Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
(МАИ)

Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика»

КУРСОВАЯ РАБОТА

ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

2-й семестр

Выполнил: студент группы М8О-101Б-22
Терентьев Михаил Андреевич

Проверил: Смерчинская С.О.

Москва 2024

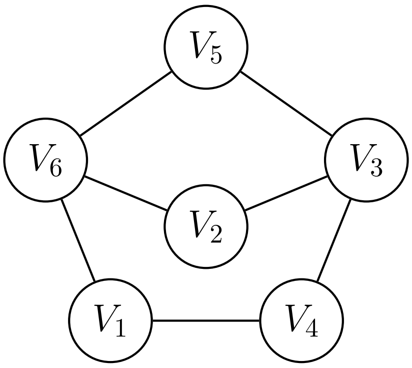
Вариант 22

1. Определить для орграфа, заданного матрицей смежности:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а) матрицу односторонней связности (2 способа, включая итерационный алгоритм);
б) матрицу сильной связности;
в) компоненты сильной связности;
г) матрицу контуров;
д) изображение графа и компонент сильной связности.

2. Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.



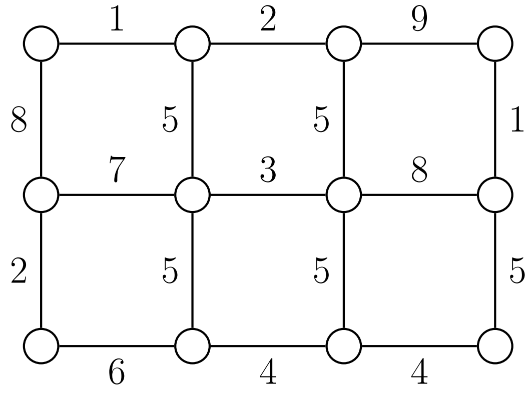
3. Используя алгоритм "фронта волны", найти все минимальные пути из первой вершины в последнюю орграфа, заданного матрицей смежности.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Используя алгоритм Форда, найти минимальные пути из первой вершины во все достижимые вершины в нагруженном графе, заданном матрицей длин дуг.

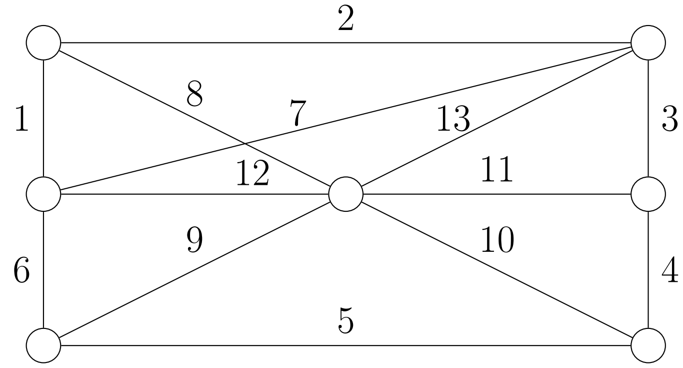
$$C = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 7 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 2 & \infty & \infty & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Найти остовное дерево с минимальной суммой длин входящих в него ребер.

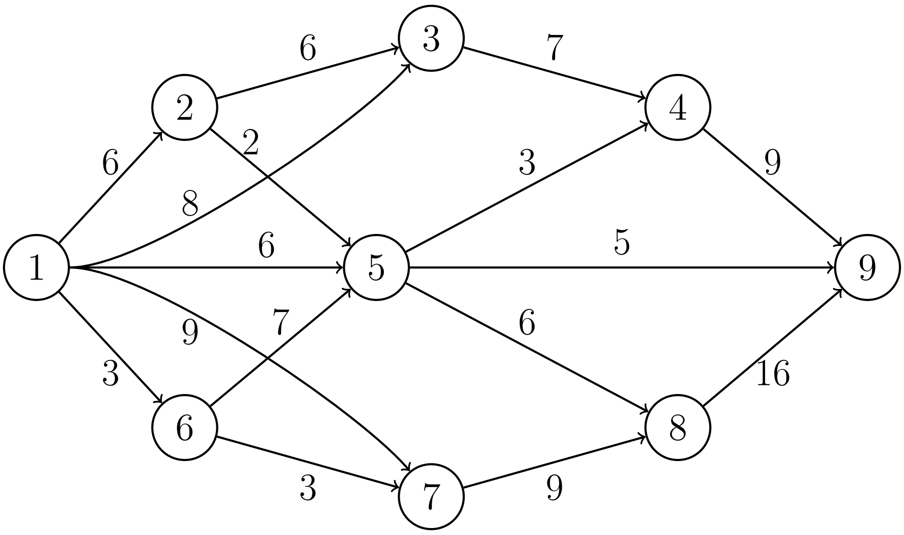


Значения X1 - X13 приведены в задании, значения X14 - X17 равны 5.

6. Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС $E1$ и $E2$, а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.



7. Построить максимальный поток по транспортной сети.



