Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

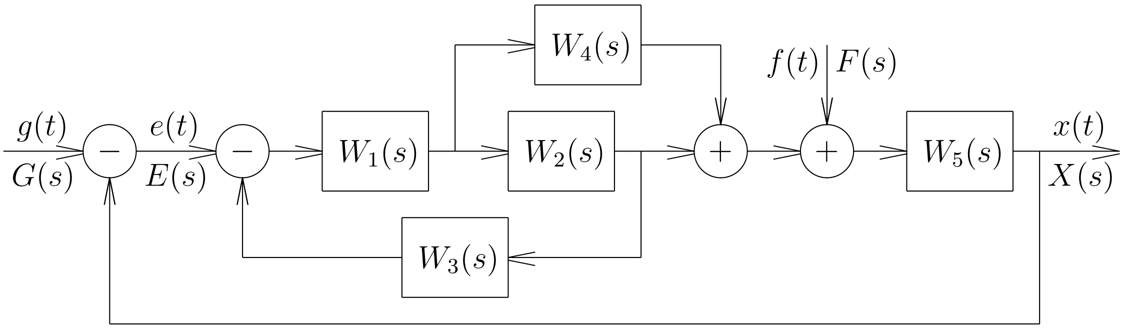
Задание по курсу
«Теория управления»

Выполнил
студент группы Б21-215
Рокин Олег Дмитриевич

Вариант №6

2023

Исходная структурная схема линейной динамической системы:



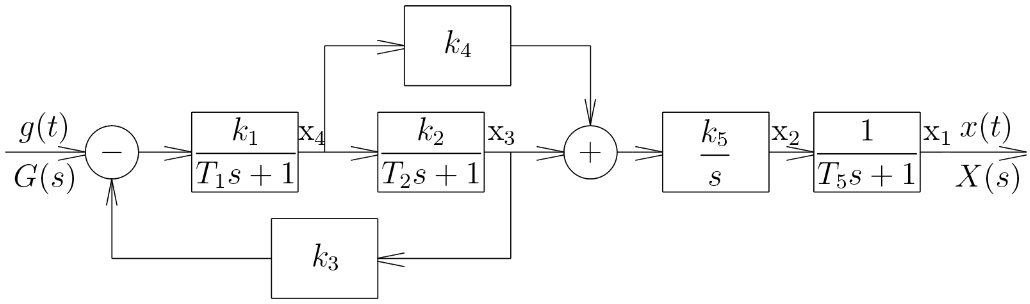
$$W_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}\ ; \qquad W_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}\ ; \qquad W_3(s) = k_3\ ;$$

$$W_4(s) = k_4\ ; \qquad W_5(s) = \frac{k_5}{s(T_5 s + 1)}\ .$$

$k_1 = 2\,;$	$k_2 = 2\,;$	$k_3 = 2\,;$	$k_4 = 3\,;$	$k_5 = 3\,;$
$T_1 = 0.2\,;$	$T_2 = 0.3\,;$			$T_5 = 0.5\,.$

Задание 1. Составить уравнения динамики разомкнутой и замкнутой систем в пространстве состояний (определить матрицу A, векторы $\bar{b}$, $\bar{c}^T$, коэффициент d).

Для разомкнутой схемы:



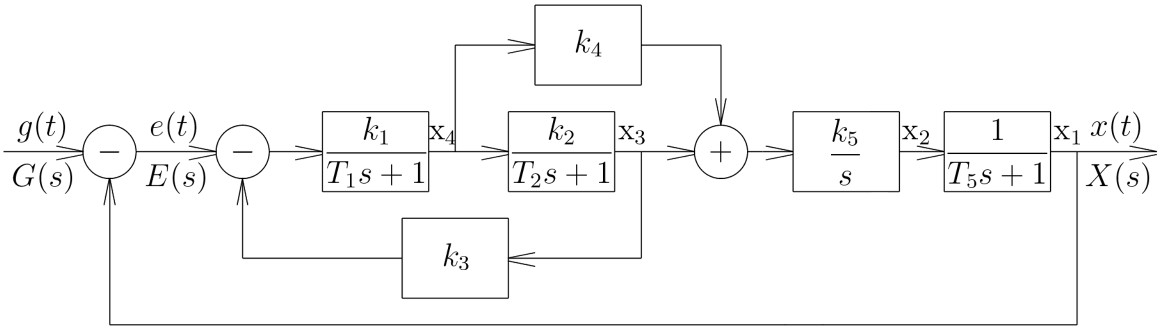
$$\mathrm{x}_1 = x$$
$$\mathrm{x}_2 = T_5\frac{d\mathrm{x}_1}{dt} + \mathrm{x}_1$$
$$\frac{1}{k_5}\frac{d\mathrm{x}_2}{dt} = \mathrm{x}_3 + k_4\mathrm{x}_4$$
$$\mathrm{x}_4 = \frac{1}{k_2}\left(T_2\frac{d\mathrm{x}_3}{dt} + \mathrm{x}_3\right)$$
$$\frac{1}{k_1}\left(T_1\frac{d\mathrm{x}_4}{dt} + \mathrm{x}_4\right) = g - k_3\mathrm{x}_3$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{x}_1}{dt} = -\dfrac{1}{T_5}\mathrm{x}_1 + \dfrac{1}{T_5}\mathrm{x}_2 \\ \dfrac{d\mathrm{x}_2}{dt} = k_5\mathrm{x}_3 + k_4k_5\mathrm{x}_4 \\ \dfrac{d\mathrm{x}_3}{dt} = -\dfrac{1}{T_2}\mathrm{x}_3 + \dfrac{k_2}{T_2}\mathrm{x}_4 \\ \dfrac{d\mathrm{x}_4}{dt} = -\dfrac{k_1k_3}{T_1}\mathrm{x}_3 - \dfrac{1}{T_1}\mathrm{x}_4 + \dfrac{k_1}{T_1}g \end{cases}$$
$$\mathrm{x}_1 = x$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_5} & \frac{1}{T_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & k_4k_5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ 0 & 0 & -\frac{k_1k_3}{T_1} & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_1}{T_1} \end{pmatrix} \qquad \bar{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3.33 & 6.67 \\ 0 & 0 & -20 & -5 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = 0$$

Для замкнутой схемы:



$$\mathrm{x}_1 = x$$
$$\mathrm{x}_2 = T_5\frac{d\mathrm{x}_1}{dt} + \mathrm{x}_1$$
$$\frac{1}{k_5}\frac{d\mathrm{x}_2}{dt} = \mathrm{x}_3 + k_4\mathrm{x}_4$$
$$\mathrm{x}_4 = \frac{1}{k_2}\left(T_2\frac{d\mathrm{x}_3}{dt} + \mathrm{x}_3\right)$$
$$\frac{1}{k_1}\left(T_1\frac{d\mathrm{x}_4}{dt} + \mathrm{x}_4\right) = g - \mathrm{x}_1 - k_3\mathrm{x}_3$$

