

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Airyjevi funkciji

Miha Pompe 28191072

Oktober 2021

1 Uvod

Airyjevi funkciji Ai in Bi sta definirani kot rešitvi diferencialne enačbe:

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

rešitvi lahko predstavimo tudi v integralni obliki

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt) dt, \quad Bi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{-t^3/3 + xt} + \sin(t^3/3 + xt) \right] dt.$$

Za majhne x lahko funkciji Ai in Bi izrazimo z Maclaurinovima vrstama

$$Ai(x) = \alpha f(x) - \beta g(x), \quad Bi(x) = \sqrt{3} \left[\alpha f(x) + \beta g(x) \right],$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = Ai(0) = Bi(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -Ai'(0) = Bi'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za f in g sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!},$$

kjer je

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z), \quad (z)_0 = 1.$$

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojem. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s}{z^s}, \quad P(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}, \quad Q(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}},$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{54^s s! \Gamma(s + \frac{1}{2})}$$

za velike pozitivne x izrazimo

$$Ai(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(-\xi), \quad Bi(x) \sim \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(\xi),$$

za po absolutni vrednosti velike negativne x pa

$$Ai(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[\sin(\xi - \pi/4) Q(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) P(\xi) \right],$$

$$Bi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[-\sin(\xi - \pi/4) P(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) Q(\xi) \right].$$

2 Analiza

2.1 Aproksimacija Airyjevih funkcij z uporabo Maclaurinovega razvoja

Aproksimacijo za majhne vrednosti $|x|$ lahko implementiramo rekurzivno. V primerjavi z definicijo s tem časovno zahtevnost zmanjšamo z $O(n^2)$ na $O(n)$. Vsak člen zaporedja funkcij f in g , kjer $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ in $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$, lahko zapišemo na naslednji način

$$\begin{aligned}f_n &= \phi_n f_{n-1}, & f_0 &= 1 \\g_n &= \theta_n g_{n-1}, & g_0 &= x\end{aligned}$$

kjer ϕ_n in θ_n dobimo kot količnik dveh zaporednih členov

$$\begin{aligned}\phi_n &= \frac{x^3}{(3n-1)3n} \\ \theta_n &= \frac{x^3}{(3n+1)3n}\end{aligned}$$

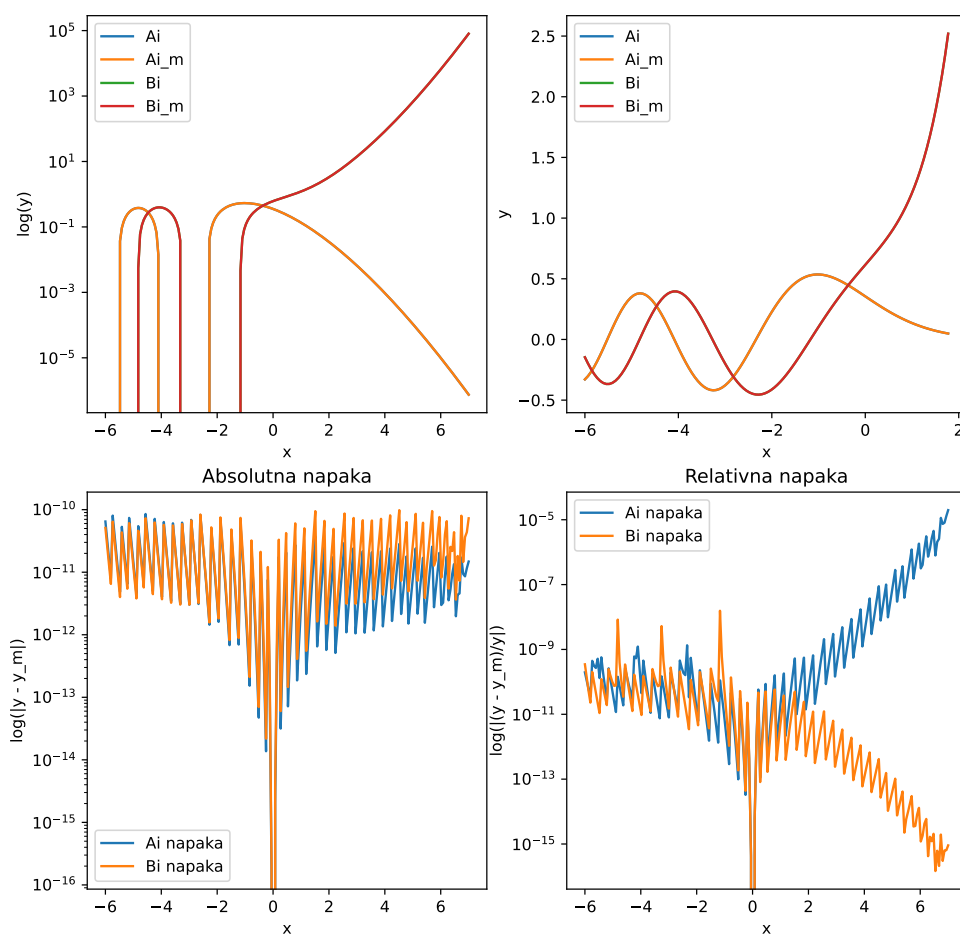
Funkcijsko vrednost dobimo kot kumulativni produkt količnikov.