Задание №1

а)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A * A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 * A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

По итерационному алгоритму Уоршалла.

$$k = 0$$

$$T^0 = E \vee A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 1, k - 1 = 0$$

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 2, k - 1 = 1$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 3, k - 1 = 2$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 4, k - 1 = 3$$

$$T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T$$

б) $\overline{S} = T \& T^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица сильной связности

в) Компоненты сильной связности
Выбираем первую строку, как ненулевую в матрице сильной связности

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Номера вершин первой компоненты сильной связности соответствуют номерам столбцов матрицы S, в которых в первой строке стоят единицы:

$\{V_1,\ V_4\}$

1. Обнуляем первый и четвертый столбец матрицы S. Получаем матрицу

$$\overline{S_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

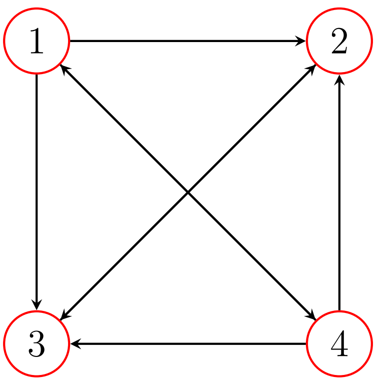
2. Ищем ненулевую строку матрицы S1: это вторая строка. Единицы две – во втором и третьем столбце. Следовательно, вторая компонента сильной связности: $\{V_2,\ V_3\}$.

3. Обнуляем третий столбец матрицы S1, получаем нулевую матрицу. Следовательно, других компонент сильной связности нет.

г) $K = \overline{S} \& A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

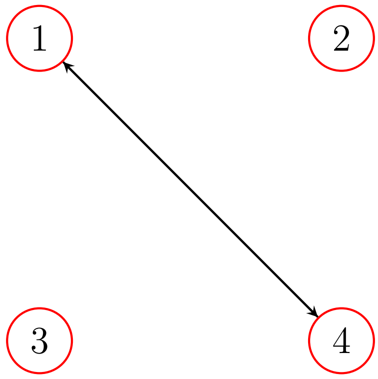
Дуги $<V_1,\ V_4>$ $<V_2,\ V_3>$, $<V_3,\ V_2>$, $<V_4,\ V_1>$ принадлежат какому-либо контуру исходного графа.

д) Граф

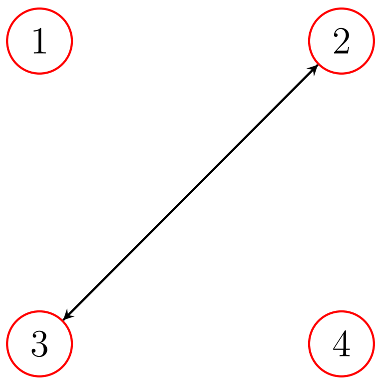


Компоненты сильной связности: $V_1 = \{v_1, v_4\}; V_2 = \{v_2, v_3\}$

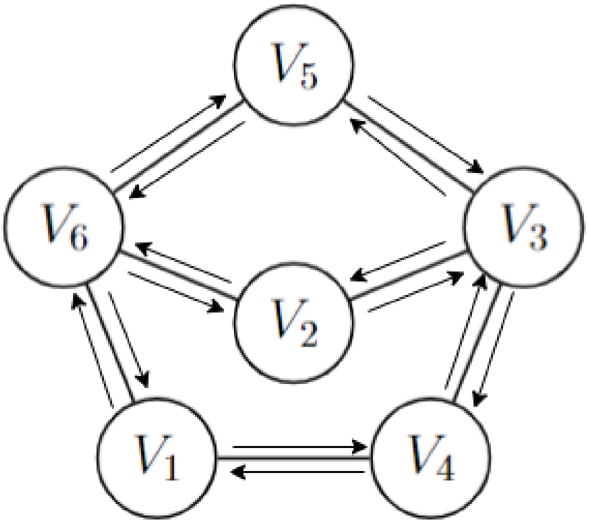
D1:



D2:



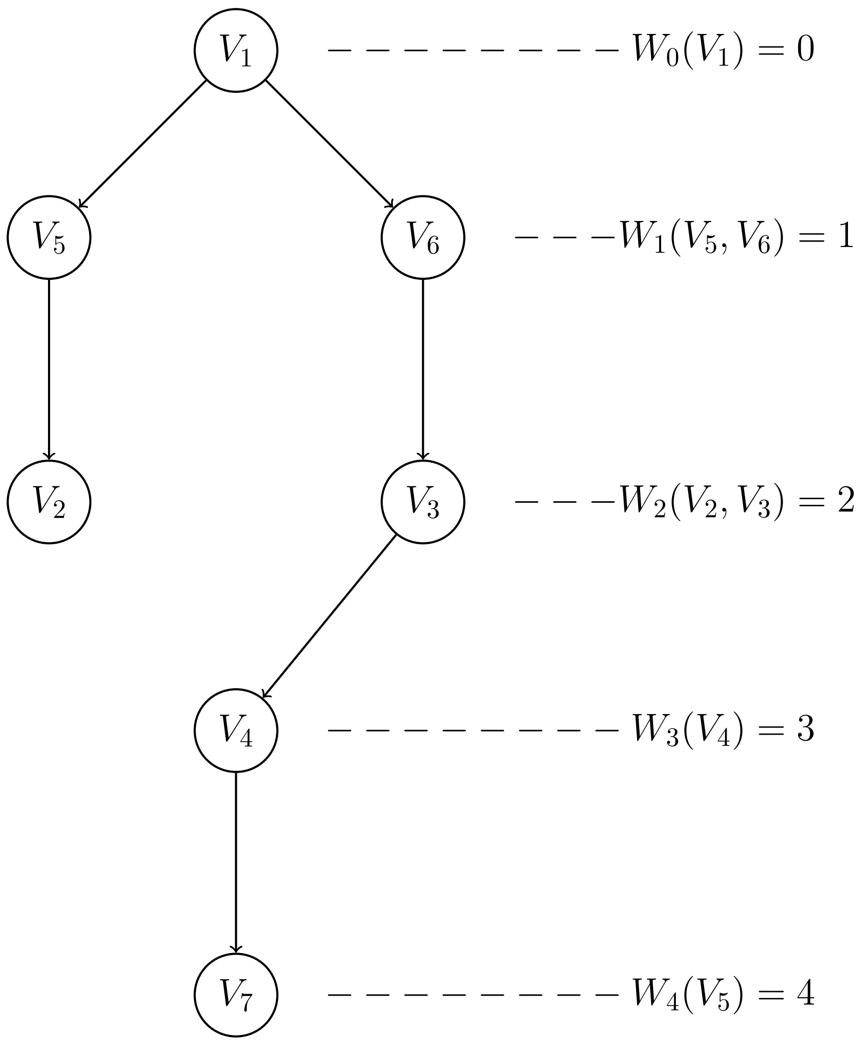
Задание №2



Маршрут: $1 \to 6 \to 5 \to 3 \to 4 \to 3 \to 2 \to 6 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6 \to 1 \to 4 \to 1$

Задание №3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



k	FW_k	Комментарий
0	$FW_0 = \{V_1\}$	В начальный момент времени волна сосредоточена в V_1
1	$FW_1 = \{V_5, V_6\}$	Видно из первой строки матрицы смежности
2	$FW_2 = \{V_5, V_6\}$	V_5, V_6 - источники распространения волны
3	$FW_3 = \{V_4\}$	Из вершины V_3 есть дуга в V_4
4	$FW_4 = \{V_7\}$	Достигнуто условие окончания прямого хода. Минимальная длина 4

	промежуточные вершины кратчайших путей
1	V_7
2	$W_3(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_7 = \{V_4\} \cap \{V_4\} = \{V_4\}$
3	$W_2(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_4 = \{V_2, V_3\} \cap \{V_3\} = \{V_3\}$
4	$W_1(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_3 = \{V_5, V_6\} \cap \{V_6\} = \{V_6\}$
5	$W_0(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_6 = \{V_1\} \cap \{V_1\} = \{V_1\}$

=> Кратчайший путь: $V_1 \rightarrow V_6 \rightarrow V_3 \rightarrow V_4 \rightarrow V_7$

Задание №4

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 7 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 2 & \infty & \infty & 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Составим таблицу итераций:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)}$	$\lambda_i^{(2)}$	$\lambda_i^{(3)}$	$\lambda_i^{(4)}$	$\lambda_i^{(5)}$	$\lambda_i^{(6)}$
V_1	∞	2	7	8	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0	0
V_2	12	∞	4	∞	6	∞	∞	∞	2	2	2	2	2	2
V_3	∞	4	∞	1	3	5	7	∞	7	6	6	6	6	6
V_4	∞	∞	1	∞	∞	3	∞	∞	8	8	7	7	7	7
V_5	∞	∞	3	∞	∞	∞	5	∞	∞	8	8	8	8	8
V_6	∞	∞	5	∞	∞	∞	2	∞	∞	11	11	10	10	10
V_7	2	∞	∞	3	4	6	7	∞	∞	14	13	13	12	12

(1) Минимальный путь из $v_1 \to v_2$: $v_1 \to v_2$, его длина 2

$\lambda_2^{(1)} = \lambda_1^{(0)} + C_{12} \quad (0 + 2 = 2)$

(2) Минимальный путь из $v_1 \to v_3$: $v_1 \to v_2 \to v_3$, его длина 6

$\lambda_3^{(2)} = \lambda_1^{(0)} + C_{23} \quad (2 + 4 = 6)$

$\lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(1)} + C_{12} \quad (0 + 2 = 2)$

(3) Минимальный путь из $v_1 \to v_4$: $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4$, его длина 7

