Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Задание по курсу
«Теория управления»

Выполнил

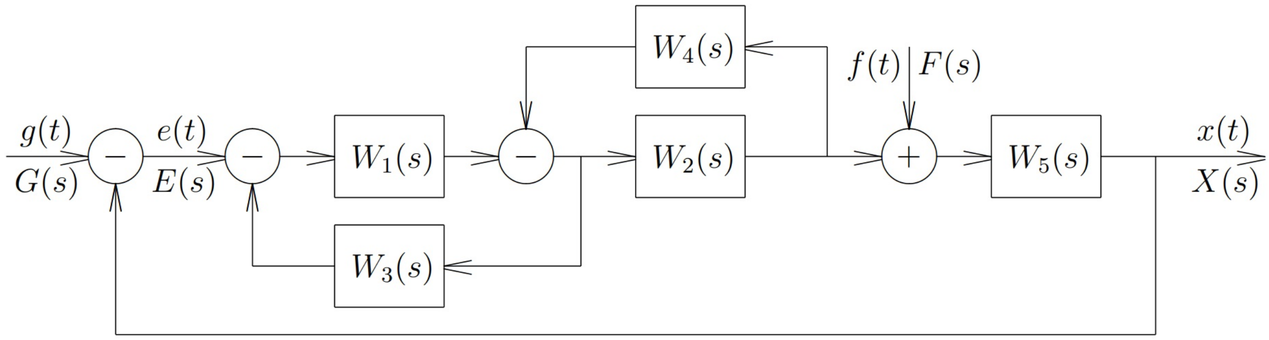
студент группы Б21-215

Бородин Михаил Сергеевич

Вариант №5

2023

Исходная структурная схема линейной динамической системы:



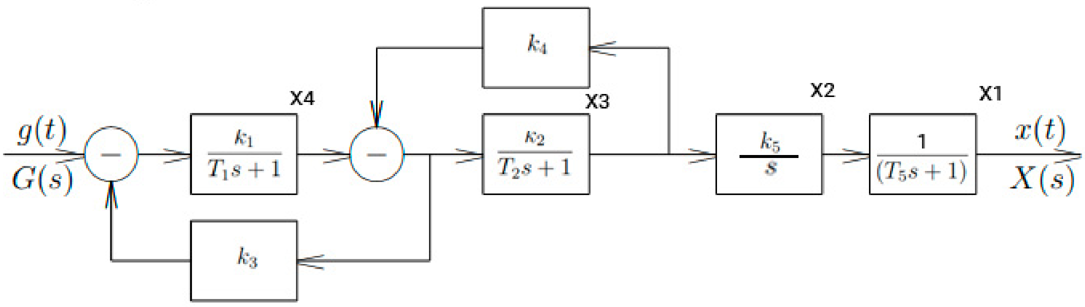
$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}\ ; \qquad W_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}\ ; \qquad W_3(s) = k_3\ ;$$

$$W_4(s) = k_4\ ; \qquad W_5(s) = \frac{k_5}{s(T_5 s + 1)}\ .$$

$k_1 = 3\,;$	$k_2 = 5\,;$	$k_3 = 2\,;$	$k_4 = 2\,;$	$k_5 = 3\,;$
$T_1 = 0.2\,;$	$T_2 = 0.1\,;$			$T_5 = 0.2\,.$

Задание 1. Составить уравнения динамики разомкнутой и замкнутой систем в пространстве состояний (определить матрицу A, векторы $\bar{b}$, $\bar{c}^T$, коэффициент d).

Для разомкнутой схемы:



$$\mathrm{x}_1 = x$$

$$T_5 \frac{d\mathrm{x}_1}{dt} + \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$$

$$\frac{d\mathrm{x}_2}{dt} = k_5 \mathrm{x}_3$$

$$T_2 \frac{d\mathrm{x}_3}{dt} + \mathrm{x}_3 = k_2 \Big(\mathrm{x}_4 - k_4 \mathrm{x}_3 \Big)$$

$$T_1 \frac{d\mathrm{x}_4}{dt} + \mathrm{x}_4 = k_1 \Big(g - k_3(\mathrm{x}_4 - k_4 \mathrm{x}_3) \Big)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{x}_1}{dt} = -\dfrac{1}{T_5}\mathrm{x}_1 + \dfrac{1}{T_5}\mathrm{x}_2 \\ \dfrac{d\mathrm{x}_2}{dt} = k_5 \mathrm{x}_3 \\ \dfrac{d\mathrm{x}_3}{dt} = -\dfrac{1 + k_2 k_4}{T_2}\mathrm{x}_3 + \dfrac{k_2}{T_2}\mathrm{x}_4 \\ \dfrac{d\mathrm{x}_4}{dt} = \dfrac{k_1 k_3 k_4}{T_1}\mathrm{x}_3 - \dfrac{1 + k_1 k_3}{T_1}\mathrm{x}_4 + \dfrac{k_1}{T_1} g \end{cases}$$

