Вариант 24

1. Сформулировать теорему о дополнении системы векторов до базиса. Найти ортогональный базис ортогонального дополнения подпространства $Lin(a_1, a_2, a_3) \triangleleft \mathbb{R}^4$, где $a_1 = (1 \quad 0 \quad 2 \quad 1)^T$, $a_2 = (2 \quad 1 \quad 2 \quad 3)^T$, $a_3 = (0 \quad 1 \quad -2 \quad 1)^T$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ стандартное.

2. Сформулировать определение образа линейного преобразования. Преобразование $\mathcal{B}$ пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка задано формулой $\mathcal{B}(A) = AB$, где матрица $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   а) Составить матрицу этого преобразования в базисе
   $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

   в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

   г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

   Ответ обосновать.

3. Сформулировать определение аннулирующего многочлена линейного преобразования. Используя теорему Гамильтона – Кэли, найти для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ выражение $A^{25} + 4tA^{24}$, где t – скалярный параметр.

Вариант 4

1. Сформулировать определение ортогонального дополнения подпространства. Найти ортогональный базис ортогонального дополнения подпространства $Lin(a_1, a_2, a_3) \triangleleft \mathbb{R}^4$, где $a_1 = (1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2)^T$, $a_2 = (1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 1)^T$, $a_3 = (1 \;\; 2 \;\; -2 \;\; 3)^T$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ стандартное.
2. Сформулировать определение собственного вектора линейного преобразования. Преобразование $\mathcal{B}$ пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка задано формулой $\mathcal{B}(A) = A\,B$, где матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   а) Составить матрицу этого преобразования в базисе
   $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

   в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

   г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования. Ответ обосновать.
3. Сформулировать теорему Гамильтона – Кэли. Используя теорему Гамильтона – Кэли, найти для матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ выражение $A^{23} + 2tA^{22}$, где t – скалярный параметр.

Вариант 4. Кам

М8О

1 | 2

Вариант 11

1. Сформулировать определение размерности векторного пространства. Найти размерность и базис каждого из подпространств A, B и их пересечения $A \cap B$, если $A = Lin(a_1, a_2)$,

$$B = \{Bx = o\}, \text{ где } a_1 = (1 \quad 1 \quad 0)^T,\ a_2 = (0 \quad 1 \quad 1)^T,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Сформулировать определение инъективного отображения. Преобразование $\mathcal{A}$ трехмерного векторного пространства V_3 задано формулой (при помощи скалярного произведения):

$$\mathcal{A}(\overline{v}) = (\overline{v}, \overline{i}) \cdot \overline{k}.$$

а) Составить матрицу этого преобразования в стандартном базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

Ответ обосновать.

3. Сформулировать теорему о приведении линейного преобразования к каноническому виду. Найти жорданову форму J_A матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, а также матрицу $A^{21} + 2\pi A^{20}$.

Вариант 25

1. Сформулировать определение алгебраической суммы подпространств. Найти размерность и базис каждого из подпространств A, B и их суммы $A+B$, если $A = Lin(a_1, a_2)$, $B = \{Bx = o\}$, где $a_1 = (1 \quad 0 \quad 1)^T$, $a_2 = (1 \quad 1 \quad 0)^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Сформулировать определение сюръективного отображения. Преобразование $\mathcal{A}$ трехмерного векторного пространства V_3 задано формулой (при помощи векторного произведения):

$$\mathcal{A}(\overline{v}) = [\,\overline{i},\ \overline{v}\,].$$

а) Составить матрицу этого преобразования в стандартном базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.
б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.
в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым? Ответ обосновать.
г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

3. Сформулировать теорему о диагонализируемости матрицы линейного преобразования. Найти жорданову форму J_A матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, а также матрицу $A^{21} - \pi A^{20}$.

Вариант 14

1. Сформулировать определение ортонормированного базиса. Найти ортогональный базис линейной оболочки векторов $a_1 = (2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; -1)^T$, $a_2 = (7 \;\; 4 \;\; 3 \;\; -3)^T$, $a_3 = (1 \;\; 1 \;\; -6 \;\; 0)^T$, $a_4 = (-4 \;\; -4 \;\; 0 \;\; 3)^T$ пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением.

2. Сформулировать определение инвариантного подпространства. Преобразование $\mathcal{B}$ пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка задано формулой $\mathcal{B}(A) = B\,A$, где матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   а) Составить матрицу этого преобразования в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

   в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

   г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

   Ответ обосновать.

3. Сформулировать определение характеристического многочлена матрицы. Используя теорему Гамильтона – Кэли, найти для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ выражение $A^{24} - 3tA^{23}$, где t – скалярный параметр.

Вариант 13

1. Сформулировать определение подпространства векторного пространства. Найти размерность и базис каждого из подпространств A, B и их пересечения $A \cap B$, если $A = Lin(a_1, a_2)$, $B = \{Bx = o\}$, где $a_1 = (1 \quad 0 \quad 1)^T$, $a_2 = (1 \quad 1 \quad 0)^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Сформулировать определение биективного отображения. Преобразование $\mathcal{A}$ трехмерного векторного пространства V_3 задано формулой (при помощи векторного произведения):

$$\mathcal{A}(\overline{v}) = [\overline{v}, \overline{k}].$$

а) Составить матрицу этого преобразования в стандартном базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

Ответ обосновать.

3. Сф[illegible] присоединенного вектора 1-го порядка. Найти жорданову форму J_A матрицы $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, а также матрицу $A^{21} - 3\pi A^{20}$.