Graf 1 podaja funkcijsko odvisnost aproksimacije in realne vrednosti. Za realno vrednost vzamemo funkcijo `SCIPY.SPECIAL.AIRY` oz. `MPMATH.AIRYAI`. Vrednosti so bile generirane tako, da je absolutna napaka manjša od 10^{-10} . Za doseganje takšne natančnosti je potrebno sešteti od 10 do 20 členov vrste. Število členov potrebnih za zagotavljanje določene natančnosti narašča z $|x|$ kar tudi pričakujemo, saj je razvoj narejen okoli izhodišča. Enako bi lahko minimizirali tudi relativno napako. Pri konstantnem številu členov opazimo eksponentno naraščanje napake, zato so grafi podani na intervalu $[-6, 6]$. V kolikor želimo minimizirati napako na preširokem območju, npr. $|x| > 10$, število členov prehitro zraste na preveliko vrednost.

2.2 Aproksimacija Airyjevih funkcij z uporabo asimptotskih vrst

Za velike vrednosti $|x|$ lahko Airyjevi funkciji aproksimiramo z uporabo asimptotskega razvoja navedenega v uvodu. Aproksimacijo lahko implementiramo po definiciji, vendar s tem izgubimo nekaj natančnosti zaradi uporabe Γ funkcije. Za hitrejšo in numerično bolj stabilno implementacijo lahko uporabimo naslednjo lastnost Γ funkcije:

Aproksimacija Airyjevih funkcij z Maclaurinovima vrstama



Graf 1: Prva grafa prikazujeta realni in aproksimirani Airyjevi funkciji. Aproksimacija z Maclaurinovo vrsto je označena z $_m$. Zadnja grafa prikazujeta absolutno in relativno napako aproksimacije.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

Podobno kot v prejšnjem delu lahko tu funkcije L , P in Q izrazimo rekurzivno, $L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n$, $L_n = l_n L_{n-1}$. Dobljene količnike (l_n , p_n in q_n) lahko nato poenostavimo

$$\begin{aligned} l_n &= \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{72n} + \frac{n}{2} \right), & L_0 &= 1 \\ p_n &= -\frac{1}{z^2} \left(\frac{41}{72} - \frac{385}{10368n} - \frac{3n}{2} + n^2 + \frac{25}{5184(2n-1)} \right), & P_0 &= 1 \\ q_n &= -\frac{1}{z^2} \left(\frac{25 + 288n^2(72n^2 - 13)}{10368n(1 + 2n)} \right), & Q_0 &= \frac{5}{72z} \end{aligned}$$

S tem smo ne-elementarne funkcije pretvorili na elementarne, kar izboljša časovno in numerično učinkovitost. Za doseganje še večje natančnosti lahko namesto 64 bitnega zapisa števil uporabimo 128 bitnega (NP.FLOAT128).