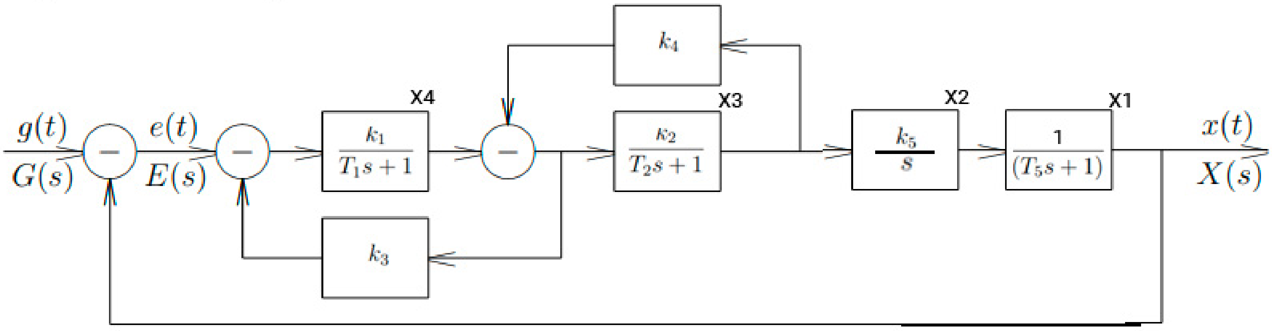
$$\mathrm{x}_1 = x$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_5} & \frac{1}{T_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+k_2k_4}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ 0 & 0 & \frac{k_1k_3k_4}{T_1} & -\frac{1+k_1k_3}{T_1} \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_1}{T_1} \end{pmatrix} \qquad \bar{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -110 & 50 \\ 0 & 0 & 60 & -35 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = 0$$

Для замкнутой схемы:



$$\mathrm{x}_1 = x$$
$$T_5\frac{d\mathrm{x}_1}{dt} + \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$$
$$\frac{d\mathrm{x}_2}{dt} = k_5\mathrm{x}_3$$
$$T_2\frac{d\mathrm{x}_3}{dt} + \mathrm{x}_3 = k_2\Big(\mathrm{x}_4 - k_4\mathrm{x}_3\Big)$$
$$T_1\frac{d\mathrm{x}_4}{dt} + \mathrm{x}_4 = k_1\Big(g - \mathrm{x}_1 - k_3(\mathrm{x}_4 - k_4\mathrm{x}_3)\Big)$$

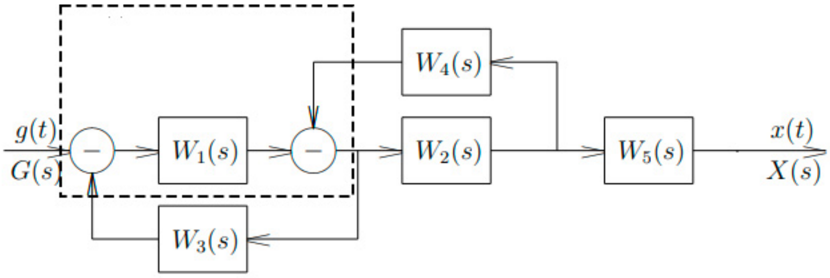
$$\begin{cases} \frac{d\mathrm{x}_1}{dt} = -\frac{1}{T_5}\mathrm{x}_1 + \frac{1}{T_5}\mathrm{x}_2 \\ \frac{d\mathrm{x}_2}{dt} = k_5\mathrm{x}_3 \\ \frac{d\mathrm{x}_3}{dt} = -\frac{1+k_2k_4}{T_2}\mathrm{x}_3 + \frac{k_2}{T_2}\mathrm{x}_4 \\ \frac{d\mathrm{x}_3}{dt} = -\frac{k_1}{T_1}\mathrm{x}_1 + \frac{k_1k_3k_4}{T_1}\mathrm{x}_3 - \frac{1+k_1k_3}{T_1}\mathrm{x}_4 + \frac{k_1}{T_1}g \end{cases}$$
$$\mathrm{x}_1 = x$$

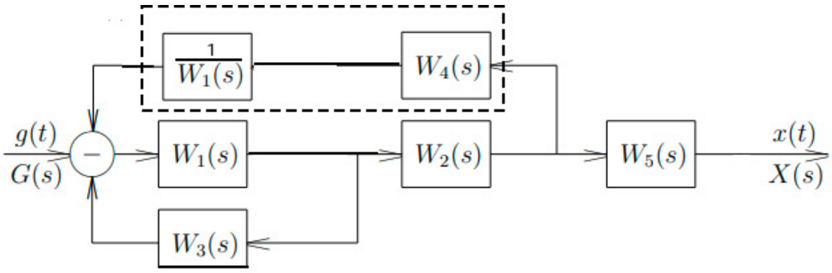
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_5} & \frac{1}{T_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+k_2k_4}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ -\frac{k_1}{T_1} & 0 & \frac{k_1k_3k_4}{T_1}\mathrm{x}_3 & -\frac{1+k_1k_3}{T_1} \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_1}{T_1} \end{pmatrix} \qquad \bar{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$d = 0$$

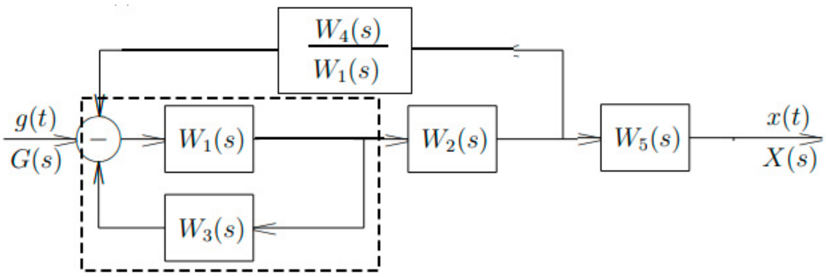
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -110 & 50 \\ -15 & 0 & 60 & -35 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = 0$$

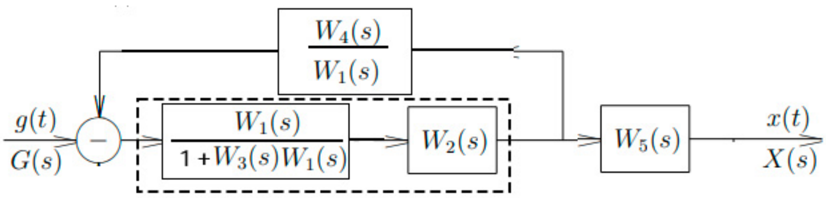
Задание 2. Определить передаточную функцию разомкнутой системы $W(s)$, приведя ее к типовым звеньям. Построить ЛАФЧХ разомкнутой системы на ЛАХ-бумаге. Определить передаточную функцию замкнутой системы $\Phi(s)$.