Вариант 26

1. Сформулировать определение евклидова пространства. Найти ортогональный базис линейной оболочки векторов $a_1 = (-1 \quad 1 \quad 2 \quad 3)^T$, $a_2 = (1 \quad -2 \quad 0 \quad 6)^T$, $a_3 = (-1 \quad 0 \quad 4 \quad 12)^T$, $a_4 = (-3 \quad 4 \quad 4 \quad 0)^T$ пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением.

2. Сформулировать определение ядра линейного отображения. Преобразование $\mathcal{B}$ пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка задано формулой $\mathcal{B}(A) = BA$, где матрица $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Составить матрицу этого преобразования в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

Ответ обосновать.

Сформулировать определение аннулирующего многочлена матрицы. Используя теорему Гамильтона – Кэли, найти для матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ выражение $A^{22} - tA^{21}$, где t – скалярный параметр.

Вариант 9

1. Сформулировать определение алгебраической суммы подпространств. Найти размерность и базис каждого из подпространств A, B и их суммы $A+B$, если $A = Lin(a_1, a_2)$, $B = \{Bx = o\}$, где $a_1 = (1 \;\; 0 \;\; 1)^T$, $a_2 = (1 \;\; 1 \;\; 0)^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Сформулировать определение сюръективного отображения. Преобразование $\mathcal{A}$ трехмерного векторного пространства V_3 задано формулой (при помощи векторного произведения):

$$\mathcal{A}(\overline{v}) = [\,\overline{i}, \overline{v}\,].$$

а) Составить матрицу этого преобразования в стандартном базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

Ответ обосновать.

3. Сформулировать теорему о диагонализируемости матрицы линейного преобразования. Найти жорданову форму J_A матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, а также матрицу $A^{21} - \pi A^{20}$.

Вариант 16

1. Сформулировать теорему о дополнении системы векторов до базиса. Найти ортогональный базис ортогонального дополнения подпространства $Lin(a_1, a_2, a_3) \triangleleft \mathbb{R}^4$, где $a_1 = (1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 1)^T$, $a_2 = (2 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3)^T$, $a_3 = (0 \;\; 1 \;\; -2 \;\; 1)^T$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$ стандартное.

2. Сформулировать определение образа линейного преобразования. Преобразование $\mathcal{B}$ пространства $\mathbb{R}^{2\times2}$ квадратных матриц второго порядка задано формулой $\mathcal{B}(A) = AB$, где матрица $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   а) Составить матрицу этого преобразования в базисе

   $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

   в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

   г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

   Ответ обосновать.

3. Сформулировать определение аннулирующего многочлена линейного преобразования. Используя теорему Гамильтона – Кэли, найти для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ выражение $A^{25} + 4tA^{24}$, где t – скалярный параметр.

… матрицы перехода.

… торах линейного преобразования и его

3	Найти матрицу преобразования $\mathcal{A}^*$, сопряженного преобразованию $\mathcal{A}$, в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, если известно, что преобразование $\mathcal{A}$ отображает векторы $a_1=(0;0;1)$, $a_2=(0;1;1)$, $a_3=(1;1;1)$ в векторы $b_1=(1;2;1)$, $b_2=(3;1;2)$, $b_3=(7;-1;4)$ соответственно. (Координаты всех векторов даны в базисе e_1, e_2, e_3.)

Вариант 11

1. Сформулировать определение подпространства векторного пространства. В пространстве P_2 многочленов степени не выше второй заданы подпространства $A = Lin(x^2+1; x+1)$ и $B = Lin(x^2-1; x^2+x+1)$. Найти пересечение этих подпространств. Ответ обосновать.

2. Сформулировать определение ядра линейного преобразования. Преобразование $\mathcal{A}$ трехмерного векторного пространства $\mathbb{R}^3$ задано формулой

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

а) Составить матрицу этого преобразования в стандартном базисе.

б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

Ответ обосновать.

3. Сформулировать определение самосопряженного преобразования. Привести квадратичную форму $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$ к главным осям: найти канонический вид и ортогональное преобразование переменных.

Вариант 23

1. Сформулировать определение линейной зависимости элементов векторного пространства. В пространстве P_2 многочленов степени не выше второй заданы подпространства $A = Lin(2x^2 + 1; x + 1)$ и $B = Lin(1 - x; 2x^2 + x + 1)$. Найти пересечение этих подпространств. Ответ обосновать.

2. Сформулировать определение линейного преобразования. Преобразование $\mathcal{A}$ трехмерного векторного пространства $\mathbb{R}^3$ задано формулой

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

а) Составить матрицу этого преобразования в стандартном базисе.

б) Найти ядро, образ, дефект, ранг преобразования.

в) Является ли это преобразование инъективным, сюръективным, обратимым?

г) Найти собственные векторы и собственные значения преобразования.

Ответ обосновать.

3. Указать геометрический смысл самосопряженного преобразования. Привести квадратичную форму $\varphi(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3$ к главным осям: найти канонический вид и ортогональное преобразование переменных.

как равенство? Ответ обосновать.

3. Преобразование $\mathcal{A}$ пространства V_2 геометрических векторов плоскости задано формулой $\mathcal{A}(x\bar{i} + y\bar{j}) = (x + y)\bar{i} + 2x\bar{j}$. Доказать линейность этого преобразования, составить его матрицу относительно базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$. Найти ядро, образ, дефект, ранг, собственные векторы и собственные значения.