.

Opomba Pogoj o indeksu zadošča t.i. enostavno povezanim območjem.



Po domače povedano luknje so prepovedane.

Ideja Če je $e^g = f \overset{\text{odvod}}{\Rightarrow} e^g g' = f' \Rightarrow f g' = f' \Rightarrow g' = \frac{f'}{f}$. Ker f nima ničel, ima $\frac{f'}{f}$ smisel. Sedaj bi g def. kot integral, krivuljni integral, po katerikoli krivulji.

Dokaz Ker je $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus D$, je $\int_\gamma h(z)\,dz = 0$ za $\forall$ sklenjeno pot po Cauchyjevem izreku

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} h(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} h(z)\,dz = \int_{\gamma_2} h(z)\,dz$$

Izberimo $w_0 \in D$ in tak $z_0 \in \mathbb{C}$, da je $e^{z_0} = f(w_0)$. Za $z \in D$ def.

$$g(w) = z_0 + \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

Integral oz. funk. g je dobro def., saj f nima ničel na D in zato je $\frac{f'}{f}$ holom. na D. Vemo že, da je $g' = \frac{f'}{f}$

$$h(w) = e^{-g(w)} f(w) \Rightarrow h'(w) = -e^{-g(w)} g'(w) f(w) + e^{-g(w)} f'(w) = 0$$

$\Rightarrow h =$ konst. Ustavimo $w = w_0$, da dobimo

$$h(w) = h(w_0) \quad \text{oz.} \quad e^{-g(w)} f(w) = e^{-g(w_0)} f(w_0) = e^{z_0} e^{-0-z_0} = 1$$

Če je h še en logaritem od f $\Rightarrow e^{g(w)} = f(w) = e^{h(w)}$ $\forall w \in D$

$\Rightarrow g(w) - h(w) = 2k(w)\pi i$ za nek $k(w) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow k(w) = \frac{1}{2\pi i}(g(w) - h(w))$ je zv. funk. na D, ki ima le cele vrednosti, ker je k zvezna, je konstantna. (Če k ni konstantna, po tem sta m, n v zalogi vrednosti ... ?)

Posledica Izberimo $w_0 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Za vsak $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ je

$$\ln w = \ln w_0 + \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

kjer je γ poljubna pot med w_0 in w. Še več, logaritem je holom. funkc. na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Opomba $\ln z$ def. za $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$g(z) = \ln(1+z)$ je holom. na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$

$z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln(1+x)$ ima smisel za $x > -1$. Če je $x \in [-1, 1]$ potem je

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Potenčna vrsta $\sum (-1)^n \frac{z^n}{n}$ ima konv. radij 1.

$\ln(1+z)$ in $\sum (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ sovpadata na $(-1, 1)$, ki je mn. s stekališčem v $D(0,1)$, zato je

$\ln(1+z) = \sum (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ na $D(0,1)$

Def Za $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ definiramo

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

Trditev Za $\alpha \in \mathbb{C}$ je $z \mapsto z^\alpha$ hol. funkcija na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Dokaz kompozitum hol. funk. je hol.

Izrek o residuih

Naj bo f hol. na $D'(a,R) = D(a,R) \setminus \{a\}$. Naj bo $0 < r < R$. Naj bo

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ Laurentov razvoj funkcije f na $D'(a,R)$. γ_r krožnica

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{\gamma_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma_r} (z-a)^n\,dz = c_{-1} \int_{\gamma_r} (z-a)^{-1}\,dz + \sum_{n \neq -1} \int_{\gamma_r} (z-a)^n\,dz$$

Na $D'(a,R)$ ima $(z-a)^n$ primitivno funkcijo za $n \neq -1$. Zato so vsi ti integrali enaki nič.

$$\Rightarrow \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = c_{-1} \int_{\gamma_r} (z-a)^{-1}\,dz = c_{-1}\, 2\pi i\, \mathrm{ind}_{\gamma_r}(a) = 2\pi i\, c_{-1}$$

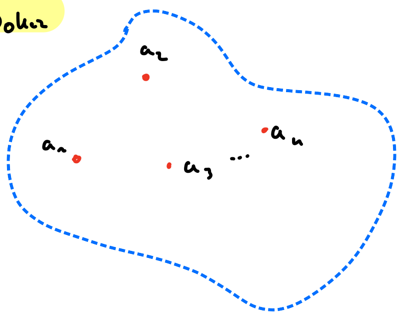
Število c_{-1} se imenuje residuum oz. ostanek in ga označimo $c_{-1} = \mathrm{Res}(f, a)$.

Izrek Izrek o residuih

Naj bo f holom. funk. na območju D razen v izolir. sing. točkah $a_1, \dots, a_n$. Naj bo γ taka pot $\mathbb{C} \setminus D$, da je $\mathrm{ind}_\gamma(w) = 0$ za vsako $w \in \mathbb{C} \setminus D$ in naj na γ ne bo sing. $a_1, \dots, a_n$. Potem velja

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{ind}_\gamma(a_k)\, \mathrm{Res}(f, a_k)$$

Dokaz



Naj bo Q_k glavni del Laurentovega razvoja za f okrog a_k. Tedaj ima lok. funkcija $g = f - (Q_1 + \dots + Q_n)$ odpravljive sing. v $a_1, \dots, a_n$. Zato je g holom. Zato po Cauchyjevem izreku velja

$$0 = \int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int Q_k(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int Q_k(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, a_k)\, \mathrm{ind}_\gamma(a_k).$$

Kako izračunamo ostanek? Razvijemo funk. v Laurentovo vrsto in poiščemo koeficient pri $(z-a)^{-1}$. To je večkrat težko. V primeru, da je a pol obstaja zaključena formula, po kateri izračunamo ostanek.

Trditev Naj bo a izolirana sing. funk. f, v kateri ima n pol stopnje n. Tedaj je

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \left((z-a)^n f(z) \right)^{(n-1)}$$

odvod

Opomba $n=1$

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

Opomba $f(z)=\sin z\, e^{1/z}$ ima v $z=0$ bistveno singularnost, zato zgornje formule ne moremo uporabiti.

$$\operatorname{Res}(f,0)=c_{-1}$$

$$f(z)=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)\left(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\dots\right)$$

$$c_{-1}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!4!}+\frac{1}{5!6!}-\dots$$

Dokaz Naj bo $f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\dots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1\dots$ Laurentov razvoj okoli $z=a$.

$$(z-a)^n f(z)=c_{-n}+c_{-n+1}(z-a)+\dots+c_0(z-a)^n+\dots$$

Odvajamo $n-1$ krat

$\left((z-a)^n f(z)\right)^{(n-1)}=c_{-1}(n-1)!+g(z)$, kjer je $g(z)$ hol. funkcija, ki ima ničlo v $z=a$.
Sedaj pošljemo $z\to a$

Primer $f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$ $\qquad f(z)=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)=\frac{1}{z^2}-\dots$

f ima v $z=0$ pol stopnje 2

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)'=\lim_{z\to0}\frac{z\cos z-\sin z}{z^2}=\lim_{z\to0}\frac{\cos z-z\sin z-\cos z}{2z}=\lim_{z\to0}\frac{1}{2}\sin z=0$$

Integracija realnih integralov s pomočjo kompleksne analize

Primer $I=\int_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)\,d\varphi$

Oslobodimo se te mešanice z nastavkom $t=\tan\frac{\varphi}{2}$, raje upeljimo $z=e^{i\varphi}$ $\left([0,2\pi]\to\partial D(0,1)\right)$

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\sin\varphi=\dots=\frac{z^2-1}{2z}$$

$$dz=ie^{i\varphi}d\varphi\ \rightsquigarrow\ d\varphi=\frac{1}{i}e^{-i\varphi}dz=\frac{dz}{iz}$$

$$I=\int_{\partial D(0,1)}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2z}\right)\frac{1}{iz}\,dz$$

Če je integrand hol. funk. na $\bar D(0,1)$

$$I=2\pi i\sum_{|z|<1}\operatorname{Res}(f,z)$$

Primer

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}=\frac{1}{2}\int_{\partial D(0,1)}\frac{\frac{dz}{iz}}{a+\frac{z^2+1}{2z}}=\frac{1}{i}\int_{\partial D}\frac{dz}{z^2+2az+1}=$$

$z^2+2az+1=0 \qquad z_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2-4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$

$z_1 = -a + \sqrt{a^2-1} < 0$

Ali je $-a+\sqrt{a^2-1} < -1$

$a-1 > \sqrt{a^2-1} \iff \sqrt{a-1} > \sqrt{a+1}$ kar ni možno

Zato je $z_1 \in D(0,1)$

$z_2 = -a - \sqrt{a^2-1} < -1$

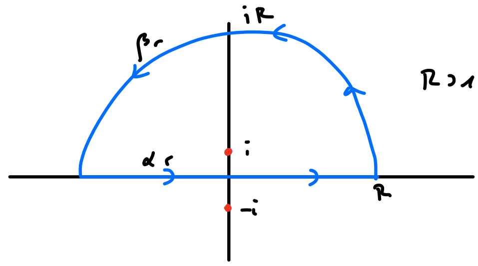
$I = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, z_1)$, kjer je $f(z) = \frac{1}{i} \frac{1}{z^2+2az+1}$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{i} \frac{z-z_1}{z^2+2az+1} = \frac{1}{i} \lim_{z\to z_1} \frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{i}\frac{1}{z_1-z_2}$$

$$I = \pi \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Primer

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \qquad \gamma_R = \alpha_R \cup \beta_R$$



$$\frac{1}{(x^2+1)^n} \to \frac{1}{(z^2+1)^n} = f$$

$f(z) = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$ $\quad$ f ima dva pola v $i, -i$ stopnje n.

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z+i)^{-n} = 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} n(n+1)(n+2)\cdots(2n-2) \lim_{z\to i} (z+i)^{-2n+1} =$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} (2i)^{-2n+1} = \frac{2\pi i}{((n-1)!)^2} (2n-2)! (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{2n-1} i^{2n-1}} =$$

$$= 2\pi i \frac{(2n-2)!}{(n-1)!!} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{i}{(-1)^n} = \frac{\pi}{4^{n-1}} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} = J$$

$$J = \int_{\alpha_R} f(z)dz + \int_{\beta_R} f(z)dz \qquad \forall R>1$$

Dokazali bomo, da je $\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ in $\lim_{R\to\infty} \int_{\beta_R} f(z)dz = 0$

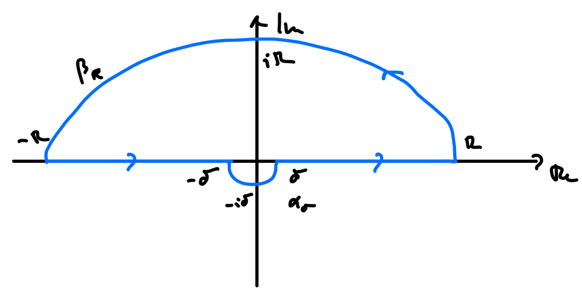
- $\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

$|iRe^{it}| \le R \qquad |1+R^2e^{2it}| \ge |R^2e^{2it}|-1 = R^2-1$

- $\left|\int_{\beta_R} f(z)dz\right| \underset{\substack{z=Re^{it}\\ dz=iRe^{it}dt}}{=} \left|\int_0^{\pi} \frac{iRe^{it}\,dt}{(1+R^2e^{2it})^n}\right| \le \int_0^{\pi} \left|\frac{iRe^{it}}{(1+R^2e^{2it})^n}\right| dt \le \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2-1)^n} dt = \frac{R\pi}{(R^2-1)^n} \xrightarrow{R\to\infty} 0$

Primer

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$



$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ $\quad$ pol stopnje 1.

$$\int_{\gamma_{R,\delta}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{R,\delta}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i \lim_{z\to 0} e^{iz} = 2\pi i$$

$\forall R>0$ in $R>\forall\delta>0$ velja $\quad 2\pi i = \int_{[-R,-\delta]} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{[\delta,R]} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\alpha_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\beta_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$

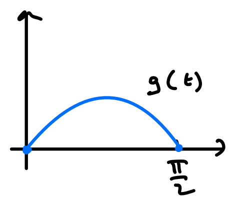
• $\left|\int_{\beta_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \overset{z=Re^{it}}{=} \left|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\, iRe^{it}\,dt\right| \le \int_0^\pi \left|e^{iRe^{it}}\right| dt = \int_0^\pi \left|e^{iR(\cos t + i\sin t)}\right| dt = \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt \le$

$\sin t \overset{?}{\ge} \frac{2}{\pi}t \quad \forall t\in[0,\pi/2]$

$\le 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}Rt}\,dt = -\frac{\pi}{R} e^{-\frac{2}{\pi}Rt}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right) \xrightarrow{R\to\infty} 0$

$\sin t \ge \frac{2}{\pi}t \quad \forall t\in[0,\frac{\pi}{2}] \qquad g(t) = \sin t - \frac{2}{\pi}t \qquad g(t)\ge 0$

$g'(t) = \cos t - \frac{2}{\pi}$



• $\lim_{\delta\to0}\int_{\alpha_\delta}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{\gamma_\delta}\left(\frac1z + g(z)\right)dz = \qquad \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1+(iz)+\frac{(iz)^2}{2}}{z} = \frac1z + g(z) \qquad g(z)$ hol.

$= \int_{\gamma_\delta}\frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\delta} g(z)\,dz = i\pi$

$\int_{\gamma_\delta}\frac{dz}{z} = \int_\pi^{2\pi}\frac{i\delta e^{it}}{\delta e^{it}}\,dt = i\pi \qquad \left|\int_{\alpha_\delta} g(z)\,dz\right| \le \int_{\alpha_\delta}|g(z)|\,|dz| \le M\frac{2\pi\delta}{2}\xrightarrow{\delta\to0}0$

V limiti $R\to\infty$, $\delta\to0$ dobimo

$$2\pi i = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + i\pi + 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac12 \operatorname{Im}\pi i = \frac{\pi}{2}$$

Izrek o odprti preslikavi in posledice

Trditev Naj bo D območje in f holomorfna na D razen v nekaj sing. točkah, ki so poli za f. Naj bo $\bar D(a,r)$ krog v D in naj f nima ničel in polov na njegovem robu. Naj bo N število ničel, P pa število polov za f znotraj $D(a,r)$, pri čemer ničle in pole štejemo skladno z večkratnostjo. Potem je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P$$

Opomba Če je f holomorfna na D, potem je $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N$. V tem primeru zgornji integral prešteje ničle znotraj $D(a,r)$ z njihovimi večkratnostmi.

Dokaz Naj bodo $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ in $\beta_1,\dots,\beta_l$ zaporedoma vse ničle in vsi poli (različni) znotraj $D(a,r)$. Po izreku o stekališčih ničel mn. je št. ničel končno. Ker je α ničla za f $\Rightarrow$

α polov za $\frac{1}{f}$, podoben argument pove, da je končno polov.

Naj bodo $m_1, \dots, m_k$ in $n_1, \dots, n_\ell$ zap. večkratnosti ničel in polov. Zato za $z \in D(a,r)$ velja $f(z) = (z-\alpha_1)^{m_1} \cdots (z-\alpha_k)^{m_k} (z-\beta_1)^{-n_1} \cdots (z-\beta_\ell)^{-n_\ell} g(z)$, kjer $g(z)$ nima ne ničel ne polov na $D(a,r)$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z-\alpha_1} + \dots + \frac{m_k}{z-\alpha_k} - \frac{n_1}{z-\beta_1} - \dots - \frac{n_\ell}{z-\beta_\ell} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\Big(\sum_{j=1}^{k} \int_{\partial D} \frac{m_j}{z-\alpha_j}\,dz - \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\partial D} \frac{n_j}{z-\beta_j}\,dz + \int_{\partial D} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} m_j \,\mathrm{ind}_{\partial D}(\alpha_j) - \sum_{j=1}^{\ell} n_j \,\mathrm{ind}_{\partial D}(\beta_j) + 0 = (m_1 + \dots + m_k) - (n_1 + \dots + n_\ell) = \mathcal{N} - \mathcal{P}$$

ker $z \mapsto \frac{g'(z)}{g(z)}$ hol. na $\bar{D}(a,r)$ in nima sing.

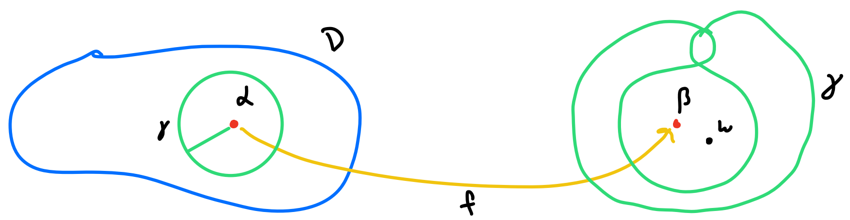
Opomba $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \overset{\xi = f(z)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\xi}{\xi - 0} = \mathrm{ind}(0)$

kjer je γ krivulja z f preslikana krožnica $\partial D(a,r)$.

Naj bo D odprta mn. in f hol. na D. Izberemo $\alpha \in D$ in označimo $\beta = f(\alpha)$. Enačba $f(z) = \beta$ je tedaj rešljiva na D, saj je α rešitev. Reševanje enačbe $f(z) = w$ $\Leftrightarrow$ iskanje ničel $g(z) = f(z) - w$. Zato je α ničla funkcije g. n stopnja ničle.

Izrek Obstajata taka odprta kroga $D(\alpha,\delta) \subseteq D$ in $D(\beta,\varepsilon)$, da ima za vsak $w \in D(\beta,\varepsilon) \setminus \{\beta\}$ enačba $f(z) = w$ natanko n različnih rešitev v krogu $D(\alpha,\delta)$.

Dokaz



Naj bo $\delta > 0$ tako majhen, da je f holomorfna na okolici $\bar{D}(\alpha,\delta)$. Označimo s γ sklenjeno pot $\gamma : t \mapsto f(\alpha + \delta e^{it})$; $t \in [0, 2\pi)$. Ker so ničle nekonstantnih holom. funk. izolirane, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je α v $D(\alpha,\delta)$ edina ničla za funkcijo $z \mapsto f(z) - \beta$ (sicer po potrebi krog zmanjšamo).

Naj bo w blizu β. Potem iz neenačbe

$$|f(z) - w| = |f(z) - \beta + \beta - w| \geq |f(z) - \beta| - |\beta - w| > 0$$

sledi, da funkcija $z \mapsto f(z) - w$ nima ničel na $\partial D(\alpha,\delta)$. ($z \mapsto |f(z) - \beta|$ je poz. in zv. na $\partial D(\alpha,\delta)$, zato doseže poz. minimum. Zato, če izberemo $w \in D(\beta, |f(z) - \beta|)$ je $|f(z) - w| > 0$).

Naj bo $\mathcal{N}(w)$ število rešitev enačbe $f(z) = w$ in podobno $\mathcal{N}(\beta)$ št. rešitev enačbe $f(z) = \beta$ znotraj $D(\alpha,\delta)$.

$$\mathcal{N}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(\alpha,\delta)} \frac{(f(z)-w)'}{f(z)-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(\alpha,\delta)} \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \mathrm{ind}_\gamma(w)$$

Podobno dobimo $\mathcal{N}(\beta) = \mathrm{ind}_\gamma(\beta)$. Naj bo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da krog $\bar{D}(\beta,\varepsilon)$ leži v isti komponenti $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ kot β. Ker je indeks na komp. od $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ konstanten dobimo

$N(\beta) = \text{ind}_\gamma(\beta) = \text{ind}_\gamma(w) = N(w)$. To pomeni, da za $\forall w \in D(\beta, \varepsilon)$ ima enačba $f(z) = w$ n rešitev.

Če je z_0 ena od rešitev enačbe $f(z) = w \Rightarrow f(z) - w = (z - z_0)^k g(z)$. Torej so večkratne ničle funkcije $z \mapsto f(z) - w$. Ker je $(f(z) - w)' = f'(z)$, krog $D(\alpha, \delta)$ dodatno zmanjšamo, da funkcija f' ima na tem krogu le potencialno ničlo v α. Zato funkcija f vsako vrednost $w \in D(\beta, \varepsilon) \setminus \{\beta\}$ zavzame v krogu $D(\alpha, \delta)$ v n različnih točkah

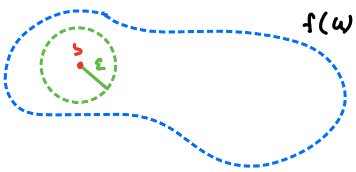
Opomba $f(z) = z^n$ $z = 0$ je n-kratna ničla za f oz. 0 je 0-kratna rešitev enačbe $z^n = 0$. Enačba $z^n = \alpha$ ima za $\alpha \neq 0$ na krožnici $\partial D(0, |\alpha|)$ natanko n različnih rešitev.

$f: U \to \mathbb{C}$ je <u>odprta preslikava</u> če je $f(V)$ odprta množica za vsako odprto podmnožico $V \subseteq U$.

Kakšna je povezava z zveznostjo?
f je zvezna $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)$ odprta za $\forall$ odp. mn. U.
f je odprta $\Leftrightarrow$ $f(U)$ je odprta za $\forall$ odp. mn. U.
Če je f bijekcija, potem je f zvezna $\Leftrightarrow$ f^{-1} odprta
f odprta $\Leftrightarrow$ f^{-1} zvezna
Zato ima zvezna odprta bijektivna preslikava zvezen inverz.

Izrek Izrek o odprti preslikavi
Naj bo $f: D \to \mathbb{C}$ nekonstantna hol. funkcija na odp. mn. D. Tedaj je f odprta preslikava.

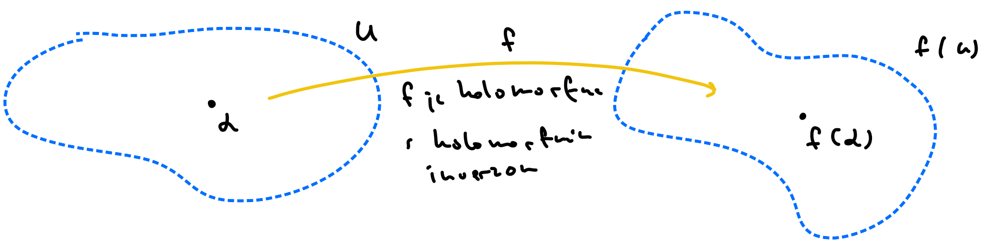
Dokaz Naj bo $U \subseteq D$ odprta. Dokazati moramo, da je $f(U)$ odprta. Dokazati moramo, da $\exists\, \varepsilon > 0$ da je $D(s, \varepsilon) \subseteq f(U)$.



Po prejšnjem izreku $\exists$ odprt krog $D(\alpha, \delta) \subseteq U$ in $D(s, \varepsilon) \setminus \{s\}$ da $\forall\, w \in D(s, \varepsilon)$ slika n različnih točk v $D(\alpha, \delta)$

Zato je $D(s, \varepsilon) \subseteq f(D(\alpha, \delta)) \subseteq f(U)$.

Posledica Naj bo f taka hol funkcija, da na okolici točke α, da je $f'(\alpha) \neq 0$. Potem $\exists$ taka odp. okolica U točke α, da f preslika U bijektivno na odp. mn. $f(U)$, inverzna preslikava $f^{-1}: f(U) \to U$ pa je tudi holomorfna.



Dokaz Izberemo okolico U, na kateri je f injektivna. Zato so $f: U \to f(U)$ bijektivna. Če je f nekonst., bo $f: U \to f(U)$ hol. in odprta preslikava. Zato so tudi f^{-1} zvezna. Dodatno bomo zmanjšali okolico U, da bo $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in V$.

f je nekonstantna na nekem odprtem krogu okoli α, ker je $f'(\alpha) \neq 0$.

Kako poiščem U, da so $f|_U$ inj.? Injektivnost: $f(z) = \beta = f(z') \Rightarrow z = z'$

Oglejmo si funkcijo $g: z \mapsto f(z) - f(\alpha)$. Tedaj je $g(\alpha) = 0$. Ker $g'(\alpha) = f'(\alpha) \neq 0$ je α enostavna ničla za g. To pomeni, da $\exists\, \varepsilon > 0$, da za $\forall\, w \in D(f(\alpha), \varepsilon)$ ima enačba $f(z) = w$ natanko eno rešitev znotraj $D(\alpha, \delta)$. Ker je f zvezna $\exists$ odp. okolica $U \subseteq D(\alpha, \delta)$ za α, da je $f(U) \subseteq D(f(\alpha), \varepsilon)$. Zato je $f: U \to f(U)$ bijekcija in ker $f|_U$ nekonst., je $f|_U$ odprta preslikava. Zato je $f: U \to f(U)$ zvezna bijekcija z zveznim inverzom f^{-1}. Ker je $f'(\alpha) \neq 0$ in ker je f' zvezna, lahko po potrebi okolico U zmanjšamo do te mere, da $f'(z) \neq 0$ $\forall\, z \in U$.

$$\forall\, w_0 \in f(U) \;\exists \lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} \overset{\substack{w = f(z) \\ w_0 = f(z_0)}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Izrek Princip maksima in minima

Naj bo f nekonstantna hol. funk. na odprti mn. D. Potem $|f|$ ne zavzame maksima na D, minima pa zavzame le v ničlah funkcije f.