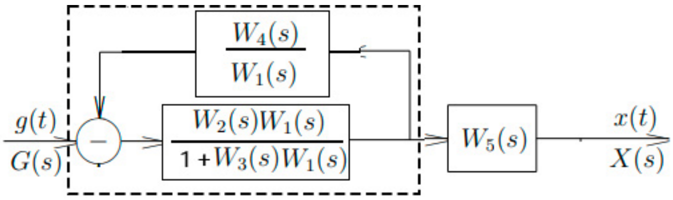
Разомкнутая система:

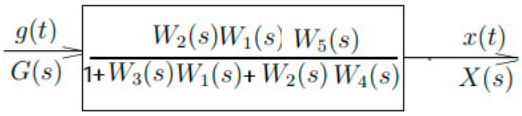






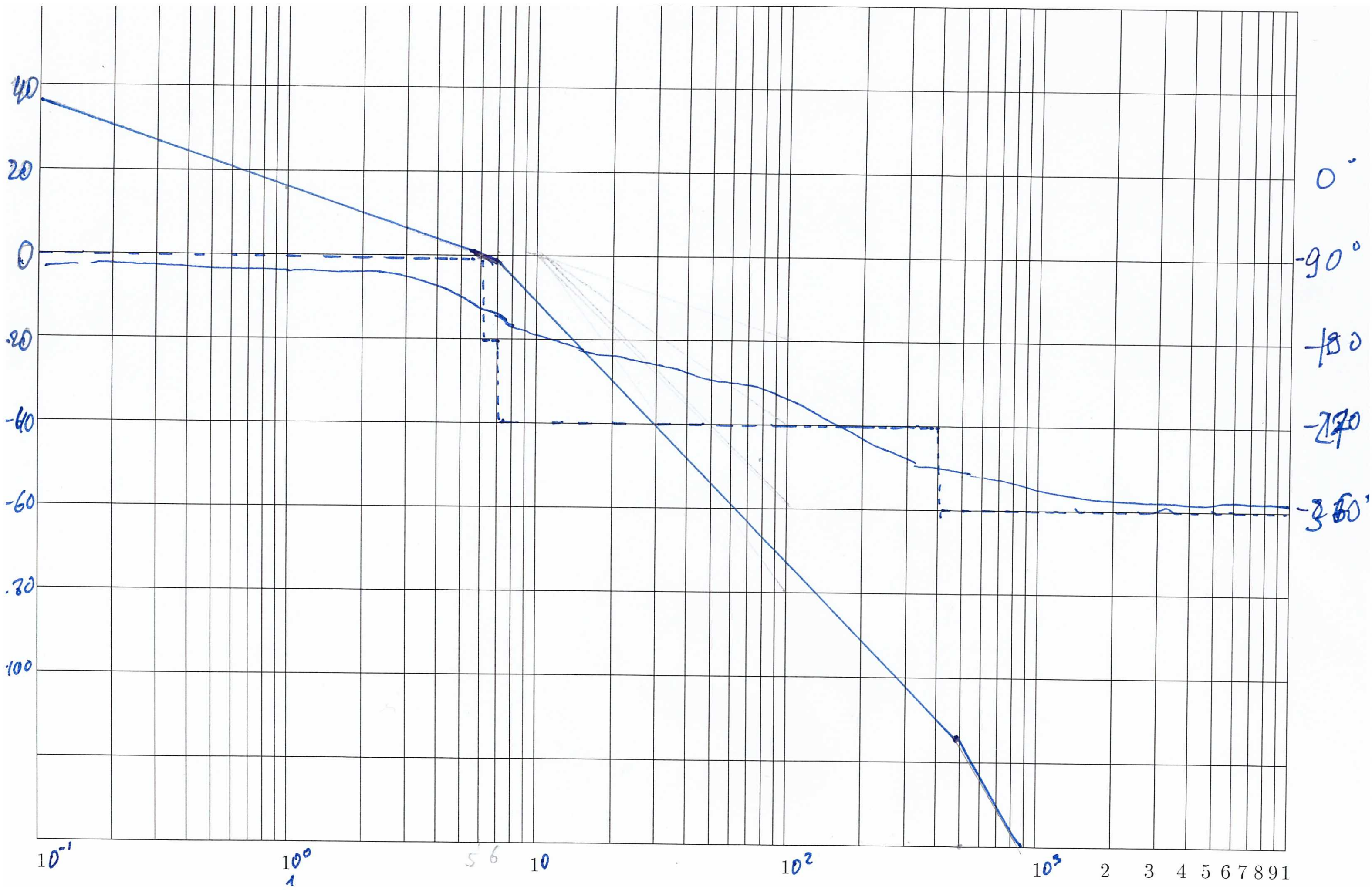




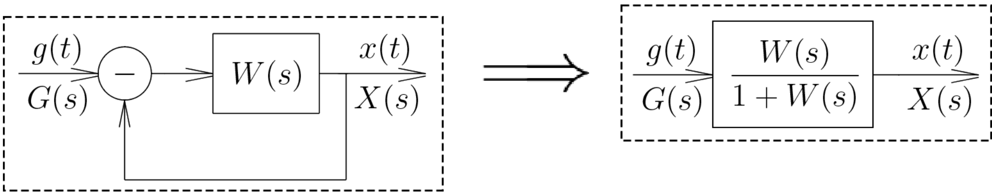


$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_5(s)}{1+W_1(s)W_3(s)+W_2(s)W_4(s)} = \frac{\frac{k_1}{T_1s+1}\cdot\frac{k_2}{T_2s+1}\cdot\frac{k_5}{s(T_5s+1)}}{1+\frac{k_1}{T_1s+1}\cdot k_3+\frac{k_2}{T_2s+1}\cdot k_4} =$$
$$= \frac{45}{17}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{0.2s+1}\cdot\frac{1}{\frac{2}{1700}s^2+\frac{29}{170}s+1}$$