$\lambda_4^{(3)} = \lambda_3^{(2)} + C_{34} \quad (6 + 1 = 7)$

$\lambda_3^{(2)} = \lambda_2^{(1)} + C_{23} \quad (2 + 4 = 6)$

$\lambda_2^{(1)} = \lambda_1^{(0)} + C_{12} \quad (0 + 2 = 2)$

④ Минимальный путь из $v_1 \to v_5$: $v_1 \to v_2 \to v_5$, его длина 8

$\lambda_5^{(2)} = \lambda_2^{(1)} + C_{25} \quad (2+6=8)$

$\lambda_2^{(1)} = \lambda_1^{(0)} + C_{12} \quad (0+2=2)$

⑤ Минимальный путь из $v_1 \to v_6$: $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_6$, его длина 10

$\lambda_6^{(4)} = \lambda_4^{(3)} + C_{46} \quad (7+3=10)$

$\lambda_4^{(3)} = \lambda_3^{(2)} + C_{34} \quad (6+1=7)$

$\lambda_3^{(2)} = \lambda_2^{(1)} + C_{23} \quad (2+4=6)$

$\lambda_2^{(1)} = \lambda_1^{(0)} + C_{12} \quad (0+2=2)$

⑥ Минимальный путь из $v_1 \to v_7$: $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_6 \to v_7$, его длина 12

$\lambda_7^{(5)} = \lambda_6^{(4)} + C_{67} \quad (10+2=12)$

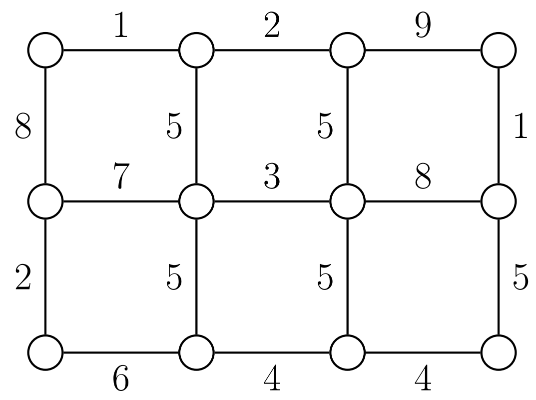
$\lambda_6^{(4)} = \lambda_4^{(3)} + C_{46} \quad (7+3=10)$

$\lambda_4^{(3)} = \lambda_3^{(2)} + C_{34} \quad (6+1=7)$

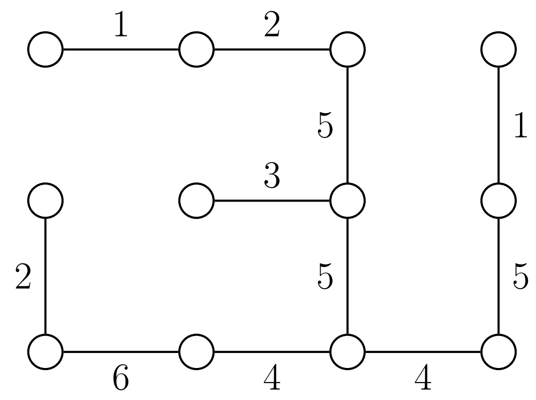
$\lambda_3^{(2)} = \lambda_2^{(1)} + C_{23} \quad (2+4=6)$

$\lambda_2^{(1)} = \lambda_1^{(0)} + C_{12} \quad (0+2=2)$

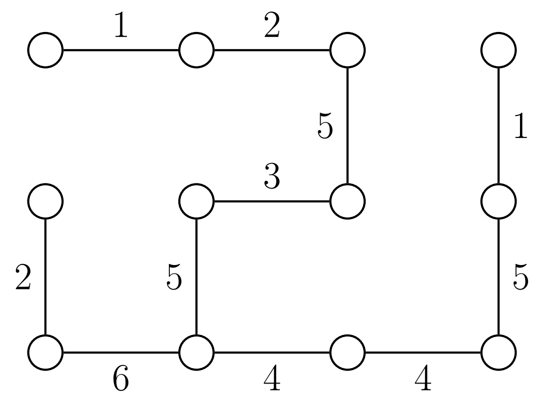
Задание №5

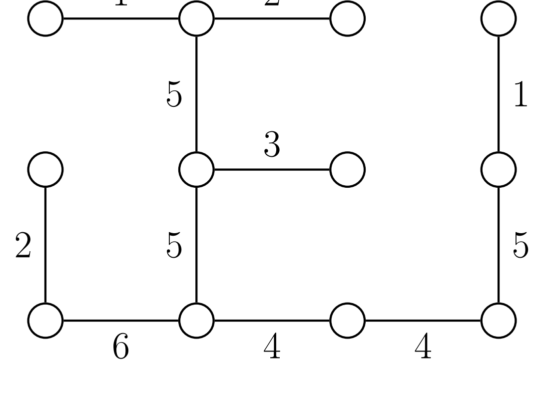


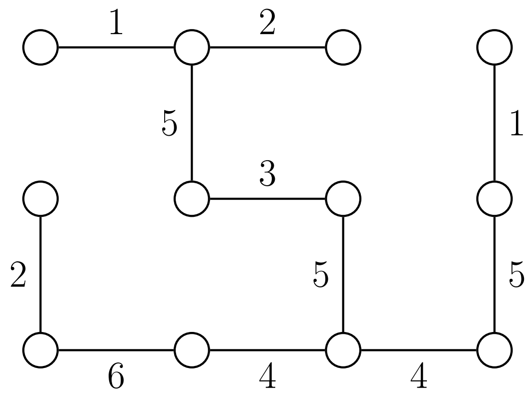
Возможное остовное дерево с минимальной суммой длин ребер 38:



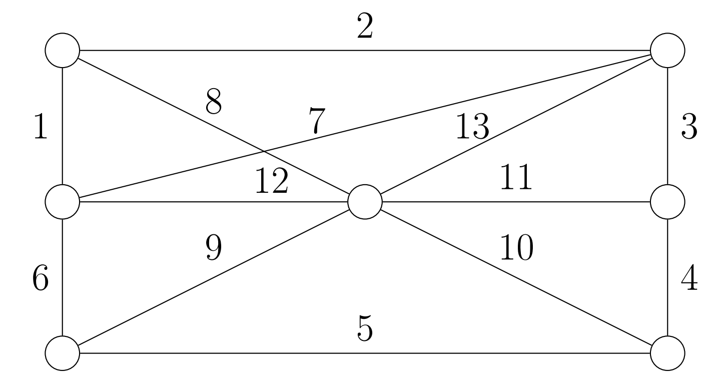
Минимальный вес остовного дерева $L(D) = 38$ Ещё есть три варианта остовного дерева с минимальной суммой длин рёбер - 38 :



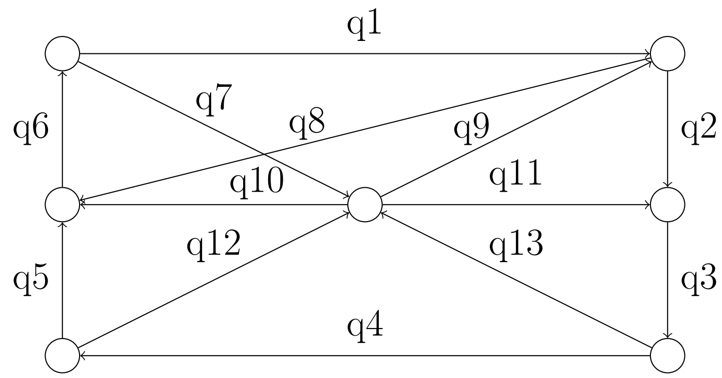



1
2
5
1
3
2
5
5
6
4
4

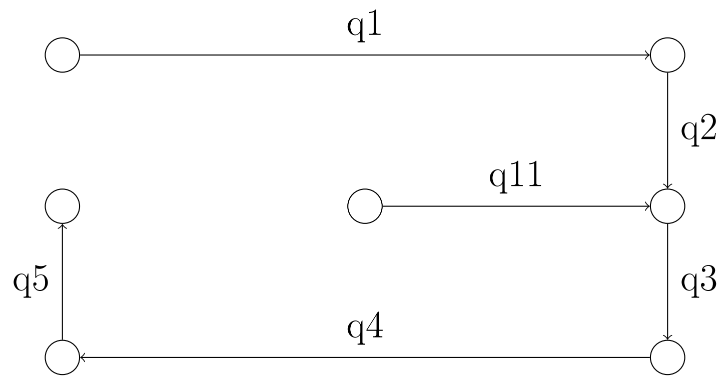
Задание №6



1. Зададим на графе произвольную ориентацию:



2. Построим произвольное остовное дерево D заданного графа:



$(D + q6) : \mu_1 : V_1 - V_2 - V_3 - V_7 - V_6 - V_5 - V_1$
$C(\mu_1) : (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$(D + q7) : \mu_2 : V_1 - V_2 - V_3 - V_4 - V_1$
$C(\mu_2) : (1, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0)$
$(D + q8) : \mu_3 : V_2 - V_3 - V_7 - V_6 - V_5 - V_2$
$C(\mu_3) : (0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$

$(D+q9):\mu_4:V_2-V_3-V_4-V_2$
$C(\mu_4):(0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,-1,0,0)$
$(D+q10):\mu_5:V_4-V_3-V_7-V_6-V_5-V_4$
$C(\mu_5):(0,0,1,1,1,0,0,0,0,-1,1,0,0)$
$(D+q12):\mu_6:V_4-V_3-V_7-V_6-V_4$
$C(\mu_6):(0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0)$
$(D+q13):\mu_7:V_4-V_3-V_7-V_4$
$C(\mu_7):(0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1)$

3. Составим цикломатическую матрицу:

	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	q10	q11	q12	q13
μ_1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
μ_2	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0
μ_3	0	1	1	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0
μ_4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0
μ_5	0	0	1	1	1	0	0	0	0	-1	1	0	0
μ_6	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
μ_7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