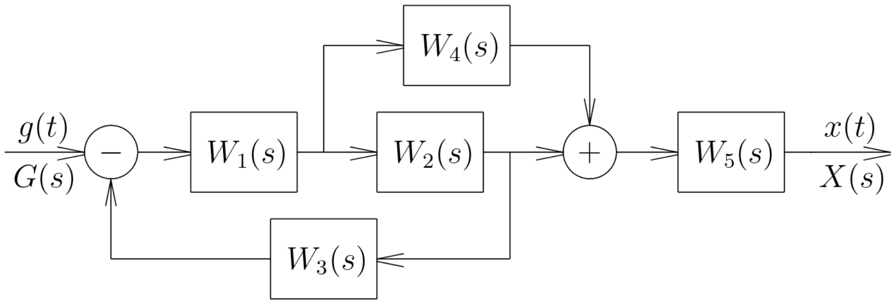
$$\begin{cases}
\dfrac{d\mathrm{x}_1}{dt} = -\dfrac{1}{T_5}\mathrm{x}_1 + \dfrac{1}{T_5}\mathrm{x}_2 \\
\dfrac{d\mathrm{x}_2}{dt} = k_5\mathrm{x}_3 + k_4k_5\mathrm{x}_4 \\
\dfrac{d\mathrm{x}_3}{dt} = -\dfrac{1}{T_2}\mathrm{x}_3 + \dfrac{k_2}{T_2}\mathrm{x}_4 \\
\dfrac{d\mathrm{x}_4}{dt} = -\dfrac{k_1}{T_1}\mathrm{x}_1 - \dfrac{k_1k_3}{T_1}\mathrm{x}_3 - \dfrac{1}{T_1}\mathrm{x}_4 + \dfrac{k_1}{T_1}g
\end{cases}$$
$$\mathrm{x}_1 = x$$

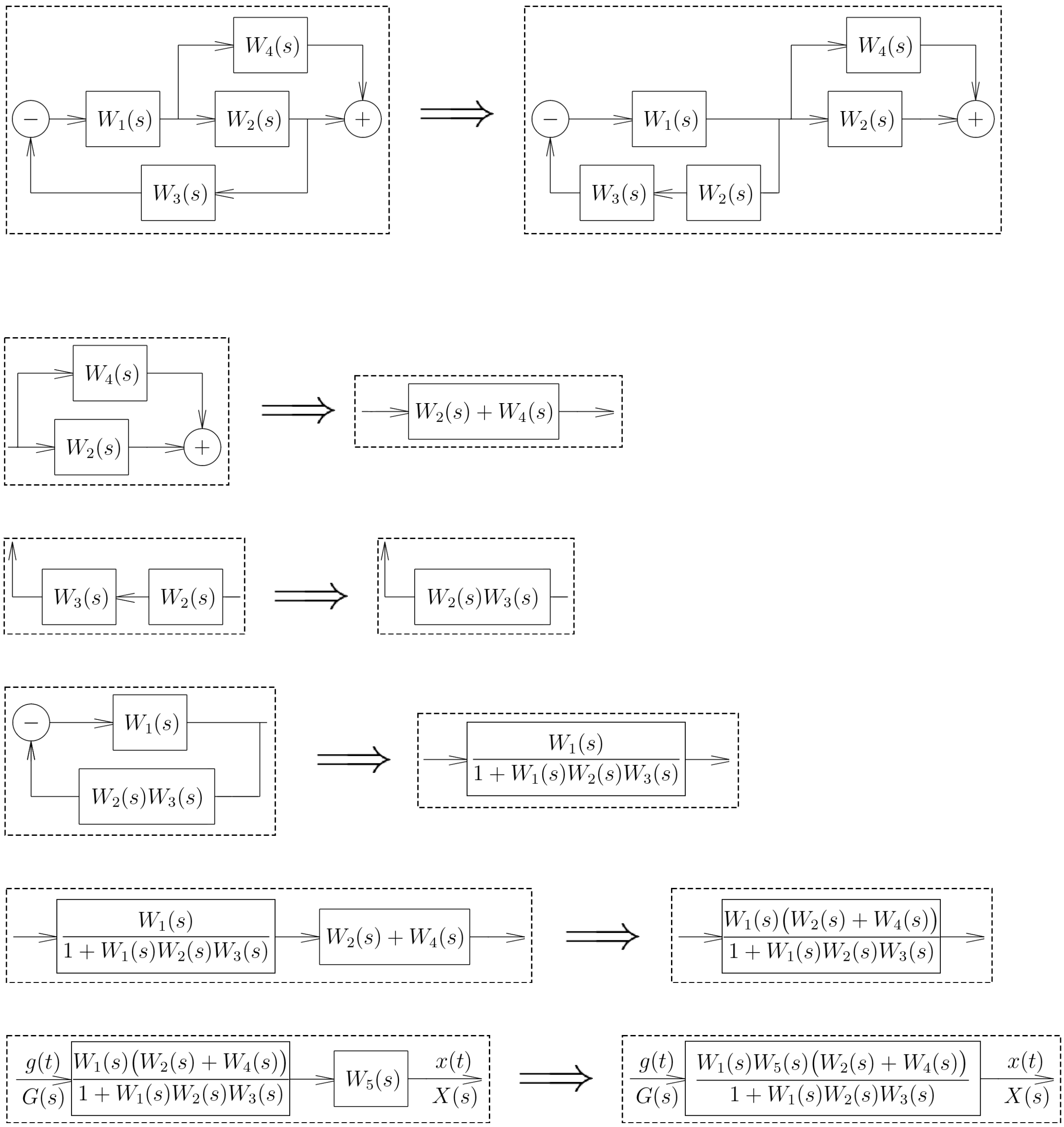
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_5} & \frac{1}{T_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 & k_4k_5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ -\frac{k_1}{T_1} & 0 & -\frac{k_1k_3}{T_1} & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_1}{T_1} \end{pmatrix} \qquad \bar{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3.33 & 6.67 \\ -10 & 0 & -20 & -5 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \bar{c}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = 0$$

Задание 2. Определить передаточную функцию разомкнутой системы $W(s)$, приведя ее к типовым звеньям. Построить ЛАФЧХ разомкнутой системы на ЛАХ-бумаге. Определить передаточную функцию замкнутой системы $\Phi(s)$.

Разомкнутая система:





$$W(s) = \frac{W_1(s)W_5(s)\big(W_2(s)+W_4(s)\big)}{1+W_1(s)W_2(s)W_3(s)} = \frac{\frac{k_1}{T_1s+1}\cdot\frac{k_5}{s(T_5s+1)}\cdot\left(\frac{k_2}{T_2s+1}+k_4\right)}{1+\frac{k_1}{T_1s+1}\cdot\frac{k_2}{T_2s+1}\cdot k_4} =$$