ЛАФЧХ разомкнутой системы (вместе с асимптотическими графиками):


40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
0°
-90°
-180
-270
-360°
10^{-1}
10^{0}
1
5 6
10
10^{2}
10^{3}
2 3 4 5 6 7 8 9 1

Замкнутая система:

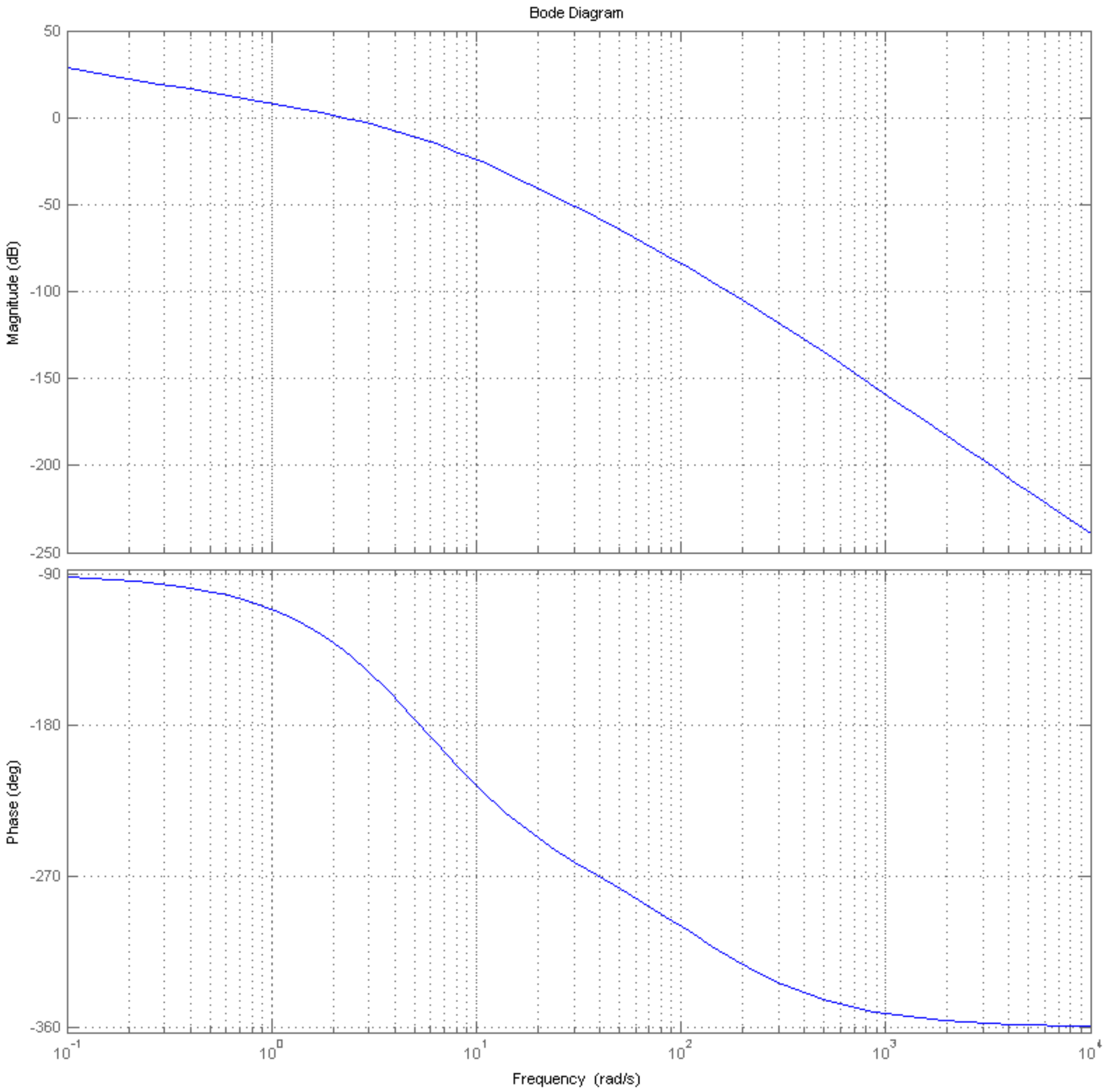


$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{\frac{45}{17}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{0.2s+1}\cdot\frac{1}{\frac{2}{1700}s^2+\frac{29}{170}s+1}}{1+\frac{45}{17}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{0.2s+1}\cdot\frac{1}{\frac{2}{1700}s^2+\frac{29}{170}s+1}} =$$