4. Запишем закон Кирхгова для напряжений:

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_4+u_5+u_6=0 \\ u_1+u_2-u_7-u_11=0 \\ u_2+u_3+u_4+u_5-u_8=0 \\ u_2+u_9-u_11=0 \\ u3+u_4+u_5-u_10+u_11=0 \\ u_3+u_4+u_11+u_12=0 \\ u_3+u_11+u_13=0 \end{cases}$$

$u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_9-$ базисные переменные

5. Найдём матрицу инцидентности:

	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	q10	q11	q12	q13
u_1	-1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
u_2	1	-1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
u_3	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
u_4	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-1	-1	1	1
u_5	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	1	0	0	0
u_6	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0
u_7	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

$$\begin{cases} -I_1 + I_6 - I_7 = 0 \\ I_1 - I_2 + I_8 + I_9 = 0 \\ I_2 - I_3 + I_{11} = 0 \\ I_7 - I_9 - I_{10} - I_{11} + I_{12} + I_{13} = 0 \\ I_5 - I_6 + I_8 + I_{10} = 0 \\ I_4 - I_5 - I_{12} = 0 \\ I_3 - I_4 - I_{13} = 0 \end{cases}$$

6. Подставим закон Ома:

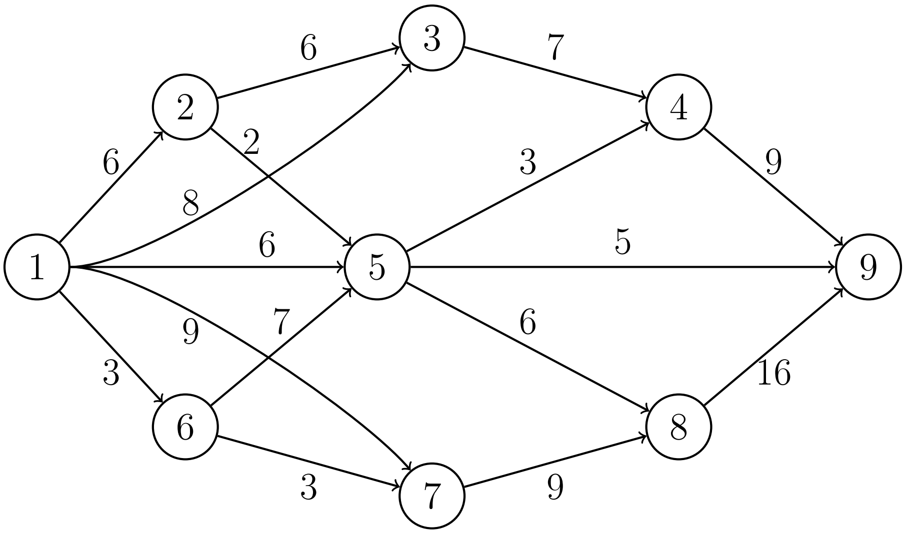
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = I_7 R_7 + I_9 R_9 \\ 0 = -I_2 R_2 - I_9 R_9 + I_{11} R_{11} \\ 0 = -I_3 R_3 - I_{11} R_{11} - I_{13} R_{13} \\ 0 = -I_4 R_4 - I_{12} R_{12} + I_{13} R_{13} \\ \varepsilon_2 = I_{10} R_{10} + I_{12} R_{12} \\ 0 = -I_6 R_6 - I_7 R_7 - I_{10} R_{10} \\ 0 = -I_8 R_8 - I_9 R_9 + I_{10} R_{10} \end{cases}$$

7. Совместная система имеет вид:

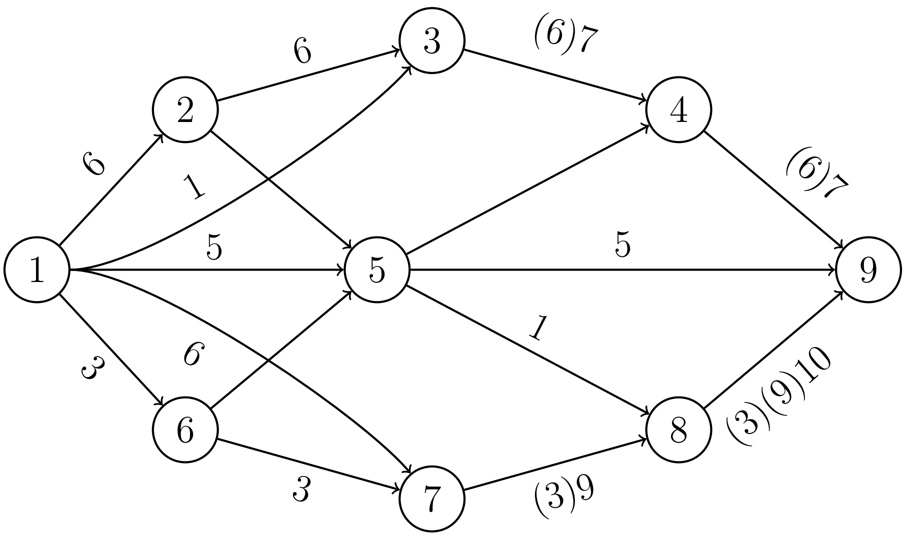
$$
\begin{cases}
-I_1 + I_6 - I_7 = 0 \\
I_1 - I_2 + I_8 + I_9 = 0 \\
I_2 - I_3 + I_{11} = 0 \\
I_5 - I_6 + I_8 + I_{10} = 0 \\
I_4 - I_5 - I_{12} = 0 \\
I_3 - I_4 - I_{13} = 0 \\
\varepsilon_1 = I_7 R_7 + I_9 R_9 \\
0 = -I_2 R_2 - I_9 R_9 + I_{11} R_{11} \\
0 = -I_3 R_3 - I_{11} R_{11} - I_{13} R_{13} \\
0 = -I_4 R_4 - I_{12} R_{12} + I_{13} R_{13} \\
\varepsilon_2 = I_{10} R_{10} + I_{12} R_{12} \\
0 = -I_6 R_6 - I_7 R_7 - I_{10} R_{10} \\
0 = -I_8 R_8 - I_9 R_9 + I_{10} R_{10}
\end{cases}
$$