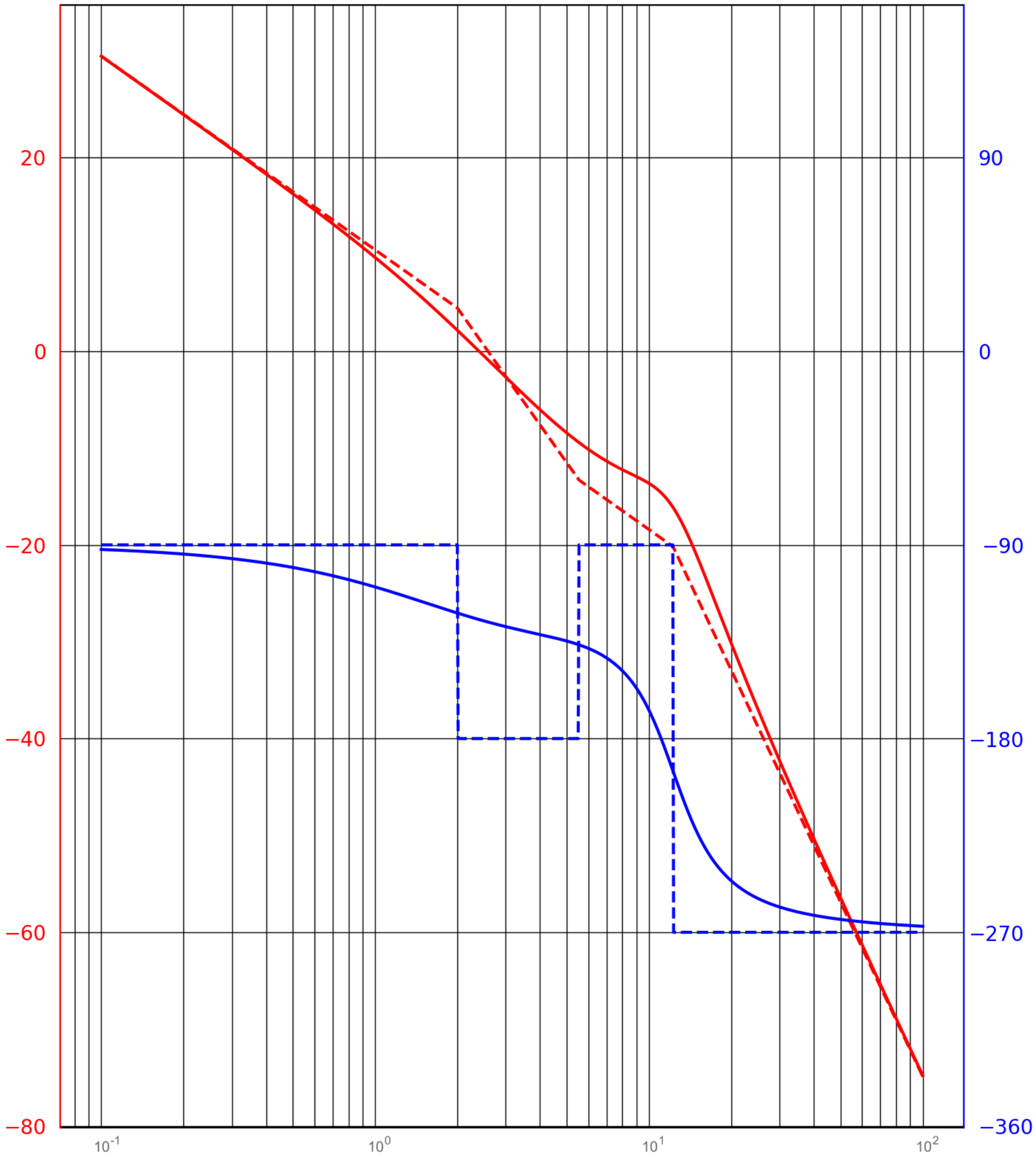
$$= \frac{k_1k_5(k_2+k_4+k_4T_2s)}{s(T_1s+1)(T_5s+1)(T_2s+1)}\;\frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)+k_1k_2k_3} =$$

$$= \frac{k_1k_5(k_2+k_4+k_4T_2s)}{s(T_5s+1)\big(T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1+k_1k_2k_3\big)} =$$

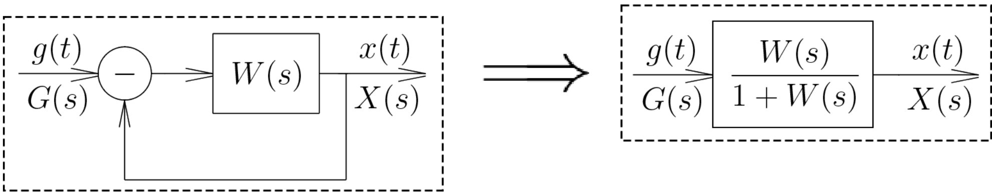
$$= \frac{k_1k_5(k_2+k_4)}{1+k_1k_2k_3}\left(1+\frac{k_4T_2}{k_2+k_4}s\right)\frac{1}{s}\;\frac{1}{T_5s+1}\;\frac{1}{\frac{T_1T_2}{1+k_1k_2k_3}s^2+\frac{T_1+T_2}{1+k_1k_2k_3}s+1} =$$

$$= \frac{10}{3}\,(1+0.18s)\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{0.5s+1}\,\frac{1}{\frac{2}{300}s^2+\frac{5}{90}s+1}$$

ЛАФЧХ разомкнутой системы (вместе с асимптотическими графиками):



Замкнутая система:



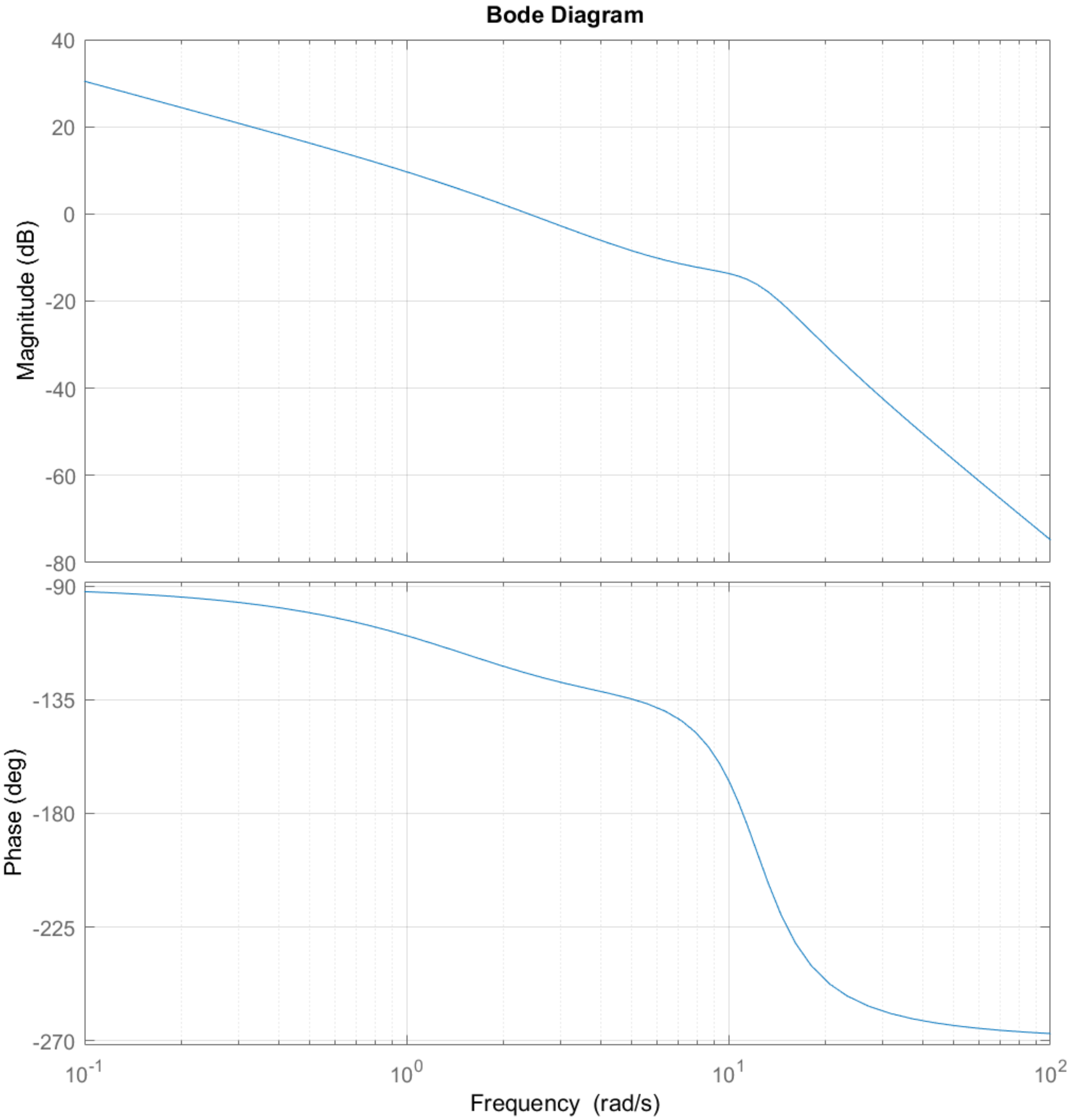
$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{\frac{10}{3}\,(1+0.18s)\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{0.5s+1}\,\frac{1}{\frac{2}{300}s^2+\frac{5}{90}s+1}}{1+\frac{10}{3}\,(1+0.18s)\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{0.5s+1}\,\frac{1}{\frac{2}{300}s^2+\frac{5}{90}s+1}} =$$