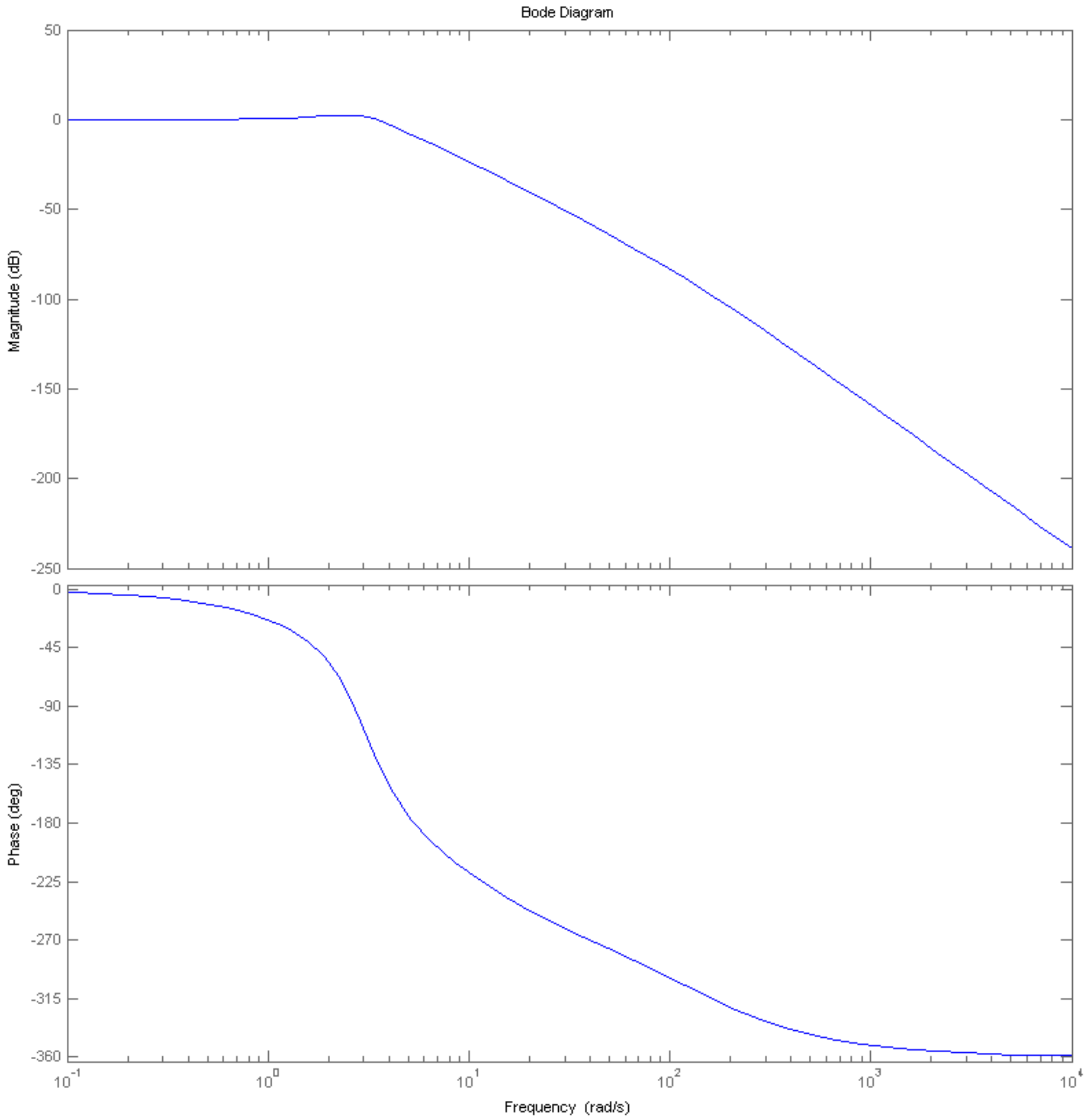
$$= \frac{1}{\frac{1}{11250}s^4+\frac{1}{75}s^3+\frac{7}{50}s^2+\frac{17}{45}s+1}$$

Задание 3. Построить на компьютере АФЧХ (годограф) и ЛАФЧХ разомкнутой и замкнутой систем.

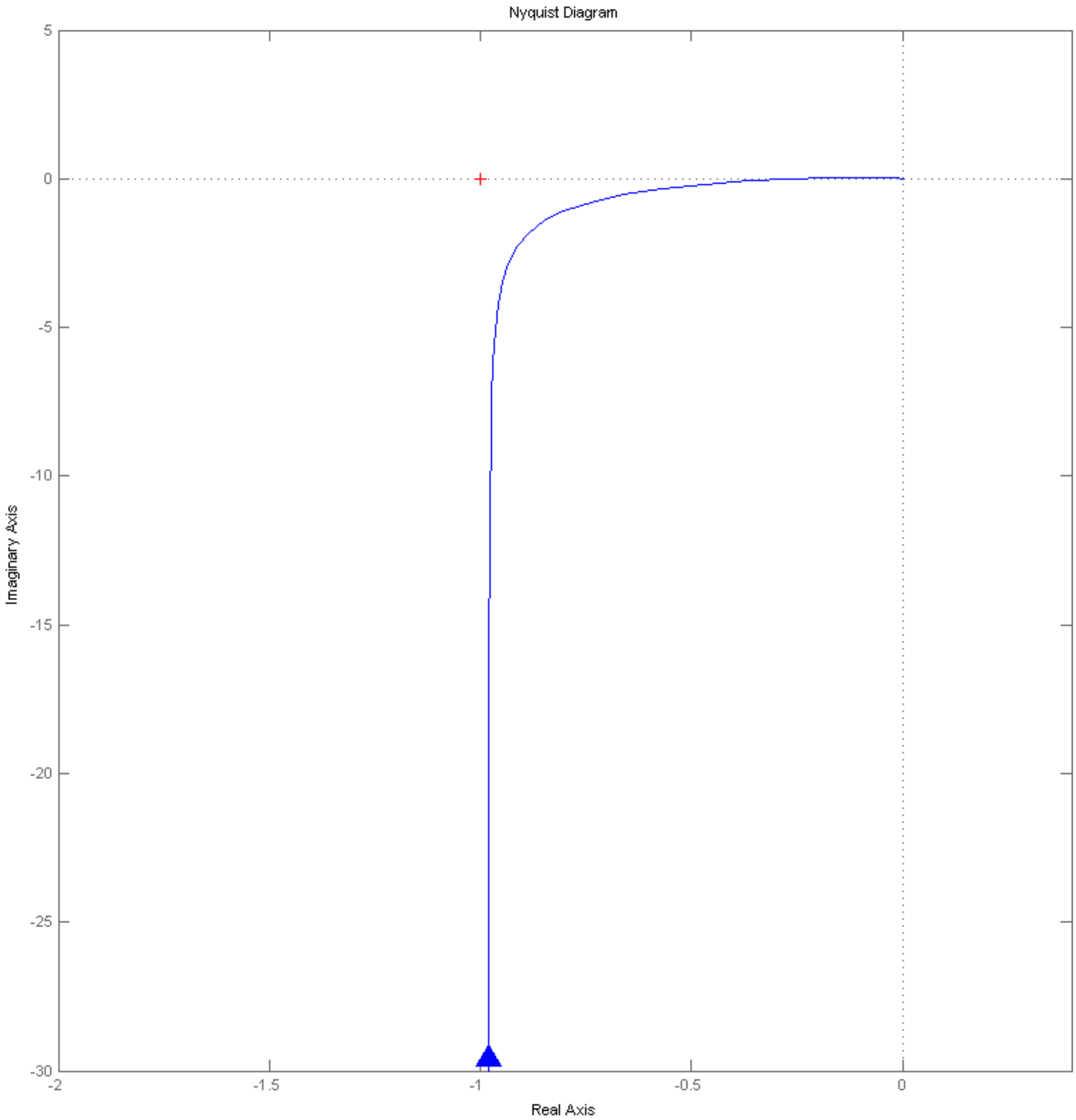
ЛАФЧХ разомкнутой системы:



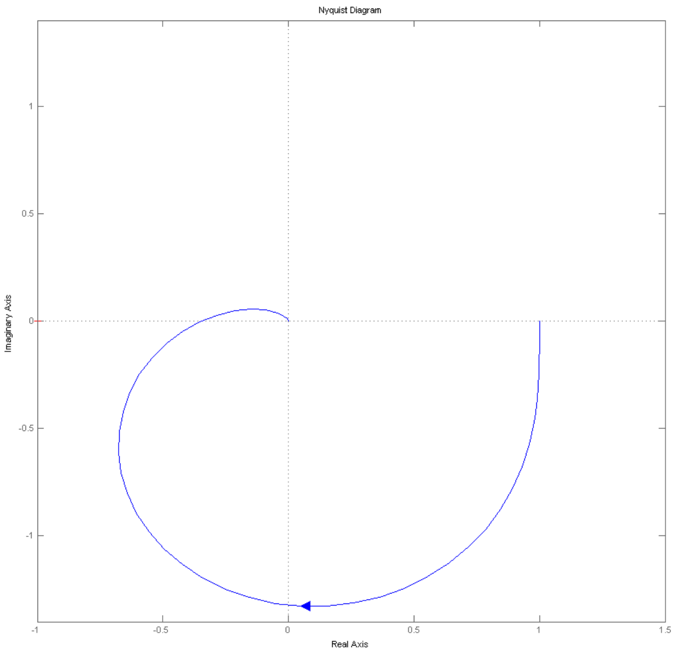
ЛАФЧХ замкнутой системы:



АФЧХ (годограф) разомкнутой системы:



АФЧХ (годограф) замкнутой системы:



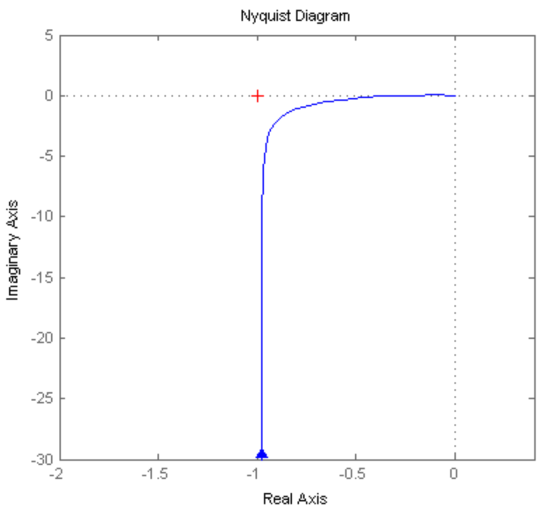
Задание 4. Исследовать устойчивость системы с использованием ЛАФЧХ и частотного критерия. Определить предельный коэффициент усиления системы, при котором система находится на грани устойчивости.

По критерию Найквиста: для устойчивости замкнутой ЛДС необходимо и достаточно, чтобы её годограф в разомкнутом состоянии охватывал критическую точку $(-1; 0j)$ против часовой стрелки $K/2$ раз при возрастании частоты $0 \leqslant \omega < +\infty$, где K – число полюсов передаточной функции разомкнутой системы в правой полуплоскости.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$= \frac{45}{17} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{0.2s+1} \cdot \frac{1}{\frac{2}{1700}s^2 + \frac{29}{170}s + 1}$$

Полюсы $W(s)$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 \approx -5.98$ $\lambda_4 \approx -284.01$. Ни один из полюсов не расположен в правой полуплоскости, так что $K = 0$.