Dokaz Recimo, da $|f|$ doseže maksimum M v z_0, $M = |f(z_0)|$. Ker je f odprta preslikava je $f(D)$ odprta mn. v $\mathbb{C}$. Zato $\exists\, \delta > 0$, da je $D(f(z_0), \delta) \subseteq f(D)$. Ker je $|w| > |f(z_0)|$, v z_0 funk. $|f|$ ne more imeti maks.

Za dokaz drugega dela trditve, recimo, da f nima ničel, funkcija $|f|$ pa doseže minimum v z_0. Potem je $\frac{1}{f}$ hol. funk. na D, funkc. $|\frac{1}{f}|$ pa doseže maksimum v z_0. To je protislovje z zgornjim dokazom.

Posledica Če je f nekonstantna hol. funkcija v okolici kakšne kompaktne mn. $U \subseteq \mathbb{C}$, potem $|f|\big|_U$ zavzame svoj maksimum le v nekih robnih točkah mn. U, min. pa tudi le na robih ali pa v ničlah funkcije f.

Dokaz Sledi iz principa maksima in minima

Lema Schwarzeva lema

Naj bo $f: D(0,1) \to D(0,1)$ taka hol. funkcija, da velja $f(0) = 0$. Tedaj velja:

1. $|f(z)| \leq |z| \quad \forall\, z \in D(0,1)$
2. $|f'(0)| \leq 1$

Če je $|f(z)| = |z|$ za $z \in D'(0,1)$ ali $|f'(0)| = 1$, potem $\exists$ tak $\alpha \in \mathbb{C}$, da je $|\alpha| = 1$, f pa je oblike $f(z) = \alpha z$ $\forall\, z \in D(0,1)$.

Opomba Točka 1 pravi, da f zagotovo ne povečuje razdalje do izhodišča, zato jo kvečjemu zmanjšuje. Če razdaljo do izhodišča ohrani v katerikoli točki, potem jo ohranja povsod.

Dokaz Naj bo $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ razvoj f na $D(0,1)$ v pot. vrsto. Ker je $f(0) = 0$ je $a_0 = 0$. Zato za $z \neq 0$ velja

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots$$

Zato je g hol. na $D'(0,1)$. Iz zgornjega vidimo, da ima razvoj funkcije g v Laurentovo vrsto na $D'(0,1)$ v okolici izolirane singularnosti 0 odpravljivo singularnost.

Če dodefiniramo $g(0)=a_1$, je $g: D(0,1)\to\mathbb{C}$ holomorfna. Izberemo $z\in D(0,1)$ in $0<r<1$. Tedaj je $\frac{|f(z)|}{|z|} = |g(z)| \le \max_{|\xi|=r} |g(\xi)| = \max_{|\xi|=r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|} \le \frac{1}{r} \xrightarrow{r\to 1} 1$.

princip maksima za $D(0,r)$

$\Rightarrow |f(z)| \le |z| \quad \forall z\in D(0,r) \Rightarrow |f(z)|\le|z| \quad \forall z\in D(0,1)$

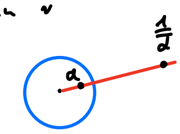
$$f'(0) = a_1 = g(0) \Rightarrow |g(0)| = \lim_{z\to 0} |g(z)| = \lim_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|}$$

Ker je $|f(z)|\le|z|$ $\forall z\in D(0,1)$, enako velja v limiti, zato je $|g(0)|\le 1 \Rightarrow |f'(0)|\le 1$. Ker pa je $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \le 1$ $\forall z\in D(0,1)\setminus\{0\}$, ima $|g|$ maksimum znotraj $D(0,1)$. Po principu maksima je g konstantna. To pomeni $|g|=1$ $\forall z\in D(0,1)$. Zato je $f(z)=\alpha z$ $\forall z\in D(0,1)$. Ker pa je $|g(z_0)|=1$ je $|\alpha|=1$.

Če pa je $|f'(0)|=1$, potem je $|g(0)|=|a_1|=|f'(0)|=1$. Zato ima sedaj $|g|$ maks. v $z=0$ kot zgoraj dokaz zaključimo.

Biholomorfne preslikave diska

Poiskali bomo vse holomorfne bijektivne funkcije $f: D(0,1)\to D(0,1)$.
Za $\alpha\in D(0,1)$ def. $f_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z}$. Preslikava f_α je holom. povsod razen v točki $z=\frac{1}{\bar\alpha}$. Če je $\alpha = re^{i\varphi}$ je $\frac{1}{\bar\alpha} = \frac{1}{r}e^{i\varphi}$. Zato je f_α holomorfna na katerikoli disku $\bar D(0,\sigma)$ za $\sigma<\frac{1}{r}$.



V posebnem primeru to pomeni, da lahko gledamo $f_\alpha: \bar D(0,1)\to\mathbb{C}$. Št. α je ničla za f_α.

Dokažimo, da je $f_\alpha(\partial D(0,1)) \subseteq \partial D(0,1)$ in $f_\alpha(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$.

$|a|=|\bar a|$

$$|z|=1 \Rightarrow |f_\alpha(z)| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{\overline{1-\bar\alpha z}}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\alpha\bar z}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\frac{\alpha}{z}}\right| = \left|\frac{(z-\alpha)}{\frac{1}{z}(z-\alpha)}\right| = |z| = 1.$$

Zato $f_\alpha(\partial D(0,1)) \subseteq \partial D(0,1)$.

Če je $|\alpha|<1$ ali je lahko $|f_\alpha(z)|\ge 1$? V tem primeru bi $|f_\alpha|$ dosegel maks. v $D(0,1)$. Po principu maksima je $|f_\alpha|$ konstantna. Ker je $f_\alpha(\alpha)=0$, je $f_\alpha\equiv 0$ konst. funkcija, kar je protislovje.

Dokažimo, da je $f_\alpha: \bar D(0,1)\to\bar D(0,1)$ bijektivna in da velja $f(\partial D(0,1)) = \partial D(0,1)$ in $f_\alpha(D(0,1)) = D(0,1)$.

Ker je $\alpha\in D(0,1)$ je $-\alpha\in D(0,1)$. Zato je $f_{-\alpha}: D(0,1)\to\bar D(0,1)$ smiselna.

$$(f_\alpha\circ f_{-\alpha})(z) = \frac{f_{-\alpha}(z)-\alpha}{1-\bar\alpha f_{-\alpha}(z)} = \frac{\frac{z+\alpha}{1+\bar\alpha z}-\alpha}{1-\bar\alpha\frac{z+\alpha}{1+\bar\alpha z}} = \frac{z+\alpha-\alpha-\bar\alpha z\alpha}{1+\bar\alpha z-\bar\alpha z-\bar\alpha\alpha} = \frac{z(1-|\alpha|^2)}{1-|\alpha|^2} = z$$

Podobno $(f_{-\alpha}\circ f_\alpha)(z) = z$. Zato je $f_\alpha: \bar D(0,1)\to\bar D(0,1)$ bijektivna in velja $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$

$f_\alpha(D(0,1)) \overset{?}{=} D(0,1)$ in $f_\alpha(\partial D(0,1)) \overset{?}{=} \partial D(0,1)$

$D(0,1) = f_\alpha(f_{-\alpha}(D(0,1))) \subseteq f_\alpha(D(0,1)) \subseteq D(0,1) \Rightarrow f_\alpha(D(0,1)) = D(0,1)$.
Podobno vidimo $f_\alpha(\partial D(0,1)) = \partial D(0,1)$

Izrek Vsaka bijektivna holomorfna iz $D(0,1)$ v $D(0,1)$ je oblike

$$f(z) = w\, f_\alpha(z)$$

za nek $\alpha \in D(0,1)$ in $w \in \partial D(0,1)$.

Opomba f je kompozitum f_α in rotacije za kot φ, kjer je $w = e^{i\varphi}$.

Dokaz Najprej obravnavajmo primer $f(0)=0$. Ker $f: D(0,1) \to D(0,1)$, je $|f(z)| \leq |z|$ po Schwarzovi lemi. Recimo, da $\exists\, z \in D(0,1)$, da je $|f(z)| < |z|$. Ker je $g = f^{-1}: D(0,1) \to D(0,1)$ tudi biholomorfna, je

$$|z| = |g(f(z))| \leq |f(z)| < |z|$$

Kar ni res. Zato je $|f(z)| \geq |z|$ in zato $|f(z)| = |z|$, ker $z \in D(0,1)$.
Po drugem delu Schwarzove leme $\exists$ nek w, da je $|w|=1$ in $f(z) = wz$ $\forall z \in D(0,1)$.
$\Rightarrow f(z) = wz = w f_0(z)$, kjer je $\alpha = 0$.

Splošni primer: recimo, da je $f(0) = \beta$. Definirajmo $g: D(0,1) \to D(0,1)$ s predpisom $g(z) = (f_\beta \circ f)(z)$, ker je $g(0) = f_\beta(f(0)) = f_\beta(\beta) = 0$ je po zgornjem dokazu $g(z) = wz$ za nek w, da je $|w|=1$ in $\forall z \in D(0,1)$.
Ker je $f_\beta(f(z)) = wz$, je

$$f(z) = f_\beta^{-1}(wz) = f_{-\beta}(wz) = \frac{wz+\beta}{1+\bar\beta wz} = w\,\frac{z+\bar w\beta}{1+\bar\beta wz} = w\, f_{-\bar w\beta}$$

Ker je $|-\bar w\beta| = |\bar w||\beta| = 1\cdot|\beta| < 1$.

Opomba Zakaj je $g = f^{-1}$ tudi holomorfna? Po posledici od zadnjič bi morali dokazati da je $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D(0,1)$. Recimo, da je $f'(\alpha) = 0$ za nek $\alpha \in D(0,1)$.

Enačba $f(z) = \beta$ ima rešitev $z = \alpha$. Zato je α n-kratna ničla funkcije $h(z) = f(z) - \beta$. Tedaj $\exists$ okolica U za α in V β, da je vsak $w \in V \setminus \{\beta\}$ slika n različnih števil iz U. Ker je f injektivna, je $n = 1$. Zato je $f'(\alpha) = h'(\alpha) \neq 0$. Zato je f^{-1} hol. na $D(0,1)$.

Def Biholomorfna preslikava $f: U \to V$ je bijektivna hol. presl. s hol. inverzom.

Ulomljene linearne transformacije

Preiskovali bomo $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ kjer so $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ imenujemo ulomljene linearne transformacije. Če $a \neq 0$, potem je $-\frac{b}{a}$ ničla za f. Če $c \neq 0$, potem je $-\frac{d}{c}$ pol. Preslikavi f lahko priredimo matriko $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Če je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, in def. $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ in $f_B(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ potem velja $f_A \circ f_B = f_{AB}$

$$f_A \circ f_B = \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\frac{ez+f}{gz+h} + d} = \frac{a(ez+f) + b(gz+h)}{c(ez+f) + d(gz+h)} = \frac{(ae+bg)z + (af+bh)}{(ce+dg)z + (cf+dh)} = f_{A\cdot B}$$

Če je A obrnljiva, potem za $B = A^{-1}$ dobimo $(f_A \circ f_{A^{-1}}) = f_I(z) = z = (f_{A^{-1}} \circ f_A)(z)$

Tole je $f_{A^{-1}}$ inverzna k f_A $(f_A^{-1} = f_{A^{-1}})$

Trditev f_A je konstantna $\Leftrightarrow$ $\det A = ad - bc = 0$

Dokaz Primer $c, d \neq 0$. Recimo da je f_A konstantna. Tedaj $\exists k$ da je $\frac{az+b}{cz+d} = k \ \forall z$
$\Rightarrow az+b = k(cz+d) \ \forall z \Rightarrow a = kc$ in $b = kd \Rightarrow k = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow ad - cb = 0 = \det A$
Recimo, da je $ad = cb$, ker $c \neq 0$ izrazimo $c = \frac{ad}{b}$ in velja

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{\frac{ad}{b}z+d} = \frac{1}{d}\,\frac{az+b}{az+b} = \frac{1}{d}$$

Primer ko je $c=0$ ali $d=0$ DN.

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Če ima f pol v $-\frac{d}{c}$ potem lahko def. $f(-\frac{d}{c}) = \infty$
Če je $c=0$, potem je $f(z) = \frac{az+b}{d}$, v tem primeru lahko def $f(\infty) = \infty$. Tako lahko razširimo f do $\hat{f}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.
Koliko je $\hat{f}(\infty)$?

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}} \Rightarrow f(\infty) = \frac{a}{c}$$

Glede na izbiro konstant a, b, c, d ločimo naslednje tipe preslikav
1. $a=1,\ c=0,\ d=1$ $\quad f(z) = z+b$ $\quad$ translacija
2. $b=0,\ c=0,\ d=1,\ a>0$ $\quad f(z) = az$ $\quad$ raztag ali kontrakcija
3. $b=0,\ c=0,\ d=1,\ |a|=1$ $\quad f(z) = az = e^{i\varphi} z$ $\quad$ rotacija ali zasuk
4. $a=d=0$ $\ b=c=1$ $\quad f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad$ inverzija

Če je $a \neq 0$, potem je preslikava $z \mapsto az = |a| e^{i\varphi} z$ kompozitum 2 in 3

Trditev Vsaka ulomljena linearna preslikava z neničelno det $(ad - cb \neq 0)$ se da zapisati kot kompozitum preslikav tipov 1 - 4.

Dokaz Če $c = 0$, potem $\det A = ad - bc \neq 0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$
je kompozitum preslikav 1 in 2.

Če je $d = 0 \Rightarrow c \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{az+b}{cz} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\frac{1}{z}$ je kompozitum 1, 2, 3, 4.

Če je $c, d \neq 0 \Rightarrow f$ je kvocient preslikav $z \mapsto az+b$, $z \mapsto cz+d$, ki sta kompozituma preslikav tipov 1, 2, 3.

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$$

$$z \mapsto cz \mapsto cz+d \mapsto \frac{1}{cz+d} \mapsto \left(b - \frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz+d} \mapsto \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz+d}$$

Lema Vsako krožnico in premico se da zapisati v obliki $\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$, kjer sta $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ pa je tak, da je $|\beta|^2 > \alpha \cdot \gamma$. Če $\alpha \neq 0$, potem je krivulja krožnica, sicer je premica.

Dokaz Naj bo dana krožnica $|z-a| = r > 0 \Rightarrow |z-a|^2 = r^2 \Rightarrow (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = r^2 \Rightarrow$
$z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2 = r^2 \Rightarrow |z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + (|a|^2 - r^2) = 0$
$\beta = -\bar{a}$
$|\beta|^2 = |-\bar{a}|^2 = |a|^2 > |a|^2 - r^2 = \gamma = \alpha\gamma$

$\alpha|z|^2+\beta z+\bar\beta\bar z+\gamma=0$ in $\alpha\neq 0$ predstavlja krožnico

BŠS $\alpha=1 \Rightarrow |z|^2+\beta z+\bar\beta\bar z+\gamma=0 \Rightarrow (z+\bar\beta)(\bar z+\beta)+\gamma-\beta\bar\beta=0 \Rightarrow$
$|z+\bar\beta|^2=|\beta|^2-\gamma>0 \Rightarrow$ krožnica s središčem $-\bar\beta$ in polmerom $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$

Naj bo dana neka premica, ki gre skozi točki z_1 in z_2 $\to$ $(z-z_1)=t(z_2-z_1)$

$t=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\bar z-\bar z_1}{\bar z_2-\bar z_1}$. Pišimo $w=\bar z_2-\bar z_1 \Rightarrow \frac{z-z_1}{\bar w}=\frac{\bar z-\bar z_1}{w}$

$\Rightarrow zw-z_1w-\bar w\bar z+\bar w\bar z_1=0$

Pišimo: $w=iv \Rightarrow ivz-ivz_1+i\bar v\bar z-i\bar v\bar z_1=0$
$\Rightarrow z(iv)+\bar z(i\bar v)-i(vz_1+\bar v\bar z_1)=0$
$\Rightarrow zv+\bar z\bar v-(vz_1+\bar v\bar z_1)=0$

$\Rightarrow \alpha=0,\ \beta=v,\ \gamma=-(vz_1+\bar v\bar z_1),\ |\beta|^2>0=\alpha\cdot\gamma$

Enačba $\beta z+\bar\beta\bar z+\gamma=0$ predstavlja premico.

$z=x+iy \Rightarrow \beta(x+iy)+\bar\beta(x-iy)+\gamma=0 \Rightarrow (\beta+\bar\beta)x+(i\beta-i\bar\beta)y+\gamma=0 \Rightarrow$
$2\operatorname{Re}\beta\, x+2\operatorname{Re}(i\beta)\, y+\gamma=0$

Trditev Vsaka ulomljena lin. preslikava z $\det\neq 0$ preslika krožnice in premice v krožnice in premice.

Dokaz Ker je vsaka ulomljena lin. preslikava z neničelno determinanto kompozitum preslikav tipov 1, 2, 3 in 4, zadošča preveriti, da te preslikave slikajo krožnice in premice v krožnice in premice. Preveriti moramo le za 4 (inverzija).

$\alpha|z|^2+\beta z+\bar\beta\bar z+\gamma=0$ je tipična predstavitev krož. in premic. $\Rightarrow$ z inverzijo $z\mapsto\frac{1}{z}$ se preslika v

$$\alpha\frac{1}{|z|^2}+\frac{\beta}{z}+\frac{\bar\beta}{\bar z}+\gamma=0 \quad \text{oz.} \quad \alpha+\beta\bar z+\bar\beta z+\gamma|z|^2=0$$

$\alpha\to\gamma,\ \gamma\to\alpha,\ \beta\to\bar\beta$

Opomba Slika premice oz. krožnice z inverzijo je krožnica $\Leftrightarrow$ $\gamma\neq 0$

Izrek Naj bodo $z_1, z_2, z_3\in\hat{\mathbb{C}}$ različne točke. Naj bodo $w_1, w_2, w_3\in\hat{\mathbb{C}}$ različne točke. Tedaj $\exists$ natanko ena ulomljena lin. preslikava $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$, da je $f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$, $f(z_3)=w_3$.

Dokaz Poseben primer $w_1=0,\ w_2=1,\ w_3=\infty \Rightarrow f(z)=\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\cdot\frac{z-z_1}{z-z_3}$

Po konstrukciji je f enolično določena ulom. lin. presl., ki slika $z_1\mapsto w_1, z_2\mapsto w_2,\dots$

Torej $\exists$ enolična preslikava $g(w_1)=0$, $g(w_2)=1$, $g(w_3)=\infty$

$$\begin{array}{ccccc} z_1 & & 0 & & w_1 \\ z_2 & \xrightarrow{f} & 1 & \xrightarrow{g^{-1}} & w_2 \\ z_3 & & \infty & & w_3 \end{array}$$

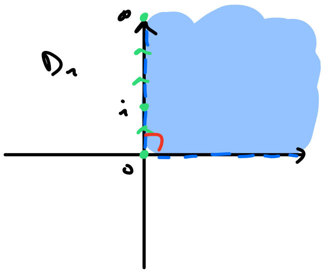
Primer $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Določimo $f(\partial D(0,1))$. f je ulom. lin. preslikava, $\det = 2 \neq 0$. Zato f slika krožnice in premice v krožnice in premice. Zato je $f(\partial D(0,1))$ krožnica ali premica. Ker je $f(1)=\infty$ in ker krožnica ne vsebuje ∞, je $f(\partial D(0,1))$ premica. Ker $f(-1)=0$ gre premica skozi izhodišče.

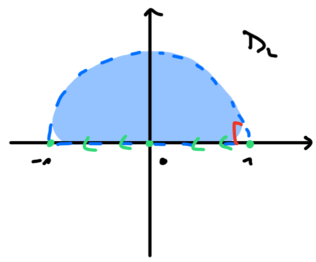
$$f(i) = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1-i^2} = i$$

Zato je $f(\partial D(0,1))$ = imaginarna os

Kam se preslika $D(0,1)$? Ker je $f(0)=1$, je $f(D(0,1)) = \{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, z>0\}$

Primer Poišči ulom. lin. pres., ki preslika množico D_1 bij. na D_2.
$D_1 = \{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\,z>0, \mathrm{Im}\,z>0\}$, $D_2 = \{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,z>0, |z|<1\}$





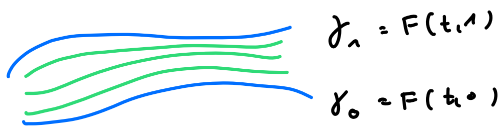
Naj f slika
$0 \mapsto 1$
$i \mapsto 0$
$\infty \mapsto -1$

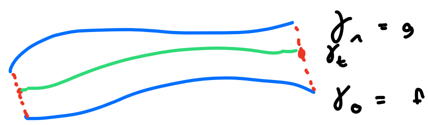
f preslika zg. del. imag. osi na $[-1,1]$. f preslika realno os na premico ali krožnico skozi točki -1, 1. Ker je f bij., je slika krožnica. Ker se realna in imag. os sekata pravokotno, f preslika realno os v enotsko krožnico

$$f(z) = -\frac{z-i}{z+i}$$

Homotopije in konformna ekvivalenca enostavno povezanih območij

Naj bo D območje. Naj bost $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ krivulji. Homotopija od γ_0 do γ_1 je taka zvezna preslikava $F:[0,1]\times[0,1]\to D$, da je $F(t,0) = \gamma_0(t)$ in $F(t,1) = \gamma_1(t)$ $\forall t\in[0,1]$.





Po domače povedano je homotopija med γ_0 in γ_1 zvezna transformacija krivulje γ_0 v γ_1.

$F(t,s) = (1-s)f(t) + s\,g(t)$; $F:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ oz. $\mathbb{R}^2$ je zvezna. Ker je $F(t,0) = f(t)$ in $F(t,1) = g(t)$, je F homotopija med f in g.

Če $\exists$ homotopija med $f=\gamma_0$ in $g=\gamma_1$, potem pravimo, da sta f in g homotopni. Zaradi uporabe v kompleksni analizi nas bodo zanimale sklenjene krivulje oz. natančneje sklenjene poti. Če je g konstantna krivulja in če je f homotopna g, potem je f homotopna konstanti.

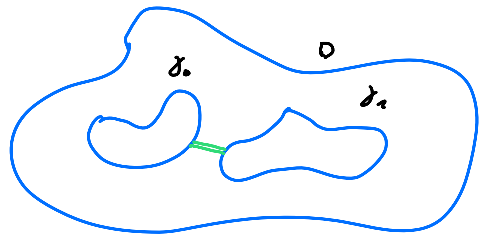
Trditev Če sta γ_0 in γ_1 homotopni sklenjeni krivulji v območju D, potem je $\operatorname{ind}_{\gamma_0}(a) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(a)$ za $\forall a \in \mathbb{C}\setminus D$

Posledica Naj bosta γ_0 in γ_1 sklenjeni poti v območju D. Tedaj za $\forall$ holom. funk. $f: D \to \mathbb{C}$ velja

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

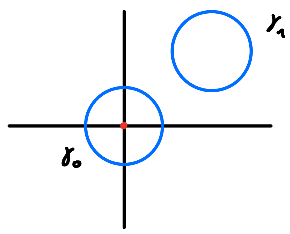
, če sta γ_0 in γ_1 homotopni.

Dokaz Naj bo $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1^-$. Po prejšnji trditvi za $a \in \mathbb{C}\setminus D$ je $\operatorname{ind}_{\gamma_0}(a) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(a) \Rightarrow \operatorname{ind}_\gamma(a) = 0$. Po Cauchyjevem izreku je $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$



$$\Rightarrow 0 = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Primer



$\gamma_0 : D(0,1)$
$\gamma_1 : D(2,1)$

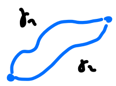
$$\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i \operatorname{ind}_{\gamma_0}(0) \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 0$$

Izrek Za območje D v $\mathbb{C}$ so naslednje trditve ekvivalentne

1. mn. $\hat{\mathbb{C}}\setminus D$ je povezana
2. vsaka sklenjena krivulja v D je homotopna konstanti
3. za vsako sklenjeno pot γ v D in $\forall w \in \mathbb{C}\setminus D$ velja $\operatorname{ind}_\gamma(w) = 0$

Spomnimo se Cauchyjevega izreka: če je $\operatorname{ind}_\gamma(a) = 0$ $\forall a \in \mathbb{C}\setminus D$, potem za vsako hol. funkcijo $f: D \to \mathbb{C}$ velja $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.