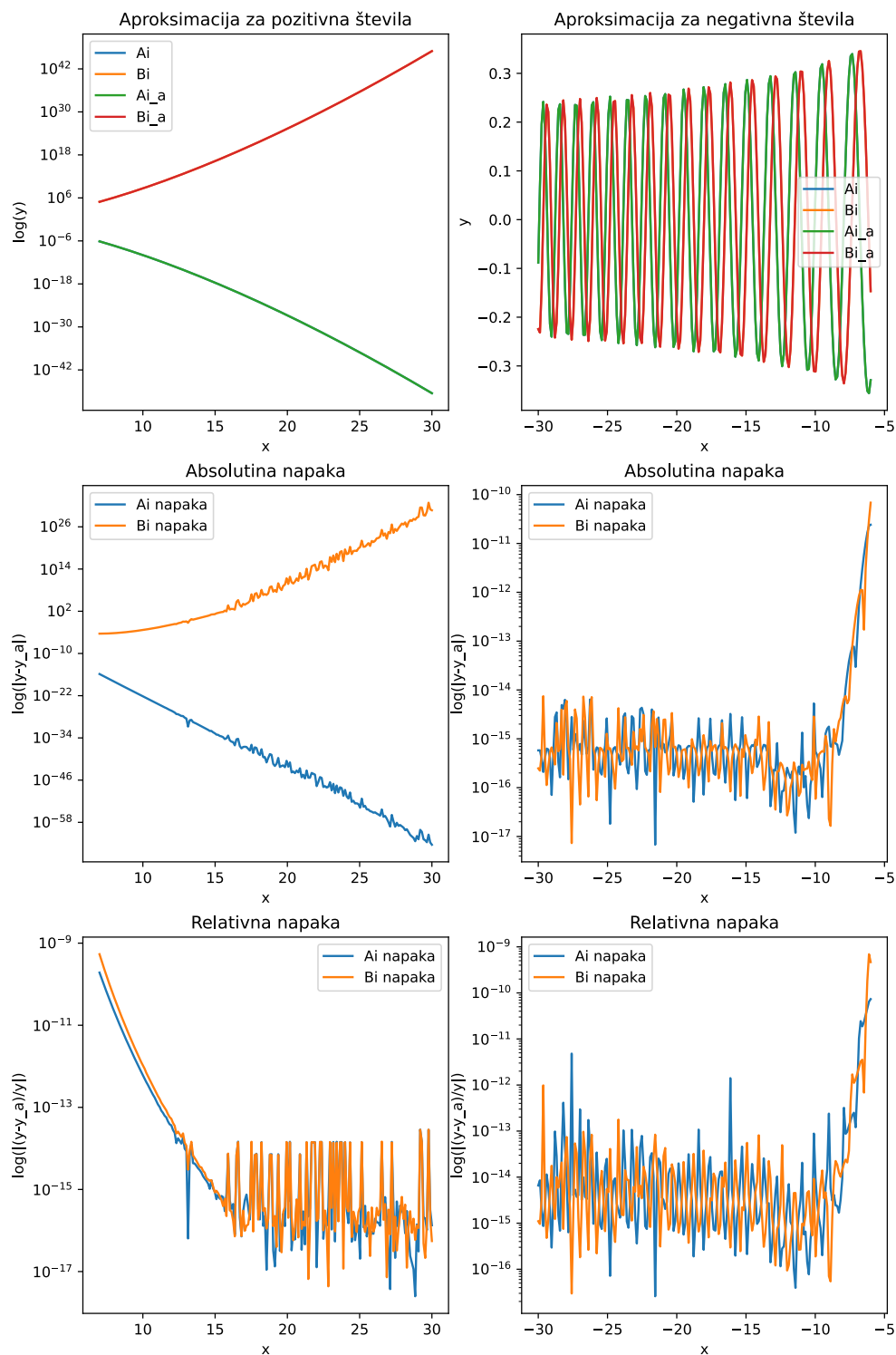
Dodatna natančnost nam omogoča doseči nekaj redov nižjo napako, predvsem pri Bi za pozitivna števila. Ker funkcija tako hitro narašča, števila hitro postanejo prevelika za shranjevanje. Dodatne člene v zaporedju tudi ne moremo izračunati dovolj natančno, da bi se skladali z dejansko vrednostjo. Zato absolutna napaka narašča eksponentno, čeprav bi pričakovali, da se napaka pri $x \rightarrow \infty$ bliža ničli. Relativna napaka pa hitro pade proti ničli, kar je razumljivo, saj so prve signifikantne števke zmeraj natančne. Funkcija Ai eksponentno pada proti ničli, zato tudi napaka hitro pada.

Pri negativnih številih imamo manj težav z natančnostjo, saj se tam funkcija giblje na intervalu $[-0.4, 0.4]$. Aproksimacija divergira pri izhodišču, kar je skladno s teorijo.

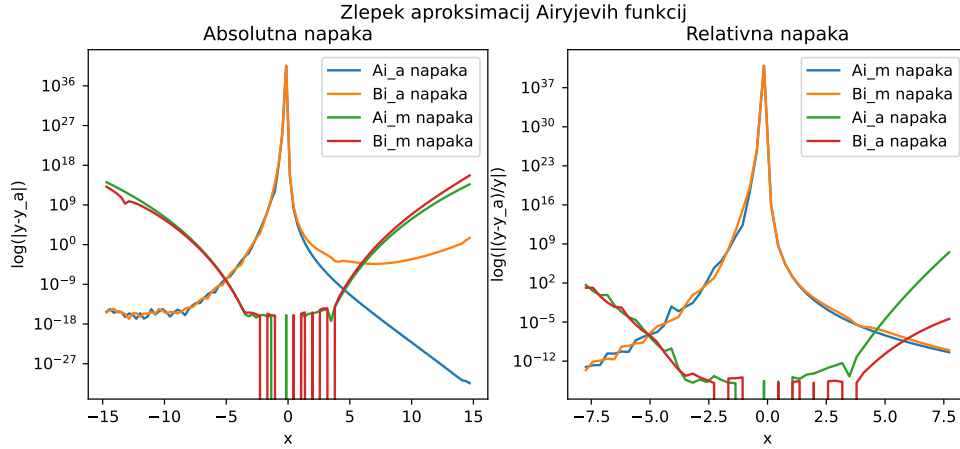
Število členov vsote za dane rezultate je okoli 10.