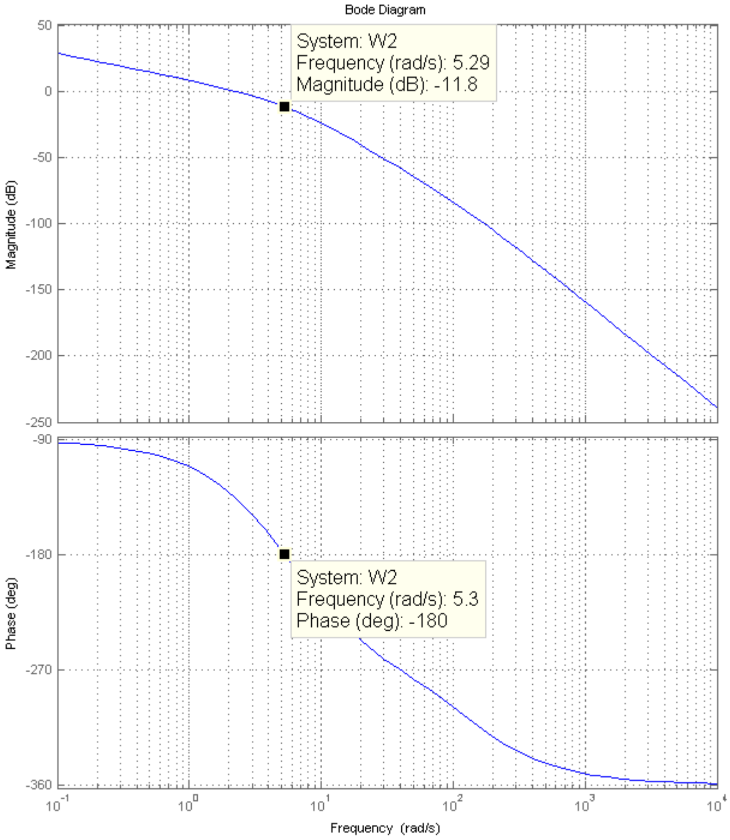
Из построенного рисунка видно, что годограф не охватывает точку $(-1, 0j)$ (т. е. охватывает её 0 раз). Поэтому выполняется равенство:

$0 = \frac{0}{2}$ – то есть система устойчива.

Сделаем коэффициент усиления звеньев $k = \frac{45}{17}$ варьируемой переменной:

$$W(s) = k \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{0.2s+1} \cdot \frac{1}{\frac{2}{1700}s^2 + \frac{29}{170}s + 1}$$

Тогда ЛАЧХ данной передаточной функции будет совершать вертикальный параллельный перенос при изменении значения k.

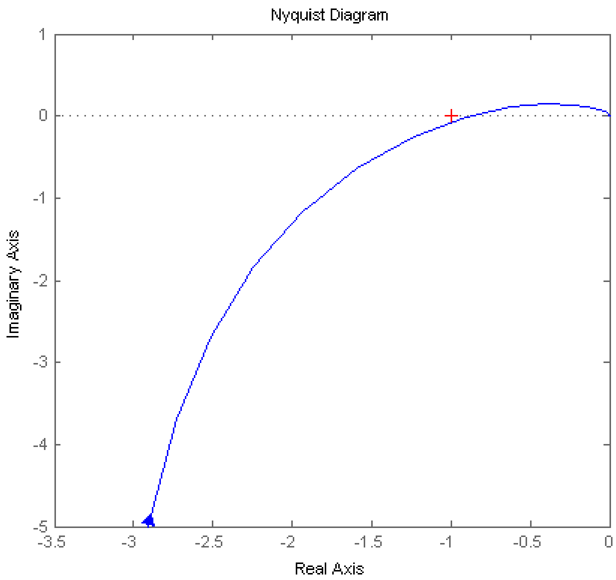


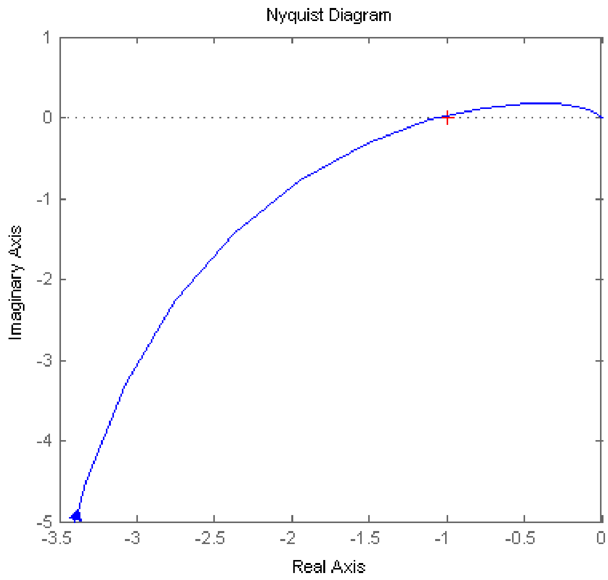
Из рисунка видно, что запас устойчивости по амплитуде $h_m \approx 11.8$ – на такую величину можно параллельно переносить ЛАЧХ вверх, прежде чем её точка пересечения с нулём окажется правее, чем точка пересечения ФЧХ со значением -180, в случае чего система уже окажется неустойчивой.

Тогда:

$20 \lg k_{\text{кр}} = 20 \lg \dfrac{45}{17} + h_m$

$k_{\text{кр}} = \dfrac{45}{17} \cdot 10^{h_m/20} \approx 10$ – при таком k система находится на грани устойчивости.