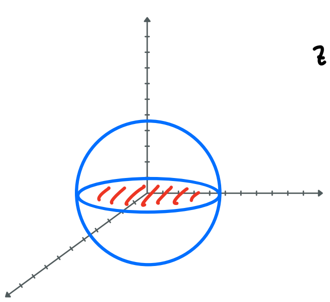
$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ je sklenjena krivulja $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

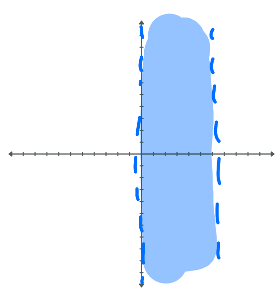
Zato so vsi krivuljni integrali enaki, če gledamo krivulje z istim začetkom in koncem točko.

Def Območje v ravnini, ki zadošča katerikoli od ekviv. trditev 1–3 imenujemo <u>enostavno povezano</u>

Primer 1. $D(0,1)$ v $\mathbb{C}$ je povezana množica, katere komponent v $\hat{\mathbb{C}}$ je tudi povezan.

Zato je $D(0,1)$ enostavno povezan.





2. Naj bo $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$
D je povezana, $\mathbb{C}\setminus D$ je nepovezana. Kljub temu je $\hat{\mathbb{C}}\setminus D$ povezana, ker je "∞ ena sama" (Na Riemannovi sferi)
Zato je tudi D enostavno povezana mn.

Bijektivno hol. presl. $f: D_1 \to D_2$ imenujemo <u>biholomorfna</u> oz. <u>konformna ekvivalenca</u>.

Poišči tisto območje $D \subseteq \mathbb{C}$, da obstaja bij. preslikava $f: D \to D(0,1)$.
Celotna kompleksna ravnina ni taka množica, ker obstaja nekonst. hol. presl. $f: \mathbb{C} \to D(0,1)$.
Če bi obstajala, bi po Liouvillovem izreku bila konstantna.

Če f obstaja, potem je D enostavno povezano območje v $\mathbb{C}$.

Izrek Riemannov upodobitveni izrek
Vsako enostavno povezano območje, ki ni $\mathbb{C}$, je konformno ekvivalentno $D(0,1)$.

Eulerjeva Γ-funkcija

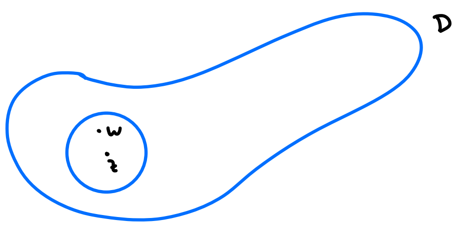
Na polravnini $\operatorname{Re} z > 0$ je funkcija Γ def. s predpisom

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

Dokazali bomo, da je Γ hol. funk. na polravnini $\operatorname{Re} z > 0$

Izrek Naj bo D odp. mn. in (f_n) zap. hol. funkc. na D, ki konv. enak. po komp. podmnožicah v D proti funk. f. Tedaj je f holomorfna na D.

Dokaz



Naj bo $w \in D$ in naj bo $\overline{D}(z,r) \subseteq D$ tak zaprt krog, da je $w \in D(z,r)$

$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(s)}{s-w}\, ds$. Sledilo bo, da je f odv. v w, ker je $w \in D$ polj., je f na D odv. oz. holom.

Ker je f_n hol. na D, za $\forall n \in \mathbb{N}$ velja

$$f_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,r)} \frac{f_n(s)}{s-w}\, ds$$

Ker $f_n \to f$ enak. konv. po kompaktih v D $\Rightarrow$ $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(s)}{s-w} ds \xrightarrow{\text{lim}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(s)}{s-w} ds$

Po drugi strani, iz enak. konv. po komp. sledi konv. po točkah $\Rightarrow$ $f_n(w) \to f(w)$

Integral funk. f ima smisel, saj iz zv. funk. f_n in enake konv. po zaprtih krogih sledi zveznost f.

Izrek Funkcija Γ je holom. na polravnini $\operatorname{Re} z > 0$

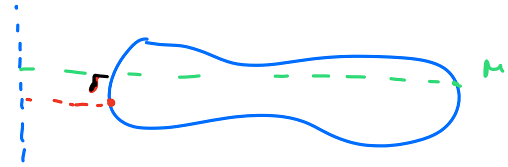
Dokaz Def. $F_n(z) = \int_{1/n}^{n} t^{z-1} e^{-t}\, dt$

Ideja:
- $F_n \xrightarrow{\text{lim}} \Gamma$
- F_n so holomorfne
- $F_n \to \Gamma$ enak. konv. po kompaktih v $\operatorname{Re} z > 0$

- F_n holom.

Funkcija $t, z \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ in $\frac{\partial}{\partial z}(t^{z-1} e^{-t})$ sta zvezni na $[\frac{1}{n}, n] \times \mathbb{C}$ zato se da dokazati da je F_n tudi holom. funk.

- $F_n \to \Gamma$



Naj bo K komp. podmn. v $\mathrm{Re}\, z > 0$

Naj bo $\delta = \inf\{\mathrm{Re}\, z : z \in K\} > 0$ in $M = \sup\{\mathrm{Re}\, z : z \in K\} > 0$. Zaradi komp. sta δ in M večja od 0 in končna.

Dovolj je dokazati, da $\int_0^{1/n} |t^{z-1} e^{-t}|\, dt \to 0$ enakomerno in prav tako $\int_n^{\infty} |t^{z-1} e^{-t}|\, dt \to 0$

$$|t^{z-1}| = |e^{(z-1)\ln t}| = e^{\mathrm{Re}((z-1)\ln t)} = e^{(\mathrm{Re}\, z - 1)\ln t} = t^{\mathrm{Re}\, z - 1} = t^{x-1} \qquad (z = x+iy)$$

Imamo

$$\int_0^{1/n} |t^{z-1} e^{-t}|\, dt = \int_0^{1/n} t^{\mathrm{Re}\, z - 1} e^{-t}\, dt \le \int_0^{1/n} t^{\delta - 1} e^{-t}\, dt \le \int_0^{1/n} t^{\delta-1} = \frac{1}{\delta n^{\delta}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\int_n^{\infty} |t^{z-1} e^{-t}|\, dt \le \int_n^{\infty} t^{M-1} e^{-t}\, dt = \int_n^{\infty} t^{M-1} e^{-t/2} e^{-t/2}\, dt \le C \int_n^{\infty} e^{-t/2}\, dt = 2C e^{-n/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

kjer je $C = \sup_{t \ge 1} t^{M-1} e^{-t}$

Trditev Za $\forall z$ za katere velja $\mathrm{Re}\, z > 0$ je $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Trditev $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Če je $-1 < \mathrm{Re}\, z < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(z+1) > 0$. Zato $\Gamma(z+1)\ \exists$. Zato lahko def $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$

Harmonične funkcije

Def Dvakrat zv. odv. funk. $u: D \to \mathbb{R}$, kjer je D odp. podmn. v $\mathbb{R}^n$, se imenuje harmonična na D če velja

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

Diferencialni operator Δ se imenuje Laplaceov operator.

Primer Harmonične funkcije na $\mathbb{R}$

$$u'' = 0 \Rightarrow u' = A \Rightarrow u = Ax + B$$

Harmonične funkcije na $\mathbb{R}$ so ravno linearne funkcije

Def Funk $u: U \to \mathbb{R}$, kjer je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je radialno simetrična, če je vrednost v dani točki odvisna le od razdalje od izhodišča. Torej je u radialno simetrična, če velja

$$u(x) = f(|x|) = f(r), \quad \text{kjer je } |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = r$$

Poiščimo vse radialno simetrične harmonične funkcije na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_j} = f'(r)\frac{x_j}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(f'(r)\frac{x_j}{r}\right) = f''(r)\left(\frac{x_j}{r}\right)^2 + \frac{f'(r)}{r} - f'(r)\frac{x_j^2}{r^3}$$

$$\Delta u = f''(r)\frac{1}{r^2}(x_1^2+\dots+x_n^2) + n\frac{f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^3}(x_1^2+\dots+x_n^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta u = f''(r) + (n-1)\frac{f'(r)}{r}}$$

u je radialno simetrična in harmonična $\iff f''(r) + (n-1)\frac{f'(r)}{r} = 0$

Znižamo red $g(r) = f'(r) \Rightarrow g'(r) = -\frac{n-1}{r}g(r)$

$$\frac{dg}{g} = -\frac{n-1}{r}\,dr$$

$$\ln|g| = -(n-1)\ln|r| + c$$

$$g(r) = \frac{D}{r^{n-1}} = f'(r)$$

$n=2$ $\qquad$ $n\neq 2$

$f(r) = D\ln|r| + E$ $\qquad$ $f(r) = D_1 r^{2-n} + E = D_1\frac{1}{r^{n-2}} + E$

Trditev Vse rad. sim. rešitve $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ so oblike $u(x) = \frac{A}{|x|^{n-2}} + B$ $(n\neq 2)$ in $u(x) = A\ln|x| + B$ za $n=2$.

Pri $n=2$ ponavadi izberemo $u(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|$, v primeru $n\neq 2$ pa izberemo

$$u(x) = \frac{1}{(2-n)\,\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}$$

kjer je $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ površina enotske sfere v $\mathbb{R}^n$.

Pri $n=3$ dobimo $u(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$. Pravkar definiranim funkcijam rečemo Newtonovi potenciali.

Kako poiščemo harm. funk. v $\mathbb{R}^n\setminus\{x_0\}$, ki so odvisne le od razdalje do točke x_0?
$u(x) = f(|x-x_0|)$, opazimo $v(x) = u(x+x_0) = f(|x+x_0-x_0|) = f(|x|) \Rightarrow$ rad. sim. $\Rightarrow$

$$u(x) = \frac{A}{|x-x_0|^{n-2}} + B \text{ za } n\neq 2 \quad \text{in} \quad u(x) = A\ln|x-x_0| + B \text{ za } n=2.$$

Harmonične funkcije v $\mathbb{R}^2$

Povezave s holomorfnimi funkc. in posledice

Naj bo $f: U \to \mathbb{C}$ hol. Potem je f neskončnokrat odv. $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$
Tedaj u in v ste neskončnokrat odv.

$$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = u_y(x,y) - i v_y(x,y)$$

zato ∃ u_x, v_x, u_y, v_y. Če upoštevamo, da je

$$f''(z) = u_{xx} + i v_{xx} = u_{yx} - i v_{yx}$$

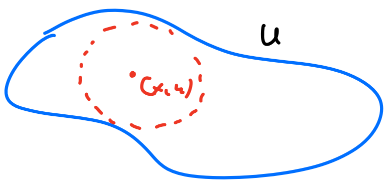
zato ∃ $u_{xx}, v_{xx}, u_{yx}, v_{yx}$, podobno ∃ $u_{yy}, v_{yy}, u_{xy}, v_{xy}$

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y) = \frac{\partial}{\partial x}(v_y) - \frac{\partial}{\partial y} v_x = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

$\Rightarrow$ u je harmonična, podobno za v.

Trditev Realni in imaginarni del holomorfne funkcije $f: U \to \mathbb{C}$ sta harmonični funkciji. Na enostavno povezanem območju v ravnini $\mathbb{R}^2$ je vsaka harmonična funkcija realni del neke holom. funkcije.

Opomba



Naj bo $u: U \to \mathbb{R}$ harmonična. Naj bo W odp. krog okoli (x,y), ki leži v U. Ker je W enostavno povezano območje ∃ holom. funkcija $f: W \to \mathbb{C}$, da je $\mathrm{Re} f = u$. (Sedaj gledamo W v $\mathbb{C}$ prek $z = x+iy \mapsto (x,y)$)

Dokaz Naj bo D enostavno povezano območje v $\mathbb{R}^2$. Naj bo $u: D \to \mathbb{R}^2$ harm. funk. ($u_{xx} + u_{yy} = 0$ na D). Iščemo takšno funk. $v: D \to \mathbb{R}$, da je $f = u + iv$ holom. funk. na $D \subseteq \mathbb{C}$. Vpeljimo $M = -u_y$ in $N = u_x$. Poglejmo polje $F(x,y) = (M(x), N(y))$

Definirajmo $v(x,y) = \int_\gamma (M\,dx + N\,dy)$. Dokažimo, da je def. neodvisna od izbire poti γ od (a,b) do (x,y).

Če sta γ_1, γ_2 dve poti $\Rightarrow$ $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ je sklenjena pot

$$\int_{\gamma_1} M\,dx + N\,dy - \int_{\gamma_2} M\,dx + N\,dy = \int_\gamma M\,dx + N\,dy \overset{\text{Greenova formula}}{=} \iint_C (N_x - M_y)\,dx\,dy = \iint_C (u_{xx} - (-u_{yy}))\,dx\,dy =$$

$$= \iint_C \Delta u \,dx\,dy = 0$$, kjer je C območje omejeno z γ_1 in γ_2.

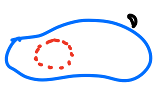
Zato je v dobro def. Po izreku je polje F potencialno s potencialom v.

$$\Rightarrow \nabla v = F \iff v_x = -u_y \text{ in } v_y = u_x$$

Funkciji u, v zadoščata C-R enačbam. Po izreku o hol. funk. je funk. $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$ hol. funk., saj sta u, v diferenciabilni.

Posledica Vsaka harmonična funk. $u: D \to \mathbb{R}$, kjer je D odprta, je neskončnokrat odv.

Dokaz

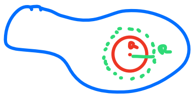


Naj bo D_1 odp. krog s središčem v (x,y), ki je v D. Po prejšnji trditvi ∃ holom. funkcija $f: D_1 \to \mathbb{C}$, da je $\mathrm{Re} f = u$. Zato je u neskončnokrat odv. na D_1 zato tudi na D.

Izrek Izrek o povprečni vrednosti
Naj bo $G \subseteq \mathbb{R}^2$ odp. in naj bo $u: G \to \mathbb{R}$ harmonična. Naj bo $\overline{D}(a,r) \subseteq G$. Tedaj velja

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\varphi})\,d\varphi$$

Opomba Lastnost povprečne vrednosti je za harmonične funkcije karakteristična.

Dokaz 

Naj bo $\overline{D}(a,r) \subseteq D(a,R) \subseteq G$. $\exists$ hol. funk. $f: D(a,R) \to \mathbb{C}$, da je $\operatorname{Re} f = u$. Po Cauchyjevi formuli za f velja:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \overset{z = a + re^{i\varphi}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}}\, ire^{i\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\varphi})\, d\varphi$$

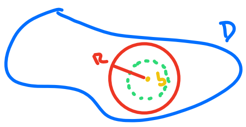
Če upoštevamo $f = u + iv \Rightarrow u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+re^{i\varphi})\, d\varphi$ in enako za v.

Izrek Princip minima in maksima

Nekonstantna harm. funk. na območju D ne more zavzeti niti maksima niti minima. Na kompaktni mn. K zvezna nekonst. funk. u, ki je harmonična v notranjosti, lahko zavzame svoj maksimum ali minimum le na robu.

Dokaz Dokazali bomo le princip maksima, saj princip minima sledi iz principa maksima za $-u$.
Predpostavimo, da u doseže svoj maksimum v $a \in D$. Naj bo M ta maksimum.
Definirajmo mn. $\mathcal{U} = \{ z \in D ;\ u(z) = M \}$. $\mathcal{U} \neq \emptyset$, ker $a \in \mathcal{U}$. Ker je u zvezna je $\mathcal{U}$ zaprta.
Dokazali bomo, da je $\mathcal{U}$ odprta. Potem bo $\mathcal{U}$ neprazna, odprta in zaprta podmn. pov. mn. $D \Rightarrow \mathcal{U} = D$. Zato bo veljalo $u(z) = M$ $\forall z \in D$.

Za dokaz odprtosti $\mathcal{U}$, izberemo $b \in \mathcal{U}$ in poiščemo krog $D(b,r)$, da je vsebovan v $\mathcal{U}$. Dokazali bomo, da je odprt krog $D(b,R) \subseteq \mathcal{U}$. Izberemo $0 < \rho < R$. Dokazali bomo, da je $\partial D(b,\rho) \subseteq \mathcal{U}$. Potem bo sledilo



$$D(b,R) \setminus \{b\} = \bigcup_{\rho < R} \partial D(b,\rho) \subseteq \mathcal{U}. \text{ Zato bo } D(b,R) \subseteq \mathcal{U}$$

Izberemo $0 < \rho < R$. Ker je $u(b) = M$ je maks. u na D, je $u(b) \geq u(b + \rho e^{i\varphi})$ za $\forall \varphi \in [0, 2\pi)$. Integrirajmo:

$$\int_0^{2\pi} u(b)\, d\varphi \geq \int_0^{2\pi} u(b + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi$$

$$u(b)\, 2\pi$$

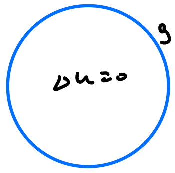
Po izreku o povprečni vrednosti sta int. enaka. Zato je $\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(u(b) - u(b+\rho e^{i\varphi})\right)}_{\geq 0} d\varphi = 0$

Ker je $\varphi \mapsto u(b) - u(b + \rho e^{i\varphi}) \geq 0$ in zvezna je $u(b) = u(b + \rho e^{i\varphi})$ $\forall \varphi \in [0, 2\pi)$.
Zato je $\partial D(b,\rho) \subseteq \mathcal{U}$, kar je bilo potrebno dokazati.

Dodatna trditev za kompaktne mn. sledi iz dejstva, da harm. funk. ne doseže ne maksima in ne minima v notranjosti.

Poissonova formula in Dirichletova naloga

Naj bo $g: \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Iščemo tako zv. funkcijo $u: \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ da je $u|_{\partial D(0,1)} = g$, notranjosti pa harmonična



Temu problemu rečemo Dirichletova naloga za krog.

<u>Poissonovo jedro</u> je funkcija $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ za $0 \le r < 1$ in $\theta \in \mathbb{R}$

Velja naslednje

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

Pišimo $z = re^{i\theta}$ $\Rightarrow$ $P_r(\theta) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)$

Lema Lastnosti Poissonovega jedra

Poissonovo jedro P_r je zv. funk., za katero veljajo:

1. $P_r > 0$
2. $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$ in P_r je 2π periodična
3. Za $0 \le \delta \le \theta \le \pi$ velja $P_r(\theta) \le P_r(\delta)$
4. $\lim\limits_{r\to 1} P_r(0) = \infty$
5. Za $\forall\, \delta > 0$ je $\lim\limits_{r\to 1} P_r(\theta) = 0$ enakomerno za $\delta \le |\theta| \le \pi$

Dokaz $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$

P_r je zv. povsod kjer je def.
P_r ni def. $\Leftrightarrow$ $1-2r\cos\theta+r^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\cos\theta = \dfrac{r^2+1}{2r}$

Za $r = 0$ je $P_0(\theta) = 1$
za $r > 0$ je $\dfrac{r^2+1}{2r} \ge 1$

Ker je $\dfrac{r^2+1}{2r} = 1$ $\Leftrightarrow$ $r = 1$, je P_r def. za $0 \le r < 1$ in zato zvezna.

1. $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} > 0$ $\Leftrightarrow$ $1-2r\cos\theta+r^2 > 0$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1+r^2}{2r} > \cos\theta$

   Zadnja neenakost drži za $r \in (0,1)$. Za $r = 0$ je $P_0(\theta) = 1 > 0$.

2. Sodost P_r sledi iz sodosti cos. Isti argument uporabimo za periodičnost.

3. $0 \le \delta \le \theta \le \pi$ $\Rightarrow$ $P_r(\theta) \le P_r(\delta)$

   $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \le \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}$ $\Leftrightarrow$ $\cos\theta \le \cos\delta$ $\overset{\text{za } \theta,\delta \in [0,\pi]}{\Leftrightarrow}$ $\delta \le \theta$

4. $\lim\limits_{r\to 1} P_r(0) = \lim\limits_{r\to 1} \dfrac{1-r^2}{1-2r+r^2} = \lim\limits_{r\to 1} \dfrac{1+r}{1-r} = \infty$

5. Fiksirajmo $\delta > 0$. Velja $\lim\limits_{r\to 1} P_r(\delta) = \lim\limits_{r\to 1} \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} = 0$. Če je $|\theta| \ge \delta$ $\Rightarrow$ Po 3 sledi $0 < P_r(\theta) \le P_r(\delta) \to 0$. Ker je $\lim\limits_{r\to 1} P_r(\delta) = 0$ je $\lim\limits_{r\to 1} P_r(\theta) = 0$ enakomerno za $0 < \delta \le |\theta| \le \pi$.

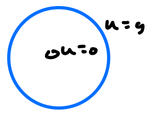
Izrek Poissonova formula

Za $\forall$ funk. u, ki je harmonična v $D(0,1)$ in zvezna na zaprtju $\bar{D}(0,1)$ velja

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)\, u(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, u(e^{i\theta})\, d\theta$$

za vse $0\le r<1$ in $\varphi\in\mathbb{R}$

Opomba Poissonova formula nakaže, kako rešimo Dirichletovo nalogo.



Če rešitev $\exists$, potem po Poissonovi formuli velja $u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\, g(e^{i\theta})}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta$

Potrebno je dokazati enoličnost rešitve, harmoničnost na $D(0,1)$ in zveznost na $\bar{D}(0,1)$.

Dokaz Najprej predpostavimo, da je u harmonična na neki odprti okolici od $\bar{D}(0,1)$. Tedaj $\exists$ holom. funk. f na odprti okolici od $\bar{D}(0,1)$, da je $u=\operatorname{Re} f$. Naj bo $z\in D(0,1)$. Po Cauchyjevi formuli velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta} z}\, \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad *$$

Ker je $|z|<1$, je funk. $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}$ hol. v ok. zap. kroga $\bar{D}(0,1)$ (hol. je na $D(0,\frac{1}{|z|})$). Po Cauchyjevem izreku velja

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}\, d\zeta = 0$$

Zato je $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\left(\frac{1}{1-\bar{z}\zeta} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}\, d\zeta = 0 \qquad **$

Seštejmo $*$ in $**$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} + \frac{1}{1-\bar{z}\zeta} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\zeta|^2}\, \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Pišimo $z=re^{i\varphi}$; $r\in[0,1)$ in $\zeta=e^{i\theta}$ $\theta\in[0,2\pi]$

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\, \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-\varphi)}|^2}\, \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\, \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta$$

Vzamemo samo realni del in dobimo Poissonovo formulo za harmonično funkcijo u, def. na odp. ok. kroga $\bar{D}(0,1)$.

Splošni primer: Naj bo $\varrho\in(0,1)$. Def. funkcijo $u_\varrho(z) = u(\varrho z)$. Ker je u harmonična na $D(0,1)$ je u_ϱ harmonična na $D(0,\frac{1}{\varrho})$. Po zgornjem primeru za $\forall\, \varrho\in(0,1)$ velja

$$u_\varrho(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)\, u_\varrho(e^{i\theta})\, d\theta \qquad \forall\, r\in[0,1),\ \varphi\in[0,2\pi]$$

$$u(r\varrho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)\, u(\varrho e^{i\theta})\, d\theta \qquad \forall\, r\in[0,1),\ \varphi\in[0,2\pi]$$

Ker je u (enak.) zvezna na $\bar{D}(0,1)$, ko pošljemo $\varrho\to 1$ dobimo Poissonovo formulo.

Posledica 2. Poissonovo jedro velja

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}\,d\theta = 1$$

Dokaz $u = 1$, $\varphi = 0$ in vstavimo v Poissonovo formulo.