$$= \frac{10}{3}\,(1+0.18s)\,\frac{1}{s(0.5s+1)\left(\frac{2}{300}s^2+\frac{5}{90}s+1\right)+\frac{10}{3}(0.18s+1)} =$$

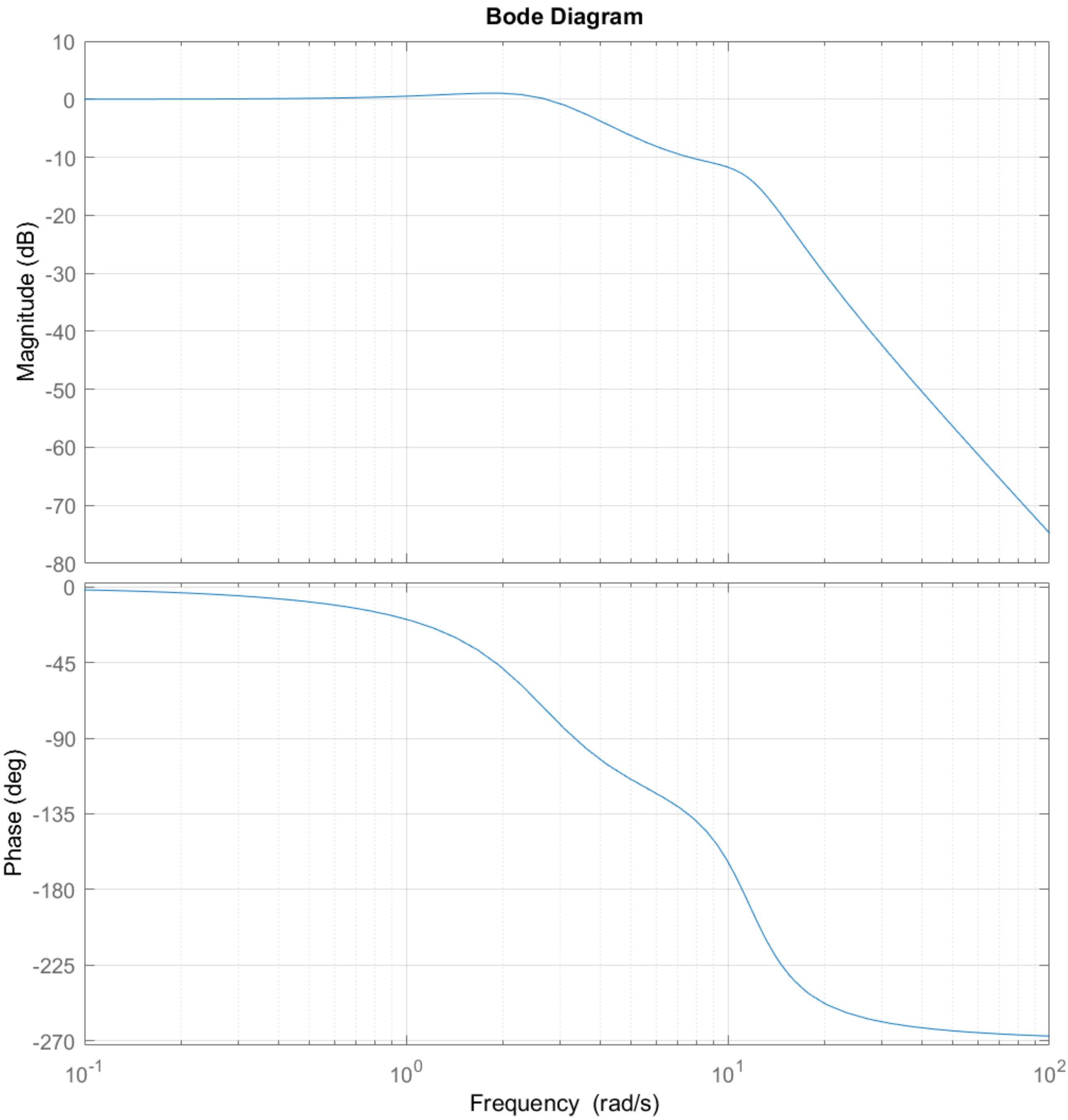
$$= (1+0.18s)\,\frac{1}{0.001s^4+\frac{31}{300}s^3+\frac{1}{6}s^2+0.48s+1}$$

Задание 3. Построить на компьютере АФЧХ (годограф) и ЛАФЧХ разомкнутой и замкнутой систем.

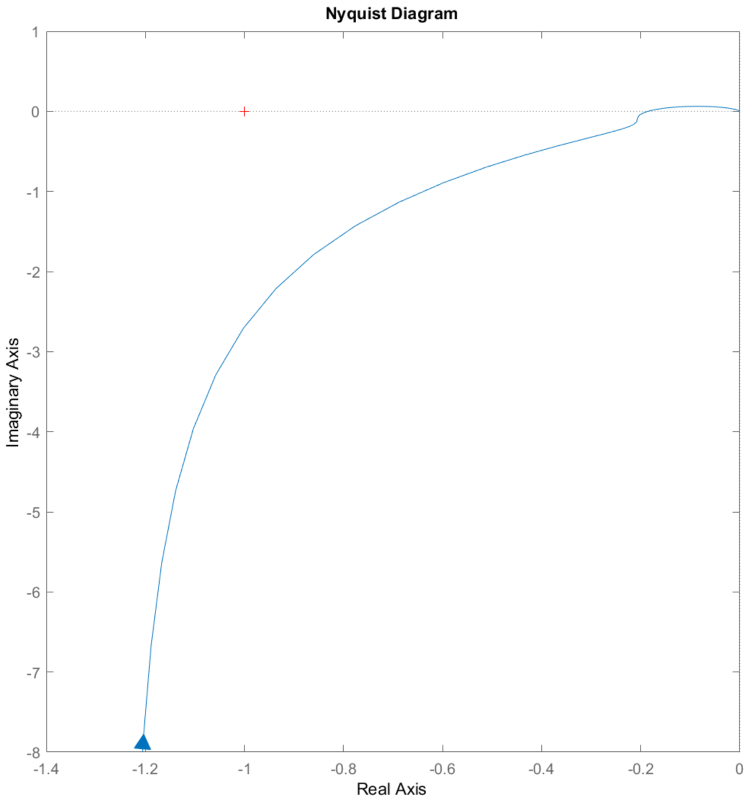
ЛАФЧХ разомкнутой системы:



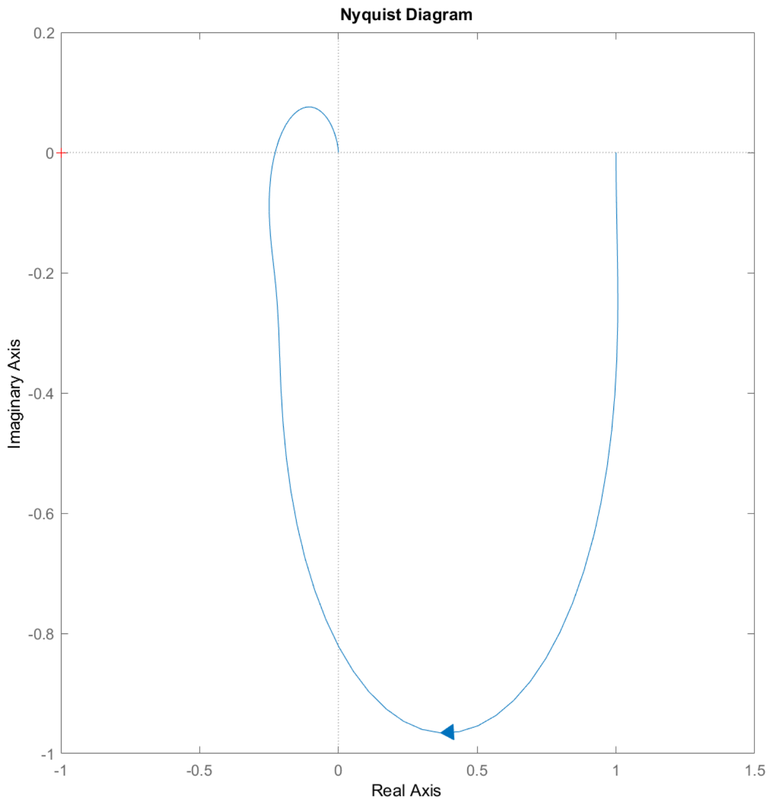
ЛАФЧХ замкнутой системы:



АФЧХ (годограф) разомкнутой системы:



АФЧХ (годограф) замкнутой системы:



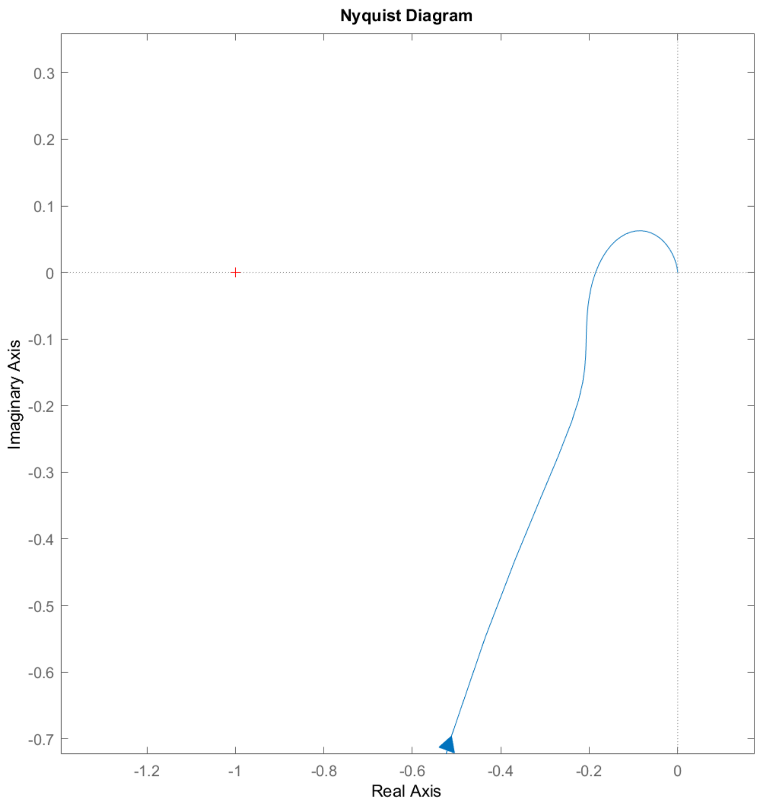
Задание 4. Исследовать устойчивость системы с использованием ЛАФЧХ и частотного критерия. Определить предельный коэффициент усиления системы, при котором система находится на грани устойчивости.

По критерию Найквиста: для устойчивости замкнутой ЛДС необходимо и достаточно, чтобы её годограф в разомкнутом состоянии охватывал критическую точку $(-1; 0j)$ против часовой стрелки $K/2$ раз при возрастании частоты $0 \leqslant \omega < +\infty$, где K – число полюсов передаточной функции разомкнутой системы в правой полуплоскости.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(s) = \frac{10}{3}\left(1 + 0.18s\right)\frac{1}{s}\,\frac{1}{0.5s + 1}\,\frac{1}{\frac{2}{300}s^2 + \frac{5}{90}s + 1}$$

Полюсы $W(s)$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_{3,4} \approx -4.1667 \pm 11.5169j$. Ни один из полюсов не расположен в правой полуплоскости, так что $K = 0$.



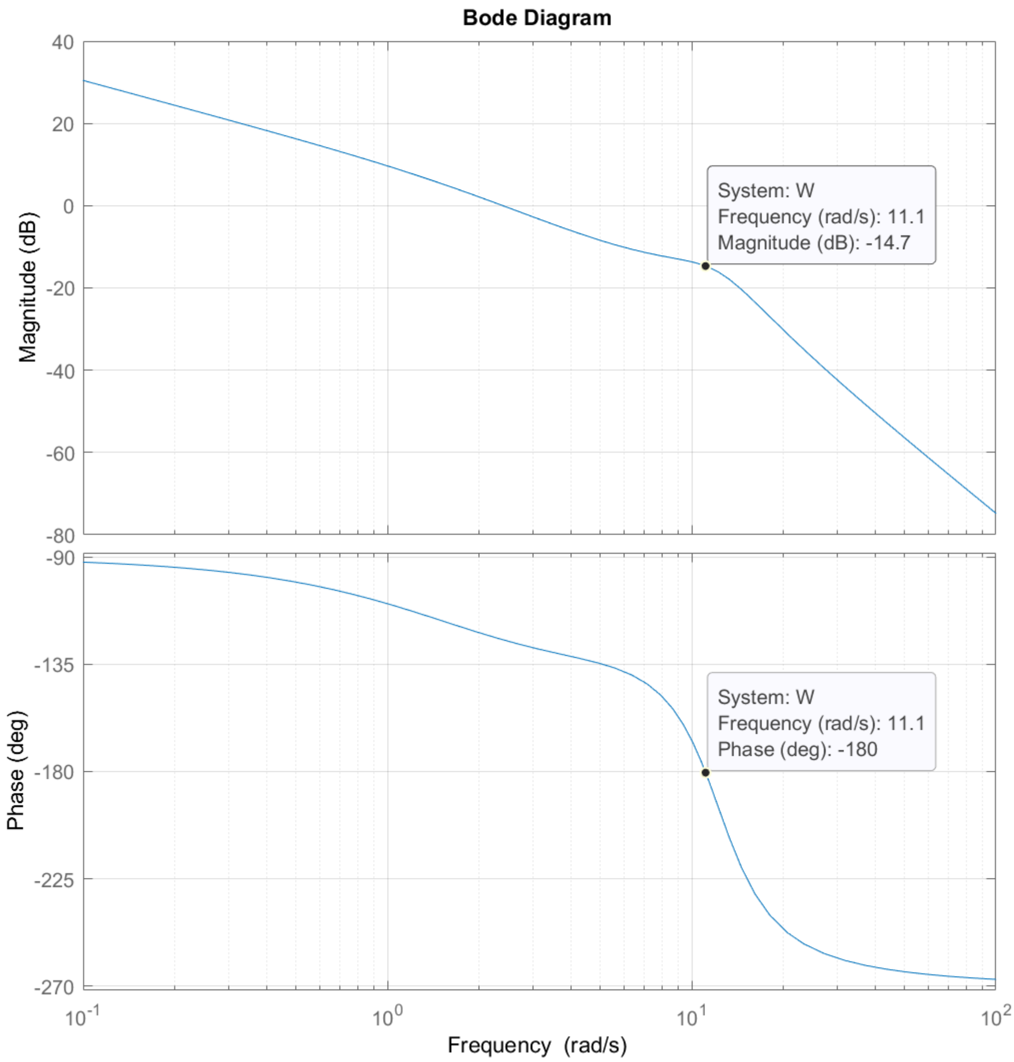
Из построенного рисунка видно, что годограф не охватывает точку $(-1, 0j)$ (т. е. охватывает её 0 раз). Поэтому выполняется равенство:

$0 = \dfrac{0}{2}$ – то есть система устойчива.

Сделаем коэффициент усиления звеньев $k = \dfrac{10}{3}$ варьируемой переменной:

$W(s) = k\ (1 + 0.18s)\ \dfrac{1}{s}\ \dfrac{1}{0.5s+1}\ \dfrac{1}{\frac{2}{300}s^2 + \frac{5}{90}s + 1}$

Тогда ЛАЧХ данной передаточной функции будет совершать вертикальный параллельный перенос при изменении значения k.

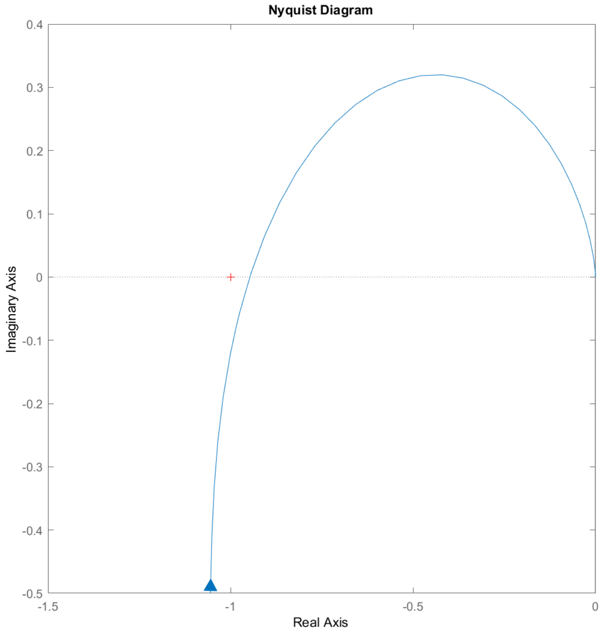


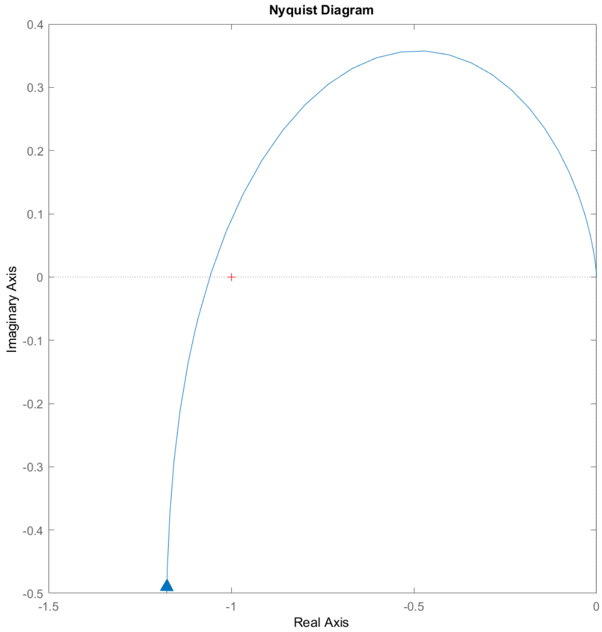
Из рисунка видно, что запас устойчивости по амплитуде $h_m \approx 14.7$ – на такую величину можно параллельно переносить ЛАЧХ вверх, прежде чем её точка пересечения с нулём окажется правее, чем точка пересечения ФЧХ со значением -180, в случае чего система уже окажется неустойчивой.

Тогда:

$20 \lg k_{\text{кр}} = 20 \lg \dfrac{10}{3} + h_m$

$k_{\text{кр}} = \dfrac{10}{3} \cdot 10^{h_m/20} \approx 18$ – при таком k система находится на грани устойчивости.



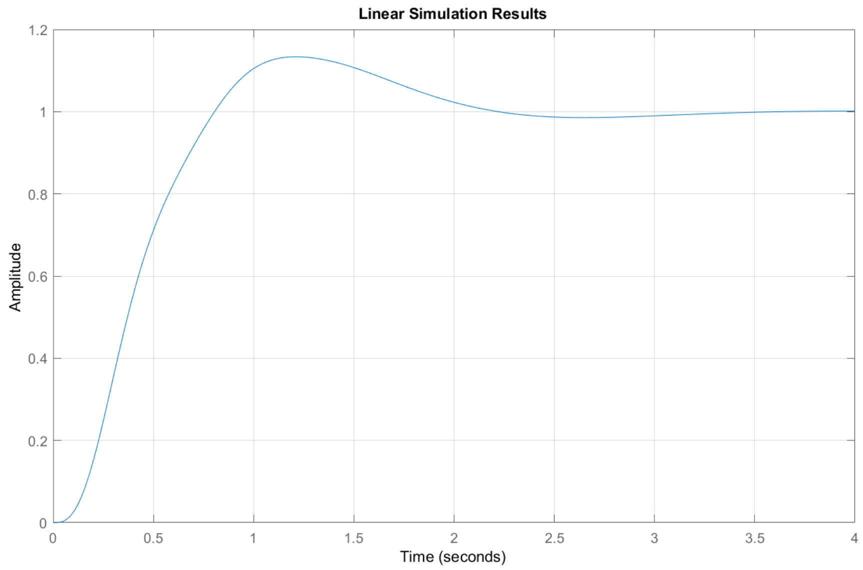


Выше приведены АФЧХ для случаев $k = 17$ и $k = 19$ соответственно. Видно, что в первом случае годограф не охватывает точку $(-1, 0j)$ (т. е. охватывает её 0 раз), поэтому выполняется равенство $0 = \frac{0}{2}$, и система оказывается устойчивой. А во втором случае годограф охватывает точку $(-1, 0j)$ 1 раз по часовой стрелке (т. е. охватывает -1 раз против часовой стрелки), поэтому выражение $-1 = \frac{0}{2}$ не является равенством, и система оказывается неустойчивой.