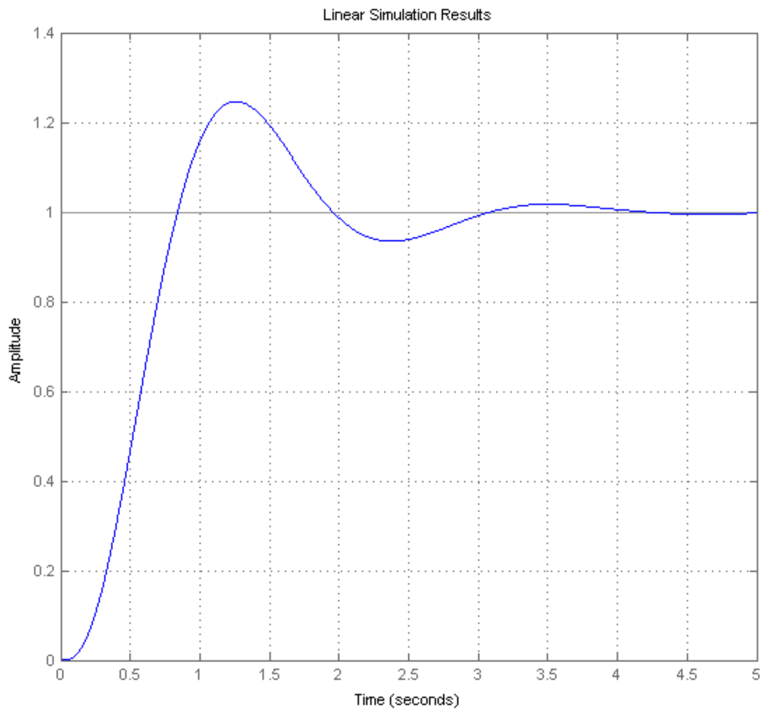


Выше приведены АФЧХ для случаев $k = 9$ и $k = 11$ соответственно. Видно, что в первом случае годограф не охватывает точку $(-1, 0j)$ (т. е. охватывает её 0 раз), поэтому выполняется равенство $0 = \frac{0}{2}$, и система оказывается устойчивой. А во втором случае годограф охватывает точку $(-1, 0j)$ 1 раз по часовой стрелке (т. е. охватывает -1 раз против часовой стрелки), поэтому выражение $-1 = \frac{0}{2}$ не является равенством, и система оказывается неустойчивой.

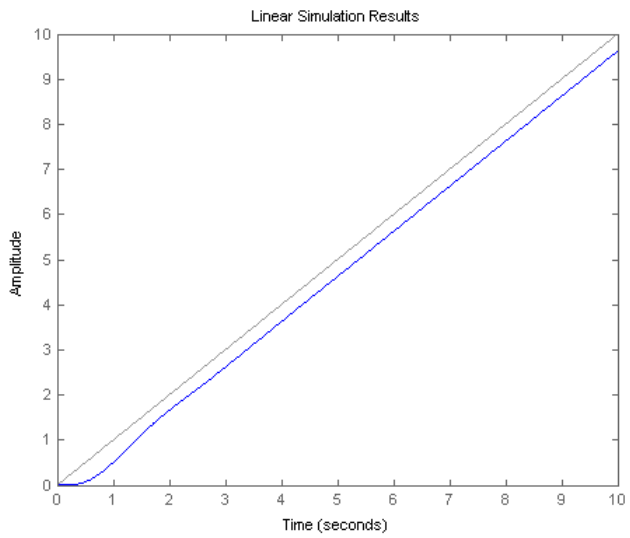
Задание 5. Построить на компьютере переходные процессы в замкнутой системе при действии единичного ступенчатого, линейного нарастающего и гармонического воздействий. Определить астатизм, коэффициенты добротности системы и предельные значения установившихся ошибок при $g(t) = 1[t]$, $g(t) = at$. Определить коэффициенты ошибок C_0, C_1, C_2.

Для построения переходных процессов при заданных воздействиях использовалась команда `lsim(sys,g,t)` в среде MATLAB.

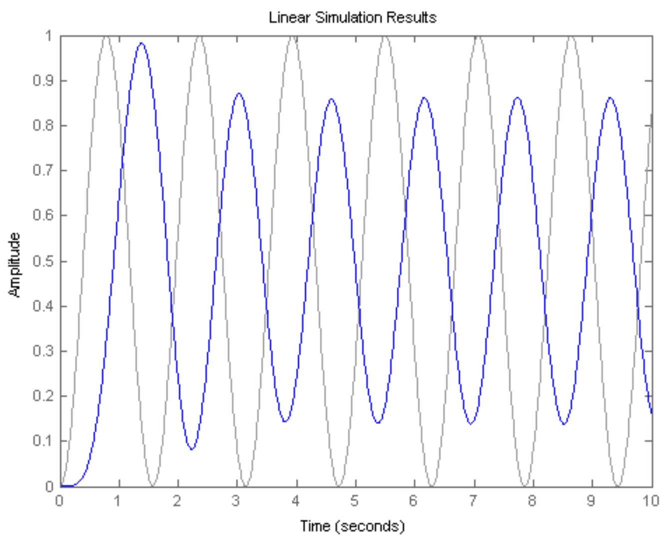
Переходный процесс при действии единичного ступенчатого воздействия:



Переходный процесс при действии линейного нарастающего воздействия:



Переходный процесс при действии гармонического воздействия:



Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(s) = \frac{45}{17} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{0.2s+1} \cdot \frac{1}{\frac{2}{1700}s^2 + \frac{29}{170}s + 1}$$

В системе имеется одно интегрирующее звено, значит, система имеет **астатизм первого порядка**.

$\nu = 1$

Коэффициент добротности по скорости $k_v = k = \dfrac{45}{17}$.

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки $\varepsilon(t)$:

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{1}{\frac{1}{11250}s^4 + \frac{1}{75}s^3 + \frac{7}{50}s^2 + \frac{17}{45}s + 1}$$

Коэффициенты ошибок:

$$C_0 = \Phi_\varepsilon(0) = 1$$
$$C_1 = \left.\frac{d\Phi_\varepsilon}{ds}\right|_{s=0} \approx -0.378$$
$$C_2 = \left.\frac{d^2\Phi_\varepsilon}{ds^2}\right|_{s=0} \approx 0.0054$$

Предельные значения установившихся ошибок:

$$\varepsilon(t) = C_0 g(t) + \frac{C_1}{1!}\frac{dg(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!}\frac{d^2g(t)}{dt^2} + \dots$$

$g(t) = 1[t]$: $\quad \varepsilon(t) = C_0 = 1$

$g(t) = at$: $\quad \varepsilon(t) = C_0 at + C_1 a = -0.378a$