Izrek Rešitev Dirichletovega problema
Naj bo g zv. na $\partial D(0,1)$. Tedaj $\exists$ natanko ena zv. funk. u na $\bar{D}(0,1)$, ki je harmonična v $D(0,1)$ in zadošča $u|_{\partial D} = g$

Dokaz Enoličnost rešitve problema
Recimo, da sta u_1 in u_2 rešitvi Dirichletovega problema. Potem je $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$ na $D(0,1)$ in $u_1|_{\partial D} = u_2|_{\partial D} = g$

Def. $u = u_1 - u_2 \Rightarrow u$ zv. na $\bar{D}(0,1)$, u je harmon. na $D(0,1)$ in $u|_{\partial D} = 0$.
Ker je $\bar{D}(0,1)$ kompaktna sta min in max funk. u dosežena na $\partial D(0,1)$. Ker je $u = 0$ na $\partial D(0,1)$ in $\bar{D}(0,1)$. Zato je $u_1 = u_2$

Definirajmo u. Za $z \in \partial D(0,1)$ def $u(z) = g(z)$
Za $z \in D(0,1)$ def $u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)\, g(e^{i\theta})\,d\theta$
Dokazati moramo, da je $u|_{\partial D} = g$, u je harmonična v $D(0,1)$, u je zvezna na $\bar{D}(0,1)$.
$u|_{\partial D} = g$ drži po definiciji.
u harmonična na $D(0,1)$?

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\varphi-\theta)\, g(e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, \frac{1+re^{i(\varphi-\theta)}}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}\, g(e^{i\theta})\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+re^{i\varphi}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}}\, g(e^{i\theta})\,d\theta$$

Vpeljimo $f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, g(e^{i\theta})\,d\theta$ je holomorfna na $D(0,1)$ (dokaz DN1)

Ker je $u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\, f(re^{i\varphi})$, je u harmonična na $D(0,1)$. Zato je tudi zvezna na $D(0,1)$.

u zvezna na $\partial D(0,1)$?

Najprej dokažimo $\lim_{r\to 1} u(re^{i\varphi}) = g(e^{i\varphi})$

$$|u(re^{i\varphi}) - g(e^{i\varphi})| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)\,(g(e^{i\theta}) - g(e^{i\varphi}))\,d\theta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)\,|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\varphi})|\,d\theta$$

Ker je g enak. zv., za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ tak $\delta > 0$ da je $|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\varphi})| < \frac{\varepsilon}{2}$ če je $|\theta - \varphi| < \delta$. Integral razdelimo na dva integrala

1. integral $\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} P_r(\theta-\varphi)\,|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\varphi})|\,d\theta \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} P_r(\theta-\varphi)\,d\theta \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)\,d\theta = \frac{\varepsilon}{4\pi}\,2\pi = \frac{\varepsilon}{2}$

maksimum g na ∂D

2. integral $\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\varphi|>\delta} P_r(\theta-\varphi)\,|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\varphi})|\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)\,2M\,d\theta \leq \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\delta)\,d\theta = 2M\,P_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$

Ker je $\lim_{\delta \to 1} \pi_r(\delta) = 0$, je $2\pi\, \pi_r(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$, če je r dovolj blizu 1.
Zato za r blizu 1 velja $|u(re^{i\varphi}) - g(e^{i\varphi})| < \varepsilon$.

Zveznost v $e^{i\varphi}$:
$$|g(e^{i\varphi}) - u(re^{i\psi})| \le |g(e^{i\varphi}) - g(e^{i\psi})| + |g(e^{i\psi}) - u(re^{i\psi})|$$

Ker je g zv. $\exists\, \delta > 0$, da je $|g(e^{i\varphi}) - g(e^{i\psi})| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $|\varphi - \psi| < \delta$

Harmonične funkcije v $\mathbb{R}^3$

V $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ so radialno simetrične harmonične funkcije natanko oblike
$$u(x) = \frac{A}{|x|} + B \quad ; \quad \text{kjer je } |x| = \|x\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r \; , \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Izberimo $B = 0$ in $A = -\frac{1}{4\pi} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{4\pi r}$ oz. $u(x) = -\frac{1}{4\pi |x|}$ za $r > 0$

To funkcijo imenujemo osnovno / fundamentalno rešitev Laplaceove enačbe.
Zapišimo $u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Podobno (kot že vemo) so funkcije
$x \mapsto \frac{1}{\|x - x_0\|}$ harmonične na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Naj bo D odprta, povezana in omejena množica v $\mathbb{R}^3$, katere rob je ploskev reda C^1.
Ploskev v okolici vsake točke opišemo z zvezno odvedljivo vekt. funkcijo $\vec{r} = \vec{r}(t, s)$, pri čemer parametra (t, s) tečeta po nekem ravninskem območju, da je vedno
$\vec{r}_t \times \vec{r}_s \neq 0$. Enotsko navzven usmerjeno normalo v točki $\vec{r}$ označimo z $\vec{n}(\vec{r})$ oz.
$\vec{n}$, če je jasno, katero točko je mišljeno.

Naj bo $\vec{F}$ zv. odv. vekt. polje na $\bar{D} = D \cup \overset{\text{naša ploskev}}{\partial D}$. Po Gaussovem izreku velja
$$\iint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{D} \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

Ponovitev: $$\iint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{A} \vec{F} \cdot \vec{n} \sqrt{EG - F^2} \, du\, dv$$

Normalni odvod zv. odv. funk. u v točki $\vec{r}$ ploskve ∂D je definiran kot
$$\partial_{\vec{n}} u(\vec{r}) = \vec{n}(\vec{r}) \cdot \nabla u(\vec{r})$$

Primer Izračunajmo normalni odvod funk. $u: \vec{r} \mapsto \|\vec{r} - \vec{r}_0\|^{-1}$ na sferi $\partial K(\vec{r}_0, R)$.

$$u(\vec{r}) = \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$u_x(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2(x - x_0) = -\frac{x - x_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3}$$
$$u_y(\vec{r}) = -\frac{y - y_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3} \qquad u_z(\vec{r}) = -\frac{z - z_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3}$$
$$\nabla u(\vec{r}) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3}$$

Normalni vektor na $\partial K(\vec{r}_0, R)$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \quad \overset{\frac{d}{dx}\ \frac{d}{dy}}{\Longrightarrow}$$
$$2(x - x_0) + 2(z - z_0) z_x = 0 \qquad 2(y - y_0) + 2(z - z_0) z_y = 0$$
$$z_x = \frac{x_0 - x}{z - z_0} \qquad z_y = \frac{y_0 - y}{z - z_0}$$

normala $\vec n = (1, 0, z_x) \times (0, 1, z_y) = \frac{1}{(z-z_0)^2}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ (ni enotska)

$\vec n = \pm \frac{\vec r - \vec r_0}{\|\vec r - \vec r_0\|}$ Izberemo + saj želimo zunanjo normalo

Ker je $\vec r \in \partial K(\vec r_0, R)$ je $\|\vec r - \vec r_0\| = R$. Dobimo $\vec n = \frac{\vec r - \vec r_0}{R}$ in zato je

$$\partial_{\vec n} u(\vec r) = -\frac{\vec r - \vec r_0}{R^3} \cdot \frac{\vec r - \vec r_0}{R} = -\frac{1}{R^2}$$

Greenove identitete

Za poljubni dvakrat zv. odv. funkc. u in v na neki odprti okolici množice D veljajo naslednje identitete

1. $$\iint_{\partial D} v\, \partial_{\vec n} u \, dS = \iiint_D (v \Delta u + \nabla u \nabla v)\, dV$$

2. $$\iint_{\partial D} (v\, \partial_{\vec n} u - u\, \partial_{\vec n} v)\, dS = \iiint_D (v \Delta u - u \Delta v)\, dV$$

3. Za $\forall\, \vec r_0 \in D$ velja

$$u(\vec r_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \left[\frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|} \partial_n u(\vec r) - u(\vec r)\, \partial_n \left(\frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|} \right) \right] dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\Delta u}{\|\vec r - \vec r_0\|}\, dV$$

Opomba 1, 2 in 3 formula se zaporedoma imenujejo 1., 2., in 3. Greenova identiteta.

Dokaz 1. identiteta

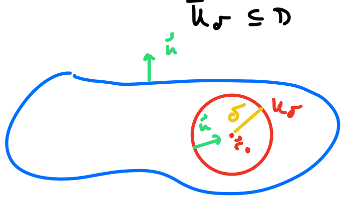
$v \cdot \partial_{\vec n} u = v(\nabla u \cdot \vec n)$ če upoštevamo $d\vec S = \vec n\, dS$ $\Rightarrow$

$$\iint_{\partial D} v\, \partial_{\vec n} u\, dS = \iint_{\partial D} v \nabla u\, d\vec S \overset{\text{Gaussov izrek}}{=} \iiint_D \nabla(v \cdot \nabla u)\, dV = \iiint_D \nabla v \nabla u + v \Delta u\, dV$$

$$\nabla(v \cdot \nabla u) = \nabla(v u_x, v u_y, v u_z) = (v u_x)_x + (v u_y)_y + (v u_z)_z = v_x u_x + v u_{xx} + v_y u_y + v u_{yy} + v_z u_z + v u_{zz}$$
$$= \nabla v \nabla u + v \Delta u$$

2. identiteta. Zamenjamo vlogo u in v prvi identiteti in odštejemo

3. identiteta. Uporabimo 2. Greenovo identiteto v primeru funk. $v(\vec r) = \frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|}$ na območju $D \setminus \overline{K}(\vec r_0, \delta)$. Krajše pišemo $K(\vec r_0, \delta) = K_\delta$. Seveda izberemo tak $\delta > 0$, da je $\overline{K}_\delta \subseteq D$



2. Greenova identiteta v tem primeru da

ker je harmonična na $\mathbb{R}^3$, $\Delta v = 0$

$$\iint_{\partial(D \setminus K_\delta)} (u\, \partial_{\vec n} v - v\, \partial_{\vec n} u)\, dS = \iiint_{D \setminus K_\delta} v \Delta u - u \Delta v\, dV = \iiint_{D - K_\delta} v \Delta u\, dV$$

$$\iint_{\partial D} u\, \partial_{\vec n} v - v\, \partial_{\vec n} u\, dS - \iint_{\partial K_\delta} \overset{\overset{0}{\|}}{u\, \partial_{\vec n} v - v\, \partial_{\vec n} u}\, dS = \iiint_D v \Delta u\, dV - \overset{\overset{0}{\|}}{\iiint_{K_\delta} v \Delta u\, dV}$$

Naredili bomo limito ko $\delta \to 0$ $\iiint_{K_\delta} v \Delta u\, dV$ in $\iint_{\partial K_\delta} v\, \partial_{\vec n} u\, dS$

Parametrizacija krogla K_δ in sfera ∂K_δ

$x = x_0 + \rho \cos\varphi \sin\theta$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi]$
$y = y_0 + \rho \sin\varphi \sin\theta$ $\quad \rho \in [0, \delta]$
$z = z_0 + \rho \cos\theta$ $\quad \theta \in [0, \pi]$
$|\det J| = \rho^2 \sin\theta$

$$\iiint_{K_\delta} v\Delta u\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta} \frac{1}{\rho}\Delta u\, \rho^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\rho \xrightarrow{\delta\to 0} 0$$

$$\iint_{\partial K_\delta} v\,\partial_{\vec n} u\, dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\delta}\,\partial_{\vec n} u\,\delta^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \xrightarrow{\delta\to 0} 0$$

Zato je $\iint_{\partial D}(u\,\partial_{\vec n} v - v\,\partial_{\vec n} u)\,dS - \lim_{\delta\to 0}\iint_{\partial K_\delta} u\,\partial_{\vec n} v\, dS = \iiint_D v\,\Delta u\, dV$

$$4\pi\, u(\vec r_0) \overset{?}{=} \lim_{\delta\to 0}\iint_{\partial K_\delta} u\,\partial_{\vec n} v\, dS$$

normala kaže v notranjost $\qquad 4\pi = \frac{1}{\delta^2}\iint_{\partial K_\delta} dS$

$$\left|\iint_{\partial K_\delta} u\,\partial_{\vec n} v\, dS - 4\pi u(\vec r_0)\right| = \left|\iint_{\partial K_\delta}\frac{u(\vec r)}{\delta^2}\,dS - 4\pi u(\vec r_0)\right| = \left|\iint_{\partial K_\delta}\frac{u(\vec r)}{\delta^2} - \frac{u(\vec r_0)}{\delta^2}\,dS\right| =$$

$$\leq \frac{1}{\delta^2}\iint_{\partial K_\delta}|u(\vec r) - u(\vec r_0)|\,dS \leq \dots$$

Ker je u zvezna $\exists$ tak $\delta_1 > 0$ da je $|u(\vec r) - u(\vec r_0)| < \varepsilon$, če je $|\vec r - \vec r_0| < \delta_1$.
Naj bo $0 < \delta < \delta_1$. Potem je

$$\dots \leq \frac{1}{\delta^2}\iint_{\partial K_\delta}\varepsilon\, dS = \frac{\varepsilon\, 4\pi\,\delta^2}{\delta^2} = 4\pi\varepsilon$$

Po def. limite je $\lim_{\delta\to 0}\iint_{\partial K_\delta} u\,\partial_{\vec n} v\, dS = 4\pi u(\vec r_0)$

Posledica Za $\forall$ harmonično funk. u na okolici množ. $\bar D$ velja

$$\iint_{\partial D}\partial_{\vec n} u\, dS = 0$$

Dokaz Uporabimo 1. Greenovo identiteto za funkcijo $v = 1$ in upoštevamo, da je u harmonična.

$$\iint_{\partial D} v\,\partial_{\vec n} u\, dS = \iiint_D (v\,\underbrace{\Delta u}_{=0} + \nabla u\cdot\underbrace{\nabla v}_{=0})\,dV = 0$$

Izrek Izrek o povprečju
Naj bo u harm. funk. na območju D. Naj bo $\vec r_0 \in D$ in $R > 0$ takšen, da je zaprta krogla $\bar K(\vec r_0, R)$ vsebovana v D. Potem je

$$u(\vec r_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\partial K(\vec r_0, R)} u(\vec r)\, dS$$

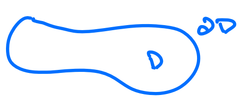
Dokaz Uporabimo 3. Greenovo identiteto za $K(\vec r_0, R)$. $\qquad$ po prejšnji posledici

$$u(\vec r_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial K}\frac{1}{R}\,\partial_{\vec n} u(\vec r) - u(\vec r)\,\underbrace{\partial_{\vec n}\left(\frac{1}{r}\right)}_{= -\frac{1}{R^2}}\, dS - \frac{1}{4\pi}\iiint_K \frac{\overset{0}{\Delta u}}{R}\, dV = \frac{1}{4\pi R}\underbrace{\iint_{\partial K}\partial_{\vec n} u(\vec r)\, dS}_{=0} + \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\partial K} u(\vec r)\, dS$$

Izrek Princip maksima in minima
Nekonstantna harm. funk. na območju $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ne more zavzeti v D niti maksima niti minima.
Na kompaktni mn. $K \subseteq \mathbb{R}^3$ zvezna funkcija na okolici K, ki je harmonična v notranjosti K zavzame svoj maksimum in minimum na robu množice K.

Dokaz Dokaz enak kot v $\mathbb{R}^2$.

Problem Dirichletov problem in Greenove funkcije
Naj bo D omejeno območje z gladkim robom. Naj bo $f: \partial D \to \mathbb{R}$ zvezna funk.



Iščemo tako zv. funkcijo $u: \bar D \to \mathbb{R}$, da je $u|_{\partial D} = f$ in $\Delta u = 0$ na D.

Poglejmo si poseben primer, ko je $f(\vec r) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|}$ pri čemer je $\vec r_0 \in D$. Ker je $\vec r_0 \in D$ je f zvezna na ∂D. Recimo, da znamo rešiti zgornji Dirichletov problem v tem posebnem primeru. Naj bo $v(\vec r, \vec r_0)$ rešitev tega problema. To pomeni, da je v harmonična na D in $v(\vec r, \vec r_0) = \frac{1}{4\pi\|\vec r - \vec r_0\|}$ za $\forall \vec r \in \partial D$. Uporabimo 2. Greenovo identiteto za v in poljubno harm. funk. u.

$$\iint_{\partial D} \left(u(\vec r)\, \partial_{\vec n} v(\vec r, \vec r_0) - \frac{1}{4\pi\|\vec r - \vec r_0\|}\, \partial_{\vec n} u(\vec r)\right) dS = 0$$

Uporabimo še 3. identiteto

$$u(\vec r_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial D} \frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|}\partial_{\vec n} u(\vec r) - u(\vec r)\,\partial_{\vec n}\frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|}\, dS = \iint_{\partial D} u(\vec r)\, \partial_{\vec n} v(\vec r, \vec r_0)\, dS - \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial D} u(\vec r)\, \partial_{\vec n}\left(\frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|}\right) dS =$$

$$= \iint_{\partial D} u(\vec r)\, \partial_{\vec n}\left(v(\vec r, \vec r_0) - \frac{1}{4\pi\|\vec r - \vec r_0\|}\right) dS \qquad \text{Poissonova formula}$$

Funkcija $G(\vec r, \vec r_0) = v(\vec r, \vec r_0) - \frac{1}{4\pi\|\vec r - \vec r_0\|}$ se imenuje Greenova funkcija za območje D. Obstoj Greenove funkcije za splošno območje je težko dokazati. Če obstaja Greenova funkcija potem je ena sama.

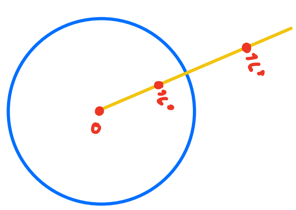
Lastnosti Greenove funkcije
- $\vec r \mapsto G(\vec r, \vec r_0) + \frac{1}{4\pi\|\vec r - \vec r_0\|}$ je harmonična na D in zv. na $\bar D$ (v 1. spremenljivki)
- za $\vec r \in \partial D$ je $G(\vec r, \vec r_0) = 0$

Enoličnost Greenove funkcije:
Recimo, da sta G_1 in G_2 Greenovi funk.. Sedaj tvorimo $G = G_1 - G_2$.

$$G(\vec r, \vec r_0) = G_1(\vec r, \vec r_0) - G_2(\vec r, \vec r_0) = \left(G_1(\vec r, \vec r_0) + \frac{1}{4\pi\|\vec r - \vec r_0\|}\right) - \left(G_2(\vec r, \vec r_0) + \frac{1}{4\pi\|\vec r - \vec r_0\|}\right)$$

Sledi da je G harm. funk. v spr. $\vec r \in D$. Ker $G_1 = G_2 = 0$ na ∂D v spr. $\vec r$. $\Rightarrow G = 0$ na ∂D v spr. $\vec r$. Ker je G harm. na D in 0 na robu, je po principu maksima manjša ali enaka 0 na $\bar D$. Po principu minima je večja ali enaka nič na $\bar D$ $\Rightarrow G = 0$ na $\bar D$.
Funkcija $\partial_{\vec n} G(\vec r, \vec r_0)$, ki je def. na $\partial D \times D$ se imenuje Poissonovo jedro.

Primer Določimo Greenovo funkcijo G in Poissonovo jedro P za kroglo s središčem v izhodišču in polmerom 1. Izberimo $\vec r_0$ to na D.



$\vec r_1 = \frac{\vec r_0}{\|\vec r_0\|^2}$ je zrcalna točka točke $\vec r_0$ glede na $\partial K(0,1)$ (produkt $\vec r_1 \cdot \vec r_0 = 1$) Preverimo, da je

$$G(\vec r, \vec r_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\|\vec r_0\|\,\|\vec r - \vec r_1\|} - \frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|}\right) \quad \text{Greenova funkcija za } K(0,1).$$

Primer, ko $\vec r_0 = 0$ računamo kot $G(\vec r, \vec r_0) = G(\vec r, 0) = \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\|\vec r\|}\right)$

$$G(\vec r, \vec r_0) + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|} = \frac{1}{4\pi\|\vec r_0\|}\cdot\frac{1}{\|\vec r - \vec r_1\|} \leftarrow \text{Harmonična na } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec r_1\}$$

Ker je $\vec r_1 \notin K(0,1)$ je $\vec r \mapsto G(\vec r, \vec r_0)$ harmonična na $K(0,1)$.
Naj bo $\vec r \in \partial K(0,1)$, $G = 0 \iff \|\vec r_0\|\,\|\vec r - \vec r_1\| = \|\vec r - \vec r_0\|$. $\|\vec r\| = 1$

Kvadrirajmo $\|\vec r_0\|^2\|\vec r - \vec r_1\|^2 = \left\|\|\vec r_0\|\vec r - \frac{\vec r_0}{\|\vec r_0\|}\right\|^2 = \|\vec r_0\|^2\|\vec r\|^2 + \frac{\|\vec r_0\|^2}{\|\vec r_0\|^2} - 2\|\vec r_0\|\,\vec r \cdot \frac{\vec r_0}{\|\vec r_0\|} =$

$= \|\vec r_0\|^2 - 2\vec r \cdot \vec r_0 + 1$

$\|\vec r - \vec r_0\|^2 = \|\vec r\|^2 - 2\vec r \cdot \vec r_0 + \|\vec r_0\|^2 = \|\vec r_0\|^2 - 2\vec r \cdot \vec r_0 + 1 \Rightarrow G(\vec r, \vec r_0) = 0 \quad \forall \vec r \in \partial K(0,1)$

Velja $P(\vec r, \vec r_0) = \partial_{\vec n} G(\vec r, \vec r_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1 - \|\vec r_0\|^2}{\|\vec r - \vec r_0\|^3} \quad \forall \vec r \in \partial K(0,1)$

Fourierova transformacija

Def Naj bo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funk. <u>Nosilec</u> funk f je <u>zaprtje</u> mn.

$$\{ x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq 0 \}$$

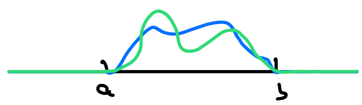
Nosilec za f ponavadi označimo $\operatorname{supp} f = \overline{\{ x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq 0 \}}$ ← zaprtje

Primer ① $\chi_{(0,1)}$. $\operatorname{supp} \chi_{(0,1)} = \overline{\{ x \in \mathbb{R} ; \chi_{(0,1)}(x) \neq 0 \}} = \overline{(0,1)}$

② p polinom $\operatorname{supp} p = \overline{\{ x \in \mathbb{R} ; p(x) \neq 0 \}} = \mathbb{R}$

p polinom $\Rightarrow \{ x \in \mathbb{R} : p(x) = 0 \}$ je končna

Funkcija f ima komp. nosilec, če je $\operatorname{supp} f$ komp. To pomeni, da obstaja int. $[a,b]$, da je $f(x) = 0$ na $\mathbb{R} \setminus [a,b]$



Prostor zv. funkcij na $\mathbb{R}$ s komp. nosilcem označimo $C_c(\mathbb{R})$. Za $f \in C_c(\mathbb{R})$ def. $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$.

Ker je $f \in C_c(\mathbb{R})$ je $\operatorname{supp} f \subseteq [a,b] \Rightarrow \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx = \int_a^b |f(x)| \, dx$ ← Riemannov int. zv. funk.

Zato je $\|f\|_1$ dobro def. Vpeljimo metriko d na $C_c(\mathbb{R})$

$$d(f,g) = \|f - g\|_1$$

DN $C_c(\mathbb{R}), d$ je metrični prostor

Ta prostor ni poln iz dveh razlogov: limitna funkcija morda nima komp. nosilca, morda pa niti ni zvezna. Zato ta prostor napolnimo. Napolnitev prostora $(C_c(\mathbb{R}), d)$ je $L^1(\mathbb{R})$. Dobljeni prostor je prostor vseh <u>merljivih funkcij</u> na $\mathbb{R}$, za katere je $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dm(x) < \infty$, kjer je m <u>Lebesgueova mera</u>. Elemente prostora $L^1(\mathbb{R})$ si bomo predstavljali kot Riemannovo absolutno integ. funkcijo (posplošeno).

Za $f \in L^1(\mathbb{R})$ def. $\hat{f}$ s predpisom

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, dx$$

Funkcija $\hat{f}$ se imenuje <u>Fourierova transformiranka</u> funkcije f. Preslikavo $\hat{\ }: L^1(\mathbb{R}) \to ?$ imenujemo <u>Fourierova transformacija</u>. Ker je $|e^{-i\xi x}| = 1$ in $f \in L^1(\mathbb{R})$ je zg. int. abs. konv. in zato $\hat{f}$ obstaja.