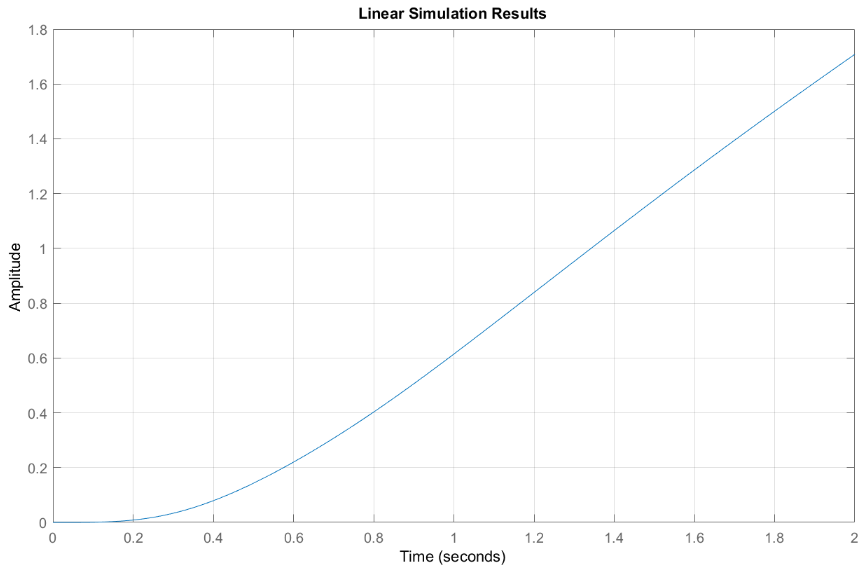
Задание 5. Построить на компьютере переходные процессы в замкнутой системе при действии единичного ступенчатого, линейного нарастающего и гармонического воздействий. Определить астатизм, коэффициенты добротности системы и предельные значения установившихся ошибок при $g(t) = 1[t]$, $g(t) = at$. Определить коэффициенты ошибок C_0, C_1, C_2.

Для построения переходных процессов при заданных воздействиях использовалась команда `lsim(sys,g,t)` в среде MATLAB.

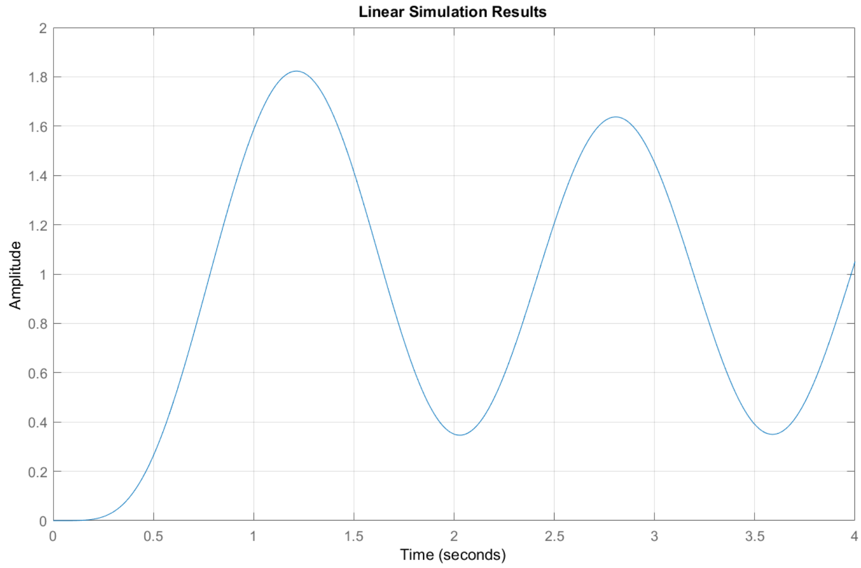
Переходный процесс при действии единичного ступенчатого воздействия:



Переходный процесс при действии линейного нарастающего воздействия:



Переходный процесс при действии гармонического воздействия:



Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(s) = \frac{10}{3}\,(1 + 0.18s)\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{0.5s+1}\,\frac{1}{\frac{2}{300}s^2 + \frac{5}{90}s + 1}$$

В системе имеется одно интегрирующее звено, значит, система имеет **астатизм первого порядка**.

$\nu = 1$

Коэффициент добротности по скорости $k_v = k = \dfrac{10}{3}$.

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки $\varepsilon(t)$:

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{10}{3}\,(0.18s+1)\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{0.5s+1}\,\frac{1}{\frac{2}{300}s^2+\frac{5}{90}s+1}} =$$

$$= \frac{s(0.5s+1)\left(\frac{2}{300}s^2 + \frac{5}{90}s + 1\right)}{s(0.5s+1)\left(\frac{2}{300}s^2 + \frac{5}{90}s + 1\right) + \frac{10}{3}(0.18s+1)} =$$

$$= \frac{3}{10}s(1+0.5s)\left(1 + \frac{5}{90}s + \frac{2}{300}s^2\right)\frac{1}{0.001s^4 + \frac{31}{300}s^3 + \frac{1}{6}s^2 + 0.48s + 1}$$

Коэффициенты ошибок:

$$C_0 = \Phi_\varepsilon(0) = 0$$

$$C_1 = \left.\frac{d\Phi_\varepsilon}{ds}\right|_{s=0} = 0.3$$

$$C_2 = \left.\frac{d^2\Phi_\varepsilon}{ds^2}\right|_{s=0} = \frac{17}{375} \approx 0.04533$$

Предельные значения установившихся ошибок:

$$\varepsilon(t) = C_0 g(t) + \frac{C_1}{1!}\frac{dg(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!}\frac{d^2g(t)}{dt^2} + \dots$$

$g(t) = 1[t]$: $\quad \varepsilon(t) = C_0 = 0$

$g(t) = at$: $\quad \varepsilon(t) = C_0 at + C_1 a = 0.3a$

Задание 6. Синтезировать последовательное корректирующее устройство по заданным показателям качества. Построить на компьютере переходный процесс в скорректированной системе при действии единичного ступенчатого воздействия.

Показатели качества: $t_{\text{р}} = 0.03$ с $\sigma_{\max} = 10\%$

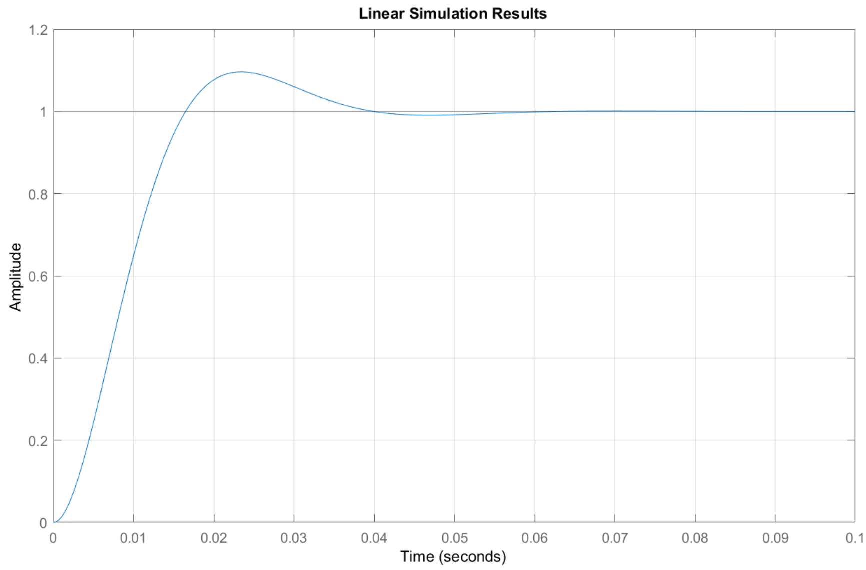
Желаемая передаточная функция подбиралась в виде:

$$W_{\text{ж}}(s) = k\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{Ts+1}$$