2.3 Zlepke približkov

Za aproksimacijo Airyjevih funkcij na celotnem definicijskem območju moramo vse približke združiti. Le-to bomo storili s primerjavo absolutnih in relativnih napak obeh približkov. Graf 3 nam podaja to primerjavo. Približek z Maclaurinovo vrsto je za Ai natančen na intervalu $[-5, 4.5]$, za Bi pa na $[-5, 6]$. Komplement teh intervalov aproksimiramo z asimptotskimi vrstami.



Graf 2: Aproksimacija z asimptotskimi vrstami. Levi grafi prikazujejo aproksimacijo za pozitivna števila, desni pa za negativna.



Graf 3: Absolutna in relativna napaka obeh približkov na celotnem definicijskem območju.

2.4 Ničle Airyjevih funkcij

Prvih sto ničel $\{a_s\}_{s=1}^{100}$ Airyjeve funkcije Ai in prvih sto ničel $\{b_s\}_{s=1}^{100}$ funkcije Bi pri $x < 0$ lahko določimo z naslednjima formulama

$$a_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-1)}{8}\right), \quad b_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-3)}{8}\right), \quad s = 1, 2, \dots,$$

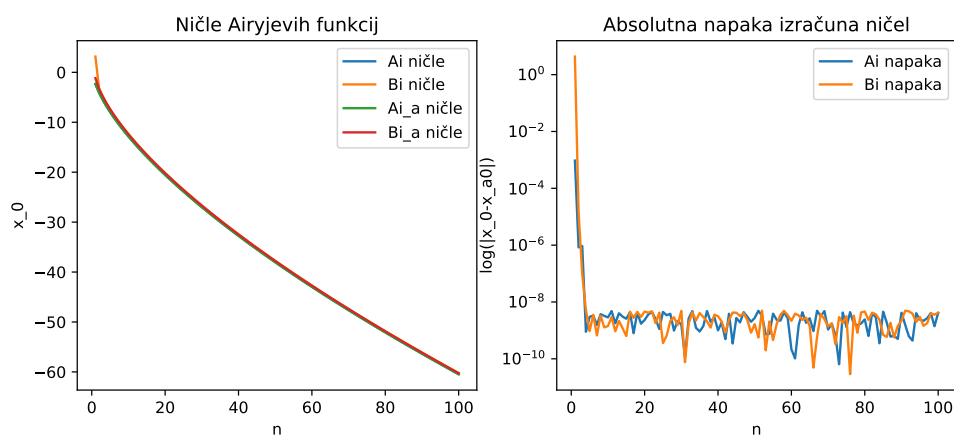
kjer ima funkcija f asimptotski razvoj

$$f(z) \sim z^{2/3} \left(1 + \frac{5}{48} z^{-2} - \frac{5}{36} z^{-4} + \frac{77125}{82944} z^{-6} - \frac{108056875}{6967296} z^{-8} + \dots \right).$$

Ničle lahko določimo tudi z različnimi numeričnimi metodami. Večina teh metod potrebuje začetni približek ničle, katerega lahko dobimo z izračunom funkcije v več mestih ($N > N_{nicel}$). Približke nato uporabimo za izračun bolj natančne vrednosti ničle, kar smo v tem primeru naredili z metodo `SCIPY.OPTIMIZE.FSOLVE`. Dana metoda dosega natančnost 1.49×10^{-8} , kar lahko opazimo na Grafu 4. Bolj natančno vrednost bi lahko nato dobili z bisekcijo. Odstopanje opazimo pri prvi ničli Bi , kjer zgornja formula da pozitivno ničlo, kar pa je napačno. Namesto zgornjih formul bi lahko zato uporabili vgrajeno funkcijo *airy* in zgornjo numerično metodo.

3 Zaključek

Cilj naloge je bilo proučiti obnašanje približkov Airyjevih funkcij na celotnem definicijskem območju. Analiza je pokazala, da lahko z modulom `NUMPY`



Graf 4: Ničle Airyjevih funkcij in absolutna napaka izračuna ničel.

dosežemo želeno natančnost. Tako absolutno kot relativno napako lahko zmanjšamo na želeno toleranco. Problem nastopi pri velikih vrednostih funkcije Bi , ki eksponentno narašča. V tem primeru absolutna napaka narašča eksponentno, medtem ko se relativna manjša in hitro pade na natančnost sistema. S pametno implementacijo aproksimacijskih formul smo zmanjšali časovno zahtevnost rešitve, kar nam nato olajša iskanje ničel in poveča število členov v zaporedju.