Primer Izračunajmo $\hat{f}$, kjer je $f = \chi_{[a,b]}$. $\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]} e^{-i\xi x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\xi x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{-i\xi}\right) e^{-i\xi x} \Big|_a^b =$$

$$= \frac{i}{\xi\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a} \right)$$

$$\hat{\chi}_{[-c,c]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ic\xi} - e^{-ic\xi}}{i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos c\xi + i\sin c\xi - \cos(-c\xi) - i\sin(-c\xi)}{i\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin c\xi}{\xi}$$

Primer Izračunajmo $\hat f$; $f(x) = e^{-|x|}$

$$\hat f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^\infty e^{-x-i\xi x}\,dx + \int_{-\infty}^0 e^{x-i\xi x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-1-i\xi}e^{(-1-i\xi)x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{1-i\xi}e^{(1-i\xi)x}\Big|_{-\infty}^0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}$$

Trditev Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$

1. $\hat f$ je zvezna in velja $|\hat f(\xi)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$ (omejenost)
2. Za $t \in \mathbb{R}$, naj bo e_t def. s predpisom $e_t(x) = e^{itx}$. Potem je $\widehat{fe_t}(\xi) = \hat f(\xi - t)$
3. Za $a>0$ naj bo $f_{(a)}$ def s predpisom $f_{(a)}(x) = f(ax)$. Tedaj je $\widehat{f_{(a)}}(\xi) = \frac{1}{a}\hat f(\frac{\xi}{a})$
4. Za $t \in \mathbb{R}$ def. premaknjeno funkcijo f_t s predpisom $f_t(x) = f(x-t)$. Tedaj velja $\hat f_t(\xi) = e^{-it\xi}\hat f(\xi)$
5. Naj bo χ identična funkcija na $\mathbb{R}$ ($\chi(x)=x$). Če je $\chi f \in L^1(\mathbb{R})$ potem je $\hat f$ odvedljiva in velja $(\hat f)'(\xi) = -i\widehat{\chi f}(\xi)$
6. Če je f zv. odv. in $f' \in L^1(\mathbb{R})$, potem je $\hat{f'}(\xi) = i\xi\hat f(\xi)$

Dokaz 1. $|\hat f(\xi)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)e^{-ix\xi}|\,dx \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx = \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}$

Zveznost?

$$|\hat f(\xi+h) - \hat f(\xi)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)e^{-ix(\xi+h)} - f(x)e^{-ix\xi}|\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\overbrace{|e^{-ix\xi}|}^{1}\,|e^{-ixh}-1|\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,|e^{-ixh}-1|\,dx$$

Ker je $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx < \infty$ za $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ tak $A>0$, da je $\int_{|x|\ge A}|f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4}\sqrt{2\pi}$

Naj bo $\delta>0$ tako majhen, da je $|e^{-ixh}-1| < \frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}$ za $\forall x \in (-A,A)$

Zveznost $x \mapsto e^{-ix}$: če je $|x|<\delta$ je $|e^{ix}-1| < \frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}$. Za $|xh| \le Ah < \delta$ potem za vse $x \in (-A,A)$ velja $|e^{-ixh}-1| < \frac{\varepsilon\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}$

$$\Rightarrow |\hat f(\xi+h) - \hat f(\xi)| \le \int_{-A}^{A}|f(x)|\,|e^{-ixh}-1|\,dx + \int_{|x|\ge A}|f(x)|\,|\underbrace{e^{ixh}-1}_{\le 2}|\,dx$$

$$\le \varepsilon\frac{\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}|f(x)|\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|\ge A}|f(x)|\cdot 2\,dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{2\pi} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dokaz če je $\|f\|_1 = 0$. V primeru f zvezna je $f=0$ na $\mathbb{R}$ je $\hat f(\xi)=0$ $\forall\xi\in\mathbb{R}$.
Podobno za f ni zvezna je $\hat f(\xi) = 0$, vendar se sklicujemo na dejstvo, da je $f=0$ s. p. glede na Lebesgovo mero.

2. $\widehat{fe_t}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(\xi-t)}\,dx = \hat f(\xi-t)$

3. $\widehat{f_{(a)}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ix\xi}\,dx \overset{ax=y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{y}{a}\xi}\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\hat f(\frac{\xi}{a})$

4. $\hat f_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-ix\xi}\,dx \overset{x-t=y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iy\xi}e^{-it\xi}\,dy = e^{-it\xi}\hat f(\xi)$

5. $\widehat{f'}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-ixs}\, dx \overset{\text{per partes}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x) e^{-ixs} \Big|_{-\infty}^{\infty} + is \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixs}\, dx \right) =$

$= is\, \hat{f}(s) + 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ sledi iz spodnjega

$x \geq 0 \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)\, ds$

Ker je $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ obstaja, je $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Podobno dokažemo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Konvolucija funkcij

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Konvolucija $f * g$ funkcij g in f je funkcija def. s predpisom

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt,$$

kadar je za. integ. abs. konv. To se zgodi, če sta $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Ta int. konv. abs. tudi v še bolj posebnih konkretnejših primerih: tak primer sta f, g, ki sta odsekoma zvezni, ena od njiju pa ima kompaktni nosilec. V posebnem primeru ima $f * g$ smisel za $f, g \in C_c(\mathbb{R})$

Trditev Veljajo naslednje formule za $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$

1. $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha (f * h) + \beta (g * h)$ distributivnost
2. $f * g = g * f$ komutativnost
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$ asociativnost

Opomba $(L^1(\mathbb{R}), *)$ je algebra če $L^1(\mathbb{R})$ opremimo z $\|\cdot\|_1$, dobimo poln normiran prostor torej Banachov prostor.

Trditev Za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ velja $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Opomba Iz zgornje sledi, da je $(L^1(\mathbb{R}), *)$ komut. Banachov prostor.

Vprašanje Če $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, potem $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. $\widehat{f * g} = ?$

Trditev Za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ velja $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\, \hat{f} \cdot \hat{g}$

Dokaz Naj bosta $f, g \in C_c(\mathbb{R})$. Tedaj imata f in g kompaktna nosilca. Zato ima funkcija $(t, x) \mapsto e^{-ixs} f(x-t)\, g(t)$ tudi komp. nosilec v $\mathbb{R}^2$. Zato lahko uporabimo Fubinijev izrek:

$$\widehat{f * g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, e^{-ixs}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} f(x-t)\, g(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} f(x-t)\, g(t)\, dx \overset{y = x-t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y+t)s} f(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-it\xi}\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-iy\xi}\, dy = \sqrt{2\pi}\, \hat g(\xi)\, \hat f(\xi)$$

V splošnem upoštevamo dejstvo, da je $C_c(\mathbb{R})$ gost v $L^1(\mathbb{R})$ in $|\hat f(\xi)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$.
Če $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \Rightarrow \hat f_n(\xi) \to \hat f(\xi)$ (po točkah). $\square$

Naj bosta $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Tvorimo $f*g$. To je "funkcija". Kdaj bi bila $f*g$ odvedljiva in kolikšen / kakšen je $(f*g)'$

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

Za odvod si predstavljamo, da odvajamo pod integralom po x. Če je f zv. odv., int.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x-t)\, g(t)|\, dt$$

konv. enak. na vsakem končnem intervalu glede na x, potem smemo odvajati v integralu po x in velja:

$$(f*g)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t)\, g(t)\, dt = (f'*g)(x)$$

Funkcija F je gladka, če je neskončnokrat (zvezno) odv. Če ima še f komp. nosilec dobimo

$$(f*g)^{(n)} = f^{(n)} * g$$

Schwartzov razred hitro padajočih funkcij

Schwartzov prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ hitro padajočih funkcij sestoji iz vseh neskončnokrat odv. funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ za katere so vse funkcije oblike:

$$x \mapsto f^{(m)}(x)\, x^n \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 \text{ in } n \in \mathbb{N}_0$$

omejene.
Ker je funkcija $x \mapsto f^{(m)}(x) \cdot x^{n+1}$ omejena in enakosti

$$f^{(m)}(x)\, x^{n+1} = x\, f^{(m)}(x)\, x^n \quad \text{dobimo}$$

$$|f^{(m)}(x)\, x^n| = \frac{|f^{(m)}(x)\, x^{n+1}|}{|x|} \le \frac{M}{|x|} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

Zato je $\lim_{x\to\infty} f^{(m)}(x)\, x^n = \lim_{x\to-\infty} f^{(m)}(x)\, x^n = 0$

Lema Velja $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$

Dokaz Naj bo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ideja: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ + da množimo f s primernim polinomom.
Ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je funk. $x \mapsto f(x)(1+x^2)$ tudi v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zato $\exists\, M \ge 0$, da je
$|f(x)(1+x^2)| \le M \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{1+x^2} = M\pi < \infty$

Primer Če je $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, potem je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Ker je $f \in C_c(\mathbb{R})$ je $f = 0$ na $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ za neka $a < b$.
Ker je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ obstajajo odvodi poljubnih redov. Zato $f^{(m)} = 0$ na $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$.
Zato tudi $x \mapsto f^{(m)}(x)\, x^n$ je 0 na $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Zato so $x \mapsto f^{(m)}(x)\, x^n$ omej.
Ker je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Primer $\forall c>0$ je funkcija $f(x) = e^{-cx^2}$ tudi v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Razlog je v tem, da je $f^{(n)}(x) = P_n(x)\cdot e^{-cx^2}$. Če množimo

$$f^{(n)}(x)\, x^m = P_n(x)\, x^m\, e^{-cx^2} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$$

Trditev Naj bo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tedaj so naslednje funkcije tudi elementi v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

1. $f_t : x \mapsto f(x-t)$
2. $f_{(a)} : x \mapsto f(ax)$; $a \neq 0$
3. odvod $f^{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
4. $p \cdot f$, kjer je p polinom
5. $f * g$ kjer je $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Dokaz Trditve 1–4 so dokaj jasne.

Dokažimo še 5. Preveriti moramo, da je $f*g$ gladka in da je $x \mapsto (f*g)^{(n)} x^m$ omejena funk. za n, m.

Po predpostavki sta f, g gladki. Sta tudi v $L^1(\mathbb{R})$. Tudi vsi odvodi $f^{(n)}, g^{(n)}$ so $\in L^1(\mathbb{R})$. Zato se da dokazati, da $(f*g)^n$ obstaja in da velja:

$$(f*g)^{(n)} = f^{(n)} * g$$

$x \mapsto (f*g)^{(n)} x^m$ omej. ?

$$h(x) = (f*g)^{(n)}(x)\, x^m = (\underbrace{f^{(n)}}_{f_1} * g)(x)\, x^m = (f_1 * g)(x)\, x^m$$

Ker je $f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, zadošča dokazati omejenost funkcije $h(x) = (f*g)(x)\, x^m$.

$$|h(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt\; x^m \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)||x^m|\, dt \leq \dots$$

Ker je $|x|^m = |(x-t)+t|^m \leq (|x-t|+|t|)^m \leq |2\max\{|x-t|,|t|\}|^m = 2^m \max\{|x-t|,|t|\}^m =$

$$= 2^m \max\{|x-t|^m, |t|^m\} \leq 2^m (|x-t|^m + |t|^m)$$

$$\dots \leq 2^m \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)| \left(|x-t|^m + |t|^m\right) dt =$$

$$= 2^m \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||x-t|^m |g(t)|\, dt + 2^m \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)||t|^m\, dt \leq \dots$$

Ker sta $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\exists\, C>0$, da je

$$|x-t|^m |f(x-t)| \leq \frac{C}{1+|x-t|^2} \quad \text{in} \quad |t|^m |g(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}$$

$$\dots \leq 2^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{1+|x-t|^2}|g(t)| + \frac{|f(x-t)|\,C}{1+t^2}\, dt \leq 2^m M C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|x-t|^2} + \frac{1}{1+t^2}\, dt < \infty$$

Trditev Če je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Dokaz Dokazati moramo $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ in $\xi \mapsto \xi^m (\hat{f})^{(n)}(\xi)$ omejena.

Ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$. Ker je $xf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je $xf \in L^1(\mathbb{R})$. Po trditvi 5 iz lastnosti Four. transf. sledi obstoj $\hat{f}'$. Za obstoj višjih odvodov DN.

$\xi \mapsto \xi^n (\hat f)^{(n)}(\xi)$ omej. ?

Trditev 5 pravi, da je

$$(\hat f)'(\xi) = -i\, \widehat{x f}(\xi) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

Predpostavka v 5 je: $f \in L^1(\mathbb{R})$ in $x \mapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$
Če uporabimo 5 za funkcijo $x \mapsto x f(x)$ dobimo

$$(\hat f)''(\xi) = (-i)^2\, \widehat{x^2 f}(\xi) = (-i)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

Ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ so vse funk. $x \mapsto x^n f(x)$ tudi v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zato je zgornje upravič.
Po indukciji dobimo $(\hat f)^{(n)}(\xi) = (-i)^n\, \widehat{x^n f}(\xi) = (-i)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x^n f(x) e^{-ix\xi}\, dx.$

$$\xi^n (\hat f)^{(n)}(\xi) = \xi^n (-i)^n\, \widehat{x^n f}(\xi) = \xi^{n-1} (-i)^n\, \xi\, \widehat{x^n f}(\xi) = \xi^{n-1} (-i)^n \frac{1}{i} \widehat{(x^n f)'}(\xi) =$$

$$= \xi^{n-2} (-i)^n \frac{1}{i^2} \widehat{(x^n f)''}(\xi) = (-i)^n (-i)^n\, \widehat{(x^n f)^{(n)}}(\xi)$$

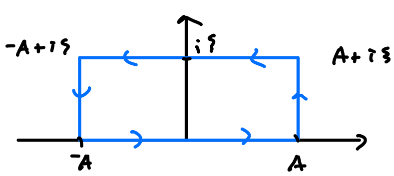
Ker je $\xi \mapsto \xi^n f^{(n)}(\xi)$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ je funkcija $\widehat{(x^n f)^{(n)}}$ omejena po trditvi 1 iz osnovnih lastnosti Four. transf.
Uporabili smo večkrat formulo $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat f(\xi)$

Inverzna Fourierova transformacija

Ključno vlogo igra funk. $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_0(x) = e^{-x^2/2}$

Trditev $\hat g_0 = g_0$ in $\widehat{(g_0)_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{a} e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}}$ za $a > 0$

Dokaz Če velja $\hat g_0 = g_0$.
Spomnimo se, da je $(g_0)_{[a]}(x) = g_0(ax)$
Zato dobimo $\widehat{(g_0)_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{a} \hat g_0\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{1}{a} g_0\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{1}{a} e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}}$



$\hat g_0 = g_0$?
Integrirajmo funkcijo $z \mapsto e^{-z^2/2}$ po pozitivno orient. robu pravokotnika z oglišči $-A, A, A+i\xi, -A+i\xi$. Ker je $z \mapsto e^{-z^2/2}$ hol. na $\mathbb{C}$ je integral po skl. poti po Cauchyjevem izreku enak 0.

Zakaj sploh gledamo integral po za. pravokotniku?
Po def. je

$$\hat g_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2 (x+i\xi)^2}\, dx = \dots$$

Če v zad. int. vpeljemo novo spr. $z = x + i\xi$, postane int. funk. $e^{-z^2/2}$. Če int. v našem primeru pišemo kot $\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \dots$ postane pot int. kriv. z od $-A+i\xi$ do $A+i\xi$. Ker je lim. integralov po navpičnicah 0, ko gre $A \to \infty$ dobimo

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-1/2 (x+i\xi)^2}\, dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-1/2\, x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{\xi^2}{2}} = g_0(\xi)$$

Naj bo $g \in L^1(\mathbb{R})$ taka, da $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$. Za $\delta > 0$ def. $g_\delta(x) = \frac{1}{\delta} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$

Tedaj $\int_{-\infty}^{\infty} g_\delta(x)\,dx = \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{x}{\delta}\right)dx \overset{t=x/\delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 1$. Če je na primer $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, ima g zgornjo lastnost. Potem ima tudi funkcija $g_a(x) = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ to lastnost.

Če ima na primer g komp. nosilec, ga ima tudi g_a.

Trditev Naj bo $g \in L^1(\mathbb{R})$, da je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$.

1. Tedaj za vsako omej. zv. funk. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konv. funk. $f * g_\delta$ proti f enakomerno na vsakem končnem intervalu $[a,b]$, ko gre δ proti 0.
2. Za vsako funk. $f \in L^1(\mathbb{R})$ konv. funk. $f * g_\delta$ proti f v normi prostora $L^1(\mathbb{R})$, ko gre $\delta \to 0$.

Dokaz Naj bo $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Ker je f enak. zv. na $[a,b]$ za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ da je

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_1}$$

za $\forall x \in [a,b]$ in $|t| < \eta$. Tedaj za $x \in [a,b]$ in $0 < \delta \le \eta$ velja

$$|(f * g_\delta)(x) - f(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g_\delta(t)\,dt - f(x)\cdot 1\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g_\delta(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g_\delta(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_{|t|<\eta} |f(x-t) - f(x)|\,|g_\delta(x)|\,dt + \int_{|t|\ge\eta} |f(x-t) - f(x)|\,|g_\delta(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{2\|g\|_1}\int_{|t|<\eta} |g_\delta(t)|\,dt + 2M\int_{|t|\ge\eta} |g_\delta(t)|\,dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\|g\|_1}\frac{1}{\delta}\int_{|t|<\eta} g\left(\frac{t}{\delta}\right)dt + \frac{2M}{\delta}\int_{|t|\ge\eta} \left|g\left(\frac{t}{\delta}\right)\right|dt \overset{\frac{t}{\delta}=u}{=} \frac{\varepsilon}{2\|g\|_1}\int_{|u|<\eta/\delta} |g(u)|\,du + 2M\int_{|u|\ge\eta/\delta} |g(u)|\,du \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2\|g\|_1}\int_{\mathbb{R}} |g(u)|\,du + 2M\int_{|u|\ge\eta/\delta} |g(u)|\,du = \frac{\varepsilon}{2} + 2M\int_{|u|\ge\eta/\delta} |g(u)|\,du \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ker je $g \in L^1(\mathbb{R})$ $\exists$ tako majhen $0 < \delta < \eta$ da je $\int_{|u|\ge\eta/\delta} |g(u)|\,du < \frac{\varepsilon}{2\cdot 2M}$

Za $|t| < \delta$ velj. $|f(x) * g_\delta(x) - f(x)| < \varepsilon$ za $\forall x \in [a,b]$. $\square$

V posebnem primeru vidimo, da funk. $f * g_\delta$ konv. proti f po točkah, ko gre $\delta \to 0$.
Na int. $[a,b]$ konv. enak. in zato tudi po točkah.

Posledica Za $\forall$ zv. funk. f z nosilcem v $[a,b]$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja zaporedje gladkih funkcij f_n z nosilci v intervalu $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, ki konv. enak. proti f.

Ideja Uporabi prejšnjo trditev za funkcijo $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ali sploh obstajajo funkcije v $C_c^\infty(\mathbb{R})$? Da

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

je primer take funkcije. S translacijo in raztegom funkcij v $C_c^\infty(\mathbb{R})$, ki ima nosilec v katerikoli interv....

Izrek Weierstrassov aproksimacijski izrek

Za vsako zv. funkcijo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja polinom $p \in \mathbb{R}[x]$, da za $\forall x \in [a,b]$ velja $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

Opomba Izrek pravi, da so polinomi gosti v $(C[a,b], d_\infty)$, kjer je d_∞ sup. metr.

Ideja Uporabi trditev in za g vzemi Gaussovo jedro $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Funk. g razvij v Tay. vrsto in vzemi dovolj pozno delno vsoto. Ta delna vsota je iskani polinom.

Izrek Inverzna formula za Fourierovo transformacijo

Za $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ velja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs} \, ds$$

Opomba

1. Inverzno formulo lahko zapišemo strnjeno $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$
2. S podpisom $\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{ixs} \, ds$ za $f \in L^1(\mathbb{R})$ je podana inverzna Fourierova transf.
3. Inverzna formula ima smisel ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

Dokaz Glavna ideja: iz $\hat{f}$ pod int. želimo dobiti f. Dodali bomo funk g, na katero bo prešlo stvari.
Ta funk. g mora biti $\in L^1(\mathbb{R})$. Za g vzamemo $g(s) = e^{-\frac{1}{2}a^2 s^2}$; $a > 0$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\hat{f}(s) e^{ixs}}_{\text{om. zv.}} e^{-\frac{1}{2}a^2 s^2}}_{\text{int. konv. abs.}} \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(x-t)s} e^{-\frac{1}{2}a^2 s^2} \, dt = \ldots$$

Ker sta int. abs. konv. lahko zamenjamo vrstni red integracij. Dobimo

$$\ldots = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-t)s} e^{-\frac{1}{2}a^2 s^2} \, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{(g_a)_{[a]}}(t-x) \, dt \overset{g_a \text{ soda}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{(g_a)_{[a]}}(x-t) \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{a} e^{-\frac{(x-t)^2}{2a^2}} \, dt \overset{y = x-t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \frac{1}{a} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} \, dy = \ldots$$

Vpeljimo Gaussovo jedro $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$. Tedaj $g_a(y) = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2a^2}}$

$$\ldots = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g_a(y) \, dy = (f * g_a)(x)$$

Dokazali smo $(f * g_a)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs} e^{-\frac{1}{2}a^2 s^2} \, ds$. Pošljimo $a \to 0$. Ker je $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ se da dokazati, da desna stran konv. proti $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs} \, ds$.
Leva stran pa po trditvi o aproksimaciji s konvolucijami konvergira proti $f(x)$.

Opomba Ča je v prejšnji trditvi $f \in L^1(\mathbb{R})$, ki ni nujno $\in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ in če je še $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, potem velja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs} \, ds$$

za skoraj vse $x \in \mathbb{R}$. To pomeni, da enakost ne velja na množici z Leb. mero 0. Primeri takih mn. so št. množice. Če se funkcija ujemata povsod razen na mn. z ničelno mero in če sta obe v $L^1(\mathbb{R})$, potem se tudi int. ujemata, kar pomeni v praksi poenoti te funkcije enačimo.

Primer $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Izračunaj $\hat{f}(x)$. Vpeljimo še $g(x) = e^{-|x|}$. Vemo že $\hat{g}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+s^2}$

$$\Rightarrow \hat{g} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f \Rightarrow \hat{\hat{g}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{f} \Rightarrow \hat{f} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\hat{g}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g(-s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$$

Lema Riemann-Lebesguova lema

Za funk. $f \in L^1(\mathbb{R})$ velja $\lim_{|s| \to \infty} \hat{f}(s) = 0$

Dokaz Naj bo f najprej $f = \chi_{[a,b]}$. Tedaj je

$$|\hat{f}(s)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixs} \, dx \right| = \left| \frac{e^{-ibs} - e^{-ias}}{-\sqrt{2\pi} \, is} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|s|} \xrightarrow{|s| \to \infty} 0$$

Ker je Four. transf. lin., trditev velja tudi v primeru, ko je f oblike $f = \lambda_1 \chi_{[a_1,b_1]} + \dots + \lambda_n \chi_{[a_n,b_n]}$. Naj bo sedaj $f \in C_c(\mathbb{R})$. Tedaj je f nič izven $[a,b]$. Ker je f enak. zv. na $[a,b]$, za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja taka delitev $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, da je $|f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, če sta t in t' v istem delitvenem intervalu. Izberimo $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ in def. $s(x) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j) \chi_{[x_{j-1}, x_j)}$. Izračunajmo

$$\|f - s\|_1 = \int_a^b |f - s| \, dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - s(x)| \, dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - f(t_j)| \, dx \le \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \left((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \right) = \varepsilon$$

Zapišimo $f = f - s + s$. Ker je

$$|\hat{f}(s)| = |\widehat{f - s + s}(s)| = |\widehat{f-s}(s) + \hat{s}(s)| \le |\widehat{f-s}(s)| + |\hat{s}(s)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - s\|_1 + \|\hat{s}(s)\| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + |\hat{s}(s)|$$

Ker za s velja trditev, $\exists$ tak $M > 0$, da je $|\hat{s}(s)| < \varepsilon$, če je $|s| \ge M$. Za tak s velja $|\hat{f}(s)| \le \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$. Zato tudi f zadošča Riemann-Leb. lemi. Če je $f \in L^1(\mathbb{R})$ poljubna, najdemo tako funk. $s \in C_c(\mathbb{R})$, da je $\|f - s\|_1 < \varepsilon$. Tedaj po zg. dokazu $\exists$ tak $M' > 0$, da velja $|\hat{s}(s)| < \varepsilon$, če je $|s| \ge M$. To pomeni:

$$|\hat{f}(s)| \le |(\hat{f} - \hat{s})(s)| + |\hat{s}(s)| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + \varepsilon$$

Plancherelov izrek

Fourierova transf. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ slika L^1-funkcije v zv. funkcije, ki strmijo proti 0 v "neskončnosti" (glej Riemann-Leb. lemo). Po drugi strani pa velja $\mathcal{F} : \mathcal{G}(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}(\mathbb{R})$ $(f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{G}(\mathbb{R}))$.

Če opremimo $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ z $\|\cdot\|_1$, je zaradi $C_c(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ prostor $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ gost v $L^1(\mathbb{R})$.