13 уравнений и 13 неизвестных - $\mathrm{I}_1, I_2,$ ..,I_{13};
ЭДС ε_1, ε_2 и сопротивления $\mathrm{R}_1, R_3, R_4, R_6, R_7,$ ..,R_{13} известны.

Задание №7



Построение полного потока:



1. $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_9$
   - $\min\{6-0, 6-0, 7-0, 9-0\} = 6$
2. $v_1 - v_3 - v_4 - v_9$
   - $\min\{8-0, 7-6, 9-6\} = 1$
3. $v_1 - v_5 - v_9$
   - $\min\{6-0, 5-0\} = 5$
4. $v_1 - v_7 - v_8 - v_9$

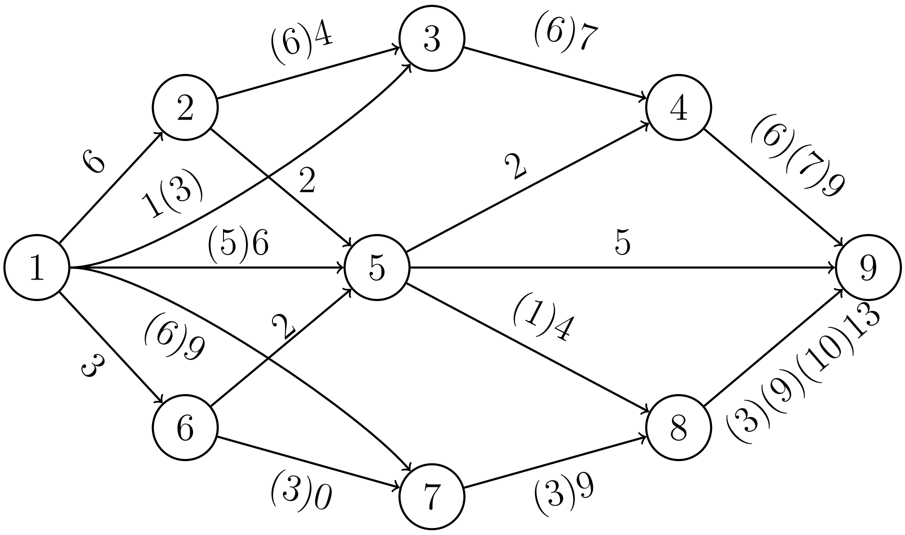
- $\min\{10-0, 9-3, 16-3\} = 6$

5. $v_1 - v_6 - v_7 - v_8 - v_9$
   - $\min\{3-0, 3-0, 9-0, 16-0\} = 3$

6. $v_1 - v_5 - v_8 - v_9$
   - $\min\{6-5, 6-0, 16-9\} = 1$

Величина полного потока $\Phi_{\text{пол.}} = 7 + 5 + 10 = 22$

Построение максимального потока



1. $v_1 - v_3 - v_2 - v_5 - v_4 - v_9$
   - $\Delta_1 = \min\{8-1, 2-0, 4, 3-0, 9-7\} = 2$

2. $v_1 - v_7 - v_6 - v_5 - v_8 - v_9$
   - $\Delta_2 = \min\{10-6, 7-0, 3, 6-1, 16-10\} = 3$

Величина максимального потока $\Phi_{\text{макс.}} = 9 + 5 + 13 = 27$

Следовательно, величина потока увеличилась на 5

Задание №8

Раскраска вершин гиперграфа

Код:

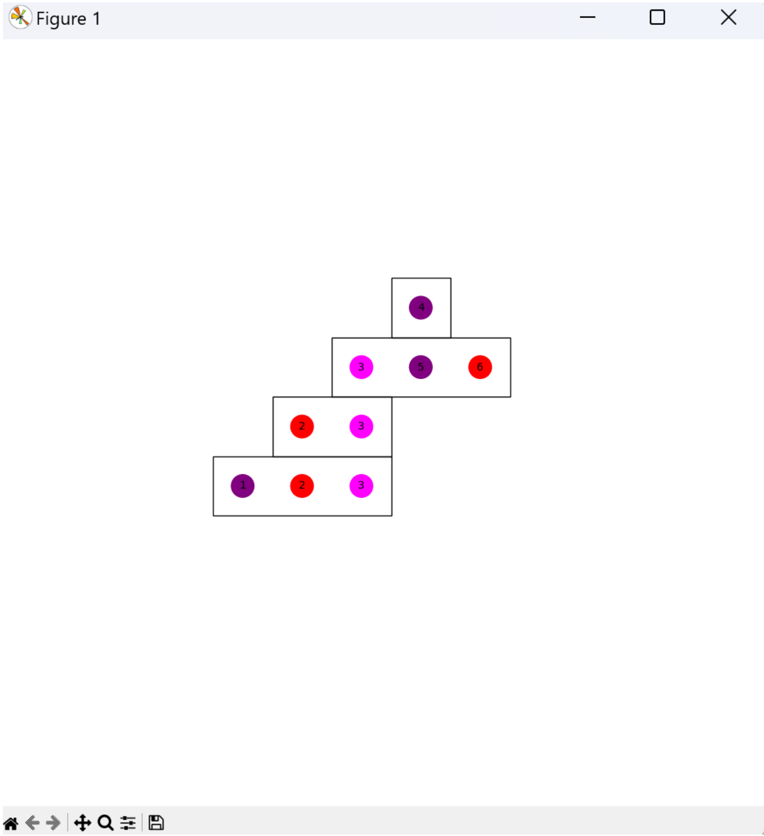
```
import tkinter as tk
from tkinter import simpledialog
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as patches

def draw_hypergraph(n, m, incidence_matrix):
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 10))

    ax.set_xlim(-1, n + 2)
    ax.set_ylim(-1, m + 2)

    colors = ['red', 'green', 'blue', 'yellow', 'purple', 'cyan', 'magenta', 'lime', 'pink', 'brown']

    vertex_colors = {}

    def available_colors(vertex):
        adjacent_colors = set()
        for i in range(m):
            if incidence_matrix[vertex][i] == 1:
                for v in range(n):
                    if incidence_matrix[v][i] == 1 and v in vertex_colors:
                        adjacent_colors.add(vertex_colors[v])
        return set(colors) - adjacent_colors

    for vertex in range(n):
        available = available_colors(vertex)
        vertex_colors[vertex] = next(iter(available)) if available else colors[len(vertex_colors) % len(colors)]

    #

    for j in range(m):
        #                            ,
```

```python
        vertices = [i for i in range(n) if incidence_matrix[i][j]
            == 1]
        #


        width = len(vertices)
        height = 1
        #

        left_x = vertices[0] + 1
        left_y = j + 1
        #

        rect = patches.Rectangle((left_x, left_y), width, height,
            linewidth=1, edgecolor='black', facecolor='none')
        ax.add_patch(rect)

        #

        for i, vertex in enumerate(vertices):
            circle = plt.Circle((left_x + i + 0.5, left_y + 0.5),
                0.2, fc=vertex_colors[vertex])
            ax.add_artist(circle)
            ax.text(left_x + i + 0.5, left_y + 0.5, f'{vertex +
              1}', ha='center', va='center')

    ax.set_aspect('equal')
    ax.set_axis_off()
    plt.show()

def create_matrix_input_window(n, m):
    root = tk.Tk()
    root.title("Input Matrix")

    entries = [[tk.Entry(root, width=5) for j in range(m)] for i
        in range(n)]

    for i in range(n):
        label = tk.Label(root, text=f"U{i+1}")
        label.grid(row=i+1, column=0)
        for j in range(m):
```

```
            entries[i][j].grid(row=i+1, column=j+1)
    for j in range(m):
        label = tk.Label(root, text=f"E{j+1}")
        label.grid(row=0, column=j+1)

    def get_matrix():
        matrix = [[int(entries[i][j].get()) for j in range(m)]
          for i in range(n)]
        root.destroy()
        return matrix

    submit_button = tk.Button(root, text="Submit", command=lambda
       : root.quit())
    submit_button.grid(row=n+1, column=0, columnspan=m+1)

    root.mainloop()

    incidence_matrix = get_matrix()
    return incidence_matrix

def main():
    n = int(simpledialog.askstring("Input", "
                                            (n):"))
    m = int(simpledialog.askstring("Input", "
                                          (m):"))

    incidence_matrix = create_matrix_input_window(n, m)

    print("                                          :")
    for row in incidence_matrix:
        print(row)

    draw_hypergraph(n, m, incidence_matrix)

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Результат работы программы для матрицы инцидентности

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



В программе используется "жадный"алгоритм раскраски вершин.
Сложность O(n^2), где n - количество вершин.