В результате подбора получилось добиться передаточной функции, которая полностью удовлетворяет показателям качества:

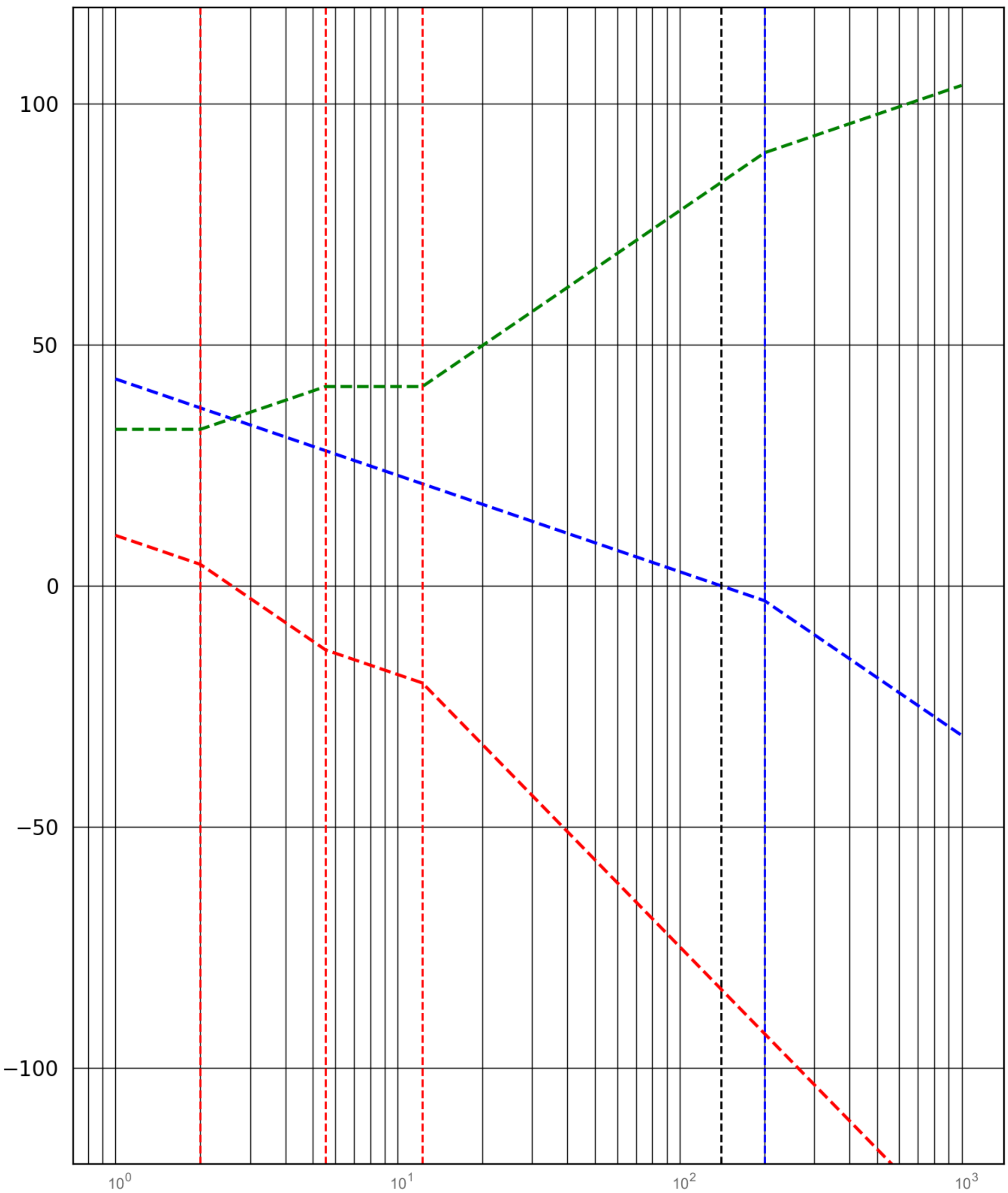
$$W_{\text{ж}}(s) = 140\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{0.005s+1}$$

Переходный процесс при действии единичного ступенчатого воздействия:



В данном случае время регулирования $t_{\text{р}} = 0.03$ с, перерегулирование $\sigma_{\max} = 10\%$, частота среза $\omega_{\text{с}} = 140$.

Для определения корректирующего устройства $W_{\text{к}}(s)$ можно построить ЛАЧХ, содержащую $L_{\text{н}}(\omega)$ для неизменяемой системы (красный цвет), $L_{\text{ж}}(\omega)$ для желаемой системы (синий цвет) и $L_{\text{к}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{н}}(\omega)$ для корректирующего устройства (зелёный цвет).



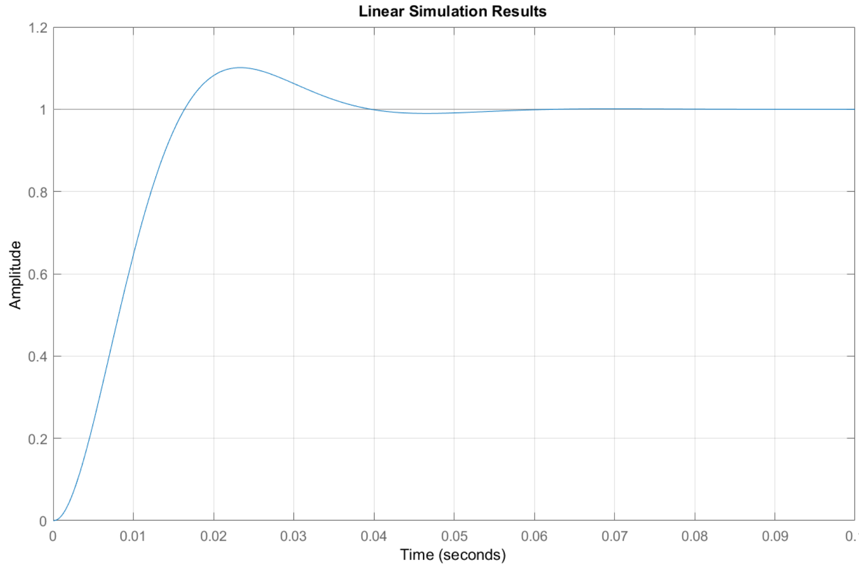
Получаем:

$$W_к(s) = 42\,(1 + 0.5s)\left(1 + \frac{5}{90}s + \frac{2}{300}s^2\right)\frac{1}{0.005s + 1}\,\frac{1}{0.18s + 1}$$

Поскольку здесь степень числителя превосходит степень знаменателя на единицу, нужно добавить апериодическое звено $\dfrac{1}{0.0001s + 1}$, которое не вносит значимых изменений в систему при частотах ниже 10^4. Итак:

$$W_к(s) = 42\,(1 + 0.5s)\left(1 + \frac{5}{90}s + \frac{2}{300}s^2\right)\frac{1}{0.005s + 1}\,\frac{1}{0.18s + 1}\,\frac{1}{0.0001s + 1}$$

Переходный процесс при действии единичного ступенчатого воздействия для скорректированной системы:



В данном случае время регулирования $t_{\text{р}} = 0.03$ с, перерегулирование $\sigma_{\max} = 10\%$.