Lema $\mathcal{F} : \mathcal{G}(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}(\mathbb{R})$ je bijektivna.

Dokaz Če je $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}) \to \hat{f}, \hat{\hat{f}}, \hat{\hat{\hat{f}}}, \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}}, \dots \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$

Inverzna formula pri $\mathcal{F}^2(f)(x) = f(-x)$. Če je $g = \mathcal{F}^2(f)$ je $(\mathcal{F}^2 g)(x) = g(-x) \Rightarrow$ $\mathcal{F}^4(f)(x) = \mathcal{F}^2(f)(-x) = f(-(-x)) = f(x) \Rightarrow \mathcal{F}^4 = Id = \mathcal{F} \circ (\mathcal{F}^3) = \mathcal{F}^3 \circ \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ je bijekcija

Opomba Če je $f \circ g = Id \Rightarrow f$ surj. in g inj. (znano dejstvo iz Mat. a)

Def Definirajmo $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \, dx$, $f, g \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$

Trditev Preslikava $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je dobro def. skal. prod. na $\mathcal{G}(\mathbb{R})$

Dokaz Preverimo le dobro definiranost saj se lastnost skal. prod. preverijo rutinsko kot pri lin. alg.
Dokažimo da int. konv. abs.

$$|f(x) \cdot \bar{g}(x)| \le \tfrac{1}{2} (|f|^2 + |g|^2) \overset{f, g \in \mathcal{G}(\mathbb{R})}{\le} \frac{M}{2} (|f(x)| + |g(x)|)$$

Ker $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, int. konv. in zato naš int. konv. abs.
Ker je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sk. prod. na $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ je $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ norma na $\mathcal{G}(\mathbb{R})$, pripadajoča metrika je def kot $d_2(f, g) = \|f - g\|_2$.

Trditev Za $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ velja $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$

Opomba Trditev pravi, da Four. transf ohranja sk. prod. in posledično, če $f = g$ dobimo $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ oz. $d_2(f, g) = \|f - g\|_2 = \|\widehat{f-g}\|_2 = \|\hat{f} - \hat{g}\|_2 = d_2(\hat{f}, \hat{g})$. Zato je Four. transf. na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bijektivna izometrija.

Dokaz Uporabili bomo inv. Four. transf.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(x)\, e^{ixs}}\, ds\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}}(s)\, \hat{f}(s)\, ds = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Izrek Plancherelov izrek

Fourierovo transf. lahko iz prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ enolično razširimo do unitarnega operatorja na Hilbertovem prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Opomba Če je $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ prostor s skal. prod., potem ga opremimo z normo $\|v\| = \langle v, v \rangle$ oz metriko $d(u, v) = \|u - v\|$. Če je (V, d) poln metričen prostor, potem je $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbertov prostor.
Unitarni operator $U : H \to H$, kjer je H Hilb. prostor je tak operator (lin. pasl.) za katerega velja $U^* U = U U^* = I_H$ oz. ekvivalentno U je surj. in $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle\ \forall x, y \in H$ oz. ekv. U je surj. in $\|Ux\| = \|x\|\ \forall x \in H$.

Prostor $L^2(\mathbb{R})$ def. kot napolnitev prostora $C_c(\mathbb{R})$ glede na d_2, def kot $d_2(f, g) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx}$

Kako ležijo oz kje so vsebovane Schwartzove funkcije?
Vemo $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$. Vemo da $C_c(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \overset{?}{\subseteq} L^2(\mathbb{R})$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists M > 0$ da je $|f(x)| \leq \frac{M}{1+x^2} \Rightarrow |f(x)|^2 \leq \frac{M^2}{(1+x^2)^2}$

Ker obstaja $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M^2}{(1+x^2)^2} dx$ je $f \in L^2(\mathbb{R})$
$\Rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ so gost prostor v $L^2(\mathbb{R})$

Dokaz Plancherelovega izreka
Naj bo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Def $\hat{f}$. Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ki konv. proti f v $L^2(\mathbb{R})$.
Zato je $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjevo. Ker je $\|f_n - f_m\| = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|$ je $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjevo v $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$. Zato obstaja $f_0 = \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n$. Def. $\hat{f} = f_0$. Ali je to dobra def! Naj bo $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neko drugo zap. v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ki konv. proti f. Zato $f_n - g_n \to 0$. Ker je $\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\| = \|f_n - g_n\| \to 0$ in ker $\hat{f}_n \to f_0$, tudi $\hat{g}_n \to f_0$. Zato je f_0 neodvisen od izbire $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ki konv. k f.

Zato je razširitev def. s predpisom $\hat{f} = \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n$ dobra.
Skal. prod. na $L^2(\mathbb{R})$ def. preko lim: če je $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ potem poiščemo zap. funkcij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ali $C_c(\mathbb{R})$, da $f_n \to f$ in $g_n \to g$
def $\langle f, g \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle f_n, g_n \rangle$. To je dobro def sk. prod. na $L^2(\mathbb{R})$, ki porodi polno metriko $d_2 \Rightarrow L^2(\mathbb{R})$ je Hilbertov prostor.

$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \overset{?}{=} \langle f, g \rangle$ za $f, g \in L^2(\mathbb{R})$
$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \hat{f}_n, \hat{g}_n \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle f_n, g_n \rangle = \langle f, g \rangle$

Preverimo še surjektivnost $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$
Če je $f \in L^2(\mathbb{R})$. Obstaja zap. funk. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$, da $f_n \to f$. Tedaj $\hat{f}_n \to \hat{f} \Rightarrow$
$\hat{\hat{f}}_n \to \hat{\hat{f}} \Rightarrow \hat{\hat{\hat{f}}}_n \to \hat{\hat{\hat{f}}} \Rightarrow \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}}_n \to \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f_n \to f$
$\Rightarrow \mathcal{F}^4 = Id$ na $L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}$ je surj. na $L^2(\mathbb{R})$

Uporaba Fourierove transformacije pri reševanju toplotne enačbe

$u_t = u_{xx}$ za $x \in \mathbb{R}$ in $t > 0$, $u(x,0) = e^{-4x^2}$

V splošnem (pod posebnimi pogoji) velja $\hat{f'}(s) = is\hat{f}(s)$. Zato $\hat{f''}(s) = is\hat{f'}(s) = -s^2\hat{f}(s)$

V splošnem $\widehat{f^{(n)}}(s) = (is)^n \hat{f}(s)$.

Pri nas je $u = u(x,t)$. Naredimo Four. transf. po spr. x. Dobljeno funkcijo pišemo ($\hat{u} \to U$)

$$\hat{u} = U = U(s,t)$$

$$U_t(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} u_t(x,t)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} u_{xx}(x,t)\,dx =$$

$$= (is)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} u(x,t)\,dx = (is)^2 U(s,t) = -s^2 U(s,t)$$

$$\Rightarrow \frac{U_t}{U} = -s^2 \Rightarrow U(s,t) = C(s)e^{-s^2 t}$$

Transformiramo začetni pogoj

$$U(s,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2} e^{-ixs}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{16}}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{16}} \Rightarrow U(s,t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{16}} e^{-s^2 t}$$

Izračunamo še $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(s,t) e^{ixs}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{16}} e^{-s^2 t} e^{ixs}\,ds =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2(t+\frac{1}{16})} e^{ixs}\,ds \dots = \frac{1}{\sqrt{16t+1}} e^{-\frac{4x^2}{16t+1}}$$

Zgoraj smo uporabili dualnost: $e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} \xrightarrow{\wedge} \frac{1}{a} e^{-\frac{s^2}{2a^2}}$

Reševanje lin. dif. enačb 2. reda s potenčnimi vrstami

Dana je DE $y'' + py' + qy = 0$, kjer sta p in q ustrezni funkciji. Če sta p, q konstanti $\Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \Rightarrow y = \dots$ Če p, q nista konstanti imamo težave z določitvijo katerekoli netrivialne rešitve. Če bi poznali eno rešitev, drugo hitro dobimo s pomočjo Liouvillove formule oz. determinante Wronskega. Vsekakor je prostor rešitev, če sta p, q zvezni, dvorazsežen (na intervalu).

Enačbo $y'' + py' + q = 0$ rešujemo s pomočjo razvoja v vrsto. Namesto realne spremenljivke opazujemo kompleksno spremenljivko. Naj bosta p, q holom. funk. na neki okolici točke 0.

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad \text{in} \quad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k \qquad p_k, q_k \in \mathbb{C} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Recimo, da enačba $y'' + py' + q = 0$ ima rešitev katero lahko razvijemo v potenčno vrsto

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \text{ pri čemer so } c_k \in \mathbb{C} \text{ neznani koeficienti } \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \to y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} z^j \to y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1) c_{j+2} z^j$$

Vstavimo vrste za y, y', y'', p in q v DE

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}z^k+\sum_{i=0}^{\infty}p_i z^i\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)c_{j+1}z^j+\sum_{i=0}^{\infty}q_i z^i\sum_{j=0}^{\infty}c_j z^j=0$$

Zmnožimo oba produkta in pogrupiramo člene pri istoležnih potencah

Opomba Če vrsti $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ konv. abs. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ je neodvisen od vrstnega reda seštevanja

Če imajo vrste za y, p, q isti konv. radij $r>0$, potem vrste za y, y', y'', p in q konv. absolutno na $D(0,r)$.

Zato zgornje vrste preuredimo

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{j=0}^{k}\left((j+1)c_{j+1}p_{k-j}+q_{k-j}c_j\right)\right)z^k$$

Ker te vrste konvergira na $D(0,r)$ so vsi koeficienti pri z^k ničelni

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{j=0}^{k}\left((j+1)c_{j+1}p_{k-j}+q_{k-j}c_j\right)=0 \qquad \forall k\in\mathbb{N}_0$$

$$\boxed{c_{k+2}=-\frac{\sum_{j=0}^{k}\left((j+1)c_{j+1}p_{k-j}+q_{k-j}c_j\right)}{(k+2)(k+1)}}$$

Če poznamo $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$ potem določimo c_{k+2} na zg. način.

Izberimo $c_0, c_1 \Rightarrow c_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow c_k \Rightarrow \dots$

Na ta način dobimo $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$. V praksi vstaviš v DE formalno pot. vrsto $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$. jo formalno dvakrat odvajaš in določiš koeficiente. Ali dobiš kaj smiselnega?

Izrek Če sta p in q hol. funk. na krogu $D(\alpha, R)$, potem za polj. komp. števili c_0 in c_1 $\exists$ natanko ena rešitev y DE $y''+py'+qy=0$ ki je hol. na krogu $D(\alpha,R)$ in zadošča pogoju $y(\alpha)=c_0$ in $y'(\alpha)=c_1$.

Ideja dokaza: Za zgornjo form. vrsto za y dokažeš, da hol. na $D(\alpha,R)$ pri čemer je $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-\alpha)^k$, za c_k pa velja zg. zveza.

Primer Reši $y''+y=0$ s pomočjo razvoja v vrsto. Pričakujemo $y_1=\sin z$, $y_2=\cos z$

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \qquad y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}z^k \qquad y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}z^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k+(k+2)(k+1)c_{k+2}\right)z^k=0$$

$$c_k+(k+2)(k+1)c_{k+2}=0 \qquad c_{k+2}=\frac{-c_k}{(k+2)(k+1)} \qquad \forall k\in\mathbb{N}_0$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2\cdot 1} \qquad c_4=-\left(\frac{c_0}{2\cdot 1}\right)\frac{1}{4\cdot 3}=(-1)^2\frac{c_0}{4!} \qquad c_6=(-1)^3\frac{c_0}{6!} \qquad c_{2k}=(-1)^{2k}\frac{c_0}{(2k)!}$$

in podobno za $c_{2k-1}=(-1)^{2k-1}\frac{c_1}{(2k-1)!}$

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k=c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}+c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=c_0\cos z+c_1\sin z$$

Opomba: Ker sta $p=0$ in $q=1$ hol. na $\mathbb{C}$ po izreku mora tudi y biti hol. na $\mathbb{C}$.

Def: Točka α je regularna točka dif. en. $y'' + py' + qy = 0$, če sta p in q hol. na neki okolici točke α. Če α ni regularna točka je singularna. Točka α je pravilna singularna točka enačbe, če sta p in q hol. funk. na neki punktirani okolici točke α (hol. na okolici α razen morda v α), v α ima p pol stopnje največ 1, q pa pol stopnje največ 2.

Primer:

1. $$\boxed{y'' - \frac{2z}{1-z^2} y' + \frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2} y = 0}$$ Legendrova dif. en.

$$p = -\frac{2z}{1-z^2} \qquad q = \frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2}$$

p in q imata dva pola reda 1. 1 in -1 sta pravilni singularni točki, ostale točke so regularne.

2. Besselova DE

$$y'' + \frac{1}{z} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0$$

0 je pravilna sing. točka. Ostale točke so regularne.

Besselova DE

$$\boxed{z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0}$$

3. Gaussova hipergeometrijska enačba

$$\boxed{z(1-z) y'' + (c - (a+b+1)z) y' - ab y = 0}$$

a, b, c polj. konstante. 0 in 1 sta pravilni sing. točki.

Rešimo DE $y'' + py' + qy = 0$ v okolici pravilne sing. točke α. BŠS $\alpha = 0$. Tedaj sta funkciji $z \mapsto z\,p(z)$ in $z \mapsto z^2 q(z)$ hol. na okolici $\alpha = 0$

$$z \cdot p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \qquad \text{in} \qquad z^2 q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$$

Naj konv. na $D(0, R)$. Rešitev DE iščemo v obliki:

$$y = z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\mu+k}$$

Množimo DE z z^2 ⇒

$$z^2 z'' + z^2 p(z) y' + z^2 q(z) y = 0$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\mu+k} \qquad y' = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k) c_k z^{\mu+k-1} \qquad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k)(\mu+k-1) c_k z^{\mu+k-2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k)(\mu+k-1) c_k z^{\mu+k} + \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} (\mu+j) c_j z^{\mu+j} + \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i \sum_{k=0}^{\infty} c_j z^{\mu+j} = 0$$

Koef. pred $z^{\mu+k}$ je enak 0 $\qquad 0 = (\mu+k)(\mu+k-1) c_k + \sum_{j=0}^{k} \left(p_{k-j} (\mu+j) c_j + c_j q_{k-j}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\left((\mu+k)(\mu+k-1+p_0) + q_0\right) c_k = -\sum_{j=0}^{k-1} \left(p_{k-j}(\mu+j) + q_{k-j}\right) c_j} \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots$$

$c_0 \Rightarrow c_1 \Rightarrow \dots$

Določiti moramo še μ. Tega določimo pri členu z^μ ($k=0$)

$$0 = \mu(\mu-1)c_0 + p_0\mu c_0 + q_0 c_0 = 0$$

$$c_0\left(\mu(\mu-1+p_0) + q_0\right) = 0$$

Če $c_0 = 0$ potem "podtaknemo" z k z^μ da dobimo neničelni koeficient. Na ta način dosežemo kar tak $c_0 \neq 0$. Zato

$$\boxed{\mu(\mu-1+p_0)+q_0=0}$$

Ta enačba se imenuje določilna zveza za koef. μ, enačba * je rekurzivna zveza za koef. c_k.
Rešitve enačbe

$$\mu(\mu-1+p_0)+q_0 = \mu^2 + \mu(p_0-1)+q_0 = 0$$

imenujemo karakteristična eksponenta. Karakt. eksp. uredimo tako, da je $\mathrm{Re}\,\mu_1 \geq \mathrm{Re}\,\mu_2$

Označimo $f(\mu) = \mu(\mu-1+p_0)+q_0$ ← polinom st. 2, ničli sta μ_1 in μ_2

$$\Rightarrow f(\mu) = (\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)$$

Spomnimo se rekurzivne zveze

$$\underbrace{\left((\mu+k)(\mu+k-1+p_0)+q_k\right)}_{f(\mu+k)} c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}\left((\mu+j)p_{k-j}+q_{k-j}\right)c_j \qquad \forall k=1,2,\dots$$

$$(\mu+k-\mu_1)(\mu+k-\mu_2)c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}\left((\mu+j)p_{k-j}+q_{k-j}\right)c_j \qquad \forall k=1,2,\dots$$

Vstavimo μ_1 in μ_2

Najprej μ_1 $\qquad k(\mu_1+k-\mu_2)c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}\left((\mu_1+j)p_{k-j}+q_{k-j}\right)c_j$

Ker je $\mathrm{Re}\,\mu_1 \geq \mathrm{Re}\,\mu_2$, imamo $k+\mu_1-\mu_2 \neq 0$. V tem primeru dobimo

$$\boxed{c_k = \frac{-\sum_{j=0}^{k-1}\left((\mu_1+j)p_{k-j}+q_{k-j}\right)c_j}{k(k+\mu_1-\mu_2)}}$$

Primer $\mu=\mu_2$

$$k(k+\mu_2-\mu_1)c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}\left((\mu_2+j)p_{k-j}+q_{k-j}\right)c_j$$

Zgodi se lahko da je $\mu_1-\mu_2 \in \mathbb{N}$. Če je $\mu_1-\mu_2 = n \in \mathbb{N}$, potem dobimo

$$k(-n+k)\,c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}\left((\mu_2+j)p_{k-j}+q_{k-j}\right)c_j$$

Če je $k=n$ je leva stran enaka 0. V tem primeru postavimo $c_0=c_1=\dots c_{n-1}=0$
Sedaj so enačbe izpolnjene vse do $k=n$. Izberemo $c_n\neq 0$ in izračunamo po zg. formuli
vse nadaljnje koef. $c_{n+1}, c_{n+2}, \dots$ Ker smo "preskočili" nekaj potenc v razvoju

za $\mu = \mu_2$, ta postopek morda da lin. odv. rešitev od rešitve, ko naredimo postopek za μ_1.

Izrek Če je α pravilna sing. točka enačbe $y'' + py' + qy = 0$ in sta funkciji $z \mapsto (z-\alpha)p(z)$ in $z \mapsto (z-\alpha)^2 q(z)$ hol na $D(\alpha, R)$, potem $\exists$ vsaj ena rešitev oblike

$$y = (z-\alpha)^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k$$

kjer int. konv. na $D(\alpha, R)$. Če razlika $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{N}$, kjer je $\operatorname{Re}\mu_1 \geq \operatorname{Re}\mu_2$ potem drugo lin. neodv. rešitev dobimo v nastavku

$$y = (z-\alpha)^{\mu_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-\alpha)^k$$

kjer tu konv. na $D(\alpha, R)$

Primer

$$4z^2 y'' + 2zy' + zy = 0$$

$$y'' + \frac{y'}{2z} + \frac{y}{4z} = 0$$

$p(z) = \frac{1}{2z}$ $\quad q(z) = \frac{1}{4z}$ $\quad$ 0 pravilna singularnost.

Množimo z z^2

$$z^2 y'' + \frac{zy'}{2} + \frac{zy}{4} = 0$$

Izračunamo določilno enačbo za μ

$$\mu(\mu - 1 + p_0) + q_0 = 0$$

Vstavimo p_0 in q_0

$$z \cdot p(z) = \frac{1}{2} \Rightarrow p_0 = \frac{1}{2} \qquad z^2 q(z) = \frac{z}{4} \Rightarrow q_0 = 0$$

$$\mu\left(\mu - 1 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$\mu_1 = 1/2$ $\quad \mu_2 = 0$, ker $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{N}$ dobimo dve lin. neodv. rešitvi

Primer $\mu = \mu_1 = 1/2$

$$y_1 = z^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+1/2}$$

Vstavimo v DE

$$4\sum_{k=0}^{\infty} \left(k+\tfrac{1}{2}\right)\left(k-\tfrac{1}{2}\right) c_k z^{k+1/2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(k+\tfrac{1}{2}\right) c_k z^{k+1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+3/2} = 0$$

Koef pri $z^{k+1/2}$ je enak 0

$$0 = 4\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\left(k-\tfrac{1}{2}\right) c_k + 2\left(k+\tfrac{1}{2}\right) c_k + c_{k-1}$$

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{2k(2k+1)} \qquad \forall k = 1, 2, \dots$$

Izberimo si $c_0 = 1$ $\quad c_1 = -\frac{1}{2\cdot 3}$ $\quad c_2 = +\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ $\quad c_k = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}$

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{k+1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sqrt{z}^{\,2k+1} = \sin\sqrt{z}$$

Primer $\mu_2 = 0$

$$y_2 = z^0 \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \qquad y_2' = \sum_{k=0}^{\infty} k d_k z^{k-1} \qquad y_2'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) d_k z^{k-2}$$

Vstavimo v DE

$$4\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) d_k z^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} k d_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{k+1} = 0$$

Poglejmo člen z^k

$$4k(k-1)d_k + 2k d_k + d_{k-1} = 0$$

$$d_k = \frac{-d_{k-1}}{2k(2k-1)}$$

$$d_0 = 1 \qquad d_1 = -\frac{c_0}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2\cdot 1} \qquad \Rightarrow \quad d_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\sqrt{z})^{2k} = \cos\sqrt{z}$$

Izrek Naj bo 0 pravilna sing. točka DE $y'' + py' + qy = 0$ in naj bosta μ_1 in μ_2 karakt. eksponenta, urejena tako, da $\mathrm{Re}\,\mu_1 \geq \mathrm{Re}\,\mu_2$. Naj bo $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{N}$. Naj enačba nima dveh lin. neodv. rešitev oblike $y = z^{\mu_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ in $y_2 = z^{\mu_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Potem je ena rešitev oblike $y_1 = z^{\mu_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, druga pa je oblike $y_2 = y_1 \ln z + z^{\mu_2} f(z)$ kjer je f holom. funk. na okolici točke 0 in velja $f(0) \neq 0$.

Opomba V dokazu uporabimo det Wronskega. Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi DE $y'' + py' + qy = 0$. Det Wronskega

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Ker y_1, y_2 rešita DE je $W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$. $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ delimo z y_1^2

$$\frac{W}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W}{y_1^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 \underbrace{\int \frac{W}{y_1^2}\,dx}_{v}$$

Določimo v. Ker je $v' = \frac{W}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(z)\,dz}$

Sedaj si vstavili $y_1 = z^{\mu_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ in $p(z) = \frac{p_{-1}}{z} + p_0 + p_1 z + \dots$
Upoštevaj $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{N}$, ...

Besselova enačba in Besselove funkcije

Besselova dif. en. je en. oblike

$$\boxed{z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0 \qquad \nu \geq 0}$$

Ker je $y'' + \frac{y'}{z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0$ je 0 pravilna sing.

$z\,p(z) = 1$ in $z^2 q(z) = z^2 - \nu^2 \Rightarrow p_0 = 1$ in $q_0 = -\nu^2$

Določilna enačba $\mu(\mu - 1 + p_0) + q_0 = \mu(\mu - 1 + 1) - \nu^2 = 0 \qquad \mu^2 - \nu^2 = 0$

$\Rightarrow \mu = \pm \nu$

Ker je $\operatorname{Re}\mu_1 \geq \operatorname{Re}\mu_2$ dobimo eno rešitev $\quad y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\nu}$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\nu) c_k z^{k+\nu-1} \qquad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\nu)(k+\nu-1) c_k z^{k+\nu-2}$$

Vstavimo v DE $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \left((k+\nu)(k+\nu-1) + (k+\nu) - \nu^2\right) c_k z^{k+\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\nu+2} = 0$

Koef. pri $z^{k+\nu}$

$$\left((k+\nu)(k+\nu-1) + (k+\nu) - \nu^2\right) c_k + c_{k-2} = 0 \qquad k = 2, 3, \dots$$
$$\left((k+\nu)^2 - \nu^2\right) c_k + c_{k-2} = 0$$

$$\boxed{c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)}} \quad ; \quad k = 2, 3, \dots$$

Koeficient pri $z^{1+\nu}$ je enak $\left[(1+\nu)\nu + 1 + \nu - \nu^2\right] c_1 = 0$

$\Rightarrow 0 = \left((1+\nu)^2 - \nu^2\right) c_1 = (1 + 2\nu) c_1 \overset{\nu \geq 0}{\Rightarrow} c_1 = 0$

Iz zasorednje zveze dobimo $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$ V vrsti ostanejo le c_{2k}

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2+2\nu)} \qquad c_4 = -\frac{c_2}{4(4+2\nu)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot (2+2\nu)(4+2\nu)} \qquad \dots$$

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k \,(2+2\nu)(4+2\nu)\cdots(2k+2\nu)}$$

Izberimo $\quad c_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!} \qquad (\Gamma(n) = (n-1)! \longrightarrow \nu! = \Gamma(\nu+1)) \Rightarrow$ konst. koef. je 1

$J_\nu(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} k!\, \Gamma(\nu+k+1)} = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} k!\, (\nu+k)!}$$

$$\boxed{J_\nu(z) = J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, 2^{\nu+2k}\, \Gamma} z^{\nu+2k}}$$ Besselove funkcije reda ν

J_ν konvergira povsod na $\mathbb{R}$. Razlog leži v tem, da je $z\,p(z) = 1$ in $z^2 q(z) = z^2 - \nu^2$, ki sta holomorfni na $\mathbb{C}$. Zato po izreku dobimo rešitev na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. V $z = 0$ pa vrsta konv.

Primer $\quad -\nu$ oz. kako je z rešitvijo?

(1) če $\nu - (-\nu) \notin \mathbb{N}$ potem ima Bess. DE lin. neodv. rešitev oblike

$$y_2 = z^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

② $\nu-(-\nu)\in\mathbb{N} \Leftrightarrow 2\nu\in\mathbb{N}$

Kot v primeru ν dobimo enačbo

$$k(k-2\nu)\,c_k = -c_{k-2}$$

1. primer $\nu\notin\mathbb{N} \Leftrightarrow 2\nu$ je liho število ($2\nu=2n \Leftrightarrow n=\nu \Leftrightarrow \nu\in\mathbb{N}$)
V enačbi za $k=2\nu$ dobimo $c_{k-2}=0$. Če postavimo $c_{2j+1}=0$, potem je enačba izpolnjena za lihe indekse. Tako smo definirali $c_{2n+1}=0$. Dalje je c_{2n}

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2n(2n-2\nu)}$$

Kot v primeru J_ν dobimo

$$J_{-\nu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac z2\right)^{2n-\nu}}{n!\,(n-\nu)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac z2\right)^{2n-\nu}}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)}$$

Funkciji J_ν in $J_{-\nu}$ sta rešitvi Bes. DE. Ker je pri $n=0$ člen od funkcije $J_{-\nu}$ enak $\frac{(\frac z2)^{-\nu}}{(-\nu)!}$ neomejen okoli izhodišča, člen od J_ν pa $\frac{(\frac z2)^{\nu}}{\Gamma(\nu)}$ omejen, sta J_ν in $J_{-\nu}$ lin. neodv.

Trditev Za $\nu\notin\mathbb{N}$ je splošna rešitev Bess. DE oblike $c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}$

Primer Izračunajmo $J_{1/2}$ in $J_{-1/2}$

$$J_{1/2}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1/2}}{2^{2n+1/2}\, n!\,(n+\frac12)!} = \sqrt{\frac 2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^{2n+1}\, n!\,(n+\frac12)(n-\frac12)\cdots\frac12\sqrt\pi}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{\underbrace{2^n n!}_{2n(2n-2)\cdots}(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

Podobno je $J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \qquad J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

Trditev Velja $\frac{d}{dz}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = z^\nu J_{\nu-1}(z)$ in $\frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}J_\nu(z)\right) = -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)$

Dokaz $J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}\,n!\,(\nu+n)!} \to z^\nu J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu}\,n!\,(\nu+n)!} \to (z^\nu J_\nu(z))' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2\nu)\frac{z^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu}\,n!\,(\nu+n)!} =$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu-1}\,n!\,(\nu-1+n)!} = z^\nu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+\nu-1}}{2^{2n+\nu-1}\,n!\,(\nu-1+n)!} = z^\nu J_{\nu-1}(z)$$

Trditev Velja

$$J_\nu'(z)+\frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) \quad \text{in} \quad J_\nu'(z)-\frac{\nu}{z} J_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z)$$

$$\frac{2\nu}{z}\cdot J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z) \quad \text{in} \quad 2J_\nu'(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$$

Dokaz Zadnji formuli sledita iz prejšnjih dveh (seštejemo / odštejemo)
Dokaz 1. formule

$$\underset{\substack{\| \\ z^\nu J_{\nu-1}(z)}}{\frac{d}{dz}\left(z^\nu J_\nu(z)\right)} = \nu z^{\nu-1} J_\nu(z) + z^\nu J_\nu'(z)$$

Če delimo z z^{ν} dobimo 1. formulo. 2. formula sledi iz zveze $\frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}J_\nu(z)\right) = -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)$

Opomba $J_0' = J_{-1} = -J_1$

Primer Vstavimo $\nu = \frac{1}{2}$ v enačbo $\frac{2\nu}{z}J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$

$$\to \frac{1}{z}J_{1/2}(z) = J_{-1/2}(z) + J_{3/2}(z) \Rightarrow J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right)$$

Trditev Vse funkcije oblike $J_{k+1/2}$ za $k \in \mathbb{Z}$ so elementarne in jih izračunamo iz rek. zveze

$$\frac{2\nu}{z}J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$$

Dokaz Indukcija po $n \in \mathbb{N}$ oz. po $n \in -\mathbb{N}$

2. primer Nadaljnja obravnava primera $2\nu \in \mathbb{N}$ $\quad \nu = m$

Ena od rešitev je $J_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+m}}{2^{2k+m}\,k!\,(m+k)!}$. Postopek iz 1. primera nam da $(-k)! = \Gamma(-k+1) = \infty$ za $k = 1, 2, \dots$

$$J_{-m} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-m}}{2^{2n-m}\,n!\,(n-m)!} = \sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-m}}{2^{2n-m}\,n!\,(n-m)!} \underset{n-m=k}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{m+k}\frac{z^{m+2k}}{2^{m+2k}\,(m+k)!\,k!}$$

$$= (-1)^m \sum (-1)^k \frac{z^{m+2k}}{2^{m+2k}\,(m+k)!\,k!} = (-1)^m J_m(z)$$

V tem primeru nam postopek da lin. odv. funk. $J_{-m} = (-1)^m J_m$. V tem primeru drugo rešitev iščemo z nastavkom $J_m \ln z + z^{-m} f(z)$, kjer je f holom. funk. okoli izhod. in $f(0) \neq 0$

Posledica Za $\forall m \in \mathbb{N}$ so edine rešitve Bess. DE $z^2y'' + zy' + (z^2 - m^2)y = 0$ ki so omejene v kaki okolici okoli izhodišča, oblike cJ_m, kjer je c konst.

Dokaz Splošna rešitev je oblike $cJ_m + d\left(J_m \ln z + z^{-m} f(z)\right)$, kjer je $f(0) \neq 0$ hol. okoli izhodišča.

Funkcija $e^{\frac{z}{2}(t - 1/t)}$ se imenuje <u>generirajoča funkcija</u> Bess. funkcij celega indeksa, saj velja naslednje:

Trditev Velja $e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)t^m = J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(z)\left(t^m + (-t)^{-m}\right)$

Dokaz $e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} = e^{z/2\, t}\, e^{-z/2\, 1/t} \overset{t\neq 0}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!\,2^j}t^j \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!\,2^k}t^{-k}$

Koef. pri t^m $\quad \sum_{j-k=m}(-1)^k \frac{z^{j+k}}{j!\,k!\,2^{j+k}} \underset{j=k+m}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+m}}{(k+m)!\,k!\,2^{2k+m}} = J_m(z)$

Druga formula sledi iz dejstva $J_{-m} = (-1)^m J_m$ za $m \in \mathbb{N}$

Opomba Pri fiksnem z razvoj za $e^{\frac{z}{2}(t-1/t)}$ konv. enak. kjer $t \neq 0$

Trditev Za $z, w \in \mathbb{C}$ in $\forall m \in \mathbb{N}$ velja

$$J_m(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z)\,J_k(w)$$

Dokaz $\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z+w)\, t^m = e^{\frac{z+w}{2}(t-t^{-1})} = e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})}\, e^{\frac{w}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(z)\, t^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(w)\, t^k =$

$j=m-k$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z)\, J_k(w) \right) t^m$

Primerjamo koef., dobimo $J_m(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z)\, J_k(w)$

Opomba $m=0 \to J_0(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{-k}(z)\, J_k(w) = J_0(z)\, J_0(w) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(z)\, J_k(w)$

Posledica $1 = J_0^2(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(z)$

Dokaz $w=-z \Rightarrow J_0(0) = J_0(z)\, J_0(-z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(z)\, J_k(-z)$

$J_0(-z) = J_0(z)$ ker je J_0 soda

$J_k(-z) = (-1)^k J_k(z)$ če je k sodo je J_k soda, če je k lih je J_k liha funkcija

$\Rightarrow J_0(0) = J_0^2(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(z)$

Posledica $|J_0(z)| \le 1$ in $|J_k(z)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\forall k = 1,2,\dots$ Funkcije so omejene

Izrek Za $n \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{R}$ velja

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi$$

Dokaz $e^{z/2\,(t-t^{-1})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z)\, t^k$ vstavimo $z=x$ in $t=e^{i\varphi}$

$e^{\frac{x}{2}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})} = e^{ix\sin\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\, e^{ik\varphi}$

Realni in imaginarni del

$\cos(x\sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\cos(k\varphi)$ $\qquad \sin(x\sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\sin(k\varphi)$

Prvo enakost množimo s $\cos(n\varphi)$, drugo s $\sin(n\varphi)$ in seštejemo

$\cos(x\sin\varphi)\cos n\varphi + \sin(x\sin\varphi)\sin(n\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\cos k\varphi\cos n\varphi + \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\sin k\varphi\sin n\varphi$

adicijski izrek

$\Rightarrow \cos(n\varphi - x\sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\cos((n-k)\varphi)$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\cos(n-k)\varphi\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi} J_k(x)\cos(n-k)\varphi\, d\varphi =$

$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\int_0^{\pi}\cos(n-k)\varphi\, d\varphi \overset{\text{vsi int. 0 razen pri } n=k}{=} \frac{1}{\pi} J_n(x)\int_0^{\pi} d\varphi = J_n(x)$

Int. in vrsto zamenjamo saj vrsta konv. enakomerno na $[0,\pi]$. Glej zadnjo opombo o enakomerni konv. gener. funkcije.

Vrnitev k rešitvi J_{-n}

Ta funkcija reši Besslovo DE za $\nu = n \in \mathbb{N}$, vendar je odvisna od J_n. Drugo neodvisno rešitev poiščemo z nastavkom $J_n \ln z + z^{-n} f(z)$, kjer je f hol. na okolici izhodišča in $f(0)\neq 0$.

Alternativna možnost: Neumannove oz. Webrove funkcije

Z. $\forall \nu \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ je Neumannova oz Webrova funk. def. kot

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

Y_ν reši Besselovo en. pri ν saj J_ν in $J_{-\nu}$ jo rešita. Ker sta J_ν in $J_{-\nu}$ neodv. rešitve ustrezne Besselove DE za ν, sta tudi J_ν in Y_ν neodv. Za $\nu = m \in \mathbb{N}$ def.

$$Y_m(z) = \lim_{\nu\to m} Y_\nu(z)$$

Ker je $J_{-m} = (-1)^m J_m$ je

$$Y_m(z) = \lim_{\nu\to m} Y_\nu(z) \overset{\text{L'Hop}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{\nu\to m} \frac{\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}(z)\cos\nu\pi - \pi J_\nu(z)\sin\nu\pi - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}(z)}{\pi\cos(\nu\pi)} =$$

$$Y_m(z) = \frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to m}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}(z) - (-1)^m\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}(z)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}(z) - (-1)^m\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}(z)\right)\Big|_{\nu=m}$$

Trditev Funk Y_m reši Besselovo DE

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - m^2)y = 0$$

Dokaz Funk J_ν in $J_{-\nu}$ rešita Bess. DE $(\nu \in \mathbb{N})$

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0$$

Odv. po ν. Dobimo

$$z^2\left(\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)'' + z\left(\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)' + (z^2-\nu^2)\frac{\partial y}{\partial\nu} = 2\nu y$$

$$\Rightarrow \quad z^2\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)'' + z\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)' + (z^2-\nu^2)\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} = 2\nu J_\nu$$

$$z^2\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)'' + z\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)' + (z^2-\nu^2)\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu} = 2\nu J_{-\nu}$$

1. en. množi z $\frac{1}{\pi}$ 2. en pa z $(-1)^m\frac{1}{\pi}$ in odštejemo, naredimo lim $\nu\to m$

$$z^2Y_m'' + zY_m' + (z^2-m^2)Y_m = \frac{2m}{\pi}\left(J_m - (-1)^m J_{-m}\right) = 0$$

Opomba Pokaže se, da velja $W(x) = \frac{2}{\pi x}$, kjer W Wronskian za funkciji J_ν in Y_ν. Iz tega sledi, da sta Y_m in J_m neodv.

Opomba Veljata rekurzivni zvezi

- $2Y_\nu'(z) = Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z)$
- $\frac{2\nu}{z}Y(z) = Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z)$

Legendrovi polinomi

Legendrova DE $\quad (z^2-1)y'' + 2zy' - \nu(\nu+1)y = 0$

Rešujemo s pomočjo razvoja v potenčno vrsto

$$y'' + \frac{2z}{z^2-1}y' - \frac{\nu(\nu+1)}{z^2-1}y = 0$$

En. ima 2 pravilni sing. $z = \pm 1$ $\quad \left(p(z) = \frac{2z}{z^2-1}, \quad q(z) = -\frac{\nu(\nu+1)}{z^2-1} \right)$

Ker sta p in q holom. na $D(0,1)$, po izreku poiščemo rešitev $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ na $D(0,1)$

$$(z^2-1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-2} + 2z \sum_{k=0}^{\infty} c_k k z^{k-1} - \nu(\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = 0$$

Koef. pri z^k

$$0 = k(k-1)c_k - (k+2)(k+1)c_{k+2} + 2kc_k - \nu(\nu+1)c_k$$

$$0 = \left(k(k-1) + 2k - \nu(\nu+1)\right)c_k - (k+2)(k+1)c_{k+2}$$

$$\boxed{c_{k+2} = \frac{(k-\nu)(k+\nu+1)}{(k+2)(k+1)}c_k}$$

$$c_2 = -\frac{\nu(\nu+1)}{2}c_0 \Rightarrow c_4 = \frac{(2-\nu)(2+\nu+1)}{4\cdot 3}c_2 = \frac{(-\nu)(-\nu+2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}c_0$$

Z indukcijo $\quad c_{2k} = \frac{(-\nu)(-\nu+2)\dots(-\nu+2k-2)(\nu+1)(\nu+3)\dots(\nu+2k-1)}{(2k)!}c_0$

Podobno dobimo

$$c_{2k+1} = (-1)^k \frac{(\nu-1)(\nu-3)\dots(\nu-2k+1)(\nu+2)(\nu+4)\dots(\nu+2k)}{(2k+1)!}c_1$$

Izberemo $c_0 = 1$ in $c_1 = 0$

$$\Rightarrow y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} z^{2k} = 1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2!}z^2 + \frac{\nu(\nu-2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}z^4$$

Izberemo $c_0 = 0 \quad c_1 = 1$

$$\Rightarrow y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1} = z - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!}z^3 + \frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu+2)(\nu+4)}{5!}z^5$$

To sta dve rešitvi, y_1 je soda, y_2 je liha $\Rightarrow$ sta lin. neodv.

Naj bo $\nu \in \mathbb{N}$

$\nu = 2m \in \mathbb{N} \Rightarrow c_{2k} = 0$ za $\forall k > m$

$\Rightarrow y_1$ je polinom stopnje $2m$ (sodi polinom)

$\nu = 2m+1 \in \mathbb{N}$ sedaj je y_2 polinom stopnje $2m+1$

V vsakem primeru je en od rešitev polinom, kjer je $\nu \in \mathbb{N}$. Če je $\nu = n \in \mathbb{N}$, ta polinom označimo s P_n. Ta polinom pomn. s primerno konst., da je

$$\boxed{c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^n}}$$

do celega dela

$$\Rightarrow \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\, z^{n-2k}$$

P_n je Legendrov polinom stopnje n.

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!} \frac{d^n}{dz^n}\left(z^{2n-2k}\right) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \binom{n}{k} (z^2)^{n-k} =$$

$$\boxed{P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n}\left((z^2-1)^n\right)}$$ Rodriguesove formule

$$P_0(z) = 1 \qquad P_1(z) = z \qquad P_2(z) = \frac{3z^2-1}{2} \qquad P_3(z) = \frac{5z^3-3z}{2} \qquad \ldots$$

Trditev Za dovolj majhen $|t|$ je

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, t^n$$

Funkcija na levi strani se imenuje generirajoča funkcija za Leg. pol. (spremenljivka t).

Ideja dokaza: levo stran razvijemo v binomsko vrsto po t.

Posledica Velja $(n+1) P_{n+1}(z) = (2n+1)\, z\, P_n(z) - n P_{n-1}(z)$

Dokaz

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, t^n \qquad \text{odvajamo po } t$$

$$\frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(z)\, t^{n-1}$$

Zgornjo enakost množimo z $(z-t)$, spodnjo pa z $(1-2zt+t^2)$

$$(z-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, t^n = (1-2zt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(z)\, t^{n-1}$$

Koeficienti pri t^n

Trditev $P_n(1) = 1 \qquad P_n(-1) = (-1)^{n-1}$

Dokaz Rod. for.

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left((z-1)^n (z+1)^n\right) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((z-1)^n\right)^{(k)} \left((z+1)^n\right)^{(n-k)}$$

$$P_n(1) \overset{k=n}{=} \frac{1}{2^n n!} \binom{n}{n} n!\, (z+1)^n \Big|_{z=1} = 1$$

Izrek $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \delta_{mn} \frac{2}{2n+1}$

Izrek pravi, da so polinomi P_n pravokotni za $m \neq n$.

V primeru $m=n$ dobimo $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$, pri čemer je skalarni produkt def. z $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$ na Hilb. prostoru $L^2(-1,1)$, ki je napolnitev prostora zveznih funkcij $C[-1,1]$ glede na zg. sk. prod.

Polnost Leg. pol.

Po Weierstrassovem izreku so polinomi gosti v $C[-1,1]$ v sup. normi. Zato to vsako $f \in C[-1,1]$ $\exists$ zap. polin. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ki konv. proti f glede na $\|\cdot\|_\infty$ oz. da

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g_n(x)|^2\,dx < \varepsilon^2 \int_{-1}^{1} \|f-g\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \quad \|f - g_n\|_2 < \varepsilon \, \|f - g_n\|_\infty \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ $g_n \to f$ tudi v $L^2(-1,1)$

Ker je st. od P_n enaka n, je vsak polinom lin. komb. Leg. pol., kar pomeni da je lin. ogrinjača od $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gosta v $C[-1,1]$ oz. $L^2(-1,1)$.
Zaradi pravokotnosti tvorijo ortog. bazo $L^2(-1,1)$. To pomeni da se da vsak $f \in L^2(-1,1)$ zapisati v obliki

$$\boxed{f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n}$$

kjer je konv. mišljena v prostoru $L^2(-1,1)$ torej glede na $\|\cdot\|_2$

$$\langle f, P_n \rangle = a_n \langle P_n, P_n \rangle = a_n \frac{2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{2n+1}{2} \langle f, P_n \rangle = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx}$$

Pridružene Legendrove funkcije

Naj bo P_n n-ti Leg. pol. Def. pridružene Leg. funkcije P_n^m

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z) \qquad m = 0, 1, \dots, n$$

P_n reši Leg. DE $\quad (z^2-1)y'' + 2zy' - n(n+1)y = 0$

Da se dokazati (dolgi zvit račun), da P_n^m reši DE

$$\boxed{\left((1-z^2)y'\right)' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right) y = 0}$$

Preoblikujmo

$$\left((1-z^2)y'\right)' - \frac{m^2}{1-z^2} y = -n(n+1)\,y \quad \Big\} \quad Ty = \lambda y$$

Rešitve nove enačbe, torej P_n^m, so last. funkcije neke dif. operatorja

$m=0$ $\quad P_n^0 = P_n \to m=0$ so vsi P_n pravokotni za $m \neq n$

$m>0$ $\quad P_n^m(1) = P_n^m(-1) = 0$ (kar oz. ustrezni robni pogoji)

Pri danem m so za $n = m, m+1, \dots$ so P_n^m last. funk. ki pripadajo različnim last. vred. Po splošni teoriji (glej kasneje) bo veljalo, da so $(P_n^m)_{n\geq m}$ paroma pravokotni.

Izrek Pri vsakem fiksnem $m \in \mathbb{N}_0$ je $(P_n^m)_{n=m}^{\infty}$ ortog. baza Hil. prostora $L^2(-1,1)$ in velja

$$\| P_n^m \|_2^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Hermitovi polinomi

Rešujemo DE $y'' - 2zy' + 2\nu y = 0$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \Rightarrow \boxed{(k+2)(k+1)\, c_{k+2} = 2(k-\nu)\, c_k}$$

$$y_1 = 1 - \frac{2\nu}{2!} z^2 + \frac{2^2 \nu(\nu-2)}{4!} z^4 - \frac{2^3 \nu(\nu-2)(\nu-4)}{6!} z^6 \dots$$

$$y_2 = z - \frac{2(\nu-1)}{3!} z^3 + \frac{2^2(\nu-1)(\nu-3)}{5!} z^5 - \frac{2^3(\nu-1)(\nu-3)(\nu-5)}{7!} z^7 + \dots$$

lin. neodv. rešitvi zgornje DE.

Če je $n \in \mathbb{N}_0$ je ena od y_1, y_2 polinom st. n. Ta polinom popravimo tako, da ima vodilni koeficient (tisti pri z^n) enak 2^n. Označimo ga s H_n in ga imenujemo n-ti Hermitov polinom.

Da se videti, da je $\boxed{H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}}$

$$H_0(z) = 1 \qquad H_1(z) = 2z \qquad H_2(z) = 4z^2 - 2 \qquad H_3(z) = 8z^3 - 12z \qquad \dots$$

Trditev Funkcija e^{2zt-t^2} je generirajoča funkcija za H_n:

$$e^{2zt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n$$

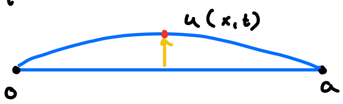
Trditev Veljajo rekurzivne zveze

$$H_n(z) = 2z H_{n-1}(z) - H_{n-1}'(z) \qquad H_n'(z) = 2n H_{n-1}(z)$$

$$H_n(z) = 2z H_{n-1}(z) - 2(n-1) H_{n-2}(z)$$

Robni problemi

Nihanje strune



v mirovanju struna leži na realni osi

Struna je vpeta, kar pomeni, da je $u(0,t)=0$ in $u(a,t)=0$

Vemo iz fizike da nihanje opisuje PDE $u_{tt}=c^2u_{xx}$ $c>0$ je hitrost širjenja nihanja

Začetna lega $u(x,0)=f(x)$ in hitrost $u_t(x,0)=g(x)$ začetni pogoji

Rešujemo problem $u_{tt}=c^2u_{xx}$ $u(0,t)=u(a,t)=0$ $u(x,0)=f(x)$ $u_t(x,0)=g(x)$

Fourierova metoda separacije spremenljivk (deluje le za intervale in ne za neskončna območja)
Poiščemo osnovne rešitve, nato z njimi zgradimo pravo rešitev

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

$$\Rightarrow\quad T''(t)X(x)=c^2X''(x)T(t)$$

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$ leva stran funkcija od x, desna stran funkcija od t $\Rightarrow$ sta konstanti

$$\frac{X''}{X}=-\lambda=\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$

(1) $\frac{X''}{X}=-\lambda \rightarrow X''+\lambda X=0$

Določimo pogoj za X iz pogoja $u(0,t)=u(a,t)=0$

Iščemo neničelne rešitve

$$u(0,t)=0=X(0)T(0)$$

če $X(0)\neq 0 \Rightarrow T(t)=0\ \forall t \Rightarrow u(x,t)=X(x)T(t)=0$
zato $X(0)=0$

$u(a,t)=0 \Rightarrow X(a)=0$

Rešujemo $X''+\lambda X=0$ s pogoji $X(0)=X(a)=0$
To je lin. DE 2. reda s konst. koef.
Nastavek $y=e^{\mu x} \Rightarrow \mu^2+\lambda=0 \Rightarrow \mu_1\ \mu_2$

$\lambda=0 \Rightarrow \mu^2=0$ $X''=0 \Rightarrow X=Ax+B$
$X(0)=0 \Rightarrow B$ $X(a)=0=Aa+B \Rightarrow A=0$ $\Rightarrow X=0$ ne želimo ničelne reš.

$\lambda<0$ $\mu^2=-\lambda \rightarrow \mu_1=\sqrt{-\lambda}$ $\mu_2=-\sqrt{-\lambda}$

$$X(x) = A e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + B e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$$

$$X(0) = 0 = A + B$$
$$X(a) = 0 = A e^{\sqrt{-\lambda}\, a} + B e^{-\sqrt{-\lambda}\, a} = A\left(e^{\sqrt{-\lambda}\, a} - e^{-\sqrt{-\lambda}\, a}\right) = 2A\, \mathrm{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\, a\right)$$

$$\lambda \neq 0 \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\, a\right) \neq 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = -A = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow u = 0$$

$\lambda > 0 \qquad \mu^2 = -\lambda^{<0} \qquad \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$

$$X(x) = A e^{i\sqrt{\lambda} x} + B e^{-i\sqrt{\lambda} x} = A(\cos\sqrt{\lambda} x + i \sin\sqrt{\lambda} x) + B(\cos\sqrt{\lambda} x - i\sin\sqrt{\lambda} x)$$

$$= (A+B)\cos\sqrt{\lambda} x + i(A-B)\sin\sqrt{\lambda} x = C\cos\sqrt{\lambda} x + D\sin\sqrt{\lambda} x$$

$X(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$X(a) = 0 \Rightarrow 0 = D\sin(\sqrt{\lambda}\, a)$

če $D = 0 \Rightarrow X = 0$ zato $\sin\sqrt{\lambda} a = 0$ $\quad \sqrt{\lambda}\, a = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

ker je sin liha posebej ni $k < 0$. če $k = 0 \to \lambda = 0$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right)$$

Tvorimo novo funk. $u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$ pri čemer T_n reši enačbo

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

Za splošni λ: $T'' + c^2\lambda T = 0$

Ker je $c^2\lambda > 0 \wedge \lambda > 0$ rešitev $T(t) = A\cos c\sqrt{\lambda}\, t + B\sin c\sqrt{\lambda}\, t$

$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad T_n(t) = A_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}ct\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}ct\right)$

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(y) = \left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}ct\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

u_n za $\forall n \in \mathbb{N}$ reši PDE in zadošča robnim pogojem

Tvorimo $\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}ct\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$

Formula reši PDE in ustreza robnim pogojem.

Možna vprašanja / problemi:

1. Ali sploh zaporedje vsote konv.
2. Ali je vsota odv. funk. po x ali po t, enkrat oz. dvakrat
3. Za ustrezne A_n in B_n izpolnimo 1 in 2
4. A_n in B_n nista poljubna. Določimo jih iz zač. pogojev, potem ko f in g razvijemo v vrsti po sin in cos

Predpostavimo, da lahko dvakrat odv. pod int. po x in po t. Zato u res reši PDE.

Začetni pogoji:
$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x$$
$$u'(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a} c\, B_n \sin\frac{n\pi}{a}x$$

Funkciji f, g razširimo liho na $[-a,a]$ kot $\tilde{f}(x) = -\tilde{f}(-x) = -f(-x)$ za $x \in [-a,0]$ in podobno $\tilde{g}(x) = -\tilde{g}(-x) = -g(-x)$ za $x \in [-a,0]$.

$\tilde{f}$ in $\tilde{g}$ razvijemo v Four. vrsti po sin in cos na $[-a,a]$. Ker sta $\tilde{f}$ in $\tilde{g}$ lihi, koef. v razvoju pred cos so vsi ničelni. Zato je razvoj oblike

$$\sin \frac{n\pi}{a} x$$

Te funkcije tvorijo ortog. bazo za L^2, za njih velja $\int_0^a \sin^2 \frac{n\pi}{a} x \, dx = \frac{a}{2}$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx \quad \text{in} \quad \frac{n\pi}{a} c B_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx$$

(izračunamo skalarni produkt $\langle f, \sin \frac{n\pi}{a} \cdot \rangle$ in $\langle g, \sin \frac{n\pi}{a} \cdot \rangle$)

Dobljena funkcija je k kandidat za rešitev

Opomba ① Če je f kosoma zv. odv., potem Four. vrsta konv. po točkah k funk. f, kjer je f zvezna, v točki nezveznosti pa konvergira proti povprečju leve in desne limite funk. f.
② Če je f dvakrat zv. odv. potem je vsota Four. vrste konverg. enakomerno.
③ Če imata f in g zv. četrti odv. potem je rešitev razreda C^2.

Neskončna struna

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Ker ni robnih pogojev ne moremo uporabiti Four. metode, zato ne dobimo sistema funk, s pomočjo zgradimo rešitev

$$\xi = x - ct \qquad \eta = x + ct$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = (u_\xi + u_\eta)_\xi + (u_\xi + u_\eta)_\eta = u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Če iščemo dvakrat odv. rešitev $\Rightarrow u_{\eta\xi} = u_{\xi\eta} \Rightarrow \boxed{u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}}$

Na podoben način dobimo

$$u_{tt} = \boxed{c^2 (u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi})}$$

$$c^2 (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = c^2 (u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi})$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{\xi\eta} = 0} \Longrightarrow \begin{array}{l} u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) \\ u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct) \end{array}$$

Če sta F in G dvakrat odv. potem u reši enačbo.

Začetni posoj

$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x)$

$u_t(x,0) = F'(x-ct)(-c) + G'(x+ct)\,c = c\,(G'(x) - F'(x)) = g(x)$

$$F + G = f \quad /'$$
$$G' - F' = \frac{g}{c}$$
$$F' + G' = f'$$

$$\Rightarrow \quad G'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{g(x)}{c} + f'(x)\right)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{g(s)}{c} + f'(s)\,ds + C \qquad c \text{ je poljuben}$$

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds + C \qquad (C = C_1 - f(0))$$

$$F(x) = f - G = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds - C$$

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

$$= \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)\,ds - C + \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)\,ds + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds}$$

Funkcija je dvakrat odv., če je f dvakrat odv., g pa enkrat.
Zgornja formula se imenuje d'Alembertova formula.

Začetni posoj: $u(x,0) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) + \frac{1}{2c}\int_x^x g(s)\,ds = f(x)$

in podobno $u_t(x,0) = g(x)$

Ta postopek omogoča rešitev valovne enačbe na $\mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ bi funkcijo f razširili na $\mathbb{R}$ (sodo), potem bi uporabili izpeljano za valovno enačbo na $\mathbb{R}$.

Prevajanje toplote

$u_t = c\,u_{xx}$ $c > 0$ konstanta, rešujemo za $t > 0$ pri robnih pogojih $u(0,t) = u(a,t) = 0$

Začetni posoj: $u(x,0) = f(x)$

Four. sep. spr. $u(x,t) = X(x)\,T(t) \Rightarrow X(x)\,T'(t) = c\,X''(x)\,T(t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$\Rightarrow$ $X'' + \lambda X = 0$ kot pri valovni enačbi je možno le $\lambda > 0$

Dobimo $\mu^2 + \lambda = 0$ $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$

$$\Rightarrow X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X(0)=0 \qquad 0 = A$$
$$X(a)=0 \qquad B(\sin\sqrt{\lambda}a) = 0 \Rightarrow \lambda = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$$

Opomba Če je $x'(a)=0$ namesto $x(a)=0$ dobimo

$$x'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$x'(a)=0 : B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}a$$
če je $\lambda = 0 \Rightarrow B\sin 0 = 0 \Rightarrow u=0$

če $\lambda \neq 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}a = \frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \lambda = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right)^2$

Vrnimo se k prvotnemu primeru

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \qquad X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{a}x$$

Enačba $\frac{T'}{T} = -\lambda c \Rightarrow T(t) = De^{-\lambda c t}$

za $\lambda = \lambda_k$ dobimo $T_k(t) = D_k e^{-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 ct}$

$$\Rightarrow u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = D_k e^{-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 ct}\sin\frac{k\pi}{a}x$$

u_k reši PDE in izpolnjuje robne pogoje za $\forall k$. Začetni pogoj nam pa da D_k

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$$

Začetni pogoj $\quad u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\frac{k\pi}{a}x = f(x)$

Razvijem f v sinusno Four. vrsto na $[0,a]$

$$A_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{k\pi}{a}x\,dx$$

Reševanje problemov oblike $\quad u_t = c u_{xx} \quad t>0,\ c>0$

$u(0,t) = A \qquad u(a,t) = B \qquad$ (temp. na krajišču je konst.)

Naj funk. v, ki reši PDE in zadošča $\quad v(0,t) = v(a,t) = 0$

Če je $u(x,0) = f(x)$ zač. pogoj, tedaj lahko spremenimo:

$$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$$
$$v(0,t) = 0 = v(a,t) \Leftrightarrow w(0,t) = A,\quad w(a,t) = B$$

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - w(x,0)$$

Vzemimo $v(x,t) = u(x,t) - A - kx$

$$v(0,t) = u(0,t) - A - 0 = 0$$
$$v(a,t) = u(a,t) - A - ka = 0$$
$$= B - A - ka = 0 \Rightarrow k = \frac{B-A}{a}$$

v reši toplotno enačbo

$$v_t = c\, v_{xx}$$
$$v(0,t) = v(a,t) = 0$$
$$v(x,0) = f(x) - A - \frac{B-A}{a} x$$

Nadaljujemo kot v prejšnjem primeru.

Sturm-Liouvilleov problem

Rešujemo problem
$$p(x) y'' + Q(x) y' + R(x) y = -\lambda y$$
na $[a,b]$ pri robnih pogojih
$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$
pri čemer velja $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ in $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Takim robnim pogojem pravimo ločeni. Funkcije P, Q, R so zvezne funkcije na $[a,b]$. Parameter λ je neznan. Nastavimo se tako, da dobimo netrivialne rešitve. Prostor $C[a,b]$ opremimo s skal. prod.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, \bar{g}(x)\, dx$$

Definiramo $L: C^2[a,b] \to C[a,b]$

$$(Ly)(x) = P(x)\, y''(x) + Q(x)\, y'(x) + R(x)\, y(x) \quad \text{oz.}$$
$$Ly = Py'' + Qy' + Ry$$

L je linearna preslikava. Preslikava L spada v razred lin. dif. operatorjev 2. reda.
S-L problem se glasi:
$$Ly = -\lambda y \quad \text{z ločenima robnima pogojema}$$

Problem: poišči lastne vrednosti in funkcije za L

Primer $\quad Ly = y'' \quad y(0) = 0 \quad y(a) = 0 \qquad$ Lastni problem $y'' = -\lambda y$

Če želimo dobiti dovolj ortog. baznih vektorjev potrebujemo posebno preslikavo L. V primeru matrik so to hermitske oz. sebi adjungirane matrike $(A = A^*)$

Sebi adj.: $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ (def. adj. preslikave)
Vemo da je $A = A^* \iff \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

vrnimo se k našemu problemu

$$\langle Lu, v \rangle = \int_a^b (Pu'' + Qu' + Ru)\bar{v}\, dx = Pu'\bar{v}\Big|_a^b - \int_a^b (P\bar{v})' u'\, dx + Qu\bar{v}\Big|_a^b - \int_a^b u (Q\bar{v})'\, dx + \int_a^b Ru\bar{v}\, dx =$$

$$= \left(p u'\bar v - (p\bar v)' u + Q u \bar v\right)\Big|_a^b + \int_a^b u\left((p\bar v)'' - (Q\bar v)' + R\bar v\right)dx$$

$u \in C^2[a,b]$, $P \in C^2[a,b]$, $Q \in C^1[a,b]$, $R \in C[a,b]$, P, Q, R realne. Zaradi realnosti P, Q, R dobimo

$$\langle Lu, v\rangle = \left(P(u'\bar v - \bar v' u) + (Q - P')u\bar v\right)\Big|_a^b + \int_a^b u\,\overline{\left((Pv)'' - (Qv)' + Rv\right)}\,dx$$

Če je $\left(P(u'\bar v - \bar v' u) + (Q - P')u\bar v\right)\Big|_a^b = 0$ potem je

$$\langle Lu, v\rangle = \int_a^b u\,\overline{(\ldots)}\,dx = \langle u, (Pv)'' - (Qv)' + Rv\rangle,$$

V tem primeru bi lahko definirali formalno $L^* v = (Pv)'' - (Qv)' + Rv$. Zato rečemo, da je L formalno sebi adjungiran, če velja

$$\underbrace{(Pv)'' - (Qv)' + Rv}_{L^* v} = \underbrace{Pv'' + Qv' + Rv}_{Lv}$$

$$\Rightarrow \quad P''v + 2P'v' + Pv'' - Qv' - Q'v + Rv = Pv'' + Qv' + Rv$$
$$(2P' - 2Q)v' + (P'' - Q')v = 0$$
$\Leftrightarrow \quad P' = Q$ in $P'' = Q'$ Oboje je izpolnjeno, če je $\underline{P' = Q}$.

Torej L je formalno sebi adj. če $P' = Q$. Dobimo

$$Ly = Py'' + Qy' + Ry = Py'' + P'y' + Ry = (Py')' + Ry$$

Zanima nas problem $Ly = (Py')' + Ry$ z ločenimi robnimi pogoji.

Trditev Če je dif. oper. L formalno sebi adj. potem velja Greenova identiteta

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle + \left(P(u'\bar v - u\bar v')\right)\Big|_a^b$$

Posledica Če funkciji $u, v \in C^2[a,b]$ zadoščata ločenim robnim pogojem, potem je $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ za vsak formalno sebi adj. dif. oper. L.

Prostori z utežjo

Vpeljemo operator $Ly = -\lambda w y$, kjer je w dana poz. funk. na $[a,b]$. To funkcijo w imenujemo utež, L pa je dif. operator podan s predpisom

$$Ly = Py'' + Qy' + Ry$$

Število λ, za katero ima netrivialno rešitev en. $Ly = -\lambda w y$ pri robnih pogojih, se imenuje lastna vrednost za L, y pa last. funkcija.

Vpeljimo skalarni produkt $\langle f, g\rangle_w = \int_a^b f(x)\,\bar g(x)\,w(x)\,dx$

To je skalarni produkt z utežjo w. Funkciji f in g sta ortog. z utežjo w če je $\langle f, g\rangle_w = 0$. Norma je $\|f\|_w = \sqrt{\langle f, f\rangle_w}$, napolnitev prostora $C[a,b]$ glede na $\|\cdot\|_w$ označimo z $L^2_w(a,b)$.

Trditev Lastne vrednosti formalno sebi adj. operatorja L, kjer P nima ničel, pri ločenih robnih pogojih so realne, lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim pa so med seboj ortog. z utežjo w. Za vsako lastno vred. λ sta katerikoli pripadajoči last. funk. lin. odv.

Dokaz Naj bo $Lu = -\lambda u w$

$\langle Lu, u\rangle = \langle u, Lu\rangle$ + robni pogoj (ničle zaradi trditve)

$\langle Lu, u\rangle = \langle -\lambda uw, u\rangle = -\lambda \langle u,u\rangle_w$

$\langle u, Lu\rangle = \langle u, -\lambda u w\rangle = -\bar{\lambda}\langle u,u\rangle w$

Ker $\langle u,u\rangle \neq 0$ je $\lambda = \bar{\lambda}$

Naj bo $Lu = -\lambda u w$ in $Lv = -\mu v w \overset{?}{\Rightarrow} u \perp_w v$

$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle = \langle u, -\mu w v\rangle = -\bar{\mu}\langle u,v\rangle_w$

$\langle -\lambda u w, v\rangle = -\lambda\langle u,v\rangle w$

$\Rightarrow (\lambda-\mu)\langle u,v\rangle_w = 0 \overset{\mu\neq\lambda}{\Longrightarrow} \langle u,v\rangle_w = 0$

Naj bosta u, v lastni funk. za $\lambda \overset{?}{\Rightarrow} u, v$ lin. odv.

Poglejmo robni pogoj $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$. Ker u, v last. funk. pri ločenih robnih pogojih $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0\\ \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) &= 0\end{aligned}\right\}$$ v $\mathbb{R}^2$ je vektor $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$ prav. na $\begin{bmatrix}u(a)\\ u'(a)\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}v(a)\\ v'(a)\end{bmatrix}$

Zato sta $\begin{bmatrix}u(a)\\ u'(a)\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}v(a)\\ v'(a)\end{bmatrix}$ lin. odv.

Zato $\exists$ c_1, c_2 da $c_1\begin{bmatrix}u(a)\\ u'(a)\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}v(a)\\ v'(a)\end{bmatrix} = 0$

Vpeljimo $y = c_1 u + c_2 v$

Ker je $Lu + \lambda w u = 0 = Lv + \lambda w v$ je tudi $Ly + \lambda w y = 0$

Zato y reši lin. dif. en. 2. reda z w koef. Ker je $y(a) = y'(a) = 0$.

Zaradi enoličnosti rešitve Cauchyjeve naloge

$Ly + \lambda y = 0$

$y(a) = y'(a) = 0$

je $y = 0 \rightarrow c_1 u + c_2 v = 0$

Regularni Sturm - Liouvillov problem

Naj bo L oblike $Ly = (Py')' + Ry$, kjer je P realno zv. odv., R realno zv. na $[a,b]$. Naj bosta P in w strogo pozitivni funk. na $[a,b]$. Problem pri katerem moramo določiti $\lambda \in \mathbb{C}$ za katere ima enačba $Ly = -\lambda w y$ pri ločenih robnih pogojih $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$ in $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$; $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ in $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ kako netriv. rešitev $y \in C^2[a,b]$ in določiti vse take y, imenujemo regularni Sturm-Liouvillov problem.

Izrek Sturm - Liouvillov izrek

Za vsak regularni Sturm-Liouvillov problem obstaja ortonorm. baza Hilbertovega prostora $L^2_w(a,b)$, sestavljena iz realnih lastnih funkcij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatorja L. Za lastne vrednosti, ki pripadajo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ velja $\lambda_n \to \infty$. Za vsak $y \in C^2[a,b]$, ki zadošča rob. pogojem,

Opomba Vemo že, da so last. vrednosti enostavne: za vsako last. vred. imamo natanko eno last. funk. (do sk. reč. dol.). Vemo tudi, da so ortog. (del o ortonorm. bazi $L^2_w(a,b)$)

Stacionarna porazdelitev temperature na krogli

reševanje enačbe $\Delta u = 0$ na krogli

Zanima nas reševanje enačbe $u_t = c\Delta u$. Temperatura ob času t v točki (r, φ, θ) je enaka $u(r, \varphi, \theta, t)$. V sferičnih koordinatah je

$$u_t = \Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(u_\theta \sin\theta\right)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_{\varphi\varphi}$$

Temperatura na površini krogle je podana z $u(a, \varphi, \theta) = f(\theta, \varphi)$. Ker nas zanima stac. porazdelitev je $u_t = 0$. Torej rešujemo enačbo $\underset{(r<a)}{\Delta u = 0}$ na $K(0, a)$ pri robnem pogoju $u(a, \varphi, \theta) = f(\theta, \varphi)$

Fourierova metoda separ. spr.

$$u(r, \varphi, \theta) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

$$R''\Theta\Phi + \frac{2}{r}R'\Theta\Phi + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\Theta'\sin\theta\right)' R\Phi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Phi'' R\Theta = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{r^2 \sin^2\theta \left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) + \sin\theta \frac{\left(\Theta'\sin\theta\right)'}{\Theta}}_{\text{funkcija } r,\, \theta} = \underbrace{-\frac{\Phi''}{\Phi}}_{\text{funkcija } \varphi}$$

Zato sta obe strani konst., npr m^2

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \qquad r^2\left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) = \frac{m^2}{\sin^2\theta} - \frac{\left(\Theta'\sin\theta\right)'}{\Theta\sin\theta}$$

Rešimo najprej prvo enačbo. Ker sprememba kota φ za $2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$ ne vpliva na lego točke v prostoru je φ 2π periodična. Zato je Φ oblike

$$\Phi = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi \quad \text{pri čemer } m \in \mathbb{Z}$$

Lahko vzamemo $m \in \mathbb{N}_0$

$$r^2\left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) = \frac{m^2}{\sin^2\theta} - \frac{\left(\Theta'\sin\theta\right)'}{\Theta\sin\theta}$$

Opazimo da je leva funk. funk. r desna pa θ, zato sta obe konst., npr. λ

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \qquad \sin\theta\left(\Theta'\sin\theta\right)' + \left(\lambda\sin^2\theta - m^2\right) = 0$$

Enačba $r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0$ je Cauchy-Eulerjeva enačba. Enačba je 2. reda, linearna. Nastavek $R = r^\mu$ $\Rightarrow$ $r^2\mu(\mu-1)r^{\mu-2} + 2r\mu r^{\mu-1} - \lambda r^\mu = 0$

$\Rightarrow$ $\mu(\mu-1) + 2\mu - \lambda = 0$ oz. $\mu^2 + \mu - \lambda = 0$ $\Rightarrow$ μ_1, μ_2

Splošna rešitev $R(r) = A r^{\mu_1} + B r^{\mu_2}$ $(\mu_1 \neq \mu_2)$ oz. $R(r) = A r^\mu + B r^\mu \ln r$ $(\mu_1 = \mu_2 = \mu)$

Oglejmo si enačbo $\sin\theta\left(\Theta'\sin\theta\right)' + \left(\lambda\sin^2\theta - m^2\right) = 0$. Vpeljimo $s = \cos\theta$

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{ds}\frac{ds}{d\theta} = \frac{d\Theta}{ds}(-\sin\theta) \qquad \text{oz.} \quad \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{ds}(-\sin\theta)$$

$$\Theta'\sin\theta = -\frac{d\Theta}{ds}\sin^2\theta = -\frac{d\Theta}{ds}\left(1 - \cos^2\theta\right) = -\frac{d\Theta}{ds}\left(1 - s^2\right)$$

Enačbo preslikamo v $\Theta = \Theta(s)$

$$\sin\theta\,(\theta' \sin\theta)' = \sin\theta\,(-\sin\theta)\frac{d}{ds}(\theta' \sin\theta) = (1-s^2)\frac{d}{ds}\left((1-s^2)\frac{d\theta}{ds}\right)$$

$$(1-s^2)\frac{d}{ds}\left((1-s^2)\frac{d\theta}{ds}\right) + \left(\lambda(1-s^2)-m^2\right) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left((1-s^2)\frac{d\theta}{ds}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-s^2}\right)\theta = 0$$

To je enačba oblike $((1-x^2)y')' + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0$. Če je $\lambda = n(n+1)$ za $n \in \mathbb{N}$ so rešitve naše enačbe pridružene Legendrove funkcije P_n^m. Vemo, da pri fiksnem m funkcije $(P_n^m)_{n=m}^{\infty}$ tvorijo ortog. bazo prostora $L^2(-1,1)$

Robni pogoj $u(a,\varphi,\theta) = f(\varphi,\theta)$ predpostavimo da je odvisen le od θ.
Torej $u(a,\theta,\varphi) = f(\theta)$. Pričakujemo, da bo u odvisna le od θ, torej neodvisna od φ, kar pomeni Φ je konst. $\Rightarrow m = 0$

Naša pridružena DE pri $\lambda = n(n+1)$ postane Leg. DE. Rešitve so Legendrovi polinomi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, ki tvorijo ortog. bazo prostora $L^2(-1,1)$.

Ker je $\lambda = n(n+1)$, pri reševanju Cauchy-Eulerjeve enačbe dobimo karakt. enačbo za $\mu_{1,2}$:

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \Rightarrow \mu(\mu-1) + 2\mu - n(n+1) = 0 \Rightarrow (\mu-n)(\mu+n+1) = 0$$

$\mu_1 = n$, $\mu_2 = -n-1 \Rightarrow R(r) = Ar^n + Br^{-n-1}$ $n \in \mathbb{N}$. Ker je R omejena okoli izhodišča je $B = 0 \Rightarrow R_n(r) = r^n$

$$u_n(r,\theta,\varphi) = R_n(r)\,\Theta_n(\theta)\,\Phi_n(\varphi)$$

Pod vsemi pogoji dobimo

$$u_n(r,\theta) = r^n P_n(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

Če vrsta konv., in jo lahko ustrezno odvajamo po ustreznih spr., potem tudi u reši enačbo. Poiščimo še konstante A_n. Te dobimo iz robnega pogoja $u(a,\theta,\varphi) = u(a,\theta) = f(\theta)$
Dobim

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) \overset{s=\cos\theta}{=} f(\arccos s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(s)$$

Ker $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tvorijo ortog. bazo za $L^2(-1,1)$, dobimo

$$\int_{-1}^{1} f(\arccos s) P_m(s)\,ds = A_m a^m \int_{-1}^{1} P_m^2(s)\,ds = A_m a^m \frac{2m+1}{2}$$

$$\Rightarrow A_m = \frac{2}{2m+1}\frac{1}{a^m}\int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

V splošnem primeru če je $f = f(\theta,\varphi)$, namesto $P_n(\cos\theta)$ v tem primeru dobimo funkcije $P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ in $